Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI IDENTITÀ ALGEBRICHE

Unità didattica in una scuola secondaria di secondo grado

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Dott.ssa
Alessia Cattabriga

Presentata da:
Elena Giacomini

Sessione Unica
Anno Accademico 2017/2018

Ai miei futuri alunni
nella speranza di diventare
una buona insegnante...

Introduzione

L'algebra non è che geometria scritta, la geometria non è che algebra figurata.

Marie-Sophie Germain

In questa citazione si racchiude il collegamento che intercorre tra l'algebra e la geometria. A scuola, non sempre questo profondo legame viene evidenziato: questo può portare gli studenti a pensare che la matematica sia composta da parti tra loro disgiunte ed acuire le difficoltà nell'apprendimento di tale disciplina. Un altro problema legato all'apprendimento dell'algebra è che questa disciplina viene spesso vissuta dagli studenti come caratterizzata da un estremo formalismo di cui non si comprende né il significato né l'utilità.
Per ovviare a tali problemi, in [16] si propone un approccio all'algebra che presenti e segua il suo sviluppo storico in modo da evitare, almeno inizialmente, un eccessivo formalismo e migliorarne la comprensione. Infatti come nello sviluppo storico dell'algebra si possono individuare tre fasi: retorica senza alcun simbolismo, sincopata caratterizzata dall'uso di abbreviazioni e simbolica in cui si scoprono lettere per rappresentare quantità e segni per indicare operazioni, così lo studente dovrebbe essere accompagnato verso l'algebra simbolica attraverso un percorso graduale.
Un altro elemento che caratterizza la nascita dell'algebra e in particolare l'opera *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala* di al-Khwarizmi è l'utilizzo di costruzioni geometriche per la dimostrazione di formule algebriche. Riproporre anche a scuola, almeno inizialmente questo aspetto permette di lavorare sulla componente semiotica dell'apprendimento della matematica. La semiotica, ossia la teoria che studia le

diverse rappresentazioni di un oggetto all'interno di opportuni registri, ha un ruolo fondamentale nell'apprendimento della matematica, in quanto quest'ultima non è ostensiva, cioè ogni concetto matematico richiama ad un "non oggetto", non esistente nella realtà. Pertanto le rappresentazioni semiotiche hanno un ruolo strutturale in matematica, ed è anche analizzando la capacità di uno studente di gestire correttamente le rappresentazioni semiotiche nei diversi registri, che si può valutare il suo livello di interiorizzazione dei concetti. Inoltre è chiaro che l'obiettivo dell'insegnamento-apprendimento dell'algebra non è tanto la memorizzazione di formule ed algoritmi, ma lo sviluppo di quello che in didattica della matematica viene chiamato il "symbol sense" ossia il "senso dei simboli", cioè della capacità di apprezzare il potere dei simboli, sapendo quando l'uso dei simboli è appropriato e della capacità di manipolare e dare un senso ai simboli in diversi contesti.
In linea con le esigenze appena descritte, all'interno del lavoro di tesi è stato progettato e realizzato un percorso didattico sull'interpretazione geometrica di identità algebriche per la scuola secondaria di secondo grado. In particolare il percorso è stato realizzato in una classe terza del Liceo Linguistico Copernico di Bologna. La scelta del liceo linguistico è stata motivata anche dal fatto che generalmente, non essendo la matematica una materia d'indirizzo, un approccio storico-interdisciplinare può coinvolgere di più gli studenti ed aiutarli maggiormente a comprendere l'utilità della scrittura simbolica. Dopo aver somministrato un test iniziale per valutare il livello di apprendimento di alcuni concetti, sono state svolte diverse attività a gruppi, distribuite in quattro lezioni, che avevano come obiettivo quello di far interagire scrittura simbolica e rappresentazione geometrica di identità algebriche ed equazioni. Infine al termine delle lezioni è stato somministrato un test finale per valutare gli eventuali cambiamenti rispetto a quello iniziale e il grado di comprensione delle attivtà svolte.
Gli studenti durante le attività si sono dimostrati partecipi quindi il percorso è stato sicuramente positivo dal punto di vista del coinvolgimento, ma si sono rilevati anche miglioramenti dal punto di vista dell'apprendimento. Sono emerse anche alcune criticità che potrebbero essere utilizzate per correggere il percorso e renderlo più funzionale ad un apprendimento significativo.
La tesi è strutturata come segue: il Capitolo 1 è dedicato alla nascita dell'algebra e in particolare al matematico arabo al-Khwarizmi che, come detto in precedenza, nel suo

trattato espone alcuni metodi risolutivi per le equazioni di 2° grado seguiti da una dimostrazione geometrica. Nel Capitolo 2 si introducono i primi elementi di semiotica, si presentano le caratteristiche di questa teoria e si analizza lo studio formale e interpretativo dei segni. Inoltre viene introdotto ed analizzato il "symbol sense", facendo principalmente riferimento al pensiero di Abraham Arcavi e di Ferdinando Arzarello. Proseguendo, nel Capitolo 3 si descrive il progetto svolto nella scuola secondaria di secondo grado costruito sull'interazione tra algebra e geometria, attraverso l'utilizzo di diversi registri semiotici e la conversione tra essi. L'analisi dei dati, nel Capitolo 4, confronta i risultati del test iniziale con quelli del test finale evidenziando le differenze significative che ci sono state a seguito delle lezioni svolte in aula. Nel quinto e ultimo capitolo sono contenute le considerazioni finali emerse dal lavoro di tesi.

Indice

Capitolo 1

Cenni Storici

In questo primo capitolo viene presentata la nascita dell'algebra dovuta al matematico arabo al-Khwarizmi che nel suo trattato espone dei metodi risolutivi per le equazioni di 2° grado seguiti da una dimostrazione geometrica. Questo aspetto, cioè quello di affiancare alla parte algebrica la corrispondente geometrica, è centrale all'interno di questa tesi. Si rimanda a [13], [14] e [15] per eventuali approfondimenti.

1.1 Al-Khwarizmi, padre dell'algebra

Nell'VIII secolo, presso le popolazioni dominate dagli arabi, si assiste ad un progressivo interesse per l'aritmetica e per i sistemi di numerazione. Gli arabi si accostano ai testi indiani, dai quali apprendono il sistema di numerazione posizionale in base 10 e il simbolo dello zero. Il matematico a cui si deve la prima esposizione del sistema di numerazione indiano e delle operazioni effettuate in questo sistema è Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850 circa), che opera a Baghdad, nella casa della saggezza. Della sua vita non si conosce quasi nulla tranne il fatto che il suo nome deriva dalla sua città di origine Khwarizm (oggi Khiva) del Turkestan. Di al-Khwarizmi si sono conservate cinque opere, in particolare, le due opere sull'aritmetica e sull'algebra sono diventate famose e hanno esercitato una notevole influenza sullo sviluppo della matematica mediovale in occidente, oltre che sugli studiosi arabi successivi.
Il trattato di algebra, composto fra l'813 e l'833, si può considerare l'atto di nascita di

questa disciplina. L'opera si è conservata in un manoscritto arabo del 1342, attualmente a Oxford, il testo arabo si intitola *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*, cioè *Breve opera sul calcolo di spostare e raccogliere*. Si compone di un breve capitolo introduttivo sui contratti commerciali, di una parte propriamente algebrica, di un breve capitolo di geometria e di una vasta parte dedicata ai problemi di divisione di eredità.
Lo scopo principale di al-Khwarizmi è di scrivere un manuale utile alla risoluzione dei problemi della vita quotidiana, ma l'opera avrà una diffusione e un'influenza ben più ampie di ciò che l'autore si sarebbe probabilmene aspettato.
L'algebra presentata da al-Khwarizmi, così come quella che precede la sua opera, viene chiamata algebra retorica in quanto, come vedremo in dettaglio nella prossima sezione, i problemi e le loro soluzioni sono esposti mediante parole o frasi della lingua corrente, senza l'impiego di alcun simbolismo. In questa fase non esistono segni particolari per denotare le operazioni algebriche e non esistono simboli letterali per indicare le incognite e le costanti. Di seguito, viene riportato un esempio preso da uno scritto dell'anno 499 d.C. del matematico indù Aryabhata tradotto in [16, pag. 19]:

«To find the number of elements in the arithmetic progression the sum of which is given: Multiply the sum of the progression by eight by eight times the common difference, add the square of the difference between twice the first term, and the common difference, take the square root of this, subtract twice the first term, divide by the common difference, add one, divide by two.»

Traduzione:
Per trovare il numero di elementi nella progressione aritmetica la cui somma è data: moltiplicare la somma della progressione per otto volte la differenza comune [i.e. la ragione], aggiungere il quadrato della differenza tra il doppio del primo termine e la differenza comune [i.e. la ragione], prendere la radice quadrata di questo, sottrarre due volte il primo termine, dividere per la differenza comune [i.e. la ragione], aggiungere uno e dividere per due.

In seguito, nello sviluppo storico dell'algebra, si usa individuare altre due fasi (si veda ad esempio [16]): quella dell'algebra sincopata e quella dell'algebra simbolica (ossia l'algebra che utilizza una notazione essenzialmente uguale a quella adottata oggi). Nell'algebra sincopata iniziano a comparire abbreviazioni per indicare le incognite: fu la notazione maggiormente in uso a partire dal XVI secolo (anche se se ne possono ritrovare esempi precedenti) e rappresentò un notevole progresso rispetto alla fase retorica. Per esempio il matematico Girolamo Cardano (1501-1576) scriveva:

4 cubus aequantur 6 quadratus & 2 res & 3,

che in notazione moderna corrisponde a $4x^3 = 6x^2 + 2x + 3$.
Verso la seconda metà del XVI secolo, ebbe inizio l'uso di particolari segni per denotare le operazioni e cominciarono a fare la loro comparsa le lettere per indicare le incognite. Questo momento costituisce la seconda fase dell'algebra sincopata che prelude alla terza rappresentata dalla notazione simbolica. L'algebra simbolica, in uso dalla metà del XVII secolo, si serve di lettere per rappresentare quantità note o incognite e di segni speciali per indicare le operazioni. Un contributo importante nella trasformazione dell'algebra sincopata in algebra simbolica fu dato dai matematici Francois Viete (1540-1603) e Rene Descartes (1596-1650). Grazie a questa fase, i simboli divennero oggetti di manipolazione piuttosto che una semplice scorciatoia per descrivere i procedimenti di un calcolo. Sfard descrive, in [16, pag. 24], l'impatto dell'algebra simbolica come segue:

«Employing letters as givens, together with the subsequent symbolism for operations and relations, condensed and reified the whole of existing algebraic knowledge in a way that made it possible to handle it almost effortlessly, and thus to use it as a convenient basis for entirely new layers of mathematics. In algebra itself, symbolically represented equations soon turned into objects of investigation in their own right and the purely operational method of solving problems by reverse calculations was replaced by formal manipulations on propositional formulas.»

Traduzione:
L'uso di lettere come dati, insieme al simbolismo susseguente per operazioni e relazioni, condensava e reificava l'intera conoscenza algebrica esistente in un modo che permetteva di gestirla quasi senza sforzo, e quindi di usarlo come base funzionale a [lo sviluppo di] livelli completamente nuovi di matematica. In algebra, le equazioni rappresentate simbolicamente si trasformarono presto in oggetti di indagine e il metodo puramente operativo di risoluzione dei problemi, mediante calcoli inversi, fu sostituito da manipolazioni formali

su formule proposizionali.

1.2 Equazioni, sei forme canoniche

Fra i principali concetti utilizzati nell'opera di al-Khwarizmi, si trova la nozione di equazione di primo e di secondo grado, a coefficienti numerici, una caratteristica nuova rispetto alla matematica precedente. Non si tratta più, come presso gli Egizi, i Babilonesi e i Greci, di risolvere problemi aritmetici e geometrici, che si possono scrivere in termini di equazioni, ma al contrario si parte dalle equazioni e i problemi vengono dopo. Il fatto che al-Khwarizmi si limiti a considerare equazioni di primo e secondo grado è legato all'esigenza di avere una soluzione per radicali, cui segue la verifica geometrica della correttezza di tale soluzione.
L'algebra di al-Khwarizmi è interamente retorica: egli non usa alcun simbolo e le sue spiegazioni sono piuttosto prolisse.
La nozione di base è quella di equazione a coefficienti numerici e i termini dell'equazione sono indicati con nomi diversi:

- il termine noto con *dirham* (unità monetaria greca);
- l'incognita con *shay'* (cosa) o *jidhr* (radice);
- il quadrato dell'incognita con *mal* (bene, possedimento).

All'inizio della sua opera al-Khwarizmi distingue sei tipi canonici di equazione, che egli presenta semplicemente a parole. Di seguito sono riportati i tipi di equazione come descritti da al-Khwarizmi e nella notazione simbolica moderna:

1. I quadrati sono uguali alle radici	$ax^2 = bx$
2. I quadrati sono uguali a un numero	$ax^2 = c$
3. Le radici sono uguali a un numero	$ax = c$
4. I quadrati e le radici sono uguali a un numero	$ax^2 + bx = c$
5. I quadrati e i numeri sono uguali alle radici	$ax^2 + c = bx$
6. Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati	$bx + c = ax^2$

La ragione di questa molteplicità di forme è che i coefficienti considerati sono sempre positivi e i termini appaiono come grandezze additive.
Ogni equazione viene sistematicamente ricondotta ad uno dei tipi indicati e per la sua risoluzione si impiegano due operazioni fondamentali:

- l'*al-jabr* (completamento, riempimento): eliminare i termini negativi, aggiungendo termini uguale nei due membri;

- l'*al-muqabala* (messa in opposizione, bilanciamento): addizionare i termini simili nei due membri.

Inoltre il coefficiente del termine di secondo grado viene spesso ricondotto all'unità con l'operazione *al-hatt* che è applicata in particolare nella risoluzione delle equazioni dei tipi 4 e 5.

Esempio 1.1.

$2x^2 + 100 - 20x = 58$	con l'*al-jabr* diventa
$2x^2 + 100 = 20x + 58$	e con l'*al-muqabala*,
$2x^2 + 42 = 20x$	e infine tramite l'*al-hatt* si ottiene
$x^2 + 21 = 10x,$	che riconduce l'equazione di partenza al tipo 5.

Uno dei punti più importanti e innovativi della sua trattazione è la ricerca della soluzione algoritmica, cioè il fatto che per le equazioni di secondo grado la soluzione si può esprimere per radicali. Studia l'equazione come oggetto matematico in sé, ne cura la classificazione, il metodo risolutivo e la discussione di ogni caso. Non tiene però mai conto delle soluzione negative, forse perchè resta comunque un forte legame con le grandezze geometriche (sempre positive), ravvisabile nelle verifiche delle regole risolutive, e un ancoraggio ai problemi concreti della vita quotidiana.

Probabilmente per lo stesso motivo tratta l'equazione $ax^2 = bx$ esattamente come l'equazione $ax = b$, senza considerare la soluzione $x = 0$ in quanto, probabilmente, non era interessante nei problemi concreti. Inoltre egli fornisce sempre non solo la radice dell'equazione considerata, ma anche il suo quadrato.
Soffermiamoci in dettaglio sulla risoluzione delle equazioni complete di secondo grado dei tipi 4, 5 e 6, elencati sopra. L'autore inizia con l'equazione

$$x^2 + 10x = 39$$

Egli afferma:

"La soluzione è: dividi a metà le radici, che in questo caso dà 5. Moltiplica questo per se stesso: il prodotto è 25. Aggiungilo a 39, ottenendo 64. Ora prendi la radice di questo, che è 8 e sottrai da questo la metà delle radici, 5; il resto è 3. Questa è la radice del quadrato che cercavi e il suo quadrato è 9."

In notazione moderne l'equazione si può scrivere come $x^2+px = q$ e la soluzione positiva, essendo $p, q > 0$, è

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$$

Alle regole risolutive con i radicali, come già detto, al-Khwarizmi fa seguire la dimostrazione geometrica che in questo caso presenta due diverse costruzioni, corrispondenti al procedimento noto come "completamento del quadrato".
La prima verifica consiste nel costruire, come si vede in Figura 1.1, sui lati del quadrato x^2 quattro rettangoli di altezza $\frac{10}{4}$ e nel completare la figura così ottenuta con quattro quadratini di lato $\frac{10}{4}$. Il quadrato che ne risulta ha lato $x + 2 \cdot \frac{10}{4} = x + 5$,

mentre la sua area, che è la somma delle aree delle parti che lo compongono, vale $x^2 + 4 \cdot \frac{10}{4}x + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = x^2 + 10x + 25$.

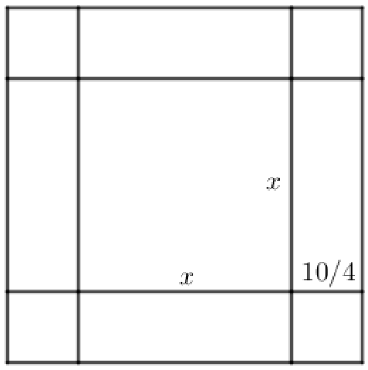


Figura 1.1: Prima rappresentazione del completamento del quadrato.

Sapendo poi che $x^2 + 10x = 39$, l'area del quadrato sarà $39 + 25 = 64$ e dunque il suo lato $x + 5$ vale 8, da cui si deduce $x = 3$. Queste trasformazioni geometriche corrispondono alle seguenti trasformazioni algebriche su $x^2 + px = q$:

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}x\right) + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2$$

$$\left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2$$

$$\left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right) = \sqrt{q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2}$$

da cui la regola fornita all'inizio da al-Khwarizmi.
La seconda dimostrazione geometrica si deduce dalla Figura 1.2.
Si costruisce il quadrato x^2 e due rettangoli di altezza $\frac{10}{2}$ su due lati adiacenti di quello. Si completa poi la figura con un quadrato di lato $\frac{10}{2}$. Si ottiene così un quadrato di area $39 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 64$, il cui lato, $x + \frac{10}{2}$, misura 8. Si deduce quindi $x = 3$. Corrisponde alla seguente trasformazione algebrica:

$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}x\right) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

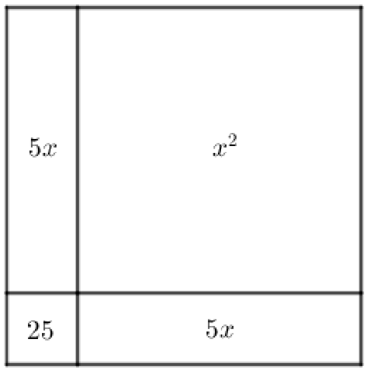


Figura 1.2: Seconda rappresentazione del completamento del quadrato.

La regola risolutiva, nel caso di due radici, viene descritta da al-Khwarizmi utilizzando l'equazione $x^2 + 21 = 10x$ nel modo seguente:

"Dividi per 2 le radici, ottieni 5. Moltiplica 5 per se stesso, hai 25. Sottrai 21 che è sommato al quadrato, resta 4. Estrai la radice, che dà 2 e sottrai questo dalla metà della radice, cioè da 5, resta 3. Questa è la radice del quadrato che cerchi e il suo quadrato è 9. Se lo desideri, aggiungi quella alla metà della radice. Ottieni 7, che è la radice del quadrato che cerchi e il cui quadrato è 49."

In termini algebrici moderni l'equazione si può scrivere come $x^2 + q = px$ e si può riassumere l'algoritmo con la seguente formula:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Sono così presentate le due soluzioni positive dell'equazione seguite dal commento:

"Se tu affronti un problema che si riconduce a questo tipo di equazione, verifica l'esattezza della soluzione con l'addizione come si è detto. Se non è possibile risolverlo con l'addizione, otterai certamente il risultato con la sottrazione. Questo è il solo tipo in cui ci si serve dell'addizione e della sottrazione, cosa che non trovi nei tipi precedenti. Devi inoltre sapere che se in questo caso tu dividi a metà la radice e la moltiplichi per

se stessa e il prodotto risulta minore del numero che è aggiunto al quadrato, allora il problema è impossibile. Se invece risulta uguale al numero, ne segue che la radice del quadrato sarà uguale alla metà delle radici che sono col quadrato, senza che si tolga o si aggiunga qualcosa."

Gli ultimi due casi corrispondono ad avere discriminante negativo $(p/2)^2 < q$, dunque nessuna soluzione nel campo reale, e discriminante nullo, vale a dire due soluzioni coincidenti $(x = p/2)$.

La dimostrazione geometrica di al-Khwarizmi, distingue due possibilità, corrispondenti alle due soluzioni. Della prima è data una costruzione dettagliata (vedi Figura 1.3), mentre per la seconda si hanno pochi cenni nel testo arabo e alcune figure (come ad esempio la Figura 1.4) nelle versioni latine che possono suggerire il ragionamento seguito.

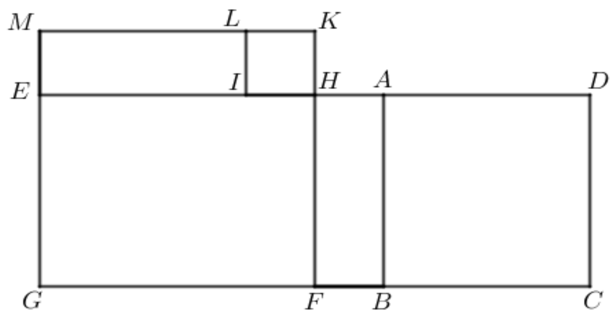


Figura 1.3: Costruzione geometrica per l'equazione di tipo 5 di al-Khwarizmi.

Ecco come viene presentata la prima costruzione: il rettangolo $GCDE$ di lati $GC = p$ e $CD = x$ è formato dal quadrato $ABCD = x^2$ e dal rettangolo $GBAE = (p - x)x = q$. Se si considera $x < p/2$, cosa che al-Khwarizmi non dice esplicitamente, si può innalzare in F, punto medio di GC, la perpendicolare FH a GC e prolungare FH del segmento $HK = AH = p/2 - x$. Si costruiscono quindi i quadrati $GFKM = (p/2)^2$ e $IHKL = (p/2)^2$. I rettangoli $EILM$ e $FBAH$ risultano essere congruenti, per cui $IHKL$ può essere visto come differenza fra $GFKM$ e $GBAE$, cioè $(p/2 - x)^2 = (p/2)^2 - q$. Si ha dunque

$IH = AH = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ e $x = AD = HD - AH = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

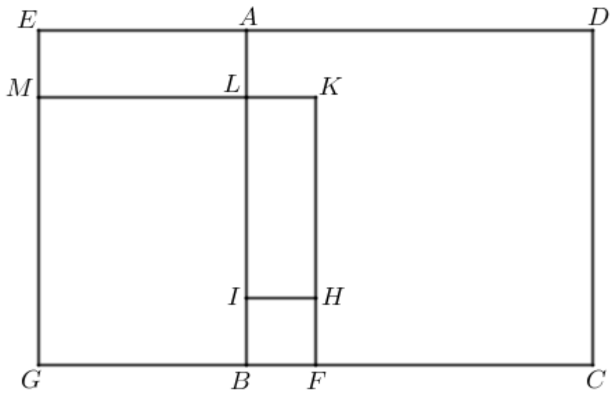


Figura 1.4: Costruzione geometrica per l'equazione di tipo 5 presa nelle versioni latine.

Per la seconda costruzione geometrica al-Khwarizmi dice solo che si ottiene la maggiore delle radici aggiungendo DH ad AH. È tuttavia molto probabile che egli ne avesse la dimostrazione, dal momento che nelle versioni latine si trovano le figure relative. Supponendo $x > p/2$ il punto F, medio di $GC = p$, cade all'interno di $BC = x$. Se si prende allora $AB = BC$, il quadrato $BFHI$, avendo il lato $BF = x - p/2$ è uguale alla differenza fra il quadrato $GFKM = (p/2)^2$ e la figura composta dalla somma delle aree $GBLM + IHKL = GBAE = q$. Così si ottiene
$BF = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ e $x = CF + BF = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.
Al-Khwarizmi presenta poi, come esempio del tipo 6, l'equazione $3x + 4 = x^2$ di cui come sempre considera solo la soluzione positiva e non quella negativa. La regola, espressa in notazioni moderne, relativamente all'equazione $px + q = x^2$, corrisponde alla soluzione

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

La dimostrazione geometrica consiste nella costruzione (vedi Figura 1.5) del quadrato $ABCD = x^2$, composto dai rettangoli $ARHD = px$ e $RBCH = x^2 - px = q$. Sia G il punto medio di HD e si costruisca il quadrato $TKHG = (p/2)^2$. Sul prolungamento di TG si prenda $TL = CH = x - p$. Si innalzi in L la perpendicolare a LG, che incontri BC in M e il prolungamento di KH in N. Ora GL risulta uguale a CM e uguale a CG

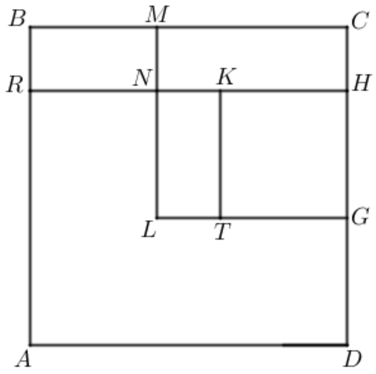


Figura 1.5: Costruzione geometrica per l'equazione di tipo 6.

poichè $GL = GT + LT = GH + HC$ e $TL = CH = MN$, per cui $LTKN = BMNR$. Dunque $MCHN + BMNR = BCHR = q = MCNH + LTKN$ e inoltre $LMCG = TKHG + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \quad \text{e} \quad CG = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$,
da cui $CD = x = CG + GD = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$.

Capitolo 2

La semiotica e il symbol sense

In questo capitolo si introducono i primi elementi di semiotica, vengono presentate le caratteristiche di questa teoria come in [4], inoltre viene analizzato lo studio formale e interpretativo dei segni che aiuta a capire quello che gli studenti comprendono attraverso un ragionamento matematico. Nello specifico si riporta il pensiero che Peirce ne dá in [9]. Assume un ruolo fondamentale anche il concetto di symbol sense, per spiegare la sua importanza e il suo sviluppo si analizzeranno le idee espresse da Arcavi in [1] e da Arzarello in [3].

2.1 Semiotica e matematica

La matematica non è ostensiva in quanto ogni concetto matematico richiama ad un "non oggetto", non esistente nella realtà. Pertanto la matematica si deve servire di rappresentazioni semiotiche. La semiotica, ossia la teoria che studia le diverse rappresentazioni di un oggetto all'interno di opportuni registri, ha quindi un ruolo chiave nell'apprendimento della matematica. Prendendo in prestito una frase di Duval, considerato il padre della teoria semiotica legata all'apprendimento della matematica (si veda ad esempio [11]) "non c'è noetica (cioè acquisizione concettuale di un oggetto) senza semiotica". Infatti l'acquisizione concettuale di un oggetto si basa sull'utilizzo di diversi registri di rappresentazione semiotica (tipico del pensiero umano) e sulla creazione di nuovi registri di rappresentazione. In particolare, la costruzione di un concetto avviene nel momento in cui si è in grado di utilizzare le tre funzioni semiotiche fondamentali:

1. la rappresentazione (rappresentare un oggetto in un dato registro);
2. il trattamento (trasformare una rappresentazione in una nuova all'interno dello stesso registro);
3. la conversione (convertire una rappresentazione in una nuova in un altro registro).

I tratti distintivi fissati dell'oggetto dipendono dalle capacità semiotiche di rappresentazione del registro scelto, adottando un registro diverso si fisserebbero altri tratti dello stesso oggetto. Ciò dipende dal fatto che due rappresentazioni dello stesso oggetto, ma in registri diversi, hanno contenuti differenti. Questo è dovuto anche al fatto che la scelta dei tratti distintivi dell'oggetto non è fissata a priori ma è frutto di opinione, volontà, necessità o gusto, quindi dipende anche dal soggetto umano che sta rappresentando l'oggetto. Pertanto la semiotica è una caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica. Inoltre questa disciplina è strettamente intrecciata ma indipendente dalla matematica, il suo ruolo, così strategico e decisivo, non può essere trascurato, dimenticato o evitato nell'insegnamento-apprendimento della matematica.
Non si può pensare che in una sola rappresentazione semiotica sia possibile rappresentare tutte le componenti concettuali di un dato oggetto matematico; al contrario, come detto, ogni rappresentazione semiotica veicola solo alcuni degli aspetti concettuali che sono componenti di un dato oggetto. Nel senso che: un oggetto matematico ha tante componenti concettuali, legate, mescolate, le une alle altre. La persona competente, l'insegnante, le vede tutte concomitanti e tutte coinvolte nell'oggetto, ma l'apprendente, spesso, non le vede tutte e anzi ne sa riconoscere solo alcune. Pertanto bisogna sempre pensare che, quando si usa una rappresentazione semiotica, lo studente veda, riconosca, faccia propri certi aspetti dell'oggetto, quelli messi in evidenza, ma non tutti quelli che ha in mente l'insegnante. Dunque, **una pluralità di rappresentazioni favorisce la costruzione cognitiva dell'oggetto rappresentato, perchè ciascuna contribuisce in modo specifico con alcuni aspetti.**
Vediamo un esempio legato all'espansione del quadrato di un binomio. Usando la rappresentazione simbolica abbiamo $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ma, non avendo a disposizione i

simboli, il quadrato di un binomio veniva rappresentato da al-Khwarizmi come in Figura 2.1.

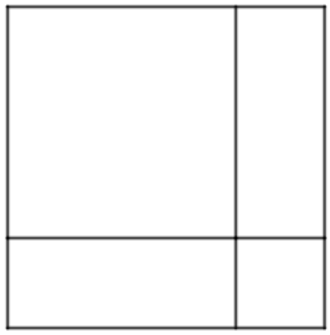


Figura 2.1: Rappresentazione geometrica del quadrato di un binomio.

Se usiamo la rappresentazione semiotica (nel registro delle figure geometriche codificate con simboli che denotano proprietà delle unità figurali ivi rappresentate) e il registro della scrittura algebrica, insieme, l'evidenza è totale.

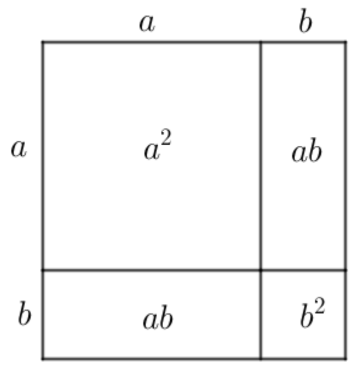


Figura 2.2: Rappresentazione geometrica unita alla scrittura algebrica.

Quale delle tre rappresentazioni semiotiche è più efficace? Ciascuna ha i suoi vantaggi, ma le tre insieme danno l'informazione sull'oggetto matematico "quadrato di un binomio". Poi, è ovvio, una volta costruito cognitivamente quell'oggetto, stare a fare i disegnini diventa inutilmente lungo e l'espressione algebrica diventa la più rapida ed economica. Un insegnante che utilizzi i diversi registri per presentare il quadrato di un binomio, può

aiutare i suoi studenti ad evitare un errore frequente: "dimenticare" il termine "$2ab$" nella scrittura dell'espansione.
È evidente quindi come sia essenziale per un insegnante far vedere più rappresentazioni di un oggetto matematico e per ciascuna mostrare pregi e difetti: l'univocità è certamente deleteria, un passo falso per una buona didattica.

2.2 Le basi moderne della semiotica

Come Duval è ritenuto il padre dell'approccio semiotico alla didattica della matematica, così il fondatore della semiotica moderna è da tutti ritenuto Charles Sanders Peirce (1839-1914). La sua teoria dei segni si fonda sull'idea che la cognizione, il pensiero e persino l'essere umano abbiano una natura essenzialmente semiotica. Per Peirce i segni sono mezzi per rappresentare qualcosa per qualcuno, sono mezzi di pensiero, di comprensione, di ragionamento, di apprendimento. Tutto può fungere da segno purché qualcuno lo interpreti come tale. Ma che cos'è un segno? Di seguito viene riportata una delle definizioni date da Peirce in [9, pag. 27]:

«Un segno, o representamen, è qualcosa che per qualcuno sta per qualcosa sotto qualche aspetto o capacità. Si rivolge a qualcuno, ossia crea nella mente di quella persona un segno equivalente, o forse un segno più sviluppato. Quel segno che crea lo chiamo interpretante del primo segno. Il segno sta per qualcosa: il suo oggetto. Sta per quell'oggetto non sotto tutti gli aspetti, ma in riferimento a una specie di idea, che a volte ho chiamato ground del representamen.»

Da questa definizione emerge una relazione fondamentale che coinvolge tre elementi: un *representamen*, cioè il veicolo, la parte "materiale", del segno; un *oggetto*, ovvero ciò a cui il representamen rinvia; un *interpretante*, cioè ciò che deriva o viene generato dal rapporto tra il representamen e l'oggetto. Per Peirce l'interpretazione di un segno richiede inoltre una certa conoscenza collaterale al segno o al sistema dei segni, ovvero un tipo di conoscenza ottenuta da altre esperienze precedenti con ciò che il segno denota e una certa familiarità con il sistema di segni.
L'oggetto, ovvero ciò a cui il segno/representamen rinvia, può essere di due tipi:

1. *immediato*, cioè l'oggetto così com'è rappresentato dal segno;
2. *dinamico*, cioè l'oggetto realmente efficiente, ma non immediatamente presente, ciò che guida la produzione del segno, e di cui l'oggetto immediato rappresenta soltanto un particolare aspetto.

Facciamo un esempio su un tipo di representamen chiamato icona diagramma, cioè un segno che possiede una somiglianza con il suo oggetto di tipo strutturale o relazionale. Sia le formule algebriche sia le figure geometriche sono diagrammi in quanto rappresentano particolari relazioni. Per esempio, l'espressione $(a+b)(a-b)$ è un diagramma che può essere considerato un interpretante del representamen "prodotto della somma di due numeri per la loro differenza" (in lingua naturale). Tale interpretante, per $a > b > 0$, può diventare a sua volta il representamen di un nuovo segno che ha, tra altri, il seguente interpretante geometrico:

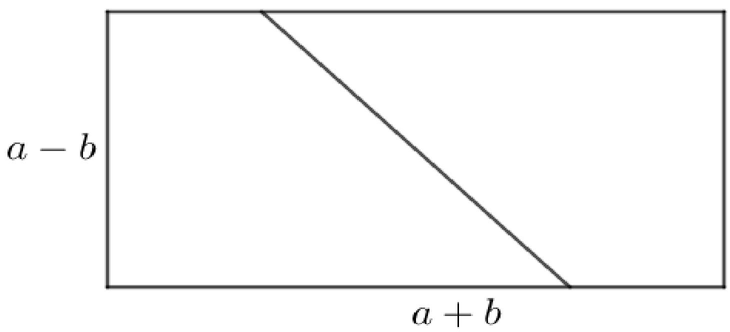


Figura 2.3: Interpretante geometrico di $(a+b)(a-b)$.

In generale, le figure geometriche evidenziano una certa somiglianza, non solo strutturale ma anche qualitativa, con gli oggetti con i quali sono in relazione. Come rileva Fischbein in [12], esse possiedono proprietà sia figurali sia concettuali.
I diagrammi sono costruiti secondo regole e convenzioni che definiscono un determinato sistema di rappresentazione, dunque con essi si possono fare esperimenti, ovvero manipolazioni o trasformazioni, rispettando le regole del sistema. E poiché un diagramma è anzitutto una rappresentazione di relazioni costruita con gli strumenti disponibili nel

sistema di rappresentazione considerato, Peirce evidenzia che è proprio quest'ultimo, il sistema di rappresentazione, a determinare sia gli esperimenti possibili con il diagramma, sia i risultati necessari di tali esperimenti.
Nel caso dell'espressione sopra considerata, utilizzando la proprietà distributiva del prodotto rispetto a una somma e le usuali notazioni algebriche, si ottiene una differenza di due quadrati, più precisamente il representamen: $a^2 - b^2$. Sempre per $a > b > 0$, mediante un'operazione di riconfigurazione della figura precedente, si ottiene la corrispondente rappresentazione geometrica (representamen):

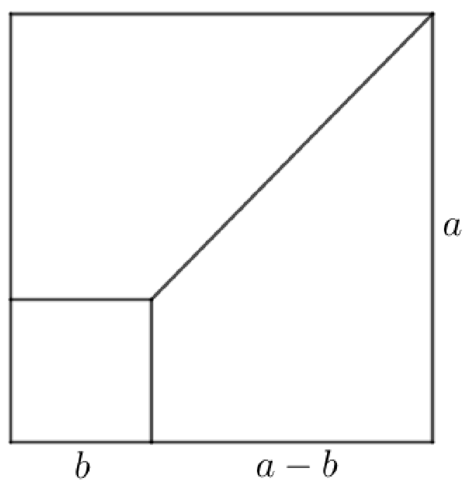


Figura 2.4: Interpretante geometrico di $a^2 - b^2$.

I representamen qui sopra ottenuti, secondo le regole e le convenzioni dei corrispondenti sistemi di rappresentazione (registro della scrittura algebrica e registro delle figure geometriche codificate con simboli che denotano proprietà delle unità figurali ivi rappresentate), costituiscono degli interpretanti del representamen il "prodotto della somma di due numeri per la loro differenza" che rinviano allo stesso *oggetto dinamico* (oggetto matematico), sotto qualche aspetto, attraverso *oggetti immediati* tra loro differenti.

2.3 Il symbol sense

Il simbolo, rappresenta in algebra, l'unità tra segno e significato; fin quando le due parti non si congiungono, ovvero fino a che il segno rimane staccato dal significato non si è in grado di entrare in rapporto conoscitivo con ciò a cui il segno rimanda. A causa della difficoltà che gli studenti hanno a tenere unite le parti appena descritte, l'algebra è da loro vista come disciplina indecifrabile ed incomprensibile. Inoltre ciò può essere frutto di un insegnamento formale privo di attenzione ai significati ed ai processi di costituzione degli oggetti della disciplina.
L'algebra dovrebbe essere introdotta come:

- linguaggio adatto a descrivere la realtà attraverso la messa in formula di conoscenze (o di ipotesi) sui fenomeni;
- potente strumento di ragionamento e di previsione attraverso la derivazione di nuove conoscenze sui fenomeni stessi.

Pertanto l'algebra deve essere uno strumento di pensiero, gli studenti devono riuscire a servirsi del linguaggio algebrico e degli oggetti dell'algebra per affrontare e risolvere i problemi. Invece spesso, i formalismi, i simbolismi e gli algoritmi sono causa di avversione verso la disciplina, ciò è dovuto dal fatto che non vengono considerati come validi espedienti per fissare in maniera concisa idee matematiche, ma vengono introdotti singolarmente senza attribuire l'effetiva funzione. Usando le parole di de Finetti in [10, pag. 336]:

«Per apprezzare le formule e il tipo di calcoli che consentono non c'è che capire a cosa servono, convincersi che è utile o anche necessario farne uso, comprendere in che modo conviene pensarne il significato, onde farle apparire un modo appena diverso di scrivere le stesse cose che già ci sono familiari.»

Quindi nel processo di insegnamento-apprendimento dell'algebra è essenziale prestare attenzione a quello che viene chiamato **symbol sense**: cioè la capacità di apprezzare il potere dei simboli, di sapere quando l'uso dei simboli è appropriato e la capacità di manipolare e dare un senso ai simboli in diversi contesti.

Di seguito analizziamo cosa significa e come è possibile sviluppare negli studenti il symbol sense analizzando due lavori di Abraham Arcavi [1] e Ferdinando Alzarello [3].

2.3.1 Il pensiero di Abraham Arcavi

Arcavi sottolinea, in [1], l'importanza che gli studenti raggiungano la consapevolezza che il linguaggio algebrico è un potente strumento per capire, esprimere e comunicare generalizzazioni, stabilire connessioni, produrre dimostrazioni. Quindi sposta l'attenzione dal problema della manipolazione simbolica alla ricerca di stimoli da fornire ai propri studenti per favorire un apprendimento caratterizzato da un **uso dei simboli per pensare, per realizzare astrazioni e per sviluppare strategie risolutive.**
Propone una didattica dell'algebra finalizzata allo sviluppo del symbol sense (che caratterizza attraverso una serie dettagliata di prototipi di attività):

1. *acquisire familiarità con i simboli* riconoscendo potenzialità e limiti (intuire quando ricorrere ad essi o, al contrario, quando abbandonarli per strumenti più efficienti);

2. *manipolare i simboli ponendosi su un piano interpretativo*, esercitando un controllo a livello di significati possibili, vagliando la loro espressività o inefficacia in relazione alla situazione in gioco;

3. *trasformare espressioni "ad arte"*, non in modo automatico ma in relazione all'obiettivo da raggiungere;

4. *saper vedere nuovi significati in forme equivalenti in una data espressione*;

5. *scegliere oculatamente le variabili* attraverso cui rappresentare le relazioni di un problema, scelta che può essere diversa ma che occorre imparare a fare in modo ottimale (economicità della soluzione);

6. *svolgere trasformazioni sintattiche con flessibilità, intelligenza e visione di insieme*, evitando circolarità ed esercitando un controllo sulla struttura dell'espressione in modo da ottenere forme semplificate o più funzionali agli scopi;

7. *mantenere attenzione di significati dei simboli nel corso di una trasformazione sintattica*, non limitando l'interpretazione alla fine del processo, ma vedere cosa possono dire i simboli negli stadi intermedi;

8. *riconoscere che, a seconda del contesto, i simboli possono svolgere ruoli diversi* e saper selezionare, nella molteplicità di significati che possono avere, quelli funzionali allo sviluppo dell'attività in esame.

Avere il symbol sense significa avere un feeling intuitivo con i simboli, cioè riuscire a capire quando usare i simboli nella risoluzione di un problema e quando abbandonare la via algebrica per metodi più efficaci. Significa inoltre avere l'abilità nel leggere e saper manipolare espressioni algebriche, nel selezionare una possibile rappresentazione simbolica per un problema e avere la consapevolezza del fatto che i simboli possono avere ruoli diversi in contesti diversi.

2.3.2 Il pensiero di Ferdinando Arzarello

Arzarello sostiene, in [3], che il symbol sense sia alla base del *pensiero anticipatorio*, cioè la capacità di:

- *ipotizzare* scritture formali a cui pervenire per poter affermare certi risultati;
- *prevedere*, senza svolgere trasformazioni sintattiche, possibili nuove forme di una certa espressione vagliandone i significati;
- *attivare* cambiamenti di frame concettuale ed interpretazioni plurime.

Propone una visione dell'**algebra come strumento di pensiero che evolve nel tempo verso forme linguistiche sempre più complesse e sofisticate e centrata sul potere espressivo delle scritture formali**, per la molteplicità di sensi che sono incorporati in esse o che possono essere ottenuti da esse attraverso manipolazioni sintattiche. Pone attenzione ai significati che un allievo può associare ad una data formula.
Una tipologia di attività nella quale gli studenti sono chiamati ad operare con flessibilità un efficiente gioco di interpretazioni è quella della dimostrazione di congetture. Gli studenti devono saper intervenire sulle espressioni simboliche al fine di attuare quelle

trasformazioni che sono in grado di mostrare proprietà non evidenti nell'espressione di partenza. Cruciale per questo non è tanto la padronanza nella manipolazione simbolica, quanto la qualità e la quantità di pensieri anticipatori che lo studente è in grado di mettere in atto in relazione alla nuova forma di una espressione per una possibile trasformazione.
Di seguito il suo pensiero sul symbol sense in algebra come espresso in [2, pag. 1]:

«sembra che gli allievi colmino le incapacità memorizzando regole e procedure e, di conseguenza, finiscano per credere che queste rappresentino l'essenza dell'algebra. Dopo anni e anni di studio molti allievi delle scuole secondarie superiori, anche quando riescono a manipolare formalmente i segni del linguaggio dell'algebra, riuscendo a conseguire un soddisfacente profitto, non usano l'algebra come strumento di pensiero per comprendere, esprimere e comunicare generalizzazioni, oppure per scoprire e descrivere relazioni strutturali fra grandezze o, ancora, per formulare argomenti matematici, come, per esempio, una dimostrazione. Il problema è quello di individuare e sviluppare una opportuna didattica in cui gli allievi imparino a diventare padroni del senso vero dei simboli che usano, evitando quell'addestramento per memorizzazione di regole e meccanismi formali, il quale favorisce invece l'idea che il senso di una formula e delle trasformazioni su di essa consista soltanto nella sua struttura segnica.»

Quindi secondo Arzarello, l'insegnamentto dell'algebra deve essere finalizzato all'acquisizione del senso dei simboli, alla manipolazione di essi e deve assecondare i processi genetici di transizione al simbolo a partire dai campi di esperienza degli allievi, dando tempo e spazio alle attività che favoriscono tali processi (interazione sociale, mediazione del linguaggio naturale parlato e scritto, esplorazioni). Inoltre è molto importante proporre diversi esempi di problemi stimolanti e soprattutto avviare alla generalizzazione, alla dimostrazione, al sapere teorico. Infine è bene precisare che è la partecipazione attiva degli studenti che supporta la costruzione del senso del simbolo.

2.3.3 Esempi di attività e riflessione didattica

Come sviluppare il symbol sense? Per esempio proponendo attività che stimolino la ricerca del significato dei simboli. Vediamone due riportate nell'articolo [7].

La prima riguarda le equazione di 2° grado e prende spunto proprio dall'opera di al-Khwarizmi descritta nel Capitolo 1 (si veda Figura 2.5), mentre la seconda utilizza una rappresentazione tridimensionale per dare senso alla manipolazione algebrica di una formula.

1. *Costruire gli oggetti matematici*

   Dare significato alla soluzione positiva dell'equazione $x^2 + 10x = 39$

Figura 2.5: Algebra di al-Khwarizmi.

Costruendo (come in Figura 2.6) sul lato x del quadrato azzurro quattro rettangoli rossi di lati x e $10/4$, si ottiene la croce azzurra e rossa di area $x^2 + 4(10/4)x$. Sapendo che $x^2 + 10x = 39$, l'area del quadrato grande sarà $(x + 2(10/4))^2 = 39 + 4(10/4)^2 = 64$ e il suo lato sarà dunque $x + 2(10/4) = 8$. Quindi il lato del quadrato azzurro costruito inizialmente, che rappresenta la soluzione positiva dell'equazione, è $x = 3$.

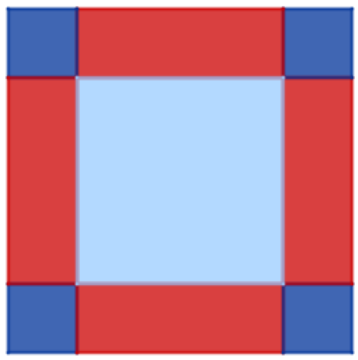


Figura 2.6: Costruzione geometrica.

In questa situazione la costruzione geometrica riesce a dare un senso ai simboli e ai calcoli algebrici, riempie di significato e aiuta gli studenti a comprendere al meglio il metodo del completamento del quadrato.

2. *Leggere e manipolare i simboli*

   Prendiamo un cubo costituito a sua volta da cubetti più piccoli e tutti uguali tra loro. Se dal cubo togliamo una colonna di cubetti, il numero dei cubetti rimanenti è divisibile per 6. Sai dire il perché?

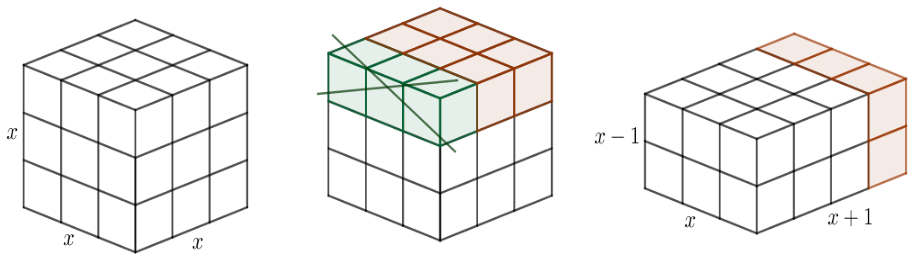


Figura 2.7: Rappresentazione geometrica.

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

Si ottiene il prodotto di tre numeri consecutivi che è divisibile per 6. Vediamo il perchè:

- *Dimostrazione intuitiva*: il prodotto contiene uno o due multipli di 2 e un multiplo di 3, quindi sarà divisibile per $2 \cdot 3 = 6$;
- *Dimostrazione algebrica*: proviamo per induzione su x che $x^3 - x = 6k$ con $k \in \mathbb{Z}$
  se $x = 0$ ovvio con $k = 0$,
  ora supponiamola vera per x e proviamola per $x + 1$.

$$\begin{aligned}(x+1)^3-(x+1) &= x^3+3x^2+3x+1-x-1\\ &= x^3+3x^2+2x\\ &= x(x^2+3x+2)\\ &= x(x+1)(x+2) \quad \textit{per} \quad \textit{hp} \quad \textit{induttiva}\\ &= 6k\end{aligned}$$

Quindi vale anche per $x+1$ allora per il principio di induzione vale $\forall x \in \mathbb{N}$;

- *Dimostrazione geometrica*: osservando la Figura 2.7 si può verificare che da x^3 è stata tolta una colonna di cubetti e spostando le due colonne rimanenti, in modo opportuno, si ritrova un solido il cui volume è $x(x-1)(x+1)$. Contando effettivamente il numero di cubetti da cui è composto si vede che è divisibile per 6.

Questa è una situazione in cui leggere attraverso i simboli è essenziale: la manipolazione algebrica da sola non basta, occorre leggere il significato dei simboli e realizzare che $x(x-1)(x+1)$ rappresenta il prodotto di tre numeri consecutivi e quindi che almeno uno di tali fattori è pari ed uno è multiplo di 3.

Non tutti gli studenti svolgerebbero la seconda attività allo stesso modo. Alcuni potrebbero basarsi sulla rappresentazione geometrica altri proverebbero a scrivere i dati in forma algebrica avendo la libertà di scegliere l'approccio che meglio si adatta al loro stile mentale. Inoltre un'attività come questa permette di lavorare su un aspetto del ragionamento matematico chiamato in [17] transformational reasoning: l'aver luogo fisico o mentale di un'operazione o di un insieme di operazioni su un oggetto che porta a rivedere le trasformazioni cui tali oggetti sono soggetti e l'insieme dei risultati di tali operazioni. Centrale per il transformational reasoning è l'abilità a considerare non un modo statico, ma un processo dinamico dal quale un nuovo stato o una continuità di stati viene generato. Il trasformational reasoning è ragionamento per analogia, ragionamento anticipatorio. Può non solo produrre un differente modo di pensare agli oggetti matematici, ma può anche portare a un diverso insieme di domande e di problemi.

Quindi si può concludere che il symbol sense è la parte centrale della competenza in algebra, dunque l'insegnamento dell'algebra dovrebbe essere strutturato attorno ad esso. Spesso la conoscenza delle regole di manipolazione formale sembra essere il principale obiettivo dell'insegnamento dell'algebra. Invece, occore insegnare la manipolazione in contesti ricchi, che consentano di imparare anche quando e come utilizzare tale manipolazione. Inoltre è fondamentale l'interpretazione dei segni per avere la capacità di produrre significati e la traduzione tra diverse rappresentazioni di un oggetto. Ciò, come abbiamo visto nella Sezione 2.1, è argomento trattato dalla semiotica che rappresenta quindi un importante strumento a disposizione dell'insegnante. Se l'insegnante si rivolge agli studenti della classe con uno stesso linguaggio, quanto sarà il livello di comprensione di studenti che, invece, sono naturalmente (o per esperienze vissute) inclini a comunicare con registri diversi? Ciò suggerisce anche il ruolo fondamentale svolto dall'interazione sociale in classe, dal lavoro in piccoli gruppi, che consente agli studenti di comunicare con diversi registri e all'insegnante di potersi rivolgere ai diversi studenti utilizzando il registro più appropriato o utilizzando, gradualmente, elementi di un altro registro per rendere più efficace e flessibile la comunicazione degli studenti.
Il problema non è un graduale approccio al formale, ma l'esigenza di diversi stili di comunicazione e di apprendimento che, inevitabilmente, possono incidere sul piano motivazionale affettivo e, di conseguenza, su quello cognitivo.

Capitolo 3

Unità didattica nella scuola secondaria di secondo grado

«Posso credere una cosa senza capirla: è tutta questione di addestramento! Questa frase... mi torna sempre in mente, come una sensazione paurosa di sconforto, perché mi sembra esprima integralmente la fondamentale e chissà quanto eliminabile stortura che sta effettivamente, anche se non dichiaratamente, alla base di tutta l'imperversante concezione della didattica tradizionale: abituare a imparare e credere senza capire.»

Bruno de Finetti

Per concretizzare gli aspetti trattati nei primi due capitoli è stato progettato un percorso, poi svolto in una scuola secondaria di secondo grado. L'obiettivo principale del progetto scolastico era quello di far interarige algebra e geometria, attraverso l'utilizzo di diversi registri semiotici e la conversione tra essi, per favorire una comprensione più solida di entrambe. Interpretare geometricamente identità algebriche può aiutare a dare un significato, a dare un senso ai simboli e ai calcoli algebrici. Infatti la geometria può servire da modello per le identità algebriche e quindi fornire contenuto e significato a quest'ultime. Viceversa, la fusione di fenomeni geometrici in termini algebrici può fornire agli studenti un modo di ragionare sulla geometria. Collegare l'algebra con la geometria è quindi una componente essenziale per una corretta comprensione della matematica. Gli studenti di solito arrivano con un senso a priori della geometria mentre l'algebra sembra essere un quadro imposto dall'esterno per lavorare con quantità matematiche. Tuttavia, se le identità algebriche sono legate a forme geometriche, allora questo senso di arbitrarietà può essere ridotto al minimo in quanto la geometria verrà vista come strumento per visualizzare i concetti astratti dell'algebra. Lo scopo del percorso è quello di aiutare gli alunni a diventare padroni del senso dei simboli, evitando il semplice addestramento per memorizzare regole e meccanismi formali che favorisce invece l'idea che il senso di una formula, e delle trasformazioni su di essa, consista soltanto nella sua struttura sintattica. Se l'attività di "addestramento" non è realizzata con la consapevolezza della sua finalità non solo è inutile, ma controproducente e gioca contro la crescita formativa.

Nello specifico gli obiettivi del percorso sono:

- Conoscere le diverse rappresentazioni dello stesso oggetto matematico e riuscire a passare da una rappresentazione all'altra;
- Controllare ed esercitare la manipolazione formale in modo flessibile, finalizzandola allo scopo da raggiungere;
- Esprimere un'espressione algebrica in modi differenti e riconoscere quella conveniente alla situazione;
- Saper distinguere un'identità da un'equazione.

Facendo riferimento alle Indicazioni Nazionali per il Liceo Linguistico, scuola in cui è stata realizzata la sperimentazione, si riportano in seguito le competenze e gli obiettivi specifici d'interesse del progetto.[1]

1. **Profilo generale e competenze**

    - [Lo studente] dovrà saper connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate e di approfondirne il significato. Lo studente dovrà acquisire una consapevolezza critica dei rapporti tra

[1]Per completezza le Indicazioni Nazionali per il Liceo Linguistico sono riportate interamente nell'Appendice A.

lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico;

- Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, è necessario evitare dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi;
- Il percorso didattico dovrà rendere lo studente progressivamente capace di acquisire e dominare i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni...), di conoscere le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, di applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.

2. **Obiettivi specifici dell'apprendimento**

   - Saranno presentati gli elementi di base del calcolo letterale e si studieranno i polinomi e le operazioni tra di essi, evitando che la necessaria acquisizione di una capacità manipolativa degeneri in tecnicismi addestrativi (ambito aritmetica e algebra del primo biennio);
   - Lo studente dovrà essere in grado di eseguire calcoli con semplici espressioni letterali sia per rappresentare e risolvere un problema, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica (ambito aritmetica e algebra del primo biennio);
   - L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non dovrà essere disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica (ambito geometria del primo biennio);
   - [Lo studente] sarà in grado di descrivere un problema con un'equazione (ambito relazioni e funzioni del primo biennio);
   - Lo studente saprà fattorizzare semplici polinomi (ambito aritmetica e algebra del secondo biennio);

- Lo studio delle equazioni polinomiali proseguirà con le equazioni di secondo grado (ambito relazioni e funzioni del secondo biennio).

I prerequisiti necessari allo svolgimento del percorso sono i seguenti:

- Definizione di equazione;
- I e II principio di equivalenza delle equazioni e conseguenti regole pratiche utilizzabili per la risoluzione delle equazioni;
- Scomposizione in fattori tramite l'uso di prodotti notevoli;
- Raccogliomento totale a fattor comune e raccoglimento parziale;
- Risoluzione di equazioni di grado superiore al primo scomponibili in fattori di 1° grado e legge dell'annullamento del prodotto;
- Somma di segmenti;
- Equivalenza ed equiscomponibilità di superfici;
- Formule per il calcolo delle aree di quadrati e rettangoli;
- Risoluzione di semplici problemi di calcolo di aree di figure poligonali.

3.1 Struttura del percorso

Il progetto ha coivolto la classe 3I della scuola secondaria di secondo grado "Liceo Copernico - Indirizzo Linguistico" di Bologna, composta da 25 studenti. Il percorso è stato realizzato nel mese di ottobre durante il regolare orario scolastico ed è stato diviso in 4 lezioni da 55 minuti, intervallate da lezioni del docente di matematica della classe il Professor Carlo Bertoni.
Prima di iniziare le lezioni in aula è stato somministrato agli studenti un test iniziale (si veda Appendice B) per verificare il livello di conoscenza degli argomenti che sarebbero stati affrontati durante il percorso. Esso era composto da 8 quesiti, di cui due a risposta chiusa ma con richiesta di motivazione, cinque a risposta aperta e un problema.

La prima lezione è stata una lezione frontale di introduzione al percorso in cui è stato presentato l'argomento da un punto di vista storico e sono stati spiegati gli obiettivi del percorso stesso.
Nelle lezioni successive invece sono state assegnate delle attività da svolgere a gruppi.[2] I gruppi, composti da 4 persone, sono stati scelti liberamente dagli studenti e sono rimasti gli stessi per tutte le attività. All'interno di ciascun gruppo erano stati fissati i seguenti ruoli:

1. TIENITEMPO: controlla e fa rispettare i tempi assegnati per le attività
2. MODERATORE: controlla che tutti nel gruppo partecipino
3. PORTAVOCE: relaziona i risultati del gruppo
4. MEMORIA: riporta per iscritto i risultati ottenuti dal gruppo

Questa attribuzione è stata fatta per sollecitare ogni studente a partecipare e a dare un proprio contributo nelle attività. Ogni gruppo ha deciso autonomamente come divedersi i ruoli: alcuni gruppi hanno mantenuto inalterata l'assegnazione dei ruoli per tutte le attività, mentre altri l'hanno cambiata.
Ad ogni gruppo è stato fornito un fascicolo su cui erano riportate le attività da svolgere e che è stato utilizzato dagli studenti per annotare le osservazioni e i risultati delle attività. I fascicoli venivano poi ritirati alla fine di ogni lezione e riconsegnati ai gruppi nella lezione successiva. Inoltre, per svolgere le attività gli studenti necessitavano di alcuni materiali: una parte è stata loro fornita, un'altra, come ad esempio alcune figure costruite con cartoncini colorati, è stata preparata autonomamente dagli studenti su indicazione del docente.
Durante le attività, le consegne venivano proiettate tramite una presentazione power point e alla fine di ogni attività veniva chiesto al portavoce di uno o più gruppi di spiegare alla classe i risultati ottenuti. Seguiva quindi una discussione collettiva per raggiungere una risoluzione condivisa.
Alla fine di ogni lezione venivano assegnati dei compiti per la lezione successiva per verificare le conoscenze acquisite, per capire i ragionamenti di ciascun alunno e per

[2] Attività simili a quelle realizzate sono citate anche negli articoli [6] e [8].

collegare una lezione all'altra.

Al termine delle lezioni è stato somministrato un test finale (si veda Appendice C). Esso era composto da 3 quesiti: il primo identico ad uno proposto nel test iniziale, mentre gli altri due vertevano su argomenti affrontati durante il percorso.

Di seguito si porta nel dettaglio la scaletta delle lezioni del percorso intervallate dalle lezioni del docente di classe:

1. *Test iniziale*

2. *Ripasso delle equazioni di* 1° *grado* (Bertoni)

   - Cos'è un'equazione
   - Cosa significa risolvere un'equazione
   - Come si scrive un'equazione a partire da un problema
   - Equazioni riconducibili ad equazioni di 1° grado

3. *Ripasso delle disequazioni* (Bertoni)

   - Sistemi di disequazioni

4. *Introduzione*

   - Introduzione storica
   - Rappresentazione operazioni semplici
   - Rappresentazione geometrica quadrato di un binomio ($(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$)

5. *Attività 1, 2 e 3*

   - Conversione dal registro algebrico al registro geometrico: rappresentazione geometrica di $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
   - Conversione dal registro geometrico al registro algebrico: attraverso l'uso di figure geometriche, seguendo la consegna data, arrivare alla rappresentazione algebrica di due identità ($a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ e $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$)

6. *Divisione tra polinomi e scomposizione in fattori* (Bertoni)
    - Divisione tra polinomi e regola di Ruffini
7. *Divisione tra polinomi e scomposizione in fattori* (Bertoni)
    - Metodo di Ruffini per la divisione tra polinomi
8. *Attività 4*
    - Verificare algebricamente e geometricamente la scomposizione in fattori di un'equazione di 2° grado
9. *Attività 5 e Conclusioni*
    - Trovare la soluzione positiva di un'equazione di 2° con il metodo del completamento del quadrato
    - Conclusioni: focus su identità ed equazioni, rappresentazione geometrica di oggetti algebrici, traduzione da una rappresentazione all'altra e limiti della rappresentazione geometrica
10. *Equazioni risolubili per scomposizione* (Bertoni)
    - Principio di annullamento del prodotto
11. *Equazioni parametriche e scomposizioni* (Bertoni)
    - Equazioni parametriche di 1° grado
    - Somma/differenza di due cubi
12. *Ripasso* (Bertoni)
    - Esercizi di ripasso
13. *Test finale*
14. *Verifica*

Nelle sezioni seguenti verrà descritto in dettaglio il percorso svolto in aula e verranno analizzati i tratti essenziali emersi dall'analisi delle registrazioni delle lezioni e dai fascicoli.

3.2 Introduzione

Capire l'algebra: la geometria ci può aiutare? La prima lezione si è aperta con questa domanda. In seguito è stata fatta un'introduzione storica al percorso, presentando il matematico arabo al-Khwarizmi e dando importanza alla sua opera, descritta nel Capitolo 1. Quindi si è posta l'attenzione sul passaggio dall'algebra retorica all'algebra simbolica, sottolineando la significativa distanza di secoli intercorsi tra le due fasi dall'algebra. Attraverso un esempio di dimostrazione geometrica sulla risoluzione di un'equazione proposto da al-Khwarizmi, si è appurato che la geometria può servire a dare senso ai calcoli algebrici, a riempire di significato, a visualizzare concetti astratti e quindi a comprendere al meglio l'algebra.
In seguito si è visto come sia possibile rappresentare geometricamente semplici operazioni come l'addizione e la sottrazione (vedi Figura 3.1), la moltiplicazione e, come caso particolare, l'elevamento al quadrato (vedi Figura 3.2).

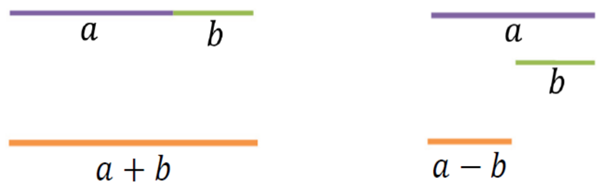


Figura 3.1: Addizione e sottrazione.

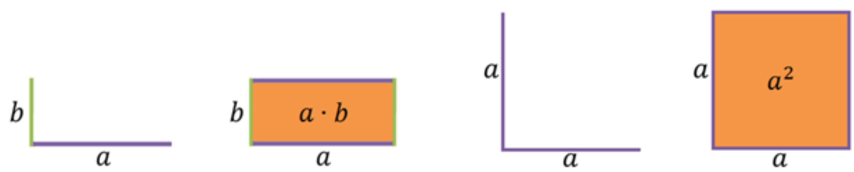


Figura 3.2: Moltiplicazione ed elevamento al quadrato.

La lezione introduttiva si è chiusa mostrando (vedi Figura 3.3) la rappresentazione geometrica di un'identità che gli studenti già conoscevano, più precisamente, il prodotto notevole "quadrato di un binomio".
Tutti gli argomenti sono stati svolti con l'ausilio di una presentazione power point.

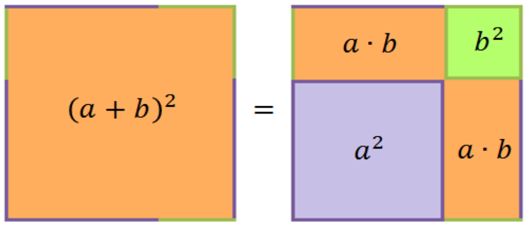


Figura 3.3: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

3.3 Attività

Nella seconda lezione, prima di iniziare a far lavorare gli studenti in gruppi, sono stati riassunti i concetti spiegati nella prima ed è stata riproposta la rappresentazione geometrica di $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ stavolta utilizzando cartoncini colorati come quelli che avrebbero poi usato gli studenti durante le attività. Per farlo è stato attaccato alla lavagna un cartoncino bianco su cui venivano fissate le figure colorate con delle puntine. Successivamente è stata suddivisa la classe nei gruppi prestabiliti e gli studenti hanno iniziato a svolgere le attività proposte.

Di seguito per ciascuna attività viene riportata la descrizione, vengono analizzati i risultati ottenuti dagli studenti e vengono messe in luce le principali difficoltà emerse.

3.3.1 Attività 1

Titolo: Rappresentare geometricamente $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$
Tempo: 10 minuti
Materiale: Un quadrato grande, un quadrato piccolo e due rettangoli le cui dimensioni fossero uguali ai lati dei quadrati (questo materiale è stato preparato dagli studenti)

Consegna:

- Rappresentare ogni termine partendo dal secondo membro.
- Verificare che la figura restante equivale al primo membro.

Svolgimento: si rimanda alla Sezione D.1 dell'Appendice D.
Analisi:

- Gli studenti del gruppo 1 hanno eseguito il primo punto della consegna correttamente ma non sono riusciti a verificare la corrispondenza con il primo membro. Come si vede dalla Figura 3.4 hanno preso $a = 2b$, scelta da loro effettuata anche nella costruzione dei cartoncini, e questo sicuramente li ha portati fuori strada. Dall'ascolto delle registrazioni, è emerso che hanno deciso di provare a sostituire dei numeri: hanno scelto $a = 4$ e $b = 2$ e affermando quindi «è giusto, così torna!»;

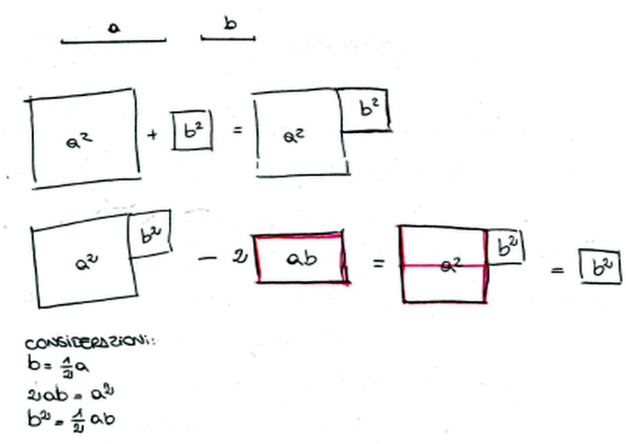


Figura 3.4: Attività 1: Gruppo 1.

- Anche gli studenti del gruppo 3 scelgono di prendere $a = 2b$, ma a differenza del gruppo precedente riescono a dimostrare l'equivalenza. Considerano i due membri, $(a-b)^2$ e $a^2 + b^2 - 2ab$, separatamente e verificano che entrambi siano uguali alla stessa quantità, nel loro caso b^2. Quindi scrivono «equazione vera», come si vede in Figura 3.5;

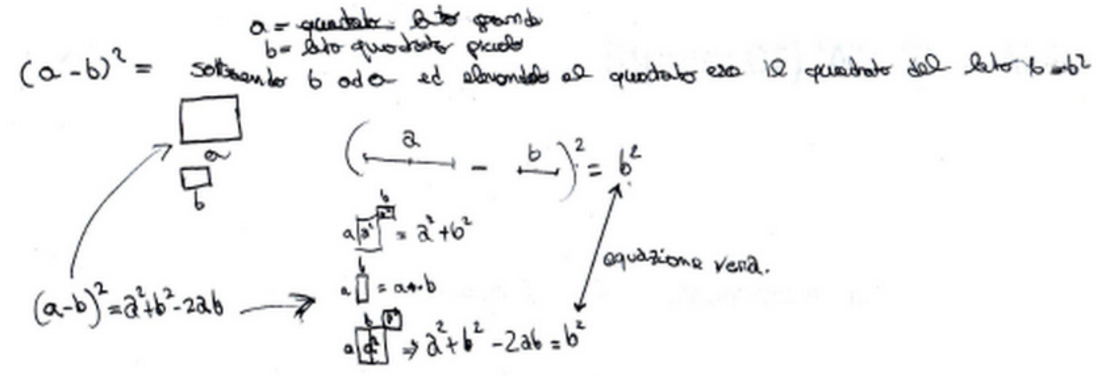


Figura 3.5: Attività 1: Gruppo 3.

- Dall'ascolto delle registrazioni emerge che gli studenti del gruppo 4, in un primo momento hanno avuto difficoltà a sottrarre $2ab$, poi, riflettendoci, hanno compreso che togliere $2ab$ è equivalente a togliere ab per due volte consecutive. La figura rimanente rappresenta un quadrato che, come si vede in Figura 3.6, chiamano Q. Nonostante non verifichino geometricamente che Q sia equivalente ad un quadrato di area $(a-b)^2$, provano ad argomentare che questa sia effettivamente $(a-b)^2$ in due modi: sostituendo dei numeri al posto di a e b e scrivendo in maniera confusionaria «ad a^2 abbiamo sottratto il quadrato di lato b e abbiamo riscontrato l'equivalenza del lato del quadrato più piccolo ottenuto al lato del quadrato ottenuto in precedenza (Q)». Però al momento della spiegazione, la studentessa portavoce del gruppo, prende il quadrato piccolo e lo sovrappone a quello grande verificando così in maniera corretta che il segmento rimanente, $a - b$, corrispondeva effettivamente al lato di Q.

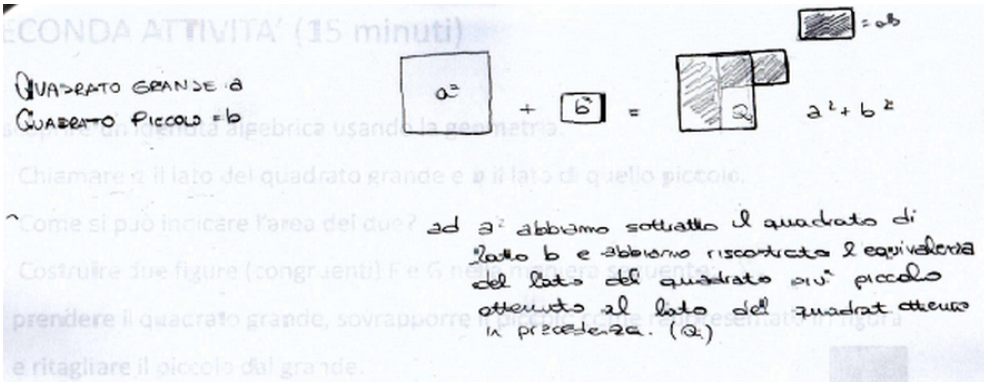


Figura 3.6: Attività 1: Gruppo 4.

3.3.2 Attività 2

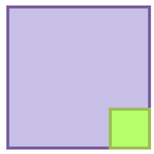


Figura 3.7

Titolo: Riscoprire un'identità algebrica usando la geometria
Tempo: 15 minuti
Materiale: Due quadrati grandi, due quadrati piccoli e forbici (questo materiale è stato preparato dagli studenti)

Consegna:

- Chiamare a il lato del quadrato grande e b il lato di quello piccolo, come si può indicare l'area dei due?

- Costruire due figure (congruenti) F e G nella maniera seguente: prendere il quadrato grande, sovrapporre il piccolo come rappresentato in Figura 3.7 e ritagliare il piccolo dal grande. Prendere una delle due figure (F): come si può esprimere l'area?

- Scomporre l'altra figura (G) in due rettangoli: come si può esprimere la lunghezza dei lati?

- Posizionare i due rettangoli in modo da ottenere un unico rettangolo: qual è la lunghezza dei lati? Come si indica l'area?

- Esprimere la relazione che c'è tra l'area di F e quella di G.

Svolgimento: si rimanda alla Sezione D.2 dell'Appendice D.
Analisi:

- Gli studenti del gruppo 1 eseguono la consegna correttamente ma non riescono a scrivere la relazione finale, scrivono solo «F e G sono congruenti» (si veda Figura 3.8);

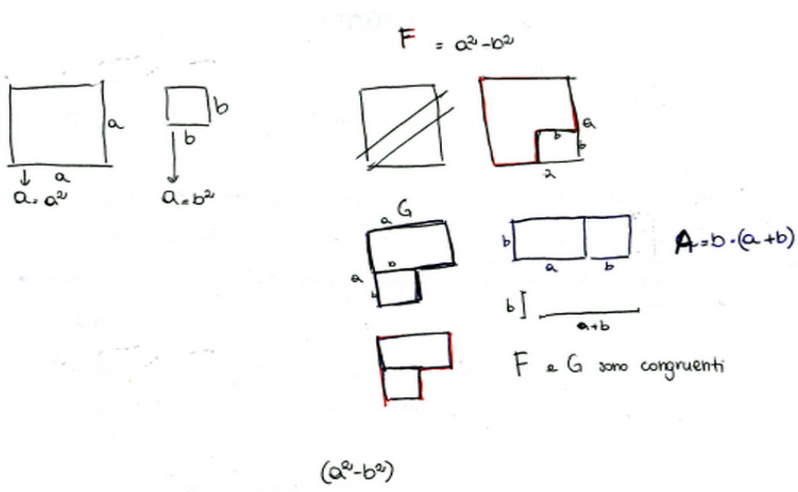


Figura 3.8: Attività 2: Gruppo 1.

- Gli studenti del gruppo 3 sbagliano la costruzione iniziale e considerano le figure F e G come quadrati di area b^2. Di conseguenza i due rettangoli da essi considerati, hanno dai lati b e $\frac{1}{2}b$. Quindi, come si vede in Figura 3.9, il rettagolo ottenuto dall'unione dei due rettangoli ricavati dalla scomposizione di G, risulta di area $2b \cdot \frac{1}{2}b = b^2$. Così facendo, essi eseguono un ragionamento corretto su una figura però diversa da quella richiesta.

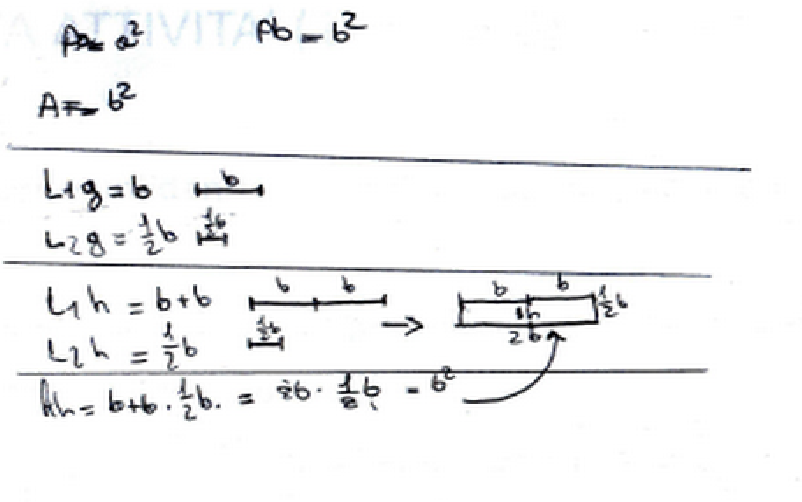


Figura 3.9: Attività 2: Gruppo 3.

3.3.3 Attività 3

Titolo: Riscoprire un'identità algebrica usando la geometria
Tempo: 15 minuti
Materiale: Quattro rettangoli congruenti (questo materiale è stato preparato dagli studenti)

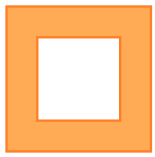


Figura 3.10

Consegna:

- Prendere quattro rettangoli chiamare i lati a e b ed esprimere l'area di ciascun rettangolo.
- Ricostruire la Figura 3.10 con i 4 rettangoli: quale sarà l'area?
- La figura individua due quadrati: quanto valgono i lati di ciascuno di essi?
- Si può riscrivere l'area della figura in un altro modo? (tenendo conto dei due quadrati individuati).
- Esprimere algebricamente l'uguaglianza ottenuta.

Svolgimento: si rimanda alla Sezione D.3 dell'Appendice D.

Analisi:
Questa attività è stata iniziata in classe e lasciata quindi come compito per casa. È stata poi ripresa nell'ultima lezione in cui è stato chiesto ai gruppi di discutere sui risultati ottenuti singolarmente.

- Una studentessa del gruppo 1 spiega così la sua risoluzione ai compagni «Si poteva fare anche $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$. Se fai $(a+b)^2$ che sarebbe quello grande meno $4ab$ che è la somma dei rettangoli ti rimane $(a-b)^2$ che è l'area di quello centrale perchè togli la cornice, che è la prima area che abbiamo fatto e, se hai l'area del quadrato tutto intero e togli la cornice, ti rimane il quadrato dentro che è $(a-b)^2$ cioè che ha lato $a-b$»;

- Come riportato in Figura 3.11 gli studenti del gruppo 4 eseguono la costruzione, ma non arrivano a scrivere l'equivalenza ottenuta in forma algebrica.

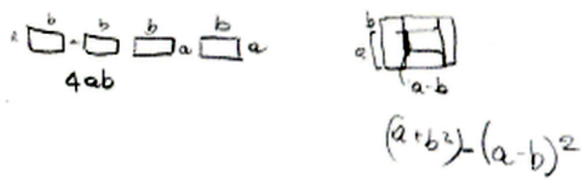


Figura 3.11: Attività 3: Gruppo 4.

3.3.4 Attività 4

Titolo: Verifica algebrica e rappresentazione geometrica di un'uguaglianza
Tempo: 10 minuti
Materiale: Un foglio di carta quadrettata (fornito all'interno del fascicolo)
Consegna 1: Verificare algebricamente che vale la seguente uguaglianza:

$$3x^2 + 8x + 4 = (3x+2)(x+2)$$

Consegna 2: Provare a fare una verifica geometrica

Suggerimenti

- Rappresentare $(3x + 2)(x + 2)$ come rettangolo di lati $3x + 2$ e $x + 2$
- Suddividere opportunamente tale rettangolo e riconoscere i monomi del membro di sinistra

Svolgimento: si rimanda alla Sezione D.4 dell'Appendice D.
Analisi:
Per quanto riguarda la verifica algebrica, tutti i gruppi riescono a farla correttamente. Però solo due gruppi su sei si accontentano di svolgere il prodotto a secondo membro e osservare che ottengono lo stesso polinomio che c'è al primo membro. Gli altri, invece svolgono i calcoli fino ad arrivare alla forma 0=0.

Di seguito si analizzano gli svolgimenti realtivi alla seconda consegna.

- Il portavoce del gruppo 2, esponendo il ragionamento alla lavagna, prima di tutto assegna un valore alla x, per esattezza $x = 1$; quindi fissa un'unità di misura pari ad 1 e disegna un rettangolo di dimensioni $3x+2 = 3(1)+2 = 5$ e $x+2 = (1)+2 = 3$. Fa corrispondere il monomio "$8x = 8(1) = 8$" al semiperimetro del rettangolo e non riesce a trovare una corrispondenza geometrica per i rimanenti monomi;
- Analogamente al gruppo precedente, gli studenti del gruppo 3 rappresentano $3x+2$ e $x + 2$ come segmenti, ma identificano $8x$ con il perimetro di un rettangolo di lati x e $3x$ (come in Figura 3.12). Di conseguenza disegnando tutto il rettangolo $(3x + 2)(x + 2)$ suddiviso opportunamente non riescono a trovare i monomi $3x^2$ e 4;
- Gli studenti del gruppo 4, inizialmente non riescono nemmeno a disegnare il rettangolo. Dalle registrazioni emerge che vogliono sostituire a x il valore zero per avere valori numerici per i lati del rettangolo, ma poi osservano che questo li avrebbe portati a disegnare un quadrato e quindi si bloccano. In seguito al suggerimento di lasciare il segmento indicato con x e ricordare quanto visto nella prima lezione sulla rappresentazione delle operazioni, costruiscono il disegno riportato in Figura 3.13.

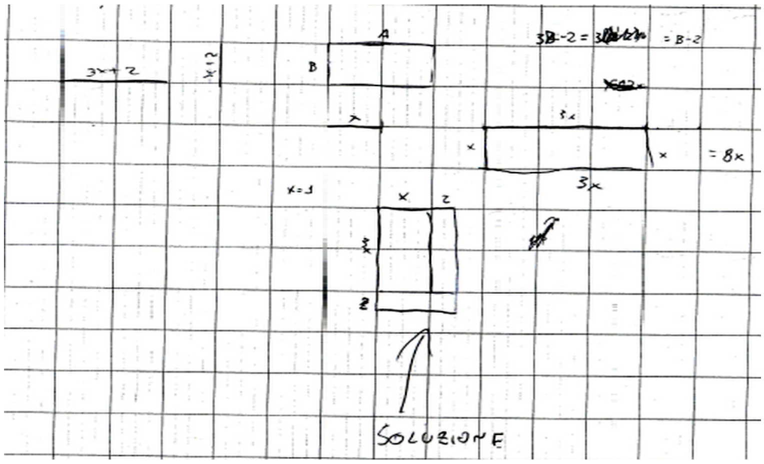


Figura 3.12: Attività 4: Gruppo 3.

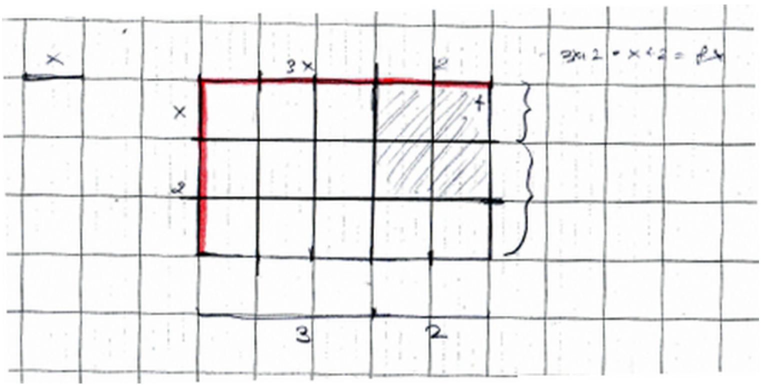


Figura 3.13: Attività 4: Gruppo 4.

3.3.5 Attività 5

Titolo: Trovare la soluzione positiva dell'equazione $x^2 + 4x = 32$
Materiale: Un foglio di carta quadrettata (fornito all'interno del fascicolo)
Suggerimenti
PARTE A: RAPPRESENTARE IL PRIMO MEMBRO

- Rappresentare x^2.
- Su due suoi lati consecutivi disegnare due rettangoli ciascuno di area $2x$.
- Perchè la figura costruita rappresenta il primo membro?

PARTE B: IMPORRE LA CONDIZIONE

- Se voglio che l'equazione sia soddisfatta quanto deve valere l'area della figura?

PARTE C: RICONDURSI A UNA FIGURA NOTA

- Per rendere le cose più semplici, come possiamo completare la figura?
- Quanto vale l'area della figura ottenuta?
- In che altro modo posso calcolarla?

Svolgimento: si rimanda alla Sezione D.5 dell'Appendice D.
Analisi:
Solo la parte A di quest'attività è stata svolta a gruppi, mentre le domande della parte B e C sono state poste a tutta la classe insieme e discusse collettivamente. Vengono di seguito analizzati i risultati.

- Gli studenti del gruppo 1 disegnano subito x^2, quindi si scambiano le seguenti osservazioni:
  Studente 1: «Due rettangoli di area $2x$, quindi un lato è x e l'altro lato è 2. Poi consecutivi, devono essere due attaccati, cioè devono avere un punto in comune»
  Studente 2: «Non guardare la lunghezza del lato, cioè quella di 2 sì, ma quella di x lasciala così».
  Quindi all'ultima domanda della parte A rispondono (si veda Figura 3.14) «perchè la somma delle aree è uguale a $x^2 + 4x$ (ovvero il primo membro)».

  Completata la parte A iniziano a ragionare da soli sulla parte B e affermano correttamente, che l'area della figura deve valere 32. Di seguito, prima di aver letto la parte C, ragionano nel modo seguente:
  Studente 1: «Bisogna scomporlo in fattori perchè ancora noi non sappiamo fare così»
  Studente 2: «In realtà no, basta trovare un numero che alla seconda fa un tot e per 4 fa un tot»
  Studente 3: « $16 + 16$ fa 32, cioè 4^2 che è 16 più $4 \cdot 4$ che è 16, $16 + 16 = 32$»
  Studente 2: «Abbiamo trovato la soluzione»;

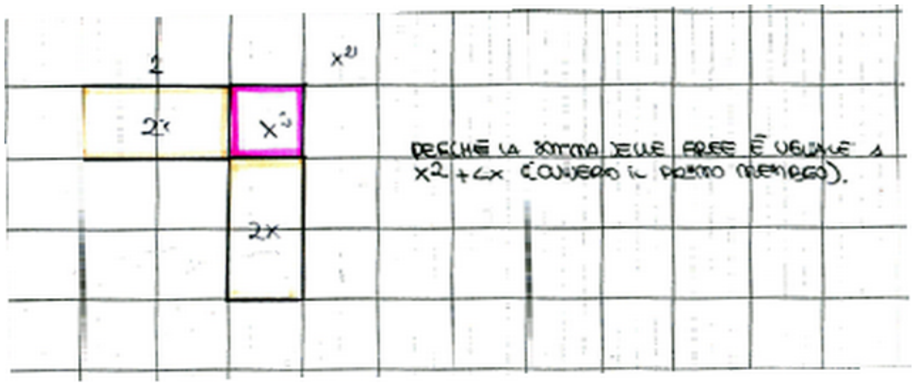


Figura 3.14: Attività 5: Gruppo 1.

- Gli studenti del gruppo 2 iniziano i primi ragionamenti cercando di assegnare un valore numerico a x ma non sanno come rappresentare quanto richiesto. Seguiamo il ragionamento di un componente del gruppo:
  Studente 1: «x^2 è un'area, $2x$ è una lunghezza, senza sapere $2x$ magari è un valore, dici il lato di x è 4 allora x è 2 allora $2x$ puoi dire che è un'area $2 \cdot 2$, però visto che è 4 sarebbe 8, se tengo x come si fa a trovare?»
  In seguito viene loro consigliato di provare a rappresentare $2x$ come un'area, suggerendo di ripensare alle diverse rappresentazioni di uno stesso oggetto di cui si era parlato nella precedente lezione. Questo input permette loro di riuscire a disegnare il primo membro dell'equazione. All'ultima domanda della parte A rispondono «l'abbiamo rappresentato in modo diverso ma l'area è la stessa»;

- Gli studenti del gruppo 3, dopo aver rappresentato x^2 ragionano nel seguente modo:
  Studente 1: «Disegnare un rettangolo di area $2x$, quindi base per altezza 2 per x»
  Studente 2: «Se è un quadrato $2 \cdot x$ è uguale a x^2, quindi l'area deve essere uguale al quadrato però sono rettangoli»
  Studente 1: «No non è detto perchè se $x = 8$, x^2 è 64 e $2x$ è $2 \cdot 8 = 16$, quindi sono diversi».
  Di seguito il gruppo, questa volta in autonomia, comprende che bisogna prendere un lato lungo x e l'altro lungo 2 così che l'area del rettangolo risulti essere $2x$. Viene riportato in Figura 3.15 il loro svolgimento della parte A.

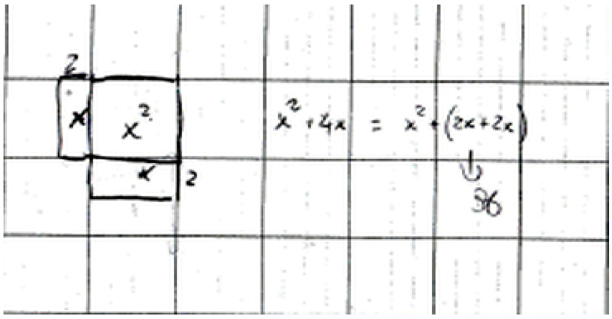


Figura 3.15: Attività 5: Gruppo 3.

All'ultima domanda della parte A rispondono «perchè abbiamo $x^2 + 2x + 2x$ e quindi $x^2 + 4x$ che, se guardi l'equazione, è giusta e quindi 32 è la somma di tutte e tre le aree» anticipando quindi la risposta alla parte B;

- Gli studenti del gruppo 4 inizialmente hanno una discussione sulla rappresentazione di x^2. A seguito di un dibattito tra loro, arrivano a disegnare x^2 come quadrato di lato x. Per quanto riguarda il secondo suggerimento della parte A, hanno difficoltà nel rappresantare $2x$ e si confrontano nel modo seguente:
  Studente 1: «Allora x^2 è questo»
  Studente 2: «E poi si aggiungono $2x$ da una parte e $2x$ dall'altra»
  Studente 1: «Ma $2x$ cosa sarebbe?»
  Studente 3: «$2x$ sarebbero due segmentini»
  Studente 1: «Ma anche consecutivi?»
  Studente 4: «No perchè ti spiego, questo è il nostro x^2 poi in verticale ho $2x$ e $4x$ è $2x + 2x$»
  Come si vede in Figura 3.16 rappresentano $2x$ come segmento anzichè come area.

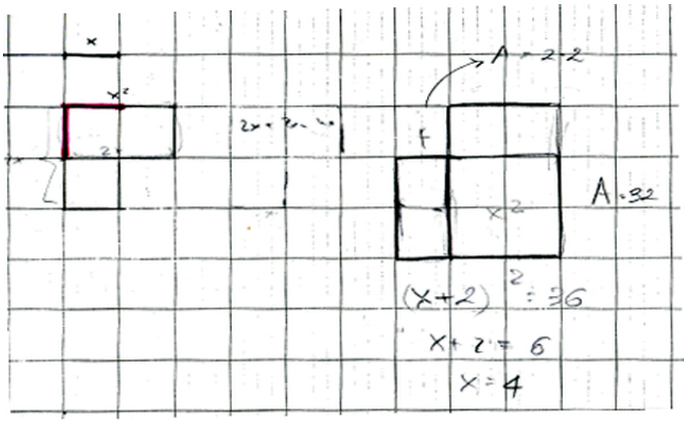


Figura 3.16: Attività 5: Gruppo 4.

Chiedono conferma all'insegnante della correttezza del disegno: questa suggerisce di rileggere la consegna che chiede di rappresentare $2x$ come un'area e pensare a quali potrebbero essere le dimensioni del rettangolo. Una studentessa risponde «una sarà $2x$ e una sarà x», ma un'altra osserva che in quel modo l'area sarebbe $2x^2$. All'ultima domanda della parte A rispondono «perchè $2x + 2x$ fa $4x$», mentre il secondo disegno riportato in Figura 3.16 lo fanno dopo aver riflettuto sulla correzione fatta tutti insieme;

- Gli studenti del gruppo 5, come il gruppo precedente, rappresentano x^2 come area del quadrato di lato x, mentre $2x$ con un segmento ma, dopo essere stati indirizzati a rappresentarlo come area di un rettangolo, trovano le dimensioni: x e 2. Un componente del gruppo dopo aver fatto il disegno afferma «l'area di questi tre è 32». All'ultima domanda della parte A rispondono «perchè $2x + 2x = 4x$»;

- Il gruppo 6 discute inizialmente su come rappresentare x^2.
Studente 1: «Rappresentare x^2, io darei un valore a x due quadretti quindi x^2 devono essere quattro»
Studente 2: «Ma x^2 cosa sono due quadrati?»
Studente 1: «Sì»
Studente 3: «Ma x^2 non è un quadrato?»
Studente 1: «Perchè?»
Studente 4: «Sì, perchè l'area è $x \cdot x$»

> In seguito riscontrano le stesse difficoltà di altri gruppi. Cercano un consiglio per sapere se stanno ragionando correttamente e una studentessa espone così le considerazioni del gruppo: «allora abbiamo detto che x^2 è l'area del quadrato che è lato per lato cioè $x \cdot x$, quindi $2x$ sarà due volte questo». Dopo che viene loro suggerito di rileggere bene la consegna e di pensare a quali possano essere le dimensioni dei rettangoli richiesti, una studentessa risponde «2 e x». All'ultima domanda della parte A rispondono «Sì perchè x^2 è l'area del quadrato $(x \cdot x)$, l'area del rettangolo è $2x$ (base per altezza cioè lato del quadrato per 2) e dato che i rettangoli sono due è $4x$».

Come detto sopra, le parti B e C sono state svolte colletivamente con tutto il gruppo classe. Per quanto riguarda la parte B solo due gruppi su sei rispondono correttamente. Analizziamo più nel dettaglio le risposte della parte C.
Secondo il gruppo 1, per completare la figura ottenuta dallo svolgimento della parte A, manca un $2 \cdot 2$ e quindi l'area ottenuta vale 36. La risposta del gruppo 2 è la seguente «possiamo aggiungere il quadratino 2^2, cioè il quadratino 4 quindi così si può calcolare l'area». All'interno del gruppo 3 c'è stato un confronto in cui uno studente afferma «se metto un altro quadratino è il quadrato di binomio», e un'altro risponde «dobbiamo aggiungere un altro numero alla seconda».
Quatto gruppi su sei ricavano poi la soluzione risolvendo $(x + 2)^2 = 36$, mentre uno la trova per tentativi.

Alla fine dell'attività viene chiesto agli studenti di verificare algebricamente e geometricamente che 4 sia soluzione. Mentre tutti gli studenti descrivono in maniera corretta il procedemento da svolgere la verifica algebrica, solo uno studente riesce a spiegare che per fare una verifica geometrica va fatta la costruzione partendo da un quadrato avente il lato lungo come 4 quadretti e va verificato che l'area della figura finale sia formata da 32 quadretti.
Come ultima cosa viene chiesto di verificare algebricamente e geometricamente che anche -8 è soluzione dell'equazione. Tutti i gruppi eseguono correttamente la verifica algebrica e metà dei gruppi afferma che quella geometrica non è possibile farla in quanto -8 è un valore negativo. In particolare, una studentessa del gruppo 1 afferma «non si può

verificare geometricamente perchè la distanza non può essere negativa».

3.4 Conclusioni

Durante l'ultima lezione, dopo aver elaborato e corretto la quinta attività, è stato riassunto il lavoro fatto: sono state evidenziate le differenze tra identità ed equazione, è stato osservato come le attività svolte mettessero in luce l'esistenza di diverse rappresentazioni di uno stesso oggetto matematico e quindi la necessità di saper passare da una rappresentazione all'altra. Infine son stati messi in risalto i limiti della rappresentazione geometrica.

Capitolo 4

Analisi dei questionari

In questo capitolo verranno analizzati i risultati dei test inizale e finale riportati rispettivamente nell'Appendice B e nell'Appendice C.
Il test iniziale è stato somministrato nel mese di settembre, all'inizio dell'anno scolastico e aveva lo scopo di verificare la conoscenza degli argomenti che sarebbero stati oggetto del percorso di tesi, ma era anche un test di ingresso funzionale al Prof. Bertoni. A distanza di un mese è stato svolto il percorso descritto nel capitolo precedente e al termine di quest'ultimo, nel mese di novembre, è stato somministrato il test finale.
Confrontiamo ora i risultati del test iniziale con quelli del test finale evidenziando le differenze significative emerse. L'analisi è stata suddivisa in due sezioni, la prima in cui sono state prese in considerazione domande che erano identiche nel test inizale e finale, la seconda in cui son stati messi a confronto quesiti che avevano obiettivi simili.

4.1 Descrizione e analisi prima parte

L'obiettivo del quesito 1, uguale nel test iniziale e finale, era quello di valutare la conoscenza di determinati concetti, di cui alcuni centrali per la corrente indagine. La consegna era quella di fornire il significato e dare un esempio di "identità", "prodotto notevole", "equazione" ed "espressione". Nel test finale per gli ultimi due casi, veniva anche richiesto cosa voleva dire "risolvere un'equazione" e "semplificare un'espressione". Nel test iniziale le ultime due richieste si trovavano all'interno di altri due quesiti (rispettivamente nel 4 e nel 7) la prima di seguito alla risoluzione di un'equazione e la seconda di seguito alla semplificazione di un'espressione.

Dall'analisi del quesito 1 è emerso:

- Un miglioramento nella spiegazione del significato di identità: se prima solo il 16% degli studenti aveva saputo spiegare il senso del termine e la restante parte aveva scritto «mai fatta», dopo si è passati al 60% di risposte corrette. Bisogna evidenziare però che nella maggior parte di quest'ultime come esempio di identità viene proposto «$0x = 0$», associando forse alla parola identità solo tale scrittura;

- Un miglioramento pari al 25% nella spiegazione del significato di prodotto notevole, mentre nella capacità di darne un esempio c'è stato un lieve peggioramento. Questo abbassamento è dovuto al fatto che più studenti scrivono solo una parte del prodotto notevole come se fosse definito da un'espressione e non da un'uguaglianza di due espressioni (si veda l'esempio riportato in Figura 4.1);

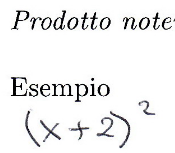
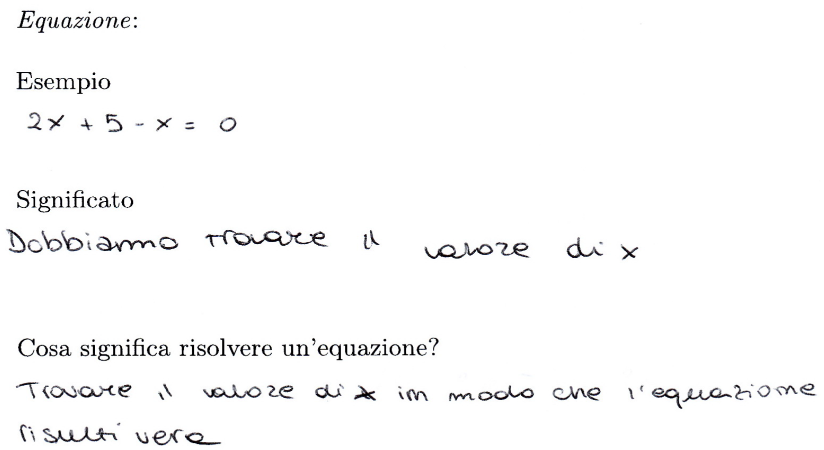


Figura 4.1: Risposta prototipica di esempio di prodotto notevole.

- Per quanto riguarda il significato del termine equazione nel test iniziale il 12% aveva risposto correttamente, mentre la percentuale restante era equamente suddivisa tra chi aveva risposto abbastanza bene ma senza saper utilizzare un linguaggio appropriato e chi aveva sbagliato la risposta. Il confronto dimostra che c'è stato un miglioramento (risposte corrette 30%). Sia nel test iniziale che nel finale la percentuale di esempi corretti di equazione risulta elevata;

- Per quanto riguarda il significato di espressione la percentuale degli studenti che rispondono in maniera corretta eventualmente utilizzando un linguaggio poco adeguato si abbassa dal 48% al 30%. Anche analizzando gli esempi, prendendo in considerazione quelli giusti, si verifica una diminuzione percentuale, ma più lieve (del 4%). Inoltre emerge che nel test inizale la maggior parte degli studenti riporta un esempio letterale di espressione, mentre nel test finale quasi tutti forniscono un esempio numerico.

Consideriamo ora l'analisi delle risposte alle domande aperte su cosa voglia dire risolvere un'equazione e semplificare un'espressione. Esaminando le risposte alla prima domanda, emerge un notevole miglioramento di spiegazioni corrette dal 52% al 90%, mentre nelle risposte alla seconda domanda si evidenzia un progresso meno significativo (dal 48% al 55%). Inoltre, nel test finale, il 20% degli studenti dà la stessa risposta sia per spiegare cos'è un'equazione che per spiegare come si risolve (vedi Figura 4.2). Tale risposta è quella che ricorre più spesso tra quelli che non sono stati in grado di spiegare correttamente il significato di equazione nel test finale. Al contrario nel test iniziale nessuno confonde le due richieste.


Equazione:

Esempio

$2x + 5 - x = 0$

Significato

Dobbiamo trovare il valore di x

Cosa significa risolvere un'equazione?

Trovare il valore di x in modo che l'equazione risulti vera

Figura 4.2: Risposta sul significato e risoluzione di equazione.

4.2 Descrizione e analisi seconda parte

In questa sezione vengono messi a confronto il quesito 8 del test iniziale con i quesiti 2 e 3 del test finale. L'obiettivo principale dei quesiti era indagare la capacità di passare dalla rappresentazione geometrica a quella algebrica e viceversa.

Il quesito 2 del test finale è composto da tre domande aperte, nella prima è richiesto di rappresentare attraverso un'espressione algebrica l'area rappresentata in figura, nella seconda va scomposta l'espressione trovata in due fattori e nella terza bisogna dare una rappresentazione geometrica del prodotto ottenuto. Di seguito si riporta la risoluzione corretta del quesito 2 (vedi Figure 4.3 e 4.4) di una studentessa.

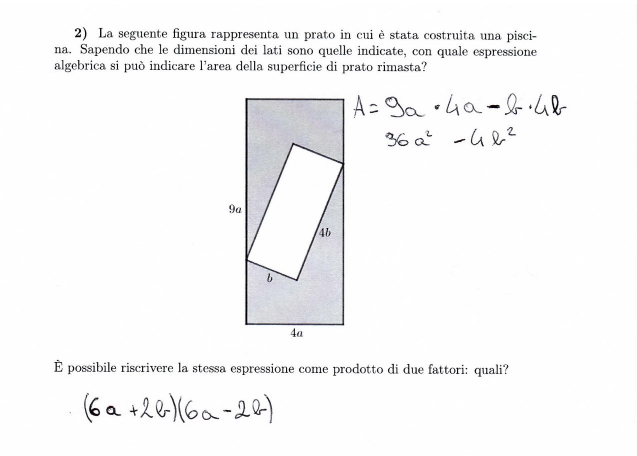


Figura 4.3: Risoluzione corretta quesito 2a e 2b.

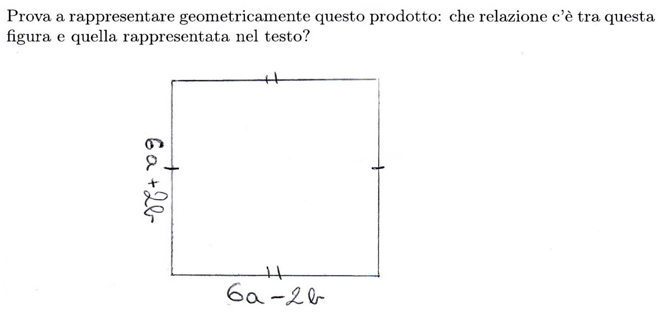


Figura 4.4: Risoluzione corretta quesito 2c.

Anche il quesito 3 è composto da tre domande aperte, nella prima è richiesto di rappresentare attraverso un'espressione algebrica il segmento dato in figura, nella seconda è richiesta l'impostazione di un'equazione e nella terza di trovare una soluzione e farne una verifica sia algebrica che geometrica. Di seguito si riporta la risoluzione corretta del quesito 3 (vedi Figura 4.5) eseguito da una studentessa, che aggiunge nella risposta alla terza domanda anche un'altra rappresentazione geometrica.

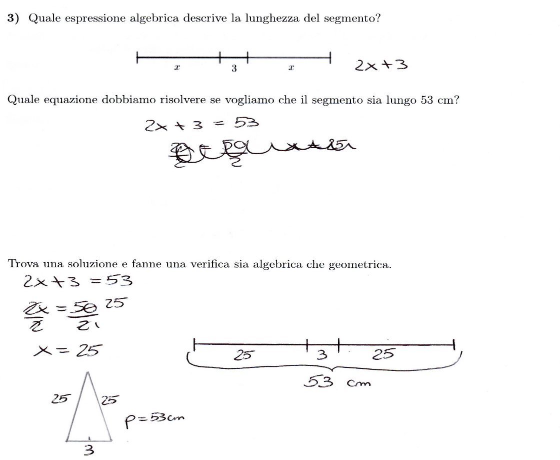


Figura 4.5: Risoluzione corretta quesito 3.

Nel quesito 8 del test iniziale è presente una differenza significativa: non viene data la figura nel testo. A partire dalla relazione, tra le dimensioni di un rettangolo data dal testo, si chiede rappresentare attraverso un'espressione algebrica il perimetro e l'area. Di seguito si riporta la risoluzione corretta del quesito 8 (vedi Figura 4.6).

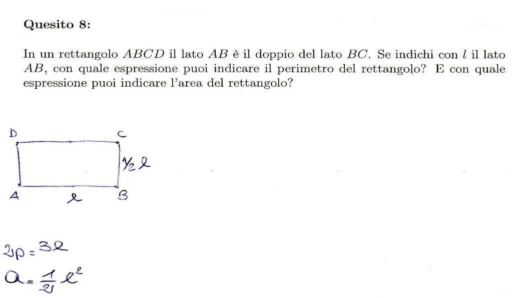


Figura 4.6: Risoluzione corretta quesito 8.

Quesito 2:

- Dell'80% degli studenti che risponde correttamente alla prima domanda, solo uno semplifica l'espressione trovata;

- La seconda domanda viene svolta dal 30% degli studenti; di questi solo la metà risponde correttamente, uno sbaglia completamente la risposta mentre gli altri due scompongono l'espressione in tre fattori invece che due, di cui uno numerico;

- La terza domanda viene svolta dal 15% degli studenti, di cui due rifanno la figura del testo, uno rappresenta correttamente quanto richiesto e un altro propone una figura diversa da quella richiesta (un rettangolo) ma comunque equivalente alla figura iniziale (si veda Figure 4.7 e 4.8).

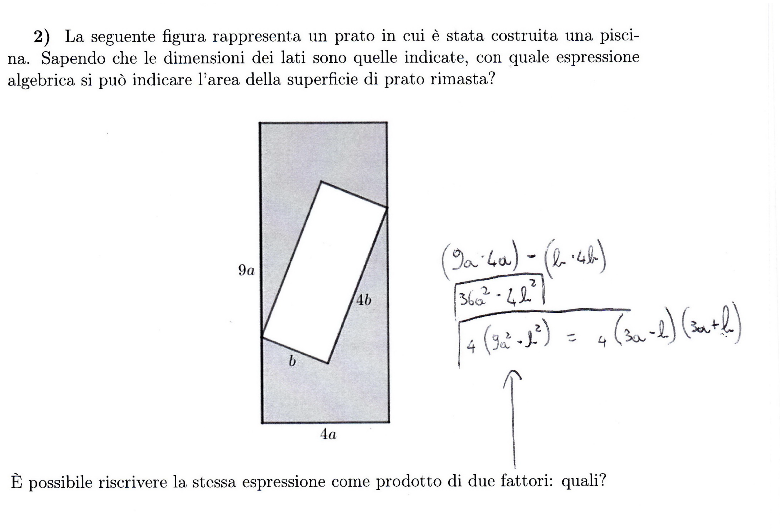


Figura 4.7: Risposta quesito 2a e 2b.

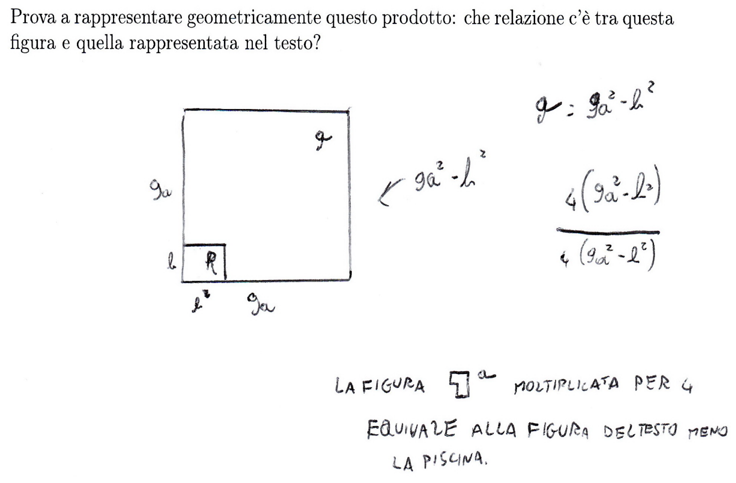
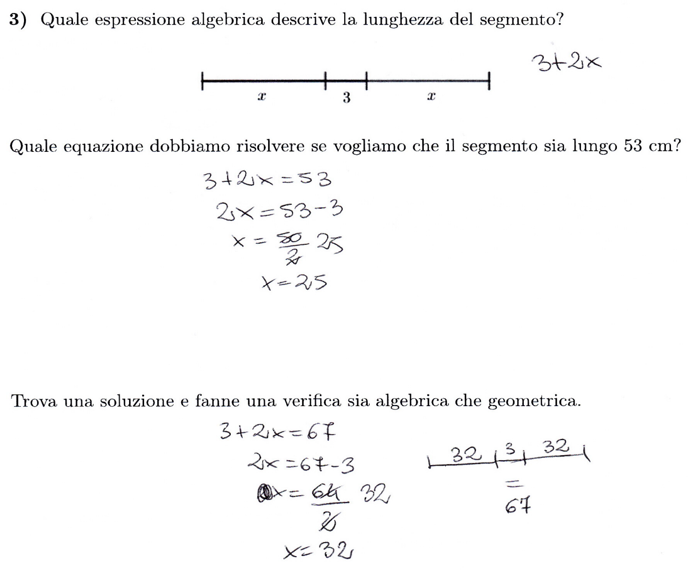


Figura 4.8: Risposta quesito 2c.

Quesito 3:

- Tutti svolgono correttamente la prima consegna;
- Il 90% riesce ad impostare correttamente l'equazione richiesta partendo dalla rappresentazione geometrica;
- Per quanto riguarda la terza consegna la metà degli studenti non esegue la verifica algebrica mentre il 20% non esegue quella geometrica. Solo l'11% degli studenti che impostano correttamente l'equazione non riesce a risolverla. Uno di questi imposta correttamente l'equazione al punto precedente e poi risolve un'equazione diversa (si veda Figura 4.9).


3) Quale espressione algebrica descrive la lunghezza del segmento?

x 3 x

$3+2x$

Quale equazione dobbiamo risolvere se vogliamo che il segmento sia lungo 53 cm?

$3+2x=53$

$2x=53-3$

$x=\frac{\cancel{50}}{\cancel{2}}\ 25$

$x=25$

Trova una soluzione e fanne una verifica sia algebrica che geometrica.

$3+2x=67$

$2x=67-3$

$x=\frac{\cancel{64}}{\cancel{2}}\ 32$

$x=32$

32 3 32

=

67

Figura 4.9: Risposta quesito 3.

Quesito 8:

- Il 32% degli studenti svolge correttamente tale quesito;
- Il 12% imposta la relazione tra le dimensioni del rettangolo in maniera inversa rispetto a come richiesto;
- Del 48% degli studenti che indica correttamente l'espressione dell'area, il 33% sbaglia l'espressione del perimetro;
- Il 44% fornisce un'espressione corretta per il perimetro.

Si osserva inoltre che solo il 25% degli studenti che riporta le espressioni corrette di perimetro o area, semplifica poi le espressioni facendo i conti.

Capitolo 5

Interpretazione dei risultati e conclusioni

A conclusione del lavoro di tesi, e per cercare di valutare l'utilità del percorso svolto, si è deciso di interpretare i dati emersi dai test, dalle registrazioni delle lezioni e dai protocolli delle attività svolte, all'interno del quadro delle "componenti dell'apprendimento della matematica". L'apprendimento della matematica infatti può essere visto come una combinazione di molteplici fattori, come riportato in [5, pag. 130]:

«In matematica, infatti, non basta aver costruito un concetto, ma occorre saperlo usare per effettuare calcoli o dare risposta ad esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi, occorre saper spiegare a sé stessi ed agli altri il concetto costruito e la strategia seguita, occorre saper far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di passare da una rappresentazione ad un'altra.»

Quindi nel processo di apprendimento della matematica è possibile individuare le seguenti "componenti":

- Apprendimento concettuale (capacità di costruzione cognitiva di un concetto);
- Apprendimento algoritmico (capacità di fare operazioni, di applicare formule o disegnare figure);
- Apprendimento strategico (capacità di risolvere problemi, di trovare strategie di risoluzione);

- Apprendimento comunicativo (capacità di esprimere idee matematiche giustificando, argomentando, dimostrando e rappresentando in modo efficace);
- Apprendimento semiotico (capacità di gestire le rappresentazioni di un concetto).

Quest'ultimi non sono né separabili, né indipendenti, né disgiunti e nemmeno esaustivi ma possono aiutare l'insegnante a scindere il problema dell'apprendimento e contemporaneamente a dargli spessore. Inoltre questa visione può dare una chiave di lettura per analizzare le cause degli errori degli studenti e può permettere di fare una valutazione più specifica dell'apprendimento e dell'azione didattica.
In quest'ottica, il percorso progettato in questa tesi lavora prevalentemente ed esplicitamente sulla componente semiotica. Di conseguenza, per quanto visto nel Capitolo 2, implicitamente mira a migliorare anche l'apprendimento concettuale. Inoltre la metodologia utilizzata in aula in piccoli gruppi, dà la possibilità agli studenti di confrontarsi migliorando la capacità di argomentare, rappresentare e giustificare mettendo in luce anche gli aspetti comunicativi dell'apprendimento.

5.1 Apprendimento concettuale

Per valutare l'impatto e le criticità del percorso svolto rispetto all'apprendimento concettuale è stata presa in considerazione l'analisi del quesito 1, proposto nella stessa forma nel questionario iniziale e finale, e riportata nella Sezione 4.1.

- Esempio di prodotto notevole: l'aumento della percentuale di studenti che forniscono un esempio scorretto in quanto scrivono solo un membro dell'equazione (si veda Figura 4.1), potrebbe essere dovuto dal fatto che, durante le attività in aula, veniva posta l'attenzione inizialmente ad un singolo membro e solo in un momento successivo si verificava che fosse uguale all'altro;
- Significato di equazione ed espressione: il fatto che la percentuale di risposte corrette sia aumentata per "equazione" e si sia abbassata per "espressione", può essere legato alla scelta delle attività svolte in aula che riguardavano più le identità e le equazioni rispetto alle espressioni;

- Esempio corretto di espressione: dal 71% letterale al 93% numerico. Questo cambiamento potrebbe essere dovuto dal fatto che nel test iniziale, diversamente rispetto a quello finale, era presente un'espressione letterale nel quesito 7. Inoltre potrebbe anche essere conseguenza del fatto che durante le lezioni l'uso delle lettere era stato riferito prevalentemente ai termini prodotto notevole, identità ed equazione.

Bisognerebbe quindi sottolineare ed evidenziare maggiormente il fatto che un prodotto notevole è un'identità e che quindi è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche sempre verificata. Inoltre bisognerebbe soffermarsi di più anche sul concetto di espressione perchè se gli studenti non hanno compreso correttamente il senso del termine, significa che non hanno la consapevolezza totale nemmeno del concetto di equazione e d'identità.

5.2 Apprendimento semiotico

Per valutare il percorso in termini di apprendimento semiotico, si è tenuto conto dei dati relativi ai quesiti 2, 3 del test finale, 8 del test iniziale (riportati nella Sezione 4.2) e alle attività svolte in aula, grazie al supporto delle registrazioni e dei fascicoli.

- Capacità di conversione: complessivamente dal confronto delle risposte esatte dei quesiti emerge un miglioramento nella capacità di convertire da un registro all'altro. Qualche studente dimostra anche una certa iniziativa, fornendo rappresentazioni diverse ma coerenti (vedi Figure 4.5 e 4.8);

- Semplificazione dell'espressione che indica un oggetto geometrico: nel quesito 2 anche se l'80% degli studenti scrive l'espressione giusta, solo il 6% di quest'ultimi la riduce ai minimi termini. Si riscontra la stessa cosa ma con percentuali leggermente differenti nel quesito 8. Ciò potrebbe essere dovuto dal fatto che l'esercizio non chiede esplicitamente di semplificare un'espressione data, ma chiede di trovare un'espressione che indichi, nel primo caso solo la misura dell'area richiesta, nel secondo la misura di area e perimetro;

- Rappresentazione geometrica di x nelle attività 4 e 5: ci sono state alcune problematiche comuni a tutti i gruppi, legate alla difficoltà di rappresentare geometricamente x non conoscendo il suo valore;

- Difficoltà nella rappresentazione geometrica bidimensionale di un prodotto avente un fattore numerico: nelle attività 4 e 5, quasi tutti rappresentano i monomi di primo grado in una dimensione attraverso dei segmenti, quindi interpretando il prodotto come somma ripetuta. Tale rappresentazione, di per sè corretta se costruita pensando al singolo monomio, non è funzionale alla rappresentazione del polinomio: nel momento in cui si vogliono "unire" le rappresentazioni geometriche dei singoli monomi è importante avere rappresentazioni omogenee (tutte aree o tutte lunghezze);

- Difficoltà nel passaggio da rappresentazione geometrica ad algebrica: nella prima attività, dopo aver rappresentato geometricamente un membro dell'uguaglianza diversi gruppi non riescono a verificare che la figura restante sia l'altro membro, oppure nella seconda e nella terza attività, una volta arrivati ad avere rappresentato geometricamente ciò che chiedeva la consegna, non riescono a esprimere la relazione algebrica.

In riferimento alle difficoltà sopra citate, sarebbe opportuno fin da subito mostrare le diverse rappresentazioni di uno stesso oggetto, ad esempio algebriche e geometriche, come interconvertibili. Il passaggio dinamico da una rappresentazione all'altra aiuta ad assumere più consapevolezza e ad allontanare la concezione statica di esse percepita dagli studenti durante l'insegnamento. Inoltre andrebbe evidenziato come tra diverse rappresentazioni di uno stesso oggetto vada scelta quella che meglio si presta al problema da affrontare.

5.3 Apprendimento comunicativo

Per valutare il percorso in termini di apprendimento comunicativo si è deciso di utilizzare quanto emerso dalle registrazioni e dai protocolli delle attività analizzati nella Sezione 3.3 del Capitolo 3.

- Utilizzo dei gruppi: ragionando ad alta voce insieme ai compagni si riescono a comprendere molte più cose, ognuno può dare un contributo interessante sia corretto che scorretto. La discussione stimola il ragionamento, l'argomentazione la riflessione;

- Attribuzione di ruoli: per le attività in ogni gruppo ognuno aveva un ruolo, questo si è rivelato importante per far si che partecipassero tutti;

- Difficoltà nell'esprimersi con un linguaggio formale: gli studenti spesso utilizzano un linguaggio informale che li ostacola nella comunicazione.

A fronte dell'efficacia del lavoro in gruppi sarebbe opportuno che gli insegnanti utilizzassero maggiormente questa metodologia, promuovendo così non solo l'apprendimento, ma anche la comunicazione e il confronto. Occorrerebbe stimolare gli studenti ad esprimersi con un linguaggio via via più formale allo scopo di migliorare la comunicazione. Per questo, sarebbe di fondamentale importanza mettere in relazione tra loro i vari tipi di linguaggi (matematico, naturale, "degli studenti") facendo confronti e mettendo in luce differenze e vantaggi.

5.4 Conclusioni

Questo lavoro di tesi mi ha permesso di riflettere e, di conseguenza, notare che la memorizzazione non porta alla comprensione del significato, il che vuol dire che gli elementi vengono ignorati e i dettagli possono essere confusi. Inoltre, questo tipo di apprendimento, può anche essere considerato "noioso" a causa della sua natura ripetitiva e della mancanza di concentrazione sulla comprensione e sulla creazione di connessioni. Gli studenti eseguono meccanicamente gli esercizi, coinvolgendo il loro cervello il meno possibile. Nell'apprendimento della matematica, la scarsa richiesta di pensiero e la mancanza di opportunità di lavorare per creare connessioni e dare un senso, rendono difficile per gli studenti comprendere e apprezzare l'argomento. Un modo efficace per fare meno affidamento sulla memoria, è quello di favorire la visualizzazione attraverso rappresentazioni geometriche, strada utilizzata in questo lavoro di sperimentazione. Le attività proposte si sono dimostrate alla portata degli studenti che collaborando le hanno perlopiù portate a termine. Anche singolarmente gli studenti hanno migliorato la capacità di passare dal registro algebrico a quello geometrico e, in qualche caso, hanno anche mostrato una certa iniziativa fornendo rappresentazioni corrette ed alternative a quelle richieste dal testo. Per questo credo che se l'insegnante insistesse maggiormente nel fornire diverse forme di rappresentazione, gli studenti riuscirebbero a capire e a interiorizzare meglio alcuni concetti, ma soprattutto collegherebbero due parti della stessa disciplina che spesso vedono come separate.

Appendice A

Indicazioni Nazionali

LICEO CLASSICO, LICEO DELLE SCIENZE UMANE, LICEO MUSICALE E COREUTICO, LICEO LINGUISTICO

MATEMATICA

PROFILO GENERALE E COMPETENZE

Al termine del percorso liceale lo studente dovrà padroneggiare i principali concetti e metodi di base della matematica, sia aventi valore intrinseco alla disciplina, sia connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale, in particolare del mondo fisico. Egli dovrà saper connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate e di approfondirne il significato.

Lo studente dovrà acquisire una consapevolezza critica dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, dovrà acquisire il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nel pensiero greco, la matematica infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento, la svolta a partire dal razionalismo illuministico che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Di qui i gruppi di concetti e metodi che lo studente dovrà padroneggiare:

1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui si definiscono i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);

2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, le funzioni elementari dell'analisi e le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale, con particolare riguardo per le loro relazioni con la fisica;

3) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi caratteristici della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica.

Dovrà inoltre avere familiarità con l'approccio assiomatico nella sua forma moderna e possedere i primi elementi della modellizzazione matematica, anche nell'ambito di fenomeni anche di natura diversa da quella fisica. Dovrà conoscere il concetto di modello matematico e la specificità del rapporto che esso istituisce tra matematica e realtà rispetto al rapporto tra matematica e fisica classica. Dovrà essere capace di costruire semplici modelli matematici di insiemi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione e il calcolo. Infine, lo studente dovrà acquisire concettualmente e saper usare elementarmente il principio di induzione matematica, per comprendere la natura dell'induzione matematica e la sua specificità rispetto all'induzione fisica.

Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali, la filosofia e la storia.

L'ampio spettro di contenuti affrontati richiede che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, è necessario evitare dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, soprattutto nel liceo classico, deve essere strettamente funzionale alla comprensione

1

in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

Il percorso didattico dovrà rendere lo studente progressivamente capace di acquisire e dominare i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni...), di conoscere le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, di applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.

Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso dovrà, quando ciò si rivelerà opportuno, favorire l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che dovrà essere introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.

OBBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

PRIMO BIENNIO

Aritmetica e algebra

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Sarà sviluppata la padronanza del calcolo (mentale, con carta e penna, con strumenti) con numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. In questa occasione saranno studiate le proprietà delle operazioni. Lo studio dell'algoritmo euclideo permetterà di approfondire la struttura dei numeri interi e di conoscere un esempio importante di procedimento algoritmico. Si introdurranno in maniera intuitiva i numeri reali (con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta), acquisendo familiarità con la rappresentazione esponenziale.

Saranno presentati gli elementi di base del calcolo letterale e si studieranno i polinomi e le operazioni tra di essi, evitando che la necessaria acquisizione di una capacità manipolativa degeneri in tecnicismi addestrativi.

Lo studente dovrà essere in grado di eseguire calcoli con semplici espressioni letterali sia per rappresentare e risolvere un problema, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.

Geometria

Nel primo biennio saranno sviluppati i fondamenti della geometria euclidea del piano. In questo contesto verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di *postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione*, mostrando come, a partire dagli *Elementi* di Euclide, essi abbiano permeato lo sviluppo della matematica occidentale. L'approccio euclideo non deve essere ridotto a metodologia assiomatica, come del resto non è mai stato storicamente.

Al teorema di Pitagora verrà dedicato uno spazio adeguato mettendone in luce gli aspetti geometrici e le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.

Saranno approfondite le principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e lo studente dovrà saper riconoscere le principali proprietà invarianti.

Saranno sviluppati i primi elementi di rappresentazione delle figure dello spazio.

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari verrà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

Verrà introdotto il metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non dovrà essere disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

Relazioni e funzioni

Lo studente saprà utilizzare il linguaggio degli insiemi e delle funzioni, anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare sarà in grado di descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni, e di ottenere informazioni e ricavare le soluzioni del problema di una rappresentazione matematica (o modello) di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa.

Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b$ e la rappresentazione delle rette nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.

Sarà introdotto il linguaggio delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.) e si studieranno e utilizzeranno le funzioni $f(x) = |x|$, $f(x) = a/x$, $f(x) = x^2$ sia in termini strettamente matematici sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. Lo studente saprà utilizzare il linguaggio della proporzionalità diretta e inversa.

Lo studente dovrà essere in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale).

Dati e previsioni

Lo studente dovrà essere in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (in particolare utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Dovrà quindi saper distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, lavorare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. A tale scopo sarà necessario conoscere le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità.

Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in contesti in cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.

Sarà introdotta la nozione di probabilità, con esempi entro un contesto classico e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Verrà introdotto il concetto di modello matematico.

SECONDO BIENNIO

Aritmetica e algebra

3

Lo studente saprà fattorizzare semplici polinomi e conoscerà il significato e semplici esempi di divisione con resto fra due polinomi, avendo consapevolezza dell'analogia con la divisione fra numeri interi.

Si introdurrà l'algebra dei vettori, evidenziandone il ruolo fondamentale nello studio dei fenomeni fisici.

Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π, e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero *e,* permetteranno di riprendere lo studio dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione verrà approfondita la formalizzazione dei numeri reali anche per iniziare lo studente alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico). Verrà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.

Geometria

Le sezioni coniche saranno presentate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Lo studente verrà introdotto alla comprensione della specificità dei due approcci, sintetico e analitico, allo studio della geometria.

Saranno studiate le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio.

Verrà sviluppata la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi.

Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche per sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.

Relazioni e funzioni

Lo studio delle equazioni polinomiali proseguirà con le equazioni di secondo grado; contemporaneamente si studieranno i grafici delle funzioni quadratiche. Sarà affrontato il problema del numero delle soluzioni delle equazioni polinomiali.

Lo studente dovrà avere una conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi.

Opportuni esempi permetteranno di introdurre la funzione esponenziale e la funzione logaritmo. Lo studente dovrà essere in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline. Ciò potrà essere fatto sia in un contesto discreto sia continuo. Le equazioni e disequazioni in cui compaiono queste funzioni saranno studiate soltanto in casi semplici e significativi.

Dati e previsioni

Come nel primo biennio, lo studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in contesti via via più complessi in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti. Saranno studiate le distribuzioni doppie condizionate e marginali, i concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.

Saranno studiate la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni.

Sarà approfondito il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

ANNO FINALE

Geometria

Il percorso si concluderà con lo studio delle proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri). Se l'insegnante lo riterrà opportuno potrà introdurre i primi elementi di geometria analitica dello spazio.

Relazioni e funzioni

Anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline, lo studente proseguirà lo studio di funzioni significative.

Sarà introdotto il concetto di limite.

Saranno introdotti i principali concetti del calcolo infinitesimale – e, in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità – anche in relazione con le problematiche in cui è nato (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non bisognerà restringersi agli aspetti tecnici del calcolo, che saranno limitati alla derivazione delle funzioni razionali, delle funzioni notevoli già studiate, di semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, e all'integrazione delle funzioni elementari. Si tratterà soprattutto di approfondirne il ruolo di strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. In particolare, saranno introdotte l'idea generale di ottimizzazione e le sue applicazioni in numerosi contesti.

Dati e previsioni

Saranno studiate le caratteristiche di alcune distribuzioni di probabilità (in particolare, la distribuzione binomiale e qualche esempio di distribuzione continua).

Verrà ulteriormente approfondito il concetto di modello matematico in relazione con le nuove nozioni acquisite.

Appendice B

Test iniziale

TEST MATEMATICA Settembre 2018

NOME E COGNOME: CLASSE:

Rispondere ai seguenti quesiti motivando sempre la risposta.

Quesito 1:

Per ciascuno dei seguenti casi, scrivi un esempio e prova a spiegare il significato del termine.

Identità:

Esempio

Significato

Prodotto notevole:

Esempio

Significato

Equazione:

Esempio

Significato

Espressione:

Esempio

Significato

Quesito 2:

$3a + 12 - a = 4 + 2a + \frac{16}{2}$ è un'identità?

Spiegazione

Quesito 3:

Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa.

A. $2(3 + 4) = 6 + 8$

B. $3 - 5(4 - 2) = 4(3 - 1) + 2 - 5$

C. $3^3(27 : 3^2) = 81$

D. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(9 - 5) = \frac{7}{4} + 5(\frac{1}{2} - 1)$

Spiegazione

Quesito 4:

Risolvere la seguente equazione:

$$5(3-x)-2(x+1)=-1$$

Cosa significa risolvere un'equazione?

Quesito 5:

Quali delle seguenti uguaglianze NON sono identità?

A. $b-1+3-b=1+b-1$

B. $2y-4+2(y-1)=4y-6$

C. $3x+3(x-2)=6(x-1)$

D. $a(a+b)=a+b$

Spiegazione

Quesito 6:

Il valore $x=3$ è soluzione della seguente equazione?

$$x^3+1=\frac{1}{2}(x^2-2)+x$$

Spiegazione

Quesito 7:

Semplificare la seguente espressione:

$$6(x-2)+5x^2-5(x+1)-2(x^2-3)+5$$

Cosa significa semplificare un'espressione?

Quesito 8:

In un rettangolo $ABCD$ il lato AB è il doppio del lato BC. Se indichi con l il lato AB, con quale espressione puoi indicare il perimetro del rettangolo? E con quale espressione puoi indicare l'area del rettangolo?

Appendice C

Test finale

TEST MATEMATICA Novembre 2018

NOME E COGNOME: CLASSE:

Esercizi

1) Per ciascuno dei seguenti casi, scrivi un esempio e prova a spiegare il significato del termine.

Identità:

Esempio

Significato

Prodotto notevole:

Esempio

Significato

Equazione:

Esempio

Significato

Cosa significa risolvere un'equazione?

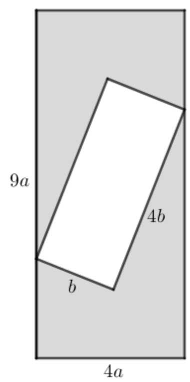
Espressione:

Esempio

Significato

Cosa significa semplificare un'espressione?

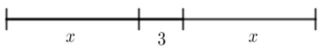
2) La seguente figura rappresenta un prato in cui è stata costruita una piscina. Sapendo che le dimensioni dei lati sono quelle indicate, con quale espressione algebrica si può indicare l'area della superficie di prato rimasta?



È possibile riscrivere la stessa espressione come prodotto di due fattori: quali?

Prova a rappresentare geometricamente questo prodotto: che relazione c'è tra questa figura e quella rappresentata nel testo?

3) Quale espressione algebrica descrive la lunghezza del segmento?



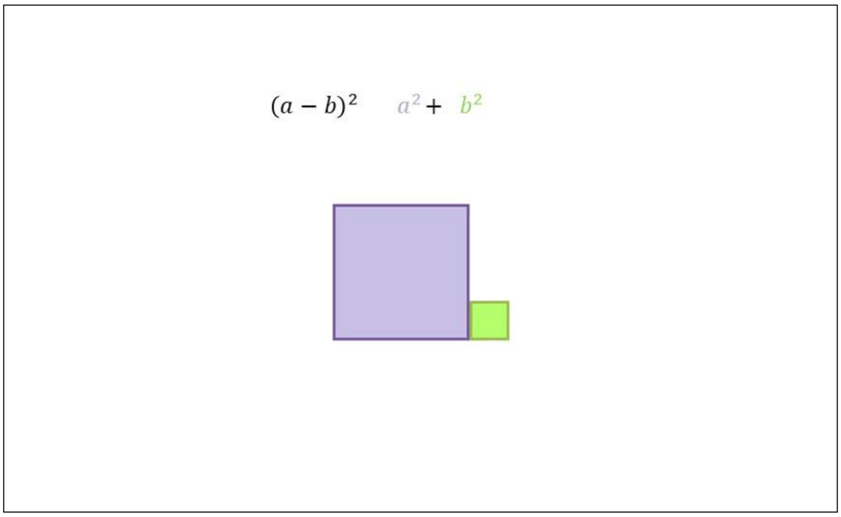
Quale equazione dobbiamo risolvere se vogliamo che il segmento sia lungo 53 cm?

Trova una soluzione e fanne una verifica sia algebrica che geometrica.

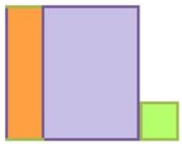
Appendice D

Svolgimento delle attività

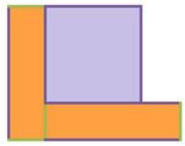
D.1 Svolgimento attività 1



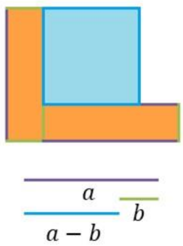
$(a-b)^2 \quad a^2 + b^2 - a \cdot b$



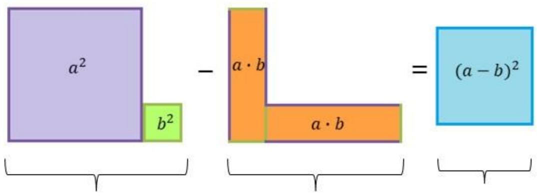
$(a-b)^2 \quad a^2 + b^2 - a \cdot b - a \cdot b$



$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - a \cdot b - a \cdot b$$

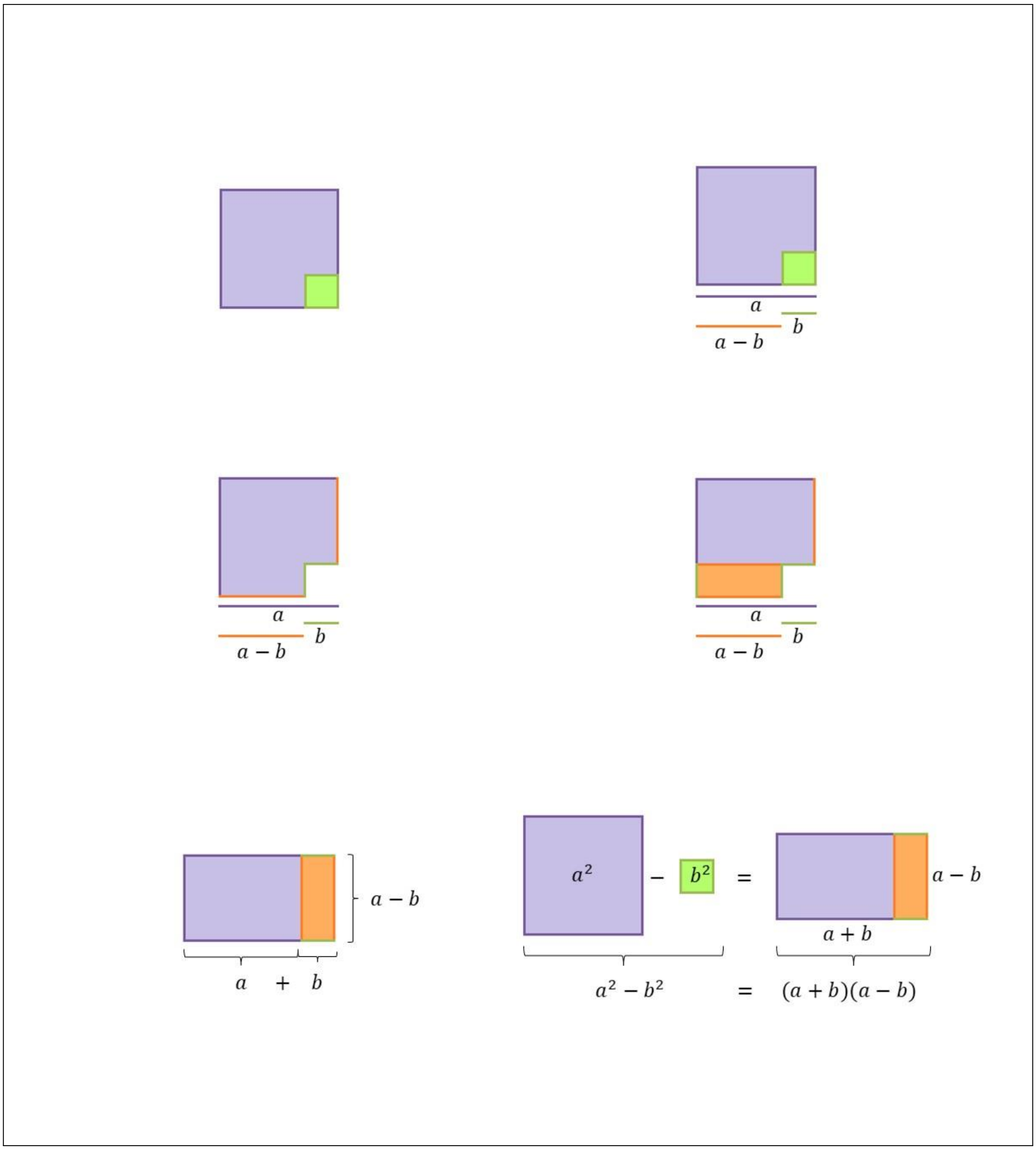


$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - a \cdot b - a \cdot b$$

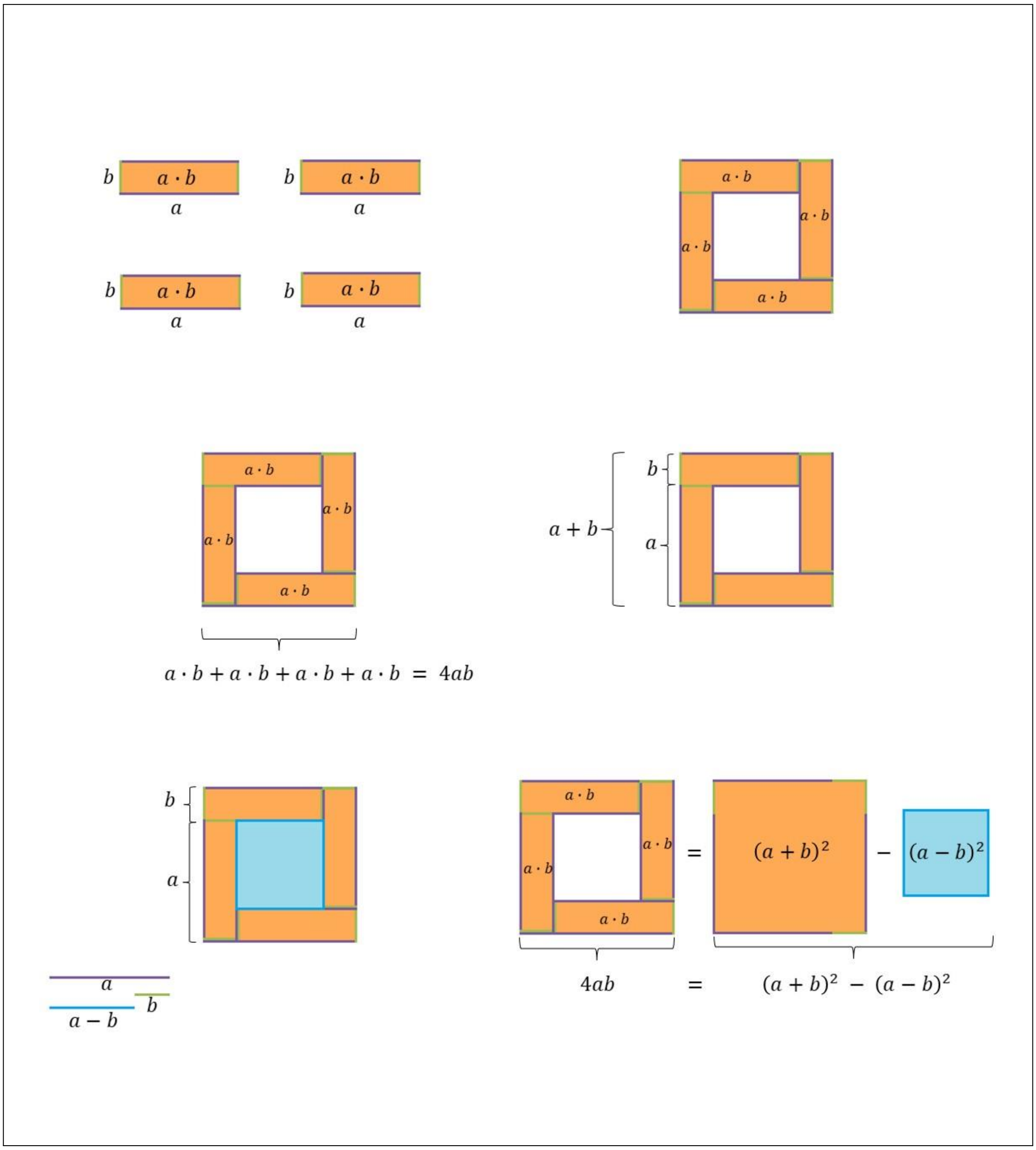


$$a^2 + b^2 \quad - \quad 2ab \quad = \quad (a-b)^2$$

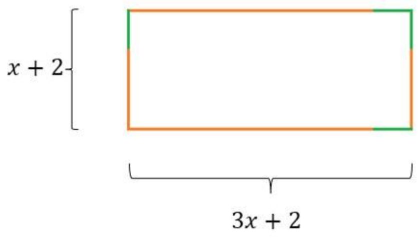
D.2 Svolgimento attività 2

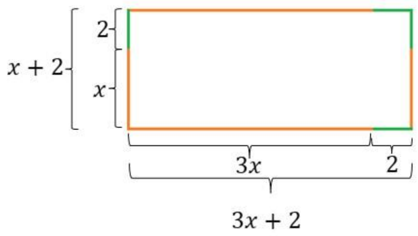


D.3 Svolgimento attività 3

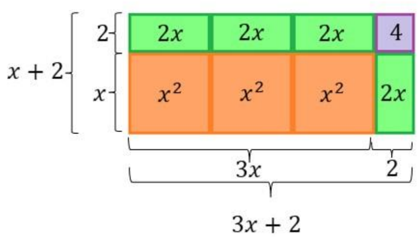


D.4 Svolgimento attività 4

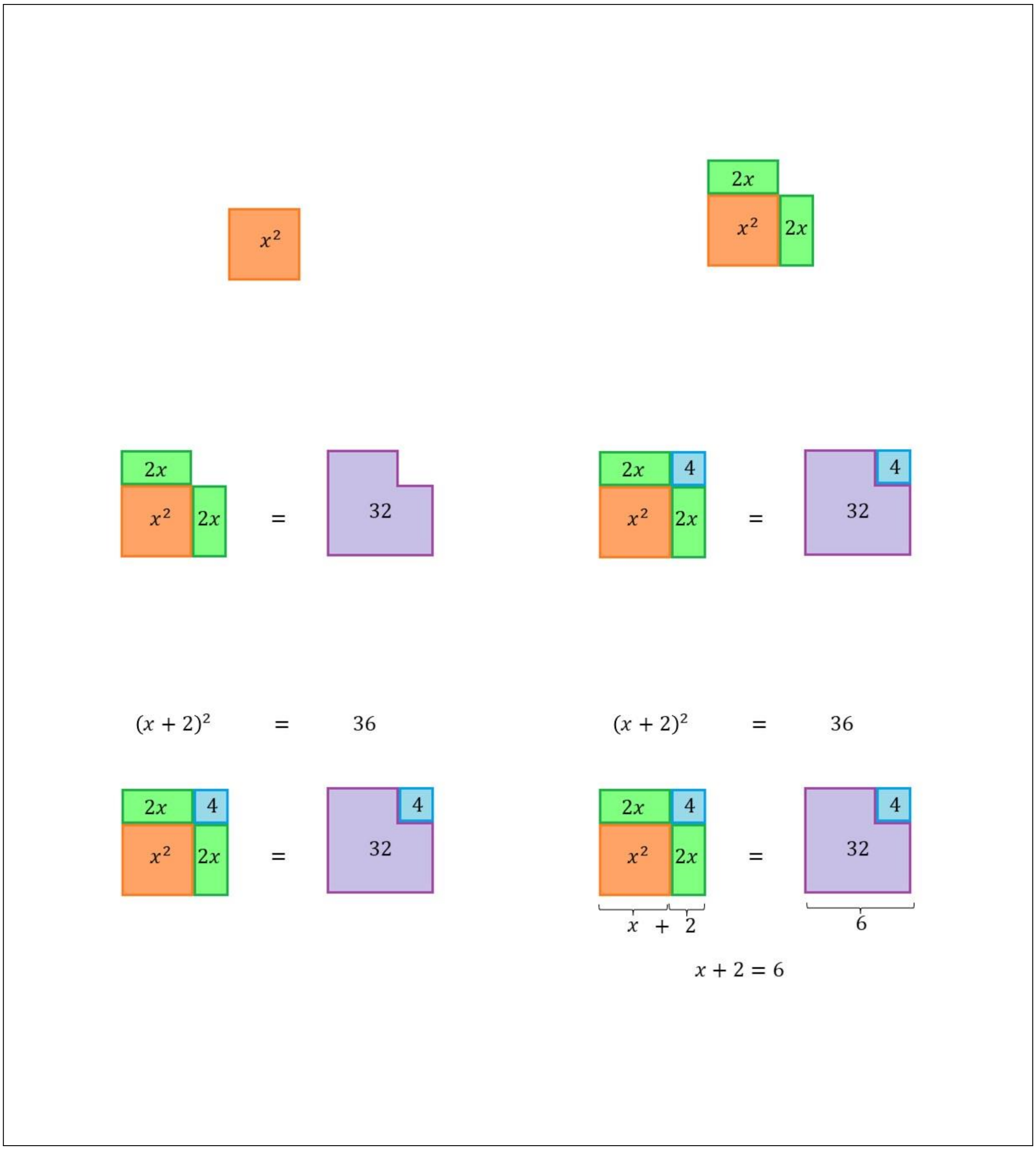




$$(3x + 2)(x + 2) = 3x^2 + 8x + 4$$



D.5 Svolgimento attività 5



Bibliografia

[1] Arcavi A., *Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics*, For the Learning of Mathematics, 14 (3), (1994), 24-35.

[2] Arzarello F., *L'apprendistato al senso dei simboli in algebra*, in Sintesi delle relazioni, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 17A-17B (5), 535-554.

[3] Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *L'Algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto strategico TID del CNR, Quaderno n.6, (1994).

[4] Bolondi G., Fandiño Pinilla M. I., *I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*, EdiSES S.r.l., Napoli (2012).

[5] Bolondi G., Fandiño Pinilla M. I., *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*, Didattica della matematica e azioni d'aula. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica, (2008), 129-131.

[6] Brown P., Evans M., Hunt D., McIntosh J., Pender B., Ramagge J., *Special expansions and algebraic fractions*, in Number and Algebra: Module 25, The Improving Mathematics Education in Schools (TIMES) Project, (2011).

[7] Cartiglia M., Furinghetti F., Paola D., *Pattern of reasoning in classroom*, in Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (2004), 287-294.

[8] Clifford A., Son J.-W., *Complete the What?*, in Mathematics Teacher, 112 (3), (2018), 218-225.

[9] D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Iori M., *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo insegnamento-apprendimento della matemtica*, Pitagora Editrice, Bologna (2013).

[10] De Finetti B., *Il "saper vedere" in Matematica*, La Matematica nella Società e nella Cultura Rivista dell'Unione Matematica Italiana Serie I, 8, (2015), 299-408.

[11] Duval R., *Ecarts sémantiques et cohérence mathématique*, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1 (1988), 7-25.

[12] Fischbein E., *The Theory of Figural Concepts*, Educational Studies in Mathematics, 24, (1993), 139-162.

[13] Notarangelo L., Ferrara N., *Al-Khwarizmi e il suo trattato: "L'al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala"*, Tesina di divulgazione e museologia della matematica, Università degli studi di Ferrara, (2016-2017), reperibile alla pagina web: `http://dm.unife.it/divulgazione/2016/intr_arabi.php`.

[14] Rashed R., *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*, BSPS, Springer, Dordrecht (1994).

[15] Roero C. S., *Algebra e Aritmetica nel Medioevo islamico*, in Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente (2017), 7-44.

[16] Sfard, A., *The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives*, Journal of Mathematical Behavior, 14 (1), (1995), 15-40.

[17] Simon M. A., *Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search for a Sense of Knowing*, Educational Studies in Mathematics, 30, (1996), 197-209.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutti coloro che mi hanno aiutato nella stesura della tesi con suggerimenti, critiche ed osservazioni: a loro va la mia gratitudine.

Desidero ringraziare in primis la Professoressa Alessia Cattabriga per la sua disponibilità, l'enorme professionalità con cui mi ha seguita e per le opportunità che mi sono state date nel condurre la mia ricerca per la tesi di laurea.

Ringrazio inoltre il Professor Carlo Bertoni e tutti gli studenti della classe 3I del Liceo Copernico per la collaborazione, il tempo e l'attenzione che mi hanno dedicato.

Ringrazio la mia famiglia che è sempre stata presente in ogni momento di gioia e di sconforto, è anche grazie al loro sostegno e al loro incoraggiamento se sono riuscita a raggiungere la fine di questo percorso.

Ringrazio il mio ragazzo per la pazienza, per aver sempre creduto in me e per l'amore che mi ha donato.

Un ringraziamento speciale va alla mia collega, coinquilina ma soprattutto splendida amica Ilaria per aver sempre trovato il modo giusto per tirarmi su, per avermi supportata nei momenti di scoraggiamento ma soprattutto per avermi coccolata tutte le volte che ne ho avuto bisogno.

Una dedica speciale ai miei amici, in particolare a Costanza, che ogni giorno hanno condiviso con me gioie, sacrifici e successi, senza voltarmi mai le spalle. L'affetto e il sostegno che mi hanno dimostrato rendono questo traguardo ancora più prezioso.