

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Lagrangiane di ordine superiore e sistemi instabili

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Antonio Sandroni

Anno Accademico 2017/2018

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Meccanica | 1 |
| 1.1 | Introduzione | 1 |
| 1.2 | Elementi di meccanica classica | 2 |
| 1.2.1 | Abraham-Lorentz | 2 |
| 1.2.2 | Meccanica Newtoniana | 3 |
| 1.2.3 | Meccanica Lagrangiana | 3 |
| 1.2.4 | Meccanica Hamiltoniana | 5 |
| 1.3 | Analisi dei vincoli | 7 |
| 1.3.1 | Un esempio di vincoli nascosti | 7 |
| 1.3.2 | Vincoli primari | 8 |
| 1.3.3 | Dirac | 8 |
| 1.3.4 | Vincoli secondari | 10 |
| 1.3.5 | Vincoli di Prima e Seconda classe | 13 |
| 1.3.6 | Parentesi di Dirac | 13 |
| 1.3.7 | Gauge | 15 |
| 1.4 | Conteggio dei gradi di libertà | 16 |
| 1.5 | Esempio | 16 |
| 2 | Costruzione di Ostrogradsky | 19 |
| 2.1 | Introduzione | 19 |
| 2.2 | Derivate di ordine 2 | 19 |
| 2.3 | Derivate di ordine n | 21 |
| 2.4 | Esempi | 23 |
| 2.4.1 | Particella libera | 23 |
| 2.4.2 | Oscillatore armonico | 24 |
| 2.4.3 | Oscillatore di Pais-Uhlenbeck | 26 |
| 3 | Studio instabilità | 27 |
| 3.1 | Lagrangiana di ordine 2 non degenera con vincoli di seconda classe | 27 |
| 3.1.1 | Pais-Uhlenbeck vincolato | 28 |
| 3.2 | Lagrangiane di ordine N con M variabili ausiliarie | 30 |
| 3.3 | Riduzione spazio delle fasi | 32 |
| 3.3.1 | Ghostbusters: condizioni generali | 33 |
| 4 | Sistemi degeneri | 36 |
| 4.0.1 | Lagrangiane per EOMs del terzo ordine | 36 |
| 4.0.2 | Lagrangiane per EOMs di ordine dispari | 40 |

5 Conclusioni
Bibliografia42

Sommario

Quando nella descrizione di un sistema fisico si fa uso del secondo principio della dinamica di Newton, si ottengono equazioni del moto che contengono al massimo derivate del secondo ordine rispetto al tempo. Quando le equazioni vengono ricavate da principi variazionali tramite la funzione Lagrangiana, si richiede che questa contenga al massimo derivate prime delle coordinate in modo tale che le equazioni del moto siano al massimo di ordine due. La motivazione che porta a rispettare questa limitazione proviene dai lavori di Mikhail Ostrogradsky il quale, nella sua formulazione del formalismo Hamiltoniano proveniente da Lagrangiane con derivate superiori al primo ordine mostra come la funzione Hamiltoniana soffra di una particolare instabilità, data dalla sua dipendenza lineare nei momenti. Sono stati riportati i risultati originali di Ostrogradsky che si applicano a Lagrangiane non degeneri, seguiti da alcuni esempi che illustrano le problematiche che si presentano. Al fine di studiare l'instabilità si rende necessaria una analisi e una classificazione dei tipi di vincoli che possono essere presenti; si arriverà alla conclusione che l'unico modo per poter rimuovere la instabilità è dato dall'inserire vincoli nello spazio delle fasi che possano limitare le variabili responsabili della patologia. Sarà preso in esame il caso delle Lagrangiane non degeneri di ordine due per le quali si mostreranno le condizioni sotto le quali la patologia possa essere curata. Infine viene introdotto il ruolo delle Lagrangiane degeneri dalle quali discendono i sistemi descritti da equazioni del moto di ordine dispari.

Capitolo 1

Meccanica

1.1 Introduzione

La maggior parte dei fenomeni fisici, almeno quelli descritti dalla meccanica classica, è governata da equazioni differenziali del secondo ordine come suggerisce la seconda legge di Newton:

$$F = ma \tag{1.1}$$

in cui l'accelerazione è la derivata seconda della posizione $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Fu quella di Newton solo una scelta fortunata o nasconde qualcosa di più profondo? È sorprendente come una assunzione fatta tanto tempo fa, quella di non aver bisogno di derivate di ordine maggiore di due, sia stata dimenticata a causa della grande mole di successi che la fisica ha riscontrato fino ad oggi. Per fare luce bisogna munirsi dei potenti strumenti fornitici da Lagrange e Hamilton, necessari per una descrizione efficace di complicati sistemi fisici. Contemporaneamente ai lavori di Hamilton sulla meccanica classica, oggi fondamentali, nel 1850 il fisico-matematico ucraino Mikhail Ostrogradsky pubblicò un lavoro nel quale generalizzò la costruzione del formalismo canonico a sistemi descritti da derivate rispetto al tempo di ordine più alto di due, fino ad un ordine n . Tale lavoro rivelò che tali sistemi hanno una instabilità lineare, il che rende il loro uso non conveniente in fisica. Tutto ciò consolida l'idea che il lavoro di Newton appoggi su un solido e sicuro terreno oltre il quale sorgono problematiche con le quali non è semplice fare i conti.

Vedremo come la generalizzazione di Ostrogradsky permetta di passare dal formalismo lagrangiano a quello hamiltoniano e come la presenza di derivate di ordine superiore in Lagrangiane non degeneri porti alla presenza della instabilità nella relativa Hamiltoniana. Ovviamente la Lagrangiana può includere derivate di ordine superiore rispetto al tempo se queste possono essere scritte come derivate totali rispetto al tempo di una qualche funzione, poiché ciò non influirebbe sulle equazioni del moto.

1.2 Elementi di meccanica classica

1.2.1 Abraham-Lorentz

Teorie descritte da equazioni del moto di ordine superiore al secondo si possono già incontrare nell'ambito della elettrodinamica classica; la forza di Abraham-Lorentz descrive la forza di richiamo che agisce su una particella di carica q e massa m che accelera, causata dalla propria emissione di radiazione elettromagnetica. Sebbene non sia valida per velocità prossime a quelle della luce (regime relativistico) mostra come la presenza di derivate rispetto al tempo superiore al secondo porti a certe patologie nelle soluzioni del moto. Con la forza di reazione radiativa

$$F_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{a} \quad (1.2)$$

la equazione del moto uno-dimensionale in presenza di una forza esterna $F(t)$ ha la forma:

$$a - \tau \dot{a} = f(t), \quad (1.3)$$

dove $\tau = \mu_0 q^2 / 6\pi c m$ e $f(t) = F(t)/m$. Siccome questa equazione è del terzo ordine della posizione rispetto al tempo come condizioni iniziali sono necessarie posizione, velocità ed accelerazione. In termini di $a(t)$ possiamo risolvere una equazione differenziale del primo ordine e successivamente determinare la soluzione per la posizione con due ulteriori condizioni iniziali. Per risolvere (1.3) sia $a(t) = e^{t/\tau} a_1(t)$, così $a - \tau \dot{a} = -\tau e^{t/\tau} \dot{a}_1$. In termini di a_1 , (1.3) prende la forma

$$\dot{a}_1 = -\tau^{-1} e^{-t/\tau} f(t) \quad (1.4)$$

la cui soluzione generale è

$$a_1(t) = a_1(\infty) + \tau^{-1} \int_t^\infty e^{-t'/\tau} f(t') dt' \quad (1.5)$$

ponendo $a_1(\infty)$ uguale alla costante di integrazione. Infine

$$a(t) = e^{t/\tau} a_1(\infty) + \tau^{-1} \int_t^\infty e^{(t-t')/\tau} f(t') dt' \quad (1.6)$$

Vediamo che la accelerazione per $t \rightarrow \infty$ diverge a meno che non scegliamo $a_1(\infty) = 0$. Tale condizione al contorno esclude le cosiddette soluzioni di “runaway” e ci riconsegna del senso fisico. Si manifesta anche ciò che viene chiamato “pre-accelerazione”, infatti la accelerazione ad un tempo t dipende dalla forza valutata in tempi $t' > t$. Questa dipendenza è comunque limitata, infatti il contributo a $a(t)$ da parte della forza per tempi $t' > t$ è soppresso dal fattore $e^{(t-t')/\tau}$.

L'approccio più generale a sistemi descritti da equazioni del moto di ordine superiore al secondo proviene dal lavoro di Ostrogradsky il quale fa uso del formalismo lagrangiano ed hamiltoniano.

1.2.2 Meccanica Newtoniana

La descrizione di Newton basata sulle tre omonime leggi è abbastanza efficace nella descrizione degli oggetti macroscopici ma rivela le sue debolezze quando la descrizione coinvolge un alto numero di oggetti in quanto, per ognuno di questi, va definita la relazione (1.1). Per definire l'unicità della soluzione è necessario fornire una coppia di condizioni iniziali sulla posizione e la velocità e, con un alto numero di corpi, tutto ciò diventa complicato molto velocemente.

Tuttavia è molto efficace, ed un esempio tra i più semplici è l'oscillatore armonico. Un oggetto di massa m attaccato ad una molla di coefficiente k è soggetto alla forza

$$F = -kx \quad (1.7)$$

e secondo la legge di Newton

$$a = -\frac{k}{m}x \quad (1.8)$$

ed è facile determinare che la soluzione è

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad (1.9)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.10)$$

con A , ampiezza, e ϕ , fase, definite dalle condizioni iniziali.

1.2.3 Meccanica Lagrangiana

Possiamo trattare tale problema anche senza l'utilizzo esplicito della equazione di Newton, usando le equazioni di Lagrange.

Ricaviamo le equazioni di Lagrange da un principio variazionale, consideriamo la quantità

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$$

che è chiamata azione ed è un funzionale dipendente da $x(t)$.

Consideriamo una funzione $x(t)$ per $t_1 < t < t_2$ i cui punti estremi sono fissati $x(t_1) = x_1$ e $x(t_2) = x_2$ dove x_1 e x_2 sono noti e arbitraria per tutti gli altri istanti di tempo. Quale funzione $x(t)$ rende il valore di S stazionario?

Teorema: Se la funzione $x_0(t)$ rende il valore di S stazionario, allora

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} = \frac{\partial L}{\partial x_0} \quad (1.11)$$

Se $x_0(t)$ soddisfa il precedente requisito, allora qualsiasi funzione molto vicina a $x_0(t)$, con gli stessi punti estremi, lascia invariato il valore di S almeno al primo ordine, questa è di fatto la definizione di valore stazionario. Se $f(b)$ è un valore stazionario, $f(b + \epsilon)$ differisce da $f(b)$ solo al secondo ordine rispetto a ϵ ($f'(b) = 0$) quindi non ci sono termini del primo ordine nello sviluppo di $x_0(t)$.

Consideriamo $x_a(t) = x_0(t) + a\beta(t)$ dove $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$ per fissare i punti estremi ma

arbitraria all'interno. L'azione $S[x_a(t)]$ dipende solo da a e chiediamo che S non cambi al primo ordine in a .

$$\frac{d}{da}S[x_a(t)] = \frac{d}{da} \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{da} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a} \right) dt \quad (1.12)$$

quindi a influenza S attraverso $x(t)$. Dalla equazione abbiamo

$$\frac{\partial x_a}{\partial a} = \beta \quad \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a} = \dot{\beta}. \quad (1.13)$$

così l'equazione (1.12) diventa

$$\frac{d}{da}S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_a} \beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{\beta} \right) dt \quad (1.14)$$

integrando il secondo termine per parti

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{\beta} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \beta - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{da}S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \beta \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (1.16)$$

ma $\beta(t_1) = 0$ e $\beta(t_2) = 0$ quindi l'ultimo termine si annulla; sappiamo che $\frac{d}{da}S[x_a(t)]$ deve essere zero per ogni funzione $\beta(t)$ perchè $x_0(t)$ assicura il valore stazionario. Il solo modo affinché ciò valga è che la quantità tra parentesi sia nulla, se valutata in $a = 0$; quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} = \frac{\partial L}{\partial x_0} \quad (1.17)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi conseguenza del principio di minima azione.

1.2.4 Meccanica Hamiltoniana

Partendo dalla costruzione Lagrangiana della meccanica costruiamo la formulazione Hamiltoniana la quale è molto più potente non tanto nella meccanica classica quanto in altre aree della fisica quali la meccanica statistica e la meccanica quantistica; nella formulazione Lagrangiana un sistema con n gradi di libertà possiede n equazioni del moto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (1.18)$$

che sono equazioni differenziali del secondo ordine la cui soluzione è determinata da $2n$ condizioni iniziali. Da un punto di vista fisico un sistema con n gradi di libertà è un sistema in n coordinate indipendenti $x(t)_i$ mentre \dot{x}_i appaiono solo come le derivate rispetto al tempo delle $x(t)_i$.

La formulazione Hamiltoniana è fondata sulla descrizione tramite equazioni differenziali del primo ordine; dato che le condizioni iniziali erano $2n$, devo avere $2n$ eq. differenziali del primo ordine espresse in termine delle $2n$ variabili indipendenti. Possiamo considerare n delle totali coordinate come coordinate generalizzate q_i e le altre n come momenti generalizzati p_i introdotte dalla relazione

$$p_a = \frac{\partial L(q^a, \dot{q}^a, t)}{\partial \dot{q}^a} \quad (1.19)$$

le quantità (q, p) sono chiamate *variabili canoniche*. La funzione Hamiltoniana la si ottiene operando una *trasformazione di Legendre*

$$H(t, q^a, p^a) = p_a \dot{q}^a - L(t, q^a, \dot{q}^a) \quad (1.20)$$

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \quad \dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \quad (1.21)$$

le $2n$ equazioni (1.21), del primo ordine, sostituiscono le n equazioni del secondo ordine di Lagrange. Equivalentemente otteniamo le (1.21) da (1.18)

$$\dot{p}_a = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial p_\beta \dot{q}^\beta - L(t, q^\beta, \dot{q}^\beta)}{\partial p_a} = \quad (1.23)$$

$$\dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial p_a} = \dot{q}^a \quad (1.24)$$

assumendo che la Lagrangiana non dipenda esplicitamente dai momenti p_a . Se la Lagrangiana è data da $L = T - U$, la interpretazione della Hamiltoniana è data da $H = T + U$ ovvero indica l'energia totale del sistema.

Tutte le equazioni del moto derivano dalla Hamiltoniana, tramite essa possiamo calcolare l'evoluzione temporale di una qualsiasi funzione $F(q^a, p_a)$; per dimostrare ciò introduciamo le *Parenthesi di Poisson*.

La parentesi di Poisson di due funzioni f e g che dipendono dalle coordinate q^a e p_a è data dalla seguente espressione

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a} \quad (1.25)$$

e soddisfano le seguenti proprietà:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (1.26)$$

$$\{f + g, z\} = \{f, z\} + \{g, z\} \quad (1.27)$$

$$\{fg, z\} = f\{g, z\} + \{f, z\}g \quad (1.28)$$

$$\{\{f, g\}, z\} + \{\{g, z\}, f\} + \{\{z, f\}, g\} = 0 \quad (1.29)$$

inoltre permettono di scrivere la evoluzione temporale di una qualsiasi funzione delle variabili canoniche come

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{q}^a \frac{\partial F}{\partial q^a} + \dot{p}_a \frac{\partial F}{\partial p_a} = \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^a} \frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a} \frac{\partial H}{\partial q^a} = \quad (1.31)$$

$$\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.32)$$

e quindi

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.33)$$

1.3 Analisi dei vincoli

Procediamo alla analisi e alla classificazione dei vincoli presenti in un sistema descritto dal formalismo Hamiltoniano.

1.3.1 Un esempio di vincoli nascosti

Abbiamo appena visto la potenza della formulazione Hamiltoniana. Un'altra cosa che possiamo ricavare da tale formulazione è il conteggio dei gradi di libertà (gdl) di una teoria; potrebbero infatti esserci dei gradi di libertà ridondanti che la presenza di vincoli riduce in numero. Per determinare il numero dei *gdl* fisici è necessario compiere una analisi dei vincoli.

Il passaggio dalla formulazione Lagrangiana della meccanica a quella Hamiltoniana avviene tramite la trasformazione di Legendre della funzione di Lagrange; come vedremo in questo capitolo, esistono dei casi in cui questa trasformazione non è ben definita e i passaggi per ricavare la Hamiltoniana non sono gli stessi che abbiamo usato nella usuale dinamica.

Consideriamo come esempio un sistema molto semplice descritto dalla seguente Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2 \quad (1.34)$$

le cui equazioni del moto sono:

$$\ddot{x} - \dot{y} = 0 \quad \dot{x} - y = 0 \quad (1.35)$$

le quali non sono indipendenti tra di loro, infatti la prima è la derivata rispetto al tempo della seconda. Possiamo considerare la seconda come un vincolo e non una equazione del moto. Le soluzioni avranno la forma:

$$x(t) = \alpha + \beta t + \frac{\gamma}{2}t^2 + \phi(t) \quad y(t) = \beta + \gamma t + \dot{\phi}(t) \quad (1.36)$$

fissando quattro condizioni iniziali $x(0) = \alpha$, $y(0) = \beta$, $\dot{x}(0) = \beta$ e $\dot{y}(0) = \gamma$ la soluzione generale non è ancora fissata in maniera unica perchè $\phi(t)$ rimane non determinata (questa è quella che si chiama libertà di gauge). Operando la seguente trasformazione (trasformazione di gauge)

$$x \rightarrow x - \phi(t) \quad y \rightarrow y - \dot{\phi}(t) \quad (1.37)$$

L rimane invariata e, di conseguenza, anche le equazioni del moto; la soluzione non è unica ma dipende dalla scelta di una funzione arbitraria del tempo $\phi(t)$. Per passare all'Hamiltoniana calcoliamo i momenti

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (1.38)$$

ma notiamo che p_y non è invertibile in funzione della velocità. La evoluzione delle variabili x, y è data da:

$$\dot{x} = \left\{ x, H \right\} = p_x + y \quad \dot{y} = \left\{ y, H \right\} = 0 \quad (1.39)$$

ma avevamo ottenuto $\ddot{x} - \dot{y} = 0$; il momento p_y non è genuino per la costruzione della Hamiltoniana e diciamo che rappresenta un vincolo, rappresenta infatti una relazione tra le variabili dello spazio delle fasi. La trasformata di Legendre perde quindi il suo senso in quanto \dot{y} non è una funzione invertibile.

1.3.2 Vincoli primari

Partendo dalla Lagrangiana e dal principio di azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_n, \dot{q}_n, t) dt \quad n = 1, \dots, N \quad (1.40)$$

le equazioni di Eulero-Lagrange possono essere esplicitate nella forma

$$\ddot{q}^m \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^m \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n} \quad (1.41)$$

dove le accelerazioni \ddot{q}^n possono risolte in maniera unica se e solo se la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n}$ è invertibile cioè il determinante è diverso da zero (teoria non degenera). Se fosse zero le accelerazioni non sarebbero definite in maniera univoca dalle condizioni iniziali q_0, \dot{q}_0 .

La non invertibilità implica che non tutte le velocità possono essere espresse in termini dei momenti quindi non tutti i momenti sono indipendenti, esistono relazioni tra le variabili canoniche:

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (1.42)$$

Ad esempio,

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 \quad (1.43)$$

dove $N = 2$. I momenti canonici sono:

$$p_1 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \quad p_2 = \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \quad (1.44)$$

con un vincolo primario ($M = 1$):

$$\phi : p_1 + p_2 = 0 \quad (1.45)$$

ogni punto (q_n, \dot{q}_n) è mappato sulla linea $p_1 + p_2 = 0$ ed ogni punto sulla linea $\dot{q}_2 - \dot{q}_1 = c$ è mappato in un singolo punto nello spazio delle fasi. La dimensione della varietà nello spazio delle fasi è $2N - M$ rispetto a $2N$ dello spazio delle configurazioni. ($\dot{q} \rightarrow p$ non è iniettiva)

1.3.3 Dirac

Vediamo ora come possiamo passare ad una formulazione Hamiltoniana di sistemi che contengono dei vincoli. Come si può vedere nell'esempio fatto in precedenza, in una teoria di gauge non è possibile determinare unicamente le soluzioni delle equazioni del moto anche se sono date le condizioni iniziali in quanto è possibile operare una trasformazione di gauge pur mantenendo le condizioni iniziali fisse. Le soluzioni generali delle equazioni del moto in una teoria di gauge contengono arbitrarie funzioni del tempo.

Data la relazione (1.19) nella usuale dinamica si assume che i momenti siano funzioni indipendenti delle velocità, ma questa assunzione è troppo restrittiva per le applicazioni che andremo a vedere; vogliamo ipotizzare che i momenti non siano funzioni indipendenti delle velocità. In questo caso esiste una certa relazione che lega il momento alle variabili del tipo

$$\phi(q, p) = 0 \quad (1.46)$$

dato che ce ne potrebbe essere un certo numero di queste relazioni le distinguiamo una dall'altra con l'indice m :

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (1.47)$$

queste relazioni vengono chiamate *vincoli primari*. La loro presenza vincola la esistenza dei gradi di libertà fisici ad esistere in una regione dello spazio delle fasi di dimensione $2N - M$. Consideriamo la quantità $p_n \dot{q}_n - L$ (la Hamiltoniana canonica), operiamo una variazione nelle variabili q e \dot{q} . Queste variazioni causano anche variazioni nelle variabili momento p :

$$\delta(p_n \dot{q}_n - L) = \delta p_n \dot{q} + p_n \delta \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n = \delta p_n \dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n \quad (1.48)$$

In presenza dei vincoli primari le δp_n non sono tutte indipendenti ma devono soddisfare i vincoli stessi. La Hamiltoniana canonica è quindi definita solo sulla sottovarietà in cui i vincoli primari sono soddisfatti ma può essere estesa arbitrariamente a tutta la varietà. Vediamo che la variazione coinvolge solo la variazione delle q e delle p quindi (1.48) può essere espressa come funzione delle q e delle p , indipendentemente dalle velocità. Espressa in questo modo si può chiamare Hamiltoniana. La Hamiltoniana definita in questa maniera non è unica perchè si possono ad essa sommare linearmente i ϕ_m che tanto sono nulli. Possiamo ottenere una nuova Hamiltoniana

$$H_T = H + u^m \phi_m \quad (1.49)$$

dove gli $u^m(q, p)$ sono coefficienti che possono essere funzioni delle q e delle p . H_T è equivalente a H . La (1.48) vale per qualsiasi variazione delle q e delle p a condizione che vengano mantenuti i vincoli (1.47). Le variabili q e p sono soggette a tali vincoli e fintanto che ogni variazione li soddisfi la equazione (1.48) continua ad essere valida.

Le nuove equazioni del moto sono:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \quad (1.50)$$

Abbiamo quindi le equazioni del moto di Hamilton che descrivono la evoluzione temporale di q e p con la presenza, però, di coefficienti u^m incogniti.

Utilizzando le parentesi Poisson possiamo scrivere queste equazioni in una forma più elegante. Per una qualsiasi funzione $g(q, p)$ delle q e di p si ha:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p}_n \quad (1.51)$$

e sostituendo \dot{q}_n e \dot{p}_n con (1.50) troviamo che

$$\dot{g} = \{g, H\} + u^m \{g, \phi_m\} \quad (1.52)$$

. Possiamo ottenere una forma più concisa se estendiamo le Parentesi di Poisson per quantità che non possono essere espresse in termini di q e p come ad esempio una qualche velocità generalizzata, in una teoria degenera, non può essere espressa in tale forma.

Supponiamo che le parentesi esistano per qualsiasi quantità che soddisfi le regole

(1.26),(1.27),(1.28),(1.29) ma sia invece non determinata per quantità che non sono funzioni delle q e delle p . Possiamo riscrivere la (1.52)

$$\dot{g} = \left\{ g, H + u^m \phi_m \right\} \quad (1.53)$$

i coefficienti u^m non sono funzioni di q e p ; sfruttando le regole delle parentesi di Poisson

$$\dot{g} = \left\{ g, H + u^m \phi_m \right\} = \left\{ g, H \right\} + \left\{ g, u^m \phi_m \right\} \quad (1.54)$$

$$\left\{ g, u^m \phi_m \right\} = \left\{ g, u^m \right\} \phi_m + u^m \left\{ g, \phi_m \right\} \quad (1.55)$$

l'ultima parentesi è ben definita in quanto sia g che ϕ_m sono funzioni di q e p . Il termine $\left\{ g, u^m \right\}$ non è definito ma la presenza moltiplicativa di ϕ_m lo rende uguale a zero. Risulta infine che

$$\dot{g} = \left\{ g, H \right\} + u^m \left\{ g, \phi_m \right\} \quad (1.56)$$

Prima di usare la equazione dei vincoli imponiamo come regola quella di esplicitare tutte le parentesi che contengono equazioni dei vincoli per poi sostituirne il valore; utilizziamo quindi la notazione

$$\phi_m(q, p) \approx 0 \quad (1.57)$$

e chiameremo l'equazione debolmente nulla. Ciò significa che non si annulla in tutto lo spazio delle fasi ma solo sulla sottovarietà definita dai vincoli. Possiamo scrivere le equazioni del moto

$$\dot{g} \approx \left\{ g, H_T \right\} \quad (1.58)$$

con l'Hamiltoniana totale, la quale, quindi, genera la evoluzione di qualsiasi funzione di q e p .

$$H_T = H + u^m \phi_m \quad (1.59)$$

1.3.4 Vincoli secondari

Come prima cosa abbiamo bisogno di condizioni di consistenza, ad esempio le quantità ϕ devono mantenere il loro valore nel tempo. Prendendo ϕ^m come g nella (1.58) otteniamo

$$\left\{ \phi_m, H_T \right\} = \left\{ \phi_m, H \right\} + u^{m'} \left\{ \phi_m, \phi_{m'} \right\} \approx 0 \quad (1.60)$$

ed abbiamo m condizioni di consistenza.

Dobbiamo esaminarle per vedere a cosa ci portano, potrebbero portare anche a risultati inconsistenti come $1 \approx 0$ e questo significa che la Lagrangiana di partenza è tale da portare ad equazioni del moto inconsistenti. La Lagrangiana iniziale non può quindi essere una funzione arbitraria.

ESEMPIO: Se $L = q$ otteniamo una inconsistenza. Se operiamo restrizioni che impediscano alla Lagrangiana di restituire equazioni del moto inconsistenti l'equazione (1.60) può essere divisa in tre casi:

- La relazione dipende dai vincoli primari e quindi porta ad una identità $0 \approx 0$ e non dobbiamo preoccuparci di nient'altro.

- La relazione porta ad una relazione indipendente dalle u^m quindi dipendente solo dalle q^m e p_m . In questo caso, se la relazione è indipendente dai vincoli primari, troviamo che il sistema ammette ulteriori vincoli del tipo $\chi_k(q, p)$ ($k = 1, \dots, K$) che chiamiamo vincoli secondari.
- La relazione dipende dagli u^m e quindi può essere usata per fissarne il valore.

la differenza tra i primari e i secondari è che i primi discendono dalla equazione che definisce il momento mentre per i secondari sono necessari le equazioni del moto. Quando abbiamo un vincolo secondario necessitiamo di una altra equazione di consistenza (preservato nel tempo) $\dot{\chi} \approx 0$. Otteniamo

$$\left\{ \chi, H_C \right\} + u^m \left\{ \chi, \phi_m \right\} \approx 0 \quad (1.61)$$

che deve essere trattata come in precedenza; se è del secondo tipo continuiamo col processo e con l'imporre le condizioni di consistenza fino a che arriveremo ad avere una relazione dipendente dagli u^m o dai *vincoli primari*. I vincoli secondari saranno

$$\phi_k \approx 0 \quad k = M + 1, \dots, M + K \quad (1.62)$$

dove K è il numero totale di vincoli secondari. Possiamo scrivere insieme i vincoli primari e secondari combinandoli nella forma

$$\phi_j \approx 0 \quad j = 1, \dots, M + K \equiv \Upsilon \quad (1.63)$$

Vediamo adesso che condizioni possono venire imposte sui u^m

$$\left\{ \phi_j, H_C \right\} + u^m \left\{ \phi_j, \phi_m \right\} \approx 0 \quad m = 1, \dots, M \quad j = 1, \dots, \Upsilon \quad (1.64)$$

Supponiamo che gli u siano ignoti e che la equazione [sopra] contenga un certo numero di equazioni lineari non omogenee negli u con i coefficienti che sono funzioni di q e p . Le soluzioni ci danno gli u come

$$u^m = U_m(q, p) \quad (1.65)$$

se non esistesse una soluzione di questo tipo le equazioni del moto sarebbero inconsistenti e noi vogliamo evitare questa situazione. Tuttavia la soluzione non è unica, possiamo aggiungere a quella trovata qualsiasi soluzione del sistema omogeneo $V_m \left[\phi_j, \phi_m \right] = 0$ e avremo sempre una soluzione del sistema non omogeneo. Se vogliamo la soluzione più generale basta prendere tutte le soluzioni indipendenti del sistema omogeneo che indicheremo con $V_{am}(q, p)$ con $a = 1, \dots, A$. La soluzione generale è

$$u^m = U_m + v^a V_{am} \quad (1.66)$$

con v^a arbitrari. Sostituendo la espressione degli u^m nella Hamiltoniana totale H_T che possiamo riscrivere come

$$H_T = H + U_m \phi_m + v^a V_{am} \phi_m \quad (1.67)$$

$$H' = H + U_m \phi_m \quad (1.68)$$

dove

$$H_T = H' + v^a \phi_a \quad (1.69)$$

e

$$\phi_a = V_{am} \phi_a. \quad (1.70)$$

ed avremo sempre le equazioni del moto (1.58).

Abbiamo soddisfatto tutte le condizioni di consistenza ma abbiamo ancora dei coefficienti incogniti v ; il numero degli v è solitamente più basso del numero degli u . Gli u non sono arbitrari ma soddisfano le condizioni di consistenza, sono gli v ad essere arbitrari; prendiamo gli v come funzioni arbitrarie del tempo rispettando tutti i requisiti necessari. Tutto ciò fornisce una differenza della generalizzazione del formalismo Hamiltoniano rispetto alla dinamica elementare. Ci sono funzioni arbitrarie del tempo nelle soluzioni generali delle equazioni del moto seppure siano state fissate le condizioni iniziali.

1.3.5 Vincoli di Prima e Seconda classe

Una variabile dinamica $R(q, p)$ funzione delle variabili q e p è un vincolo di *prima classe* se le sue parentesi di Poisson con gli altri ϕ si annullano

$$\{R, \phi_j\} \approx 0 \quad j = 1, \dots, \Upsilon \quad (1.71)$$

altrimenti R è di *seconda classe*; i vincoli di seconda classe sono sempre in numero pari data la antisimmetria della matrice contenente le parentesi di Poisson tra gli stessi. Se R è di prima classe allora è fortemente uguale ad una funzione lineare degli ϕ_j

$$\{R, \phi_j\} = r_{ij}\phi_j \quad (1.72)$$

Teorema : la parentesi di Poisson di due quantità di prima classe è di prima classe. Siano R, S quantità di prima classe abbiamo anche

$$\{S, \phi_j\} = s_{ij}\phi_j \quad (1.73)$$

$$\{\{R, S\}, \phi_j\} = \{\{R, \phi_j\}, S\} - \{\{S, \phi_j\}, R\} = \{r_{ij}\phi_j, S\} - \{s_{ij}\phi_j, R\} \quad (1.74)$$

$$= r_{ij}\{\phi_j, S\} + \{r_{ij}, S\}\phi_j - s_{ij}\{\phi_j, R\} - \{s_{ij}, R\}\phi_j \approx 0 \quad (1.75)$$

Se una funzione delle variabili canoniche non è di prima classe è detta di seconda classe cioè data $F(q, p)$, esiste almeno un ϕ_k tra gli Υ tale che la sua parentesi di Poisson con $F(q, p)$

$$\{F, \phi_k\} \not\approx 0. \quad (1.76)$$

Queste due classi di vincoli sono differenti in fisica; la presenza di vincoli di seconda classe o meno restituisce differenti soluzioni alle equazioni del moto mentre quelli di prima classe sono associati a libertà di gauge, cioè nelle soluzioni del moto ci sono funzioni arbitrarie funzioni del tempo e quindi descrivono sistemi fisicamente equivalenti. Possiamo vedere quindi i vincoli di prima classe come sottendenti libertà di gauge.

1.3.6 Parentesi di Dirac

La analisi di Dirac si preoccupa di inserire le informazioni dei vincoli all'interno di una generalizzazione della struttura delle parentesi di Poisson in modo tale che la nuova dinamica risulti non vincolata. Questo procedimento serve ad eliminare dalle parentesi di Poisson quei gradi di libertà che i vincoli mostrano non essere rilevanti. A seguito di questa operazione non ci saranno più ambiguità nella teoria e possiamo porre i vincoli uguali a zero anche prima di svolgere la algebra delle parentesi. Assumiamo che ci siano solo vincoli di seconda classe per semplicità.

Definiamo $D_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\}$ la matrice delle parentesi di Poisson tra tutti i vincoli primari e secondari, e richiediamo che $\det D_{ab} \not\approx 0$, infatti, se fosse nullo, esisterebbe almeno un vincolo di prima classe.

Se $\det D_{ab} \approx 0$ possiamo trovare una soluzione non nulla λ^a tale che $\lambda^a D_{ab} \approx 0$, esisterebbe un vincolo del tipo $\lambda^a \phi_a$, di prima classe.

Adesso che ci siamo preoccupati che ci siano solo vincoli di seconda classe consideriamo la relazione di consistenza che fissa il valore i moltiplicatori:

$$\left\{ \phi_a, H_C \right\} + u^b D_{ab} \approx 0 \quad (1.77)$$

quindi:

$$u^b \approx -D_{ba}^{-1} \left\{ \phi_a, H_C \right\}, \quad (1.78)$$

le equazioni del moto per una qualsiasi funzione F ,

$$\dot{F} \approx \left\{ F, H_T \right\} \approx \left\{ F, H_C \right\} + u^b \left\{ F, \phi_b \right\} \quad (1.79)$$

$$\dot{F} \approx \left\{ F, H_T \right\} - \left\{ F, \phi_b \right\} D_{ba}^{-1} \left\{ \phi_a, H_C \right\} \quad (1.80)$$

Generalizzando a due funzioni generiche:

$$\left\{ F, G \right\}_D = \left\{ F, G \right\} - \left\{ F, \phi_b \right\} D_{ba}^{-1} \left\{ \phi_a, G \right\} \quad (1.81)$$

Vediamo come le parentesi di Dirac soddisfino tutte le proprietà che caratterizzavano le parentesi di Poisson:

$$\left\{ F, G \right\}_D = - \left\{ G, F \right\}_D \quad (1.82)$$

$$\left\{ F, GR \right\}_D = \left\{ F, G \right\}_D R + G \left\{ F, R \right\}_D \quad (1.83)$$

$$\left\{ \left\{ F, G \right\}_D, R \right\}_D + \left\{ \left\{ R, F \right\}_D, G \right\}_D + \left\{ \left\{ G, R \right\}_D, F \right\}_D = 0 \quad (1.84)$$

inoltre per una funzione generica F ed un vincolo di seconda classe ϕ_a

$$\left\{ \phi_a, F \right\}_D = 0, \quad (1.85)$$

mentre per uno di prima classe ϕ_b vale

$$\left\{ F, \phi_b \right\}_D \approx \left\{ F, \phi_b \right\}. \quad (1.86)$$

Dalla (1.85) segue che i vincoli di seconda classe possono essere posti uguali a zero anche prima di svolgere la algebra delle parentesi. Siccome la Hamiltoniana è di prima classe possiamo dire, in virtù della (1.86) che questa genera le equazioni del moto tramite le nuove parentesi

$$\dot{F} = \left\{ F, H_T \right\}_D. \quad (1.87)$$

A questo punto tutti i vincoli di seconda classe diventano delle identità che legano delle variabili canoniche alle altre e quindi possono essere usati per eliminare delle variabili dal formalismo.

1.3.7 Gauge

Come abbiamo visto la presenza di vincoli di prima classe associata a libertà di gauge indica che esiste più di un set di coordinate che descrive lo stesso stato fisico. È desiderabile eliminare questa ambiguità imponendo ulteriori vincoli sulle variabili canoniche in modo che ci sia una corrispondenza uno ad uno tra gli stati fisici e le variabili canoniche. Le condizioni di gauge sono equazioni ad-hoc per evitare questa molteplicità di conteggio degli stati. È permesso introdurre queste condizioni ulteriori perchè rimuovono gli elementi non osservabili e non inficiano sugli osservabili. Il set di condizioni di gauge

$$C_b(q, p) \approx 0 \quad (1.88)$$

deve soddisfare due proprietà:

- Dato un qualsiasi set di variabili canoniche deve esistere una trasformazione di gauge che lo mappa in un altro set che soddisfi (1.88). La forma di questa trasformazione è

$$u^a[F, \phi_a] \quad (1.89)$$

in quanto è generata da vincoli di prima classe. Dal momento che il numero dei parametri indipendenti u^a è uguale al numero dei vincoli indipendenti di prima classe ϕ_a , il numero delle condizioni di gauge non è maggiore del numero dei vincoli indipendenti di prima classe ϕ_a .

- Le condizioni (1.88) devono rimuovere la libertà di gauge completamente. Ciò significa che non possono esistere trasformazioni di gauge oltre alla identità che preservino la (1.88), cioè:

$$u^a[C_b, \phi_a] \approx 0 \quad (1.90)$$

implica

$$u^a = 0 \quad (1.91)$$

Ciò avviene solo se il numero di equazioni indipendenti è maggiore o uguale al numero degli u^a .

Quindi il numero delle condizioni di gauge indipendenti è uguale al numero dei vincoli indipendenti di prima classe. Affinchè (1.90) implichi (1.91) $[C_b, \phi_a]$ deve essere una matrice quadrata e la condizione

$$\det[C_b, \phi_a] \neq 0 \quad (1.92)$$

indica che i vincoli C_b e ϕ_a sono di seconda classe. Vediamo come dopo un *gauge-fixing* completo non rimangono che vincoli di seconda classe.

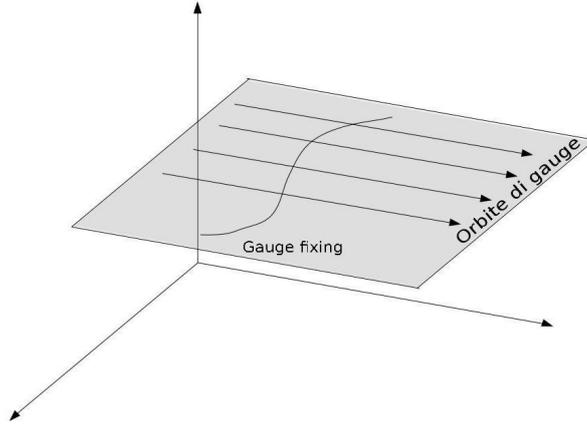


Figura 1.1: Ogni orbita di gauge descrive la stessa fisica; il gauge fixing fissa un punto su ogni orbita di gauge come unico che descriva lo stato che prima era rappresentato da tutta una curva

1.4 Conteggio dei gradi di libertà

Dato che il numero di condizioni di *gauge-fixing* è uguale a quello di vincoli di prima classe indipendenti vediamo come contare i *gdl* di un sistema dopo che abbiamo trovato tutti i vincoli primari, secondari e imposto le condizioni di *gauge-fixing*:

$$2 \cdot (\text{gdl fisici}) = (\text{variabili canoniche indipendenti}) = \quad (1.93)$$

$$(\text{variabili canoniche totali}) - (\text{vincoli } 1^{\text{a}} \text{ classe}) \quad (1.94)$$

$$- (\text{vincoli } 2^{\text{a}} \text{ classe}) - (\text{condizioni gauge fixing}) = \quad (1.95)$$

$$(\text{variabili canoniche totali}) - (\text{vincoli } 2^{\text{a}} \text{ classe}) - 2 \cdot (\text{vincoli } 1^{\text{a}} \text{ classe}) \quad (1.96)$$

quindi

$$(\text{gdl fisici}) = \frac{1}{2} ((\text{variabili canoniche totali}) - (\text{vincoli } 2^{\text{a}} \text{ classe}) - 2 \cdot (\text{vincoli } 1^{\text{a}} \text{ classe})) \quad (1.97)$$

1.5 Esempio

Vediamo un esempio di come si possano contare i *gdl* utilizzando una generica Lagrangiana

$$L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}). \quad (1.98)$$

equivalente alla seguente:

$$L_{eq} = L(x, y, X, Y) + \lambda(\dot{x} - X) + \kappa(\dot{y} - Y) \quad (1.99)$$

con λ e κ moltiplicatori di Lagrange. Le equazioni del moto per questi moltiplicatori assicurano che X e Y si comportino come le velocità di x e y :

$$0 = EL(L_{eq})_{\lambda} = \frac{\partial L_{eq}}{\partial \lambda} = \dot{x} - X \quad (1.100)$$

$$0 = EL(L_{eq})_{\kappa} = \frac{\partial L_{eq}}{\partial \kappa} = \dot{y} - Y \quad (1.101)$$

Mentre le altre equazioni restituiscono le altre equazioni del moto

$$0 = EL(L_{eq})_X = \frac{\partial L_{eq}}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial X} - \lambda \iff \lambda = \frac{\partial L}{\partial X} \quad (1.102)$$

$$0 = EL(L_{eq})_x = \frac{\partial L_{eq}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{eq}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \lambda = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (1.103)$$

e similmente per le equazioni del moto per y .

Sapendo che tali Lagrangiane corrispondono alla stessa fisica, riscriviamo L_{eq} in forma Hamiltoniana. Abbiamo bisogno di definire sei variabili momento e lo facciamo tramite le parentesi di Poisson:

$$\left\{ p_x, x \right\} = \left\{ p_y, y \right\} = \left\{ P_X, X \right\} = \left\{ P_Y, Y \right\} = \left\{ \rho_1, \lambda \right\} = \left\{ \rho_2, \kappa \right\} = 1 \quad (1.104)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \lambda \quad P_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = 0 \quad \rho_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \quad (1.105)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \kappa \quad P_Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = 0 \quad \rho_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\kappa}} = 0 \quad (1.106)$$

queste sei equazioni producono i seguenti sei vincoli primari

$$\Phi_x = p_x - \lambda \approx 0 \quad P_x \approx 0 \quad \rho_1 \approx 0 \quad (1.107)$$

$$\Phi_y = p_y - \kappa \approx 0 \quad P_y \approx 0 \quad \rho_2 \approx 0 \quad (1.108)$$

Procediamo al conteggio dei gradi di libertà. Verifichiamo quali tra i precedenti vincoli siano di prima o seconda classe; operando tutte le possibili combinazioni troviamo solo due parentesi di Poisson che non si annullano:

$$\left\{ \Phi_x, \rho_1 \right\} = \left\{ \Phi_y, \rho_2 \right\} = -1 \quad (1.109)$$

ciò mostra che sono quattro i vincoli di seconda classe. Per verificare gli altri due, P_X e P_Y dobbiamo definire la Hamiltoniana.

$$H_0 = p_x X + p_y Y - L(x, y, X, Y) \quad (1.110)$$

che però non è quella totale in quanto non include le nuove variabili che abbiamo definito per la nostra analisi. Arriviamo a quella totale aggiungendo i moltiplicatori di Lagrange che assicurano la presenza di vincoli primari.

$$H_T = H_0 + \mu^i \Phi_i + \nu^i \rho_i + \xi^i P_i \quad (1.111)$$

Esplicitiamo le condizioni di consistenza per i vincoli:

$$\dot{\rho}_i = \left\{ \rho_i, H_T \right\} = \left\{ \rho_i, H_0 \right\} + \mu^j \left\{ \rho_i, \Phi_j \right\} = \left\{ \rho_i, H_0 \right\} + \mu_i = \mu_i, \quad (1.112)$$

$$\dot{\Phi}_i = \left\{ \Phi_i, H_T \right\} = \left\{ \Phi_i, H_0 \right\} + \nu^j \left\{ \Phi_i, \rho_j \right\} = \left\{ \Phi_i, H_0 \right\} + \nu_i \quad (1.113)$$

tali vincoli fissano il valore dei moltiplicatori di Lagrange μ_i e ν_i e quindi possono essere posti uguali a zero. Studiamo ora i vincoli che non sappiamo a quale classe appartengano:

$$\chi_i = \dot{P}_i = \{P_i, H_T\} = \{P_i, H_0\} + 0 = \{P_i, p_x X + p_y Y - L\} = -p_i - \{P_i, L\} = -p_i + L_{X^i} \quad (1.114)$$

Imponendo che si annullino assicura che

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial Y} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}. \quad (1.115)$$

Questi vincoli addizionali χ_i non commutano con i P_i come verificiamo:

$$\dot{\chi}_i = \{\chi_i, H_T\} = \{\chi_i, H_0\} + \nu^j \{\chi_i, \rho_j\} + \xi^j \{\chi_i, P_j\} = \quad (1.116)$$

$$\{\chi_i, H_0\} + \nu^j \left\{ \{P_i, H_T\}, \rho_j \right\} + \xi^j \left\{ -p_i + L_{X^i}, P_j \right\} = \quad (1.117)$$

$$\{\chi_i, H_0\} + \xi_j L_{X^i X^j} \quad (1.118)$$

identificando $\dot{x} = X$ e $\dot{y} = Y$ scopriamo che $L_{X^i X^j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ è la matrice cinetica; se questa è invertibile si possono fissare gli ξ_i . In totale avremo otto vincoli $\rho_i, \Phi_i, P_i, \chi_i$ tutti di seconda classe e quindi possiamo procedere al conteggio dei gradi di libertà:

$$gdl = \frac{1}{2}(12 - 8 - 0) = 2 \quad (1.119)$$

Ma la matrice cinetica non è detto che sia invertibile. Ad esempio se il Ker di questa ha dimensione pari a uno, otteniamo un nuovo vincolo. Prendiamo il vettore (w^x, w^y) , la equazione (1.118) produce in vincolo terziario.

$$\Sigma = w^x \{\chi_x, H_0\} + w^y \{\chi_y, H_0\} \quad (1.120)$$

imponendo la condizione che Σ sia conservato nel tempo

$$\dot{\Sigma} = \{\Sigma, H_T\} \approx 0 \quad (1.121)$$

restituisce un nuovo vincolo che abbassa il numero totale di gdl a uno.

Se la matrice cinetica $L_{X^i X^j}$ fosse nulla avremmo i due vincoli

$$\Sigma_i = \{\chi_i, H_0\} \approx 0. \quad (1.122)$$

La derivata temporale di Σ_i potrebbe restituire al massimo due vincoli addizionali; in totale il numero dei gdl potrebbe essere uno o zero.

La analisi svolta può essere generalizzata ad un numero arbitrario di variabili q semplicemente aggiungendo i campi ausiliari X_i , oltre a X e a Y , e i moltiplicatori di Lagrange λ_i , oltre a λ e a κ , per ogni variabili x_i . Se la matrice cinetica è invertibile allora troveremo che il numero dei gdl è pari a q , nel caso non lo sia la nascita di nuovi vincoli restituirà un numero di $gdl < q$.

Capitolo 2

Costruzione di Ostrogradsky

2.1 Introduzione

Vediamo la costruzione di Ostrogradsky di una Hamiltoniana per Lagrangiane non degeneri. Il suo lavoro fu pubblicato nel 1850 e il teorema si può riassumere così

Teorema di Ostrogradsky: *Una Lagrangiana non degenera che contiene derivate di ordine maggiore o uguale a due rispetto al tempo porta ad almeno una instabilità nella Hamiltoniana del sistema.*

Per non degenerare si intende che la derivata di ordine più alto rispetto al tempo di una variabile può essere scritta in funzione delle variabili canoniche. In sintesi la Hamiltoniana non è limitata nè inferiormente nè superiormente e questo comporta che nello spazio delle fasi le curve di livello possano divergere verso l'infinito anche se la energia resta costante. Le soluzioni che insorgono mostrano numerose problematiche, come quelle chiamate di *runaway*.

2.2 Derivate di ordine 2

Consideriamo un sistema la cui Lagrangiana sia

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) \quad (2.1)$$

non degenerare rispetto a \ddot{x} . Le sue equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0 \quad (2.2)$$

La non degenerazione rispetto a \ddot{x} significa

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}^2} \neq 0 \quad (2.3)$$

La equazione (2.2) può essere riscritta in una forma differente rispetto alle equazioni di Newton:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}) \rightarrow x(t) = \chi(t, x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0) \quad (2.4)$$

Dato che la soluzione dipende da quattro valori iniziali, ci devono essere quattro coordinate canoniche.

La scelta di Ostrogradsky fu quella di considerare

$$X_1 \equiv x \quad P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \quad (2.5)$$

$$X_2 \equiv \dot{x} \quad P_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}. \quad (2.6)$$

Aver assunto la non degenerazione permette di poter invertire le trasformazioni nello spazio delle fasi (2.5),(2.6) per poter risolvere per \ddot{x} rispetto a X_1 , X_2 e P_2 . Esiste quindi una accelerazione $A(X_1, X_2, P_2)$ tale che

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right|_{\substack{x=X_1 \\ \dot{x}=X_2 \\ \ddot{x}=A}} = P_2 \quad (2.7)$$

Notiamo che $A(X_1, X_2, P_2)$ non dipende da P_1 , questo momento serve solo per le derivate terze rispetto al tempo. La Hamiltoniana di Ostrogradsky è ottenuta tramite una trasformazione di Legendre

$$H(X_1, X_2, P_1, P_2) = P_1 X_2 + P_2 A(X_1, X_2, P_2) - L(X_1, X_2, A(X_1, X_2, P_2)) \quad (2.8)$$

e le equazioni per la evoluzione temporale sono date da

$$\dot{X}_i \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i \equiv -\frac{\partial H}{\partial X_i}, \quad (2.9)$$

per verificare che generino la evoluzione temporale notiamo che la equazione di evoluzione per X_1 è

$$\dot{X}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} = X_2 \quad (2.10)$$

e questo riproduce la trasformazione di fase $\dot{x} = X_2$ in (2.6). La evoluzione per X_2 è data da

$$\dot{X}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} = A + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial A}{\partial P_2} = A \quad (2.11)$$

la trasformazione per $P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}$ viene dalla evoluzione di P_2

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial X_2} = -P_1 - P_2 \frac{\partial A}{\partial X_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial A}{\partial X_2} = -P_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (2.12)$$

e la equazione di E-L seguono da

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial X_1} = -P_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial A}{\partial X_1} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (2.13)$$

Quindi la Hamiltoniana di Ostrogradsky genera la evoluzione temporale. Rappresenta quindi ancora la energia. La Hamiltoniana (2.8) è lineare nel momento P_1 , il che indica che nessun sistema in questa forma può essere stabile; questo risultato si applica a qualsiasi Lagrangiana della forma $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$ che dipende in maniera non degenera da \ddot{x} . La sola assunzione fatta è la non degenerazione, il che significa che \ddot{x} non si può eliminare attraverso integrazioni per parti.

2.3 Derivate di ordine n

Cerchiamo di derivare le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso in cui una Lagrangiana non degenera contenga derivate rispetto al tempo di ordine arbitrario n finito; per semplicità consideriamo il caso uno-dimensionale:

$$L = L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots). \quad (2.14)$$

Usando una piccola deviazione dalla soluzione del moto che non deve modificare il valore dell'azione:

$$x(t, \alpha) = x_0(t) + \alpha\eta(t) \quad (2.15)$$

deve infatti valere

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dI}{d\alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \ddot{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \overset{\dots}{x}} \overset{\dots}{\eta} + \dots \right) dt \quad (2.17)$$

quindi per ogni termine dentro alle parentesi:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} dt = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} \quad (2.18)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \ddot{\eta} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \eta dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \dot{\eta} \right|_{t_1}^{t_2} - \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} \quad (2.19)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \overset{\dots}{x}} \overset{\dots}{\eta} dt = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial L}{\partial \overset{\dots}{x}} \eta dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \overset{\dots}{x}} \ddot{\eta} \right|_{t_1}^{t_2} - \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \overset{\dots}{x}} \dot{\eta} \right|_{t_1}^{t_2} + \left. \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \overset{\dots}{x}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} \quad (2.20)$$

abbiamo infine:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=0} \left(-\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} \right) \eta dt + \sum_{k=0} p_k \left(-\frac{d}{dt} \right)^k \eta \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (2.21)$$

con

$$p_i = \sum_{k=i} \left(-\frac{d}{dt} \right)^{k-i} \frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} \quad (2.22)$$

Le equazioni del moto risultano essere

$$\sum_{i=0}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^i \frac{\partial L}{\partial x^{(i)}} = 0 \quad (2.23)$$

ovvero equazioni del moto di ordine $2n$ che necessitano di $2n$ condizioni iniziali per essere definite; notiamo che l'aver supposto la Lagrangiana non degenera rispetto ad $x^{(n)}$ rende l'equazione di E-L lineare nella $2n$ -esima derivata di $x(t)$. Utilizzando la generalizzazione della trasformata di Legendre dovuta ad Ostrogradsky arriviamo a formulare le espressioni delle nuove coordinate e momenti. Riscrivendo (2.23)

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^{i-1} \frac{\partial L}{\partial x^{(i-1)}} = 0 \quad (2.24)$$

definiamo P_1 come $P_1 = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^i \frac{\partial L}{\partial x^{(i-1)}}$ ripetendo la stessa procedura arriviamo a definire il momento P_n che non dipende dalla evoluzione temporale. In definitiva le nuove coordinate dello spazio delle fasi sono

$$X_i \equiv x^{(i-1)} \quad P_i \equiv \sum_{j=i}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^{(j-i)} \frac{\partial L}{\partial x^{(j)}} \quad (2.25)$$

e in numero sono $2n$, n coordinate e n momenti. La non degenerazione della Lagrangiana ci permette di invertire $P_n = \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}}$ e risolvere $x^{(n)}$ in termini di P_n e delle X_i ; esiste una funzione $A(X_1, \dots, X_n, P_n)$ tale che

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \right|_{\substack{x^{(i-1)}=X_i \\ x^{(n)}=A}} = P_n. \quad (2.26)$$

Per un n generico l'Hamiltoniana assume la forma

$$H = \sum_{i=1}^n P_i x^{(i)} - L = P_1 X_2 + P_2 X_3 + \dots + P_{n-1} X_n + P_n A - L(X_1, \dots, X_n, A). \quad (2.27)$$

Le equazioni di evoluzione sono

$$\dot{X}_i \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i \equiv -\frac{\partial H}{\partial X_i} \quad (2.28)$$

Tali relazioni riproducono le trasformazioni canoniche (2.25) e le equazioni di Eulero-Lagrange (2.23).

Le prime $n-1$ equazioni di X_i verificano la definizione di X_{i+1}

$$i = 1, \dots, n-1 \quad \Rightarrow \quad \dot{X}_i = X_{i+1} \quad (2.29)$$

mentre la equazione di evoluzione per X_n è

$$\dot{X}_n = A + P_n \frac{\partial A}{\partial P_n} - \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \frac{\partial A}{\partial P_n} = A. \quad (2.30)$$

Le ultime $n-1$ equazioni per P_i riproducono la definizione di P_{i-1}

$$i = 2, \dots, n \Rightarrow \dot{P}_i = -P_{i-1} - P_n \frac{\partial A}{\partial X_i} + \frac{\partial L}{\partial x^{(i-1)}} + \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \frac{\partial A}{\partial X_i} = -P_{i-1} + \frac{\partial L}{\partial x^{(i-1)}}. \quad (2.31)$$

La equazione di evoluzione per P_1 restituisce la (2.23)

$$\dot{P}_1 = -P_n \frac{\partial A}{\partial X_1} + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \frac{\partial A}{\partial X_1} = \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (2.32)$$

Quindi la Hamiltoniana (2.27) genera l'evoluzione temporale; è lineare in P_1, P_2, \dots, P_{n-1} , solo rispetto a P_n potrebbe essere limitata. È corretto dire che la Hamiltoniana non è limitata nè inferiormente nè superiormente, infatti se fosse limitata superiormente ma non inferiormente sarebbe necessario un cambio di segno di H e il problema non sussisterebbe. Rispetto alla meccanica classica, dove la energia cinetica deve essere positiva, il segno di H non influisce sulla dinamica. Se invece H assumesse valori negativi e positivi il cambio di segno non cambia la situazione.

All'aumentare di n la frazione di coordinate rispetto alle quali la Hamiltoniana dipende linearmente tende a $\frac{1}{2}$ quindi aggiungere derivate di ordine più alto peggiora la instabilità e non la migliora, infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (2.33)$$

2.4 Esempi

2.4.1 Particella libera

Considerando la Lagrangiana non degenera più semplice con la aggiunta di un termine quadratico nelle derivate seconde

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\ddot{x}^2}{2} \quad (2.34)$$

le equazioni del moto necessitano di 4 condizioni iniziali per avere la descrizione totale del sistema. Passiamo alla formulazione Hamiltoniana tramite la costruzione di Ostrogradsky. Le coordinate sono

$$Q_1 = x \quad Q_2 = \dot{x} \quad (2.35)$$

$$P_1 = \dot{x} - \ddot{x} \quad P_2 = \ddot{x} \quad (2.36)$$

e la Hamiltoniana

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{P_2^2}{2} + P_1 Q_2 - \frac{Q_2^2}{2} \quad (2.37)$$

le cui rispettive equazioni sono

$$\dot{Q}_1 = Q_2 \quad \dot{P}_1 = 0 \quad (2.38)$$

$$\dot{Q}_2 = P_2 \quad \dot{P}_2 = -P_1 + P_2 \quad (2.39)$$

e date le seguenti condizioni iniziali $(Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0)$

$$P_1(t) = P_1^0 \quad (2.40)$$

$$P_2(t) = ae^{-t} + be^t \quad (2.41)$$

$$Q_1(t) = ae^{-t} + be^t + ct - a - b + Q_1^0 \quad (2.42)$$

$$Q_2(t) = -ae^{-t} + be^t + a - b + Q_2^0 \quad (2.43)$$

con $a = \frac{P_1^0 - Q_2^0 + P_2^0}{2}$, $b = \frac{Q_2^0 - P_1^0 + P_2^0}{2}$ e $c = a - b - Q_2^0$. Se $b \neq 0$, allora $P_2 \rightarrow \infty$.

Interpretando P_2 come una accelerazione, l'aver aggiunto il termine di ordine due porta ad avere un sistema in cui la accelerazione diverge all'infinito. Questa soluzione poco fisica viene chiamata di *runaway* (una situazione simile si verifica nel calcolo delle soluzioni per la equazione della forza di Abraham-Lorentz). Imponendo il vincolo $b = 0$ otteniamo soluzioni che hanno più senso fisico. Dato che la Lagrangiana è invariante per inversione del senso di t , anche a deve essere posto uguale a zero per non avere il medesimo problema.

2.4.2 Oscillatore armonico

Consideriamo come esempio un sistema che dipende da un parametro adimensionale ϵ che quantifica la deviazione dal semplice oscillatore armonico. Vediamo come la aggiunta di tale termine di ordine superiore conferisca instabilità al sistema.

$$L = -\frac{\epsilon m}{2w^2}\ddot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{mw^2}{2}x^2 \quad (2.44)$$

le equazioni di E-L e la sua soluzione generale sono:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0 \quad (2.45)$$

ovvero

$$m \left[\frac{\epsilon}{w^2} \ddot{x} + \ddot{x} + w^2 x \right] = 0 \quad (2.46)$$

$$x(t) = C_+ \cos(k_+ t) + S_+ \sin(k_+ t) + C_- \cos(k_- t) + S_- \sin(k_- t), \quad (2.47)$$

le costanti C_{\pm} e S_{\pm} sono funzioni dei dati iniziali,

$$C_+ = \frac{k_-^2 x_0 + \ddot{x}_0}{k_-^2 - k_+^2} \quad C_- = \frac{k_+^2 x_0 + \ddot{x}_0}{k_+^2 - k_-^2} \quad (2.48)$$

$$S_+ = \frac{k_-^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{k_+(k_-^2 - k_+^2)} \quad S_- = \frac{k_+^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{k_-(k_+^2 - k_-^2)}. \quad (2.49)$$

e le due frequenze sono

$$k_{\pm} \equiv w \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}} \quad (2.50)$$

con $0 < \epsilon < 1/4$. Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ otteniamo $k_+ = w$ cioè il normale oscillatore armonico mentre k_- diverge. Se $\epsilon \geq 1/4$ le soluzioni di (2.46) non sono più semplici oscillazioni. Il caso $\epsilon = 1/4$ corrisponde all'oscillatore di Pais-Uhlenbeck con uguali frequenze $w_1 = w_2$ per il quale le soluzioni implicano termini del tipo $\sin(wt)$, $\cos(wt)$, $t \sin(wt)$ e $t \cos(wt)$; chiaramente questo tipo di soluzioni non è stabile per la presenza dei termini di "runaway".

I momenti coniugati sono

$$P_1 = m\dot{x} + \frac{\epsilon m}{w^2} \ddot{x} \iff \ddot{x} = \frac{w^2 P_1 - mw^2 X_2}{\epsilon m} \quad (2.51)$$

$$P_2 = -\frac{\epsilon m}{w^2} \ddot{x} \iff \ddot{x} \equiv A = -\frac{w^2 P_2}{\epsilon m} \quad (2.52)$$

L'Hamiltoniana può essere espressa in termini delle variabili canoniche e delle costanti C_{\pm} e S_{\pm}

$$H = P_1 X_2 - \frac{w^2}{2\epsilon m} P_2^2 - \frac{m}{2} X_2^2 + \frac{mw^2}{2} X_1^2 = \quad (2.53)$$

$$\frac{\epsilon m}{w^2} \ddot{x} \ddot{x} - \frac{\epsilon m}{2w^2} \ddot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{mw^2}{2} x^2 = \quad (2.54)$$

$$\frac{m}{2} \sqrt{1 - 4\epsilon} k_+^2 (C_+^2 + S_+^2) - \frac{m}{2} \sqrt{1 - 4\epsilon} k_-^2 (C_-^2 + S_-^2) \quad (2.55)$$

dove il modo con segno + porta energie positive e quello con segno – energie negative. Se il modo di segno + assume valori positivi arbitrari, quello con segno – assumerà valori negativi di conseguenza; per i primi le eventuali velocità assumerebbero valori sempre più grandi mentre per i secondi diventerebbero valori immaginari.

Si potrebbe obiettare che tale Hamiltoniana non corrisponda all'energia ma si può verificare che tale funzione, per la scelta delle variabili canoniche fatta con (2.9), genera la evoluzione temporale il che ci permette di identificarla con la energia.

La Lagrangiana è simmetrica rispetto alla trasformazione $t \rightarrow t' = t + \delta t$ per cui dovrebbe esistere una quantità conservata, ovvero l'energia; differenziando L :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \dddot{x} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.56)$$

dove l'ultimo termine è nullo perchè L non dipende esplicitamente dal tempo. Sostituendo le equazioni del moto (2.45) al posto del termine $\frac{\partial L}{\partial x}$ otteniamo:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \dddot{x} \quad (2.57)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \ddot{x} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - L \right) = 0 \quad (2.58)$$

usando $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ e $\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = -\frac{\epsilon m}{w^2} \ddot{x}$ la espressione tra parentesi è uguale alla Hamiltoniana (2.54) quindi la energia ottenuta per il teorema di Noether coincide con quella ricavata utilizzando il metodo di Ostrogradsky.

Facendo tendere ϵ a zero la Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{mw^2}{2} (C_+^2 + S_+^2)^2 \quad (2.59)$$

rendendo evidente come la instabilità risieda nel termine di secondo grado della Lagrangiana.

Una proprietà di questo oscillatore è che può essere scritto come somma di due oscillatori armonici disaccoppiati di cui uno porta energie negative, come è suggerito da (2.55). Considerando la seguente lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - k_1^2 x_1^2) - \frac{1}{2} (\dot{x}_2^2 - k_2^2 x_2^2) \quad (2.60)$$

con

$$k_{1,2} = \frac{1}{2\epsilon} (1 \mp \sqrt{1 - 4^2}), \quad (2.61)$$

applicando la seguente trasformazione a (2.60)

$$x_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_2^2 \right) x \quad x_2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_1^2 \right) x \quad (2.62)$$

otteniamo:

$$L = -\frac{\epsilon}{2} \ddot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} w^2 x^2 \quad (2.63)$$

che è esattamente la Lagrangiana originaria. La presenza del termine che porta energie negative in (2.55) o il momento in (2.53) è al centro della instabilità della Hamiltoniana.

2.4.3 Oscillatore di Pais-Uhlenbeck

L'esempio analizzato in precedenza è un caso particolare del più famoso oscillatore di Pais-Uhlenbeck, la cui descrizione venne pubblicata 100 anni dopo i lavori di Ostrogradsky. Pais e Uhlenbeck considerarono la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \left[\dot{x}^2 - (w_1^2 + w_2^2)x^2 + w_1^2 w_2^2 x^2 \right] \quad (2.64)$$

dalla quale ricaviamo la equazione del moto:

$$\frac{d^4}{dt^4}x + (w_1^2 + w_2^2)\frac{d^2}{dt^2}x + w_1^2 w_2^2 x = 0 \quad (2.65)$$

Richiedendo quattro condizioni iniziali $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ddot{x}_0$ ci permette di risolvere per $x(t)$ ottenendo:

$$x(t) = -\frac{w_2^2 x_0 + \ddot{x}_0}{w_1^2 - w_2^2} \cos(w_1 t) - \frac{w_2^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{w_1(w_1^2 - w_2^2)} \sin(w_1 t) \quad (2.66)$$

$$+ \frac{w_2^2 x_0 + \ddot{x}_0}{w_1^2 - w_2^2} \cos(w_2 t) + \frac{w_2^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{w_2(w_1^2 - w_2^2)} \sin(w_2 t) \quad (2.67)$$

e dato che le condizioni iniziali sono quattro, tale è anche la dimensione dello spazio delle fasi. La scelta di Ostrogradsky per le variabili canoniche è:

$$Q_1 \equiv x \quad P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -(w_1^2 + w_2^2)\dot{x} - \ddot{x} \quad (2.68)$$

$$Q_2 \equiv \dot{x} \quad P_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = \ddot{x}. \quad (2.69)$$

La non degenerazione implica che \ddot{x} può essere invertita e scritta come funzione delle variabili canoniche Q_i e P_i . L'Hamiltoniana è:

$$H_{PU} = P_1 \dot{x} + P_2 \ddot{x} - L = \quad (2.70)$$

$$P_1 Q_2 + \frac{P_2^2}{2} + \frac{(w_1^2 + w_2^2)}{2} Q_2^2 - \frac{w_1^2 w_2^2}{2} Q_1^2 \quad (2.71)$$

la quale genera la evoluzione temporale di qualsiasi funzione delle variabili canoniche del tipo $F(Q_i, P_i)$ attraverso le parentesi di Poisson. Il sistema dipende linearmente da P_1 ed è quindi affetto dalla patologia di Ostrogradsky.

Capitolo 3

Studio instabilità

Mostriamo come la instabilità di Ostrogradsky non possa essere rimossa senza che introdurre vincoli nello spazio delle fasi diminuisca la dimensione dello stesso. Si possono solo introdurre a mano dei vincoli sui gradi di libertà instabili e rimuoverli dallo spazio delle fasi fisico. Introduciamo i vincoli tramite variabili ausiliarie λ_i in modo tale che siano introdotti tramite i loro momenti canonici $P_{\lambda_i} = 0$. Utilizzeremo il metodo introdotto da Dirac esposto in precedenza.

Il primo caso in analisi riguarda la più generale Lagrangiana non degenere del secondo ordine con vincoli di seconda classe; questo caso è il più generale perchè se avessimo vincoli di prima classe, una volta operato il "gauge-fixing" questi diventerebbero di seconda classe.

3.1 Lagrangiana di ordine 2 non degenere con vincoli di seconda classe

Mostriamo come una Lagrangiana non degenere del secondo ordine con due vincoli di seconda classe è instabile. La Lagrangiana di ordine due più generale è data dalla

$$L = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \lambda) \quad (3.1)$$

con le equazioni del moto che sono

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}} = 0 \quad (3.2)$$

con la assunzione della non degenerazione della Lagrangiana la seconda equazione del moto è del quarto ordine e, quindi, possiamo risolvere per $q(t)$ e $\lambda(t)$ con sei condizioni iniziali $(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, \lambda_0, \dot{\lambda}_0)$. Lo spazio delle fasi ha dimensione sei. Definiamo le variabili canoniche:

$$Q_1 \equiv q \quad P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \quad (3.3)$$

$$Q_2 \equiv \dot{q} \quad P_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = -\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}} \quad (3.4)$$

$$Q_3 \equiv \lambda \quad P_3 \equiv \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \quad (3.5)$$

dove $\phi_1 : P_3 = 0$ è un vincolo primario. Possiamo invertire $\ddot{q} = h(Q_1, Q_2, Q_3, P_2)$ usando la (3.4) e la Hamiltoniana totale diventa:

$$H_T = P_1 Q_2 + P_2 h(Q_1, Q_2, Q_3, P_2) - f(Q_1, Q_2, Q_3, h) + u_1 \phi_1 \quad (3.6)$$

dove u_1 è una funzione delle variabili canoniche che si può determinare imponendo condizioni di consistenza ma dato che siamo interessati alla stabilità dei gradi di libertà sulla sottovarietà ridotta dove $\phi_1 = 0$ non ci interessa scriverlo esplicitamente. Introduciamo anche i vincoli secondari.

$$\phi_2 : \left\{ \phi_1, H_T \right\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial Q_i} \frac{\partial H_T}{\partial P_i} - \frac{\partial H_T}{\partial Q_i} \frac{\partial \phi_1}{\partial P_i} \right) = \quad (3.7)$$

$$-P_2 \frac{\partial h}{\partial Q_3} + \frac{\partial h}{\partial Q_3} \left[\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}} \right]_{\ddot{q}=h} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_{\lambda=Q_3}} = \frac{\partial f}{\partial \lambda_{\lambda=Q_3}}(Q_1, Q_2, Q_3, h) \approx 0. \quad (3.8)$$

Se ϕ_2 dipende da Q_3 , $\left\{ \phi_1, \phi_2 \right\} \neq 0$ quindi sia ϕ_1 che ϕ_2 sono di seconda classe e non ci sono ulteriori vincoli dalle condizioni di consistenza, le uniche rimaste servono per determinare la forma di u_1 . Usando i vincoli di seconda classe possiamo riscrivere (Q_3, P_3) come funzione delle altre variabili canoniche $(Q_3 \approx F_1(Q_1, Q_2, P_2), P_3 = 0)$. La Hamiltoniana ridotta H_R diventa:

$$H_R = P_1 Q_2 + P_2 h(Q_1, Q_2, F_1(Q_1, Q_2, P_2), P_2) - f(Q_1, Q_2, h, F_1) \quad (3.9)$$

che dipende sempre linearmente da P_1 , fattore di instabilità.

Se ϕ_2 non dipendesse da Q_3 , ϕ_1 e ϕ_2 commuterebbero uno con l'altro; ciò implicherebbe la necessità di introdurre nuove relazioni di consistenza e questo porterebbe ad una effettiva riduzione dello spazio delle fasi. Possiamo vedere come l'unica via per curare la instabilità provenga dai vincoli ulteriori ottenuti tramite le relazioni di consistenza. È la presenza del termine $P_1 Q_2$ che dovrebbe essere rimossa per cui è necessario trovare un vincolo tale per cui Q_2 sia una qualche funzione di P_1 .

3.1.1 Pais-Uhlenbeck vincolato

Vediamo come nel modello di Pais-Uhlenbeck la instabilità sia inevitabile se si introduce un vincolo che non riduca la dimensione dello spazio delle fasi (in questo caso rimane di dimensione quattro). Consideriamo il vincolo

$$\ddot{q}^2 - \dot{q}^2 = 0. \quad (3.10)$$

La Lagrangiana diventa:

$$L = \frac{1}{2} \left[\ddot{q}^2 - (w_1^2 + w_2^2) \dot{q}^2 + w_1^2 w_2^2 q^2 \right] + \frac{\lambda}{2} (\ddot{q}^2 - \dot{q}^2). \quad (3.11)$$

Le equazioni del moto derivanti dalla variazione della azione rispetto a λ e a q sono:

$$\ddot{q}^2 - \dot{q}^2 = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{d^4}{dt^4} q + (w_1^2 + w_2^2) \frac{d^2}{dt^2} q + w_1^2 w_2^2 + \frac{d^2}{dt^2} \ddot{q} + \frac{d}{dt} \dot{q} = 0 \quad (3.13)$$

e le equazioni $q(t)$ e $\lambda(t)$ possono essere risolte fissando quattro condizioni iniziali, quindi la dimensione dello spazio delle fasi è quattro. Scegliamo le variabili canoniche:

$$Q_1 \equiv q \iff P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -(1 + \lambda)\ddot{q} - \dot{\lambda}\dot{q} - [\lambda + (w_1^2 + w_2^2)]\dot{q} \quad (3.14)$$

$$Q_2 \equiv \dot{q} \iff P_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = (1 + \lambda)\ddot{q} \quad (3.15)$$

$$Q_3 \equiv \lambda \iff P_3 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \quad (3.16)$$

dalla (3.15) ricaviamo $\ddot{q} = \frac{P_2}{1+Q_3}$ e quindi la Hamiltoniana diventa:

$$H_{PUCT} = P_1 Q_2 + \frac{P_2^2}{2(1+Q_3)} + \frac{1}{2}[Q_3 + (w_1^2 + w_2^2)]Q_2^2 - \frac{1}{2}w_1^2 w_2^2 Q_1^2 + u^1 \phi_1 \quad (3.17)$$

Il vincolo primario è $\phi_1 : P_3 = 0$ e ve ne è solo uno secondario:

$$\dot{\phi}_1 = \left\{ \phi_1, H_T \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{P_2^2}{(1+Q_3)^2} - Q_2^2 \right] \quad (3.18)$$

$$\phi_2 : \frac{P_2}{(1+Q_3)^2} \pm Q_2 \approx 0 \quad (3.19)$$

scegliamo il segno $-$ tanto il risultato è indipendente da questo; questa biforcazione dell'algoritmo ci rivela che esiste più di una superficie vincolata associate alla stessa variabile e la scelta avviene tramite la scelta delle condizioni iniziali; entrambi i vincoli sono di seconda classe e li possiamo usare per riscrivere Q_3 e P_3 in funzione delle altre variabili canoniche. Otteniamo

$$H_{PUCT} = P_1 Q_2 + P_2 Q_2 + \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2 - 1)Q_2^2 - \frac{1}{2}w_1^2 w_2^2 Q_1^2 \quad (3.20)$$

e quindi soffre ancora della instabilità di Ostrogradsky.

3.2 Lagrangiane di ordine N con M variabili ausiliarie

Vediamo come sia possibile generalizzare il precedente argomento quando la Lagrangiana contiene derivate di ordine N e M variabili ausiliarie. Introdurre M variabili ausiliarie non aumenta la dimensione dello spazio delle fasi perchè non sono variabili dinamiche. Consideriamo il caso in cui i vincoli generati dalle M variabili ausiliarie sia $2M$.

$$L = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(N)}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M). \quad (3.21)$$

Ci sono $M + 1$ equazioni di EL:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_a} = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, M) \quad (3.22)$$

$$\sum_{i=0}^N \left(-\frac{d}{dt}\right)^i \frac{\partial f}{\partial q^{(i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.23)$$

La dimensione dello spazio delle fasi è $2(N + M)$. Scegliamo le variabili canoniche:

$$Q_1 \equiv q \iff P_1 \equiv \sum_{j=1}^N \left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial q^{(j)}} \quad (3.24)$$

$$Q_i \equiv q^{i-1} \iff P_i \equiv \sum_{j=i}^N \left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-i} \frac{\partial f}{\partial q^{(j)}} \quad (3.25)$$

$$\vdots \quad (3.26)$$

$$Q_N \equiv q^{(N-1)} \iff P_N \equiv \frac{\partial f}{\partial q^{(N)}} \quad (3.27)$$

$$Q_{N+1} \equiv \lambda_1 \iff P_{N+1} \equiv P_{\lambda_1} = 0 \quad (3.28)$$

$$\vdots \quad (3.29)$$

$$Q_{N+M} \equiv \lambda_M \iff P_{N+M} \equiv P_{\lambda_M} = 0 \quad (3.30)$$

La non degenerazione della Lagrangiana ci permette di risolvere $q^{(N)}$ come funzione di P_N e degli Q_i : $q^{(N)} = h(Q_1, \dots, Q_N, Q_{N+1}, \dots, Q_{N+M}, P_N)$. Possiamo scrivere la Hamiltoniana totale:

$$H_T = P_1 Q_2 + \dots + P_{N-1} Q_N + P_N h(Q_1, Q_{N+M}, P_N) - f(Q_1, \dots, Q_{N+M}, h) + u^a \phi_a \quad (3.31)$$

dove $\phi_a : P_{N+a} = 0$ con $1 \leq a \leq M$ sono M vincoli primari. Per trovare quelli secondari scriviamo le relazioni di consistenza:

$$\tilde{\phi}_a = \left\{ \phi_a, H_T \right\} : \frac{\partial f}{\partial \lambda_a} \Big|_{\lambda_a = Q_{N+a}} \approx 0 \quad (3.32)$$

Se $\phi_a, \tilde{\phi}_b \neq 0$ per $1 \leq a, b \leq M$ allora sono entrambi di seconda classe e non ve ne sono altri da determinare.

Si possono ridurre M coppie delle variabili canoniche Q_{N+a}, P_{N+a} utilizzando i vincoli, ad esempio:

$$Q_{N+a} = F_a(Q_1, \dots, Q_N, P_N) \quad P_{N+a} = 0 \quad (3.33)$$

e la Hamiltoniana diventa

$$H_R = P_1 Q_2 + \dots + P_{N-1} Q_N + P_N h(Q_1, \dots, Q_N, F_a, \dots, F_M, P_N) - f(Q_1, \dots, Q_N, h, F_a, \dots, F_M) \quad (3.34)$$

che mostra la instabilità nella dipendenza lineare da P_1, \dots, P_{N-1} . Possiamo affermare che se le variabili ausiliarie non inseriscono abbastanza vincoli da ridurre la dimensione dello spazio delle fasi la instabilità di Ostrogradsky sopravvive. Dato che ogni variabile ausiliare genera due vincoli, la dimensione finale dello spazio delle fasi risulta essere:

$$2(N + M)_{totale} - 2M_{vincoli} = 2N \quad (3.35)$$

invariata rispetto alla situazione iniziale.

3.3 Riduzione spazio delle fasi

Abbiamo appena visto come la instabilità non possa essere curata senza che la dimensione sia ridotta. Vediamo come tale riduzione effettivamente curi questo problema, con un esempio.

Consideriamo la Lagrangiana

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{(\ddot{q} - \lambda)^2}{2} \quad (3.36)$$

che è non degenera e segretamente stabile. Definiamo le variabili canoniche

$$Q_1 \equiv q \quad P_1 \equiv \dot{q} - \ddot{q} + \dot{\lambda} \quad (3.37)$$

$$Q_2 \equiv \dot{q} \quad P_2 \equiv \ddot{q} - \lambda \quad (3.38)$$

$$Q_3 \equiv \lambda \quad P_3 \equiv 0 \quad (3.39)$$

con $\phi_1 : P_3 = 0$ vincolo primario ed Hamiltoniana totale

$$H = P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \frac{P_2^2}{2} - \frac{Q_2^2}{2} + u_1 \phi_1 \quad (3.40)$$

le condizioni di consistenza $\dot{\phi}_i = \{ \phi_i, H \} \approx 0$ generano vincoli secondari che sono:

$$\phi_2 : -P_2 \approx 0 \quad (3.41)$$

$$\phi_3 : P_1 - Q_2 \approx 0 \quad (3.42)$$

$$\phi_2 : -Q_3 - P_2 \approx 0 \quad (3.43)$$

Tutti i vincoli sono di seconda classe. Se usiamo (ϕ_1, ϕ_4) per ridurre (Q_3, P_3) e (ϕ_2, ϕ_3) per ridurre (Q_2, P_2) la Hamiltoniana diventa:

$$H_R = P_1^2 - \frac{P_1^2}{2} = \frac{P_1^2}{2} \quad (3.44)$$

che è limitata inferiormente e quindi libera da "gradi di libertà instabili". La dimensione dello spazio delle fasi si è ridotta da (Q_1, Q_2, P_1, P_2) a (Q_1, P_1) .

3.3.1 Ghostbusters: condizioni generali

Ovviamente una riduzione dello spazio delle fasi non implica automaticamente la rimozione della instabilità. Vediamo quale sono le condizioni generali per le quali la patologia viene curata. Consideriamo la più generale lagrangiana non degenere del secondo ordine con un campo ausiliario λ allo scopo di mostrare come, in principio, sia possibile affrontare la instabilità :

$$L = A_{ij}\lambda^i\ddot{q}^j \quad (3.45)$$

dove A_{ij} sono funzioni di q e \dot{q} ; gli indici bassi indicano le funzioni, quelli alti la potenza. Per semplicità consideriamo $i, j = 0, 1, 2$. Con questi valori di j lo spazio delle configurazioni viene mappato uno-a-uno nello spazio delle fasi e questo è ciò che rende una teoria consistente, altrimenti avremmo bisogno di condizioni iniziali per specificare dove ci stiamo muovendo nello spazio delle configurazioni. La scelta di i permette di evitare biforcazioni dell'algoritmo per la cui scelta sarebbero necessarie condizioni iniziali. Definiamo quindi le variabili canoniche:

$$Q_1 \equiv q \iff P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \quad (3.46)$$

$$Q_2 \equiv \dot{q} \iff P_2 \equiv A_{i1}\lambda^i + 2A_{i2}\lambda^i\dot{q} \quad (3.47)$$

$$Q_3 \equiv \lambda \iff P_3 = 0. \quad (3.48)$$

possiamo invertire \ddot{q} in funzione delle variabili canoniche:

$$\ddot{q} \equiv h(Q_1, Q_2, Q_3, P_2) = \frac{P_2 - A_{i1}Q_3^i}{2A_{j2}Q_3^j} \quad (3.49)$$

la hamiltoniana totale diventa

$$H_T = P_1Q_2 + P_2h(Q_1, Q_2, Q_3, P_2) + u^1\phi_1 - A_{ij}(Q_1, Q_2)Q_3^i h^j(Q_1, Q_2, Q_3, P_2) \quad (3.50)$$

con $\phi_1 : P_3 = 0$ è il vincolo primario che genera un vincolo secondario

$$\dot{\phi}_1 \equiv \left\{ P_3, H_T \right\} = -[P_2 - \sum_{k,l} lA_{kl}Q_3^k h^{l-1}] \frac{\partial h}{\partial Q_3} + \sum_{i,j} iA_{ij}Q_3^{i-1} h^j \approx 0 \quad (3.51)$$

e dato che $\frac{\partial h}{\partial Q_3}$ si annulla per la (3.47)

$$\phi_2 : \sum_{i,j} iA_{ij}Q_3^{i-1} h^j = A_{1j}h^j + 2A_{2j}Q_3 h^j \approx 0 \quad (3.52)$$

È richiesto che la dimensione dello spazio sia ridotta se si vuole rendere stabile la teoria; è necessario quindi che le relazioni di consistenza generino ulteriori vincoli oltre alla prima coppia. Il vincolo ϕ_2 non deve dipendere da Q_3

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial Q_3} = 2A_{2i}h^i + jkA_{jk}Q_3^{j-1} h^{k-1} \frac{\partial h}{\partial Q_3} = 0 \quad (3.53)$$

con

$$\frac{\partial h}{\partial Q_3} = -\frac{1}{2(A_{i2}Q_3^i)^2} [(A_{j2}Q_3^j)(A_{11} + 2A_{21}Q_3) + (P_2 - A_{k1}Q_3^k)(A_{12} + 2A_{22}Q_3)]. \quad (3.54)$$

Si vede che $\frac{\partial \phi_2}{\partial Q_3}$ è una funzione quadratica di P_2 . Per far sì che si annulli dobbiamo imporre i coefficienti di P_2^0, P_2^1 e P_2^2 nulli. Giungiamo alla condizione più generale sugli A_{ij}

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A & B & a \\ c & \pm\sqrt{4ab} & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

con A, B, a, b, c funzioni di Q_1 e Q_2 . Il coefficiente a non può essere nullo perchè altrimenti la Lagrangiana non descriverebbe una teoria di ordine superiore. La più generale lagrangiana con più di due vincoli può essere scritta

$$L = A + B\ddot{q} + a\dot{q}^2 + c\lambda + b\lambda^2 \pm \sqrt{4ab}\lambda\ddot{q} \quad (3.56)$$

con tutti i coefficienti funzioni di q e \dot{q} ; la accelerazione può essere invertita dalla definizione di P_2

$$\ddot{q} = h = \frac{P_2 - B \mp \sqrt{4ab}Q_3}{2a} \quad (3.57)$$

e possiamo scrivere la Hamiltoniana totale e ϕ_2

$$H_T = P_1Q_2 + P_2h - A - Bh - ah^2 - cQ_3 - bQ_3^2 \mp \sqrt{4ab}Q_3h + u^1\phi_1 \quad (3.58)$$

$$\phi_2 : c \pm \sqrt{4ab} \left(\frac{P_2 - B}{2a} \right) \approx 0. \quad (3.59)$$

Dato che la instabilità proviene dal termine P_1Q_2 , per curarla è necessario che Q_2 sia una qualche funzione di P_1 . È necessario quindi che P_1 entri nelle equazioni o di ϕ_3 o di ϕ_4 ; se entra in ϕ_5 o ϕ_6 ci saranno sei vincoli, tutte le variabili canoniche diventano costanti e la teoria è triviale.

P1 in Φ_4 non rende stabile:

Se P_1 deve essere in ϕ_4 allora P_2 deve essere in ϕ_3 ma non anche in ϕ_2 , quindi ϕ_2 non deve dipendere da P_2 . Ciò viene soddisfatto se $b = 0$ tale che $\phi_2 : c \approx 0$ e $h = (P_2 - B)/2a$; ϕ_3 diventa

$$\phi_3 : \frac{\partial c}{\partial Q_1} Q_2 + \frac{\partial c}{\partial Q_2} \frac{(P_2 - B)}{2a} \quad (3.60)$$

Se $\frac{\partial c}{\partial Q_2} = 0$ P_1 non potrà comparire in ϕ_4 , e la hamiltoniana resta instabile o triviale (con sei vincoli tutte le variabili sono costanti). Richiediamo quindi $\frac{\partial c}{\partial Q_2} \neq 0$ affinché P_1 compaia in ϕ_4 . Questi requisiti valgono anche affinché Q_3 sia in ϕ_4 :

$$\phi_4 : -\frac{\partial \phi_3}{\partial P_2} \left(P_1 - \frac{\partial A}{\partial Q_2} - \frac{\partial B}{\partial Q_2} h - \frac{\partial a}{\partial Q_2} h^2 - \frac{\partial c}{\partial Q_2} Q_3 \right) + \frac{\partial \phi_3}{\partial Q_1} Q_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial Q_2} h \approx 0. \quad (3.61)$$

Usando ϕ_1, ϕ_3 e ϕ_4 per eliminare P_3, P_2 e Q_3 e poi sostituirli nella Hamiltoniana totale otteniamo:

$$H = F(Q_1, Q_2) + P_1 \left(Q_2 - \frac{c}{\frac{\partial c}{\partial Q_2}} \right) \quad (3.62)$$

sostituendo l'ultimo vincolo $\phi_2 : c \approx 0$ che lega Q_2 a Q_1 otteniamo la hamiltoniana ridotta

$$H_R = F_1(Q_1) + P_1 F_2(Q_1) \quad (3.63)$$

con F_1 e F_2 funzioni di solo Q_1 . La hamiltoniana è ancora instabile a meno che $F_2 = 0$, cioè $c = Q_2 F_3(Q_1)$ il che significa che il moltiplicatore di Lagrange vincola Q_1 ad essere

una costante il che rende la teoria triviale. Quindi se P_1 compare solo in ϕ_4 la teoria è instabile o triviale.

P1 in Φ_3 e condizioni:

Consideriamo quando P_1 è in ϕ_3 . Questo significa che P_2 è in ϕ_2 il che richiede che $b \neq 0$. Sostituendo h nella hamiltoniana totale otteniamo:

$$H_T = P_1 Q_2 + \frac{(P_2 - b \pm \sqrt{4ab} Q_3)^2}{4a} - A - c Q_3 - b Q_3^2 + u^1 \phi_1 \quad (3.64)$$

che possiamo usare per calcolare ϕ_3

$$\phi_3 : \pm(P_2 - B) \left((P_2 - B) \frac{\partial b}{\partial Q_2} - 2b Q_2 \frac{\partial a}{\partial Q_1} \right) \quad (3.65)$$

$$\pm a \left(2Q_2(P_2 - B) \frac{\partial b}{\partial Q_1} - 4b(P_1 - \frac{\partial A}{\partial Q_2} + Q_2 \frac{\partial B}{\partial Q_2 - 1}) \right) + 2(P_2 - B) \sqrt{ab} \frac{\partial c}{\partial Q_2} + 4a Q_2 \sqrt{ab} \frac{\partial c}{\partial Q_1} \approx 0 \quad (3.66)$$

che è sempre indipendente da Q_3 e poichè $a, b \neq 0$ possiamo usare ϕ_3 per esprimere P_1 rispetto alle altre variabili canoniche.

$$P_1 \approx \pm \left(\frac{c Q_2}{2\sqrt{ab}} \frac{\partial a}{\partial Q_1} - \frac{c Q_2 \sqrt{ab}}{2b^2} \frac{\partial b}{\partial Q_1} + \frac{a Q_2}{\sqrt{ab}} \frac{\partial c}{\partial Q_1} \right) + \frac{\partial A}{\partial Q_2} - Q_2 \frac{\partial B}{\partial Q_1} + \frac{c^2}{4b^2} \frac{\partial b}{\partial Q_2} - \frac{c}{2b} \frac{\partial c}{\partial Q_2} \quad (3.67)$$

Se usiamo ϕ_1 e ϕ_2 per eliminare P_3 e P_2 la hamiltoniana si riduce a

$$H_R = P_1 Q_2 + \frac{c^2}{4b} - A \quad (3.68)$$

infine utilizziamo (3.67) per scrivere $Q_2 = g(Q_1, P_1)$ e lo sostituiamo nella hamiltoniana. Dal momento che ci sono cinque funzioni arbitrarie (A, B, a, b, c) di q e \dot{q} , basta sceglierle in modo che la Hamiltoniana ridotta sia stabile.

$$H_R = P_1 g(Q_1, P_1) + \frac{c^2}{4b} - A \quad (3.69)$$

Nell'esempio fatto in precedenza abbiamo scelto $A = Q_2^2/2, B = c = 0$ e $a = b = 1/2$. Abbiamo visto come la instabilità lineare di Ostrogradsky, in una teoria non degenera, possa essere rimossa con la aggiunta di vincoli al costo di ridurre la dimensione dello spazio delle fasi.

Capitolo 4

Sistemi degeneri

È interessante chiedersi se la instabilità di Ostrogradsky persista anche quando le equazioni del moto provengano da una Lagrangiana degenera. La esistenza della instabilità di Ostrogradsky in quest'ultimo caso non è coperta dagli argomenti esposti in precedenza ma necessita del formalismo esposto da Dirac. Lo scopo di questa sezione è capire se EOMs di un generico ordine dispari sono associate inevitabilmente alla patologia di Ostrogradsky.

Più in generale vedremo che ogni Lagrangiana non degenera porta a EOMs di ordine pari mentre quelle di ordine dispari provengono da una degenera .

4.0.1 Lagrangiane per EOMs del terzo ordine

È necessario fare una precisazione sulla relazione che intercorre tra Lagrangiane degeneri e EOMs del terzo ordine; quest'ultime provengono sempre da una Lagrangiana degenera ma non è vero il contrario, ad esempio la seguente Lagrangiana di una variabile $L = \ddot{x}f(\dot{x}, x)$ è degenera ma le EOMs sono del secondo ordine e la instabilità di Ostrogradsky non appare. È falso affermare, quindi, che ogni Lagrangiana degenera soffre della suddetta patologia; è invece corretto affermare che ogni Lagrangiana degenera che porta a EOMs del terzo ordine conduca ad essa, come mostreremo in seguito. Procederemo costruendo la più generale Lagrangiana per EOMs del terzo ordine e mostrando, attraverso la analisi hamiltoniana, che la instabilità sorge sempre.

Consideriamo la seguente Lagrangiana che dipende da N variabili $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ e che contiene derivate rispetto al tempo fino all'ordine n :

$$L = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(n)}{\mathbf{x}}) \quad (4.1)$$

con $n \geq 2$ è un intero positivo arbitrario. Determiniamo n e la forma della Lagrangiana richiedendo che restituisca EOMs del terzo ordine. Dato che il nostro primo interesse è la instabilità di Ostrogradsky delle variabili che obbediscono alle EOMs del terzo ordine, richiediamo che tutte le variabili obbediscano ad EOMs del terzo ordine in maniera indipendente. L'accoppiamento di queste con variabili che obbediscono al più a EOMs del secondo ordine non inficia sulla esistenza della instabilità di Ostrogradsky. Le equazioni di EL per (4.1) sono date da:

$$\frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{x}}} - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{\partial L}{\partial \overset{(n-1)}{\mathbf{x}}} + \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \frac{\partial L}{\partial \overset{(n-2)}{\mathbf{x}}} - \dots = 0. \quad (4.2)$$

Per una Lagrangiana generica il più alto ordine di derivazione è \mathbf{x}^{2n} che proviene solo dal primo termine della (4.2). Per eliminare la presenza di \mathbf{x}^{2n} da EOMs (4.2) richiediamo che:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i^{(n)} \partial x_j^{(n)}} = 0 \quad (4.3)$$

per ogni $i, j = 1, \dots, N$. La Lagrangiana va quindi scritta così:

$$L = \sum_{j=1}^N x_j^{(n)} f_j(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) + g(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) \quad (4.4)$$

con f_j e g funzioni arbitrarie. Le equazioni di EL sono:

$$\sum_{j=1}^N x_j^{(2n-1)} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j^{(n-1)}} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i^{(n-1)}} \right) + (\text{derivate di ordine più basso}) = 0. \quad (4.5)$$

Per ottenere EOMs del terzo ordine imponiamo che i coefficienti per $x_j^{(2n-1)}$ si annullino:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j^{(n-1)}} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i^{(n-1)}} \quad (4.6)$$

Per il teorema di Green esiste una funzione F che soddisfa:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i^{(n-1)}} F(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}). \quad (4.7)$$

Possiamo riscrivere la Lagrangiana come:

$$L = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n-1} x_j^{(k)} \frac{\partial F}{\partial x_j^{(k-1)}} + g \quad (4.8)$$

a meno di una derivata totale $\frac{dF}{dt}$. Ciò significa, senza perdere di generalità, che saremmo potuti partire da una Lagrangiana (4.1) contenente al massimo $\mathbf{x}^{(n-1)}$. Ripetendo la stessa procedura si può ridurre la Lagrangiana (4.1) ad una che contiene al massimo $\ddot{\mathbf{x}}$. Chiedendo la assenza di EOMs del quarto ordine scriviamo L come:

$$L = \sum_{j=1}^N \ddot{x}_j f_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (4.9)$$

Le EOMs sono:

$$\sum_{j=1}^N M_{ij}^{(\dot{x})} \ddot{x}_j + (\text{derivate di ordine più basso}) = 0, \quad (4.10)$$

dove:

$$M_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \quad (4.11)$$

Siccome M_{ij} è una matrice $N \times N$ antisimmetrica può essere diagonalizzata a blocchi:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \Lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \Lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_a \\ -\lambda_a & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Se N è dispari, $N=2I-1$ con $I \geq 1$, abbiamo $\det\Lambda = 0$. Esiste un J tale che $1 \leq J \leq I-1$ e $2J - I$ righe e colonne di Λ sono occupate da zeri. Perciò non tutte le variabili obbedirebbero a equazioni differenziali del terzo ordine indipendentemente. I gradi di libertà sarebbero minori di $3N$ e possiamo introdurre un nuovo set di $2(I-J)$ variabili che obbediscono ad equazioni differenziali del terzo ordine e $2J$ che sono regolate da EOMs del secondo ordine. L'accoppiamento con variabili regolate da equazioni del secondo ordine non è essenziale per la nascita della instabilità di Ostrogradsky per cui consideriamo N pari. Per N pari se M ha dei λ_a nulli si può ridurre il numero delle variabili e rendere tutti i λ_a non nulli e $\det M \neq 0$

In conclusione la Lagrangiana più generale che porta a EOMs indipendenti del terzo ordine è:

$$L = \sum_{j=1}^{2N} \ddot{x}_j f_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad (4.13)$$

con questa impostazione abbiamo bisogno di $6N$ condizioni iniziali per $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$ per $i = 1, \dots, 2N$ per determinare la evoluzione del sistema.

Procediamo alla analisi hamiltoniana di (4.13) attraverso un approccio che ci permette di scrivere la Lagrangiana con derivate di ordine generico come una di ordine standard con la aggiunta dei moltiplicatori di Lagrange. Il vantaggio di questo metodo è che possiamo utilizzare il formalismo di Dirac per il formalismo canonico in presenza di vincoli. In presenza dei moltiplicatori di Lagrange la (4.13) diventa

$$L = \sum_{j=1}^{2N} \left[\dot{y}_j f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda_j (\dot{x}_j - y_j) \right] + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.14)$$

La variazione rispetto a λ_i restituisce $\dot{x}_i = y_i$ che con la (4.14) riproduce la (4.13). Ora la (4.14) è scritta con derivate del primo ordine di x_i, y_i, λ_i . Questo implica che le EOMs sono del secondo ordine e abbiamo bisogno di $12N$ condizioni iniziali in totale. Vedremo che $6N$ condizioni iniziali sono fissate dalla presenza di vincoli di seconda classe che quindi lasciano $6N$ condizioni totali che corrispondo a quelle necessarie per (4.13).

I momenti canonici per x_i, y_i, λ_i sono:

$$p_{x_i} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \lambda_i, \quad p_{y_i} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad p_{\lambda_i} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0. \quad (4.15)$$

Dal momento che i momenti non contengono $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\lambda}$ non possiamo risolverli in funzione dei momenti. Abbiamo quindi $6N$ vincoli primari:

$$\phi_{x_i} \equiv p_{x_i} - \lambda_i = 0 \quad \phi_{y_i} \equiv p_{y_i} - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \phi_{\lambda_i} \equiv p_{\lambda_i} = 0 \quad (4.16)$$

che possiamo incorporare nella Lagrangiana tramite i moltiplicatori di Lagrange. Consideriamo la azione:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} (p_{qj} \dot{q}_j - \mu_{qj} \phi_{qj}) - H \right] dt \quad (4.17)$$

con H

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} p_{qj} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^{2N} \lambda_j y_j - g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.18)$$

con $\mu_{xi}, \mu_{yi}, \mu_{\lambda i}$ moltiplicatori di Lagrange per i vincoli primari. Dalla azione (4.17) ricaviamo le equazioni canoniche:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{qi}} + \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_{qj} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial p_{qi}} \quad \dot{p}_{qi} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_{qj} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial q_i} \quad (4.19)$$

Riprendendo la trattazione esposta nei capitoli precedenti, la evoluzione temporale di una qualsiasi funzione $x_i(q, p)$ è data da:

$$\frac{d\xi}{dt} = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \left(\frac{\partial \xi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \xi}{\partial p_{qj}} \dot{p}_{qj} \right) = \left\{ \xi, H \right\} + \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_{qj} \left\{ \xi, \phi_{qj} \right\} \approx \left\{ \xi, H_T \right\} \quad (4.20)$$

con H_T Hamiltoniana totale:

$$H_T = H + \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_{qj} \phi_{qj} \quad (4.21)$$

Imponiamo le condizioni di consistenza:

$$\frac{d\phi_{qi}}{dt} = \left\{ \phi_{qi}, H \right\} + \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_{qj} \left\{ \phi_{qi}, \phi_{qj} \right\} \approx 0, \quad (4.22)$$

che per $q = x, y, \lambda$ diventa:

$$\frac{d\phi_{xi}}{dt} = \sum_{j=1}^{2N} \mu_{yj} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \mu_{\lambda i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (4.23)$$

$$\frac{d\phi_{yi}}{dt} = -\lambda_i - \sum_{j=1}^{2N} (\mu_{xj} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} + \mu_{yj} M_{ij}^{(y)}) - \frac{\partial g}{\partial y_i} \quad (4.24)$$

$$\frac{d\phi_{\lambda i}}{dt} = -y_i + \mu_{xi} \quad (4.25)$$

Dato che $\det M^y \neq 0$ per ipotesi, possiamo invertirla e ottenendo $M_{(y)}^{-1}$ risolvere le condizioni di consistenza per determinare il valore dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\mu_{xi} = y_i, \quad (4.26)$$

$$\mu_{yj} = - \sum_{i=1}^{2N} (M_{(y)}^{-1})_{ij} \left(\lambda_j + \frac{\partial g}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{2N} y_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) \quad (4.27)$$

$$\mu_{\lambda i} = - \sum_{j=1}^{2N} \sum_{k=1}^{2N} (M_{(y)}^{-1})_{jk} \left(\lambda_k + \frac{\partial g}{\partial y_k} + \sum_{l=1}^{2N} y_l \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial y_i} \quad (4.28)$$

e quindi non ci sono vincoli ulteriori, secondari. Dato che i moltiplicatori sono tutti determinati, (4.22) deve essere invertibile, cioè $\det \Delta \neq 0$ dove $\Delta_{qiq'i} \equiv \left\{ \phi_{qi}, \phi_{q'j} \right\}$.

Le parentesi di Poisson tra i vincoli sono:

$$\left\{ \phi_{yi}, \phi_{yj} \right\} = M_{ji}^{(y)} \quad \left\{ \phi_{xi}, \phi_{yj} \right\} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \left\{ \phi_{\lambda i}, \phi_{xj} \right\} = \delta_{ij} \quad (4.29)$$

mentre tutte le altre combinazioni si annullano. Inoltre $\det\Delta = \det M^{(y)} \neq 0$ che è esattamente la condizione che ci permette di trovare i moltiplicatori di Lagrange. I sei vincoli sono di seconda classe per cui rimaniamo con $12N - 6N$ condizioni iniziali. Ottenuti i moltiplicatori possiamo determinare la hamiltoniana totale da (4.21). Valutando (4.21) sulla superficie vincolata $H_T \approx H$ e la (4.18) mostra che il primo termine è lineare in p_{xi} che non è soggetto ad alcun vincolo primario e può assumere arbitrariamente qualsiasi valore. Per tale motivo la Hamiltoniana non è limitata e soffre della instabilità di Ostrogradsky.

4.0.2 Lagrangiane per EOMs di ordine dispari

La analisi può essere applicata a sistemi con EOMs di ordine dispari generico. Si può dimostrare che la Lagrangiana per EOMs di ordine $(2d - 1)$ è data da

$$L = \sum_{j=1}^{2N} x_j^{(d)} f_j(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(d-1)}) + g(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(d-1)}), \quad (4.30)$$

con $\det M^{x^{(d-1)}} \neq 0$. Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange possiamo rimuovere $\ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(d-1)}$ dalla Lagrangiana e procedere con la analisi del formalismo Hamiltoniano in presenza dei vincoli.

Abbiamo mostrato come le Lagrangiane che portano ad EOMs di ordine dispari possano essere solo degeneri.

Capitolo 5

Conclusioni

In conclusione abbiamo visto come la instabilità che affligge teorie che provengono da Lagrangiane non degeneri sia presente per la costruzione di Ostrogradsky stessa e che la operazione per la sua rimozione sia tutt'altro che lineare ed immediata; nell'esempio riportato per una specifica classe di Lagrangiane bisogna operare scelte che dipendono dal caso in esame. Gli esempi riportati mostrano che la natura della instabilità si manifesta nel fatto che ci sono gradi di libertà che possono portare energie positive o negative arbitrarie mantenendo la energia totale costante oppure si mostra in soluzioni che non soddisfano il nostro senso fisico. Per quanto riguarda le Lagrangiane degeneri, seppure presentino vincoli interni per definizione, questi risultano essere di seconda classe e quindi non efficaci nella cura della instabilità. L'unico modo per limitare le variabili responsabili della problematica è inserire vincoli a mano che però rendono il sistema non equivalente a quello di partenza, infatti la natura della instabilità è di origine fisica e non è semplicemente conseguenza di una scelta infelice di coordinate. Tutto ciò rende questa classe di teorie con derivate superiori rispetto al tempo problematiche nel loro utilizzo nella descrizione della natura.

Bibliografia

- [1] R.P.Woodard. *The Theorem of Ostrogradsky*, 2015.
- [2] P.A.M.Dirac. *Lectures on quantum mechanics*, 2001.
- [3] Marc Henneaux. Claudio Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, 1992.
- [4] Hayato Motohashi, Teruaki Suyama. *Third-order equations of motion and the Ostrogradsky instability*, 2014.
- [5] David Morin. *Introduction to classical mechanics*.
- [6] Andrei Smilga. *Classical and Quantum Dynamics of Higher-Derivative Systems*, 2017.
- [7] Lev D. Landau. *Meccanica*, 2015.
- [8] Tai-jun Chen, Matteo Fasiello Eugene A. Lima, Andrew J. Tolleyb. *Higher derivative theories with constraints: exorcising Ostrogradsky's ghost*, 2013.
- [9] Hayato Motohashi, Karim Noui, Teruaki Suyama, Masahide Yamaguchi, David Langlois. *Healthy degenerate theories with higher derivatives*, 2016.