

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Meccanica e Termodinamica dei Mezzi Continui con Applicazioni

Tesi di Laurea in Meccanica dei Continui

Relatore:
Prof. ZUCCHINI ROBERTO

Presentata da:
NICOLETTI ANDREA

IV Appello 7 Dicembre
2017/2018

*Ai miei GENITORI e a TINA,
che mi hanno sempre supportato
nonostante le difficoltà.*

Indice

1	Descrizione Formale dei Continui	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Definizioni	2
1.2.1	Descrizione Materiale e Spaziale	5
1.3	Gradiente di Deformazione	7
1.4	Equazioni Fondamentali	9
1.4.1	Equazioni di Bilancio	9
1.4.2	Equazioni di Giunzione	11
2	Meccanica	16
2.1	Bilancio della Massa	16
2.2	Tensore di Stress	17
2.3	Bilancio del Momento Lineare	19
2.4	Bilancio del Momento Angolare	22
3	Termodinamica	25
3.1	Termodinamica dei Continui	25
3.2	Bilancio dell'Energia	28
3.3	Bilancio dell'Entropia	32
3.3.1	Disuguaglianza di Clausius-Duhem	36
4	Relazioni Costitutive	39
4.1	Fluidi Perfetti	40
4.2	Fluidi Viscosi Lineari	41

4.3 Metodo Coleman-Noll	45
-----------------------------------	----

Abstract

In questa tesi vengono presentati le leggi fondamentali della meccanica e termodinamica dei mezzi continui. Il capitolo (1), dopo una breve introduzione alla cinematica dei continui, prosegue con la descrizione generale delle equazioni di bilancio e delle relative equazioni di giunzione. Questi concetti verranno sistematicamente applicati nella parte di meccanica nel capitolo (2) e termodinamica nel capitolo (3) per formulare leggi di bilancio della massa, impulso, momento angolare ed energia, valide per ogni mezzo continuo. Viene poi discusso il bilancio dell'entropia che, diversamente dalle altre grandezze principali della meccanica e termodinamica, obbedisce ad una disequazione detta disequaglianza di Clausius-Duhem, diretta conseguenza del principio di Prigogine. Oltre alle equazioni di bilancio, viene introdotta un'altra classe di relazioni, dette costitutive, che sono di natura fenomenologica e dipendono dal tipo di mezzo considerato. Queste si aggiungono alle equazioni di bilancio così da formare un sistema di equazioni differenziali in grado di determinare tutti i campi incogniti. Il metodo che presentiamo per risolvere questo sistema di equazioni è quello elaborato originalmente da Coleman e Noll, che utilizza la disequaglianza di Clausius - Duhem per ricavare i vincoli soddisfatti dai coefficienti che compaiono nelle relazioni costitutive. Nel capitolo (4) sulle applicazioni esponiamo come tale metodologia possa essere implementata nel caso dei fluidi non viscosi, per i quali inoltre proponiamo altre applicazioni di interesse pratico.

Capitolo 1

Descrizione Formale dei Continui

1.1 Introduzione

La *fisica dei continui* studia le proprietà dei corpi estesi a delle scale di lunghezza tali da rendere efficace la descrizione continua degli stessi senza che parti discrete e molecolari possano influire. Di norma, la scala di lunghezza con cui si lavora risulta essere molto maggiore della *lunghezza di Planck* $l_P \simeq 10^{-6} \text{cm}$. Se si dovesse avere a che fare con valori comparabili a l_P o anche inferiori, allora la composizione molecolare della materia diventerebbe rilevante e non sarebbe più possibile affrontare il problema utilizzando l'approssimazione del continuo. In questa sezione verranno introdotti i concetti fondamentali per comprendere di cosa tratta questo importante campo della fisica nato nel XIX secolo con *A. Cauchy* e studiato tutt'ora.

1.2 Definizioni

Il concetto principale della fisica dei continui è quello di *punto materiale*, detto anche *elemento materiale* o, più semplicemente, *particella*. Un punto materiale è una porzione di un mezzo continuo con le seguenti proprietà:

1. È macroscopicamente piccolo, ovvero la sua dimensione è molto minore della scala risolutiva di cui si vuole tenere conto. In questo modo, matematicamente si può trattare come se non avesse nè forma nè dimensione.
2. È microscopicamente grande, cioè contiene abbastanza materia da poter essere considerato con una struttura continua piuttosto che discreta.

Partendo da questa definizione di punto materiale, fisicamente esso avrà una dimensione comparabile alla lunghezza di Planck l_P , mentre matematicamente risulterà totalmente senza dimensione.

Un *mezzo continuo* può essere visto come un insieme \mathcal{B} di tutti i suoi punti materiali \mathcal{P} , i quali risultano localizzati in modo preciso nello spazio. Una *configurazione* χ è una mappa biettiva che fornisce tali posizioni spaziali dato un punto materiale \mathcal{P} che, schematizzata, è un'applicazione lineare del tipo

$$\begin{aligned}\chi : \mathcal{B} &\rightarrow \chi[\mathcal{B}] \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P} &\mapsto \chi(\mathcal{P}) = \mathbf{x}(\mathcal{P}) = (x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \mathcal{P} = \chi^{-1}(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

dove χ^{-1} rappresenta l'applicazione lineare inversa. La posizione dei punti materiali può dipendere anche dal tempo, cioè la configurazione χ è una funzione del tempo t e verrà indicata con χ_t per rendere esplicita questa dipendenza. In questo caso, per ogni punto materiale \mathcal{P} abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_t : \mathcal{B} &\rightarrow \chi_t[\mathcal{B}] \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P} &\mapsto \chi_t(\mathcal{P}) = \mathbf{x}(\mathcal{P}, t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))\end{aligned}$$

Abbiamo visto, quindi, che una configurazione assegna ad ogni particella materiale un tripletto di numeri reali in modo univoco rispetto ad una determinata base di coordinate. Per liberarsi della definizione astratta dei punti materiali, però, è necessario scegliere una tra tutte le configurazioni

disponibili e considerarla come *configurazione di riferimento* $\chi_{\mathcal{R}}$ tale che

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{R}} : \mathcal{B} &\rightarrow \chi[\mathcal{B}]_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P} &\mapsto \chi_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}) = \mathbf{X}(\mathcal{P}) = (X_1, X_2, X_3) \leftrightarrow \mathcal{P} = \chi_{\mathcal{R}}^{-1}(X_1, X_2, X_3)\end{aligned}$$

Grazie alla configurazione di riferimento possiamo identificare un qualsiasi punto materiale $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ attraverso la sua posizione nello spazio $\mathbf{X}(\mathcal{P})$. È da notare il fatto che tale posizione dipende dalla configurazione di riferimento scelta. Inoltre, \mathbf{X} è detta *coordinata materiale* o *coordinata lagrangiana* del mezzo materiale. Una volta scelta la configurazione di riferimento, possiamo esprimere le posizioni $\mathbf{x}(\mathcal{P}, t)$ in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1.1)$$

In questo modo otteniamo la posizione del punto materiale \mathcal{P} al tempo t che nella configurazione di riferimento si trova nella posizione \mathbf{X} . Essendo la funzione $\mathcal{P} \mapsto \mathbf{x}(\mathcal{P}, t)$ biettiva per un tempo t fissato, allora lo sarà anche la funzione $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ed esisterà, quindi, la funzione inversa

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

la quale restituisce la posizione nella configurazione di riferimento del punto materiale \mathcal{P} che al tempo t si trova nella posizione \mathbf{x} . Come nel caso precedente, anche \mathbf{x} dipende dalla configurazione di riferimento e, allo stesso modo di \mathbf{X} , può essere usato per parametrizzare l'insieme di punti materiali \mathcal{B} . Inoltre, \mathbf{x} è detta *coordinata spaziale* o *coordinata euleriana* del mezzo materiale.

Passiamo ora alla definizione di *velocità* al tempo t di un punto materiale $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$:

$$\mathbf{v}(\mathcal{P}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(\mathcal{P}, t) \quad (1.3)$$

Se è stata scelta una configurazione di riferimento, allora la definizione precedente può essere riscritta come

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (1.4)$$

Per semplicità, di norma si preferisce la notazione più compatta

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (1.5)$$

in cui il pedice \mathbf{X} specifica il fatto che la coordinata lagrangiana sia stata fissata. La funzione $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ fornisce la velocità al tempo t del punto materiale che si trova nella posizione \mathbf{X} della configurazione di riferimento ed è detta *velocità materiale* o *velocità lagrangiana*. Come ci si potrebbe aspettare, si può dare anche la definizione di *velocità spaziale* o *velocità euleriana* che, utilizzando la relazione (1.2), risulta

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \quad (1.6)$$

che rappresenta la velocità al tempo t del punto materiale \mathcal{P} che si trova nella posizione \mathbf{x} .

1.2.1 Descrizione Materiale e Spaziale

Generalizziamo ora il discorso fatto sulla velocità di un punto materiale ad una funzione $\xi(\mathcal{P}, t)$ qualsiasi, definita per ogni punto materiale \mathcal{P} e dipendente dal tempo t , e distinguiamola nelle due diverse descrizioni utilizzate nella fisica dei continui, ovvero la *descrizione materiale* e la *descrizione spaziale*.

Consideriamo una funzione $\xi(\mathcal{P}, t)$ definita come

$$\xi : \mathcal{B} \times \mathbb{I} \rightarrow \Xi \quad (1.7)$$

$$(\mathcal{P}, t) \mapsto \xi(\mathcal{P}, t) \quad (1.8)$$

dove \mathbb{I} rappresenta un intervallo di tempo e Ξ uno spazio vettoriale i cui elementi sono tensori (scalari, vettori, tensori di secondo ordine, etc.). Utilizzando la descrizione materiale o lagrangiana, $\xi(\mathcal{P}, t)$ viene calcolata rispetto alle coordinate \mathbf{X} di un punto materiale \mathcal{P} nella configurazione di riferimento:

$$\xi(\mathcal{P}, t) = \xi(\mathbf{X}, t) \quad (1.9)$$

La grandezza $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t)$, fissato un valore di \mathbf{X} , rappresenta l'evoluzione temporale di tale grandezza associata alla particella materiale che nella configurazione di riferimento si trova nella posizione \mathbf{X} . Se calcoliamo la derivata totale rispetto al tempo di $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t)$ troviamo

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (1.10)$$

il cui risultato appare analogo a quello (1.4) per il caso della velocità \mathbf{v} . A partire proprio dall'equazione (1.4) possiamo anche ottenere un'espressione per l'*accelerazione* $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ nella descrizione materiale, la quale risulta essere

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (1.11)$$

Ripetendo l'intero procedimento passando alla descrizione spaziale o euleriana, abbiamo che $\boldsymbol{\xi}(\mathcal{P}, t)$ è data rispetto alle coordinate \mathbf{x} di un punto materiale \mathcal{P} :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathcal{P}, t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \quad (1.12)$$

A differenza del caso lagrangiano, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ rappresenta il valore della grandezza $\boldsymbol{\xi}$ associata al punto materiale che si trova nella posizione \mathbf{x} al tempo t . In particolare, essendo il mezzo continuo in evoluzione, tale punto materiale può anche cambiare nel tempo. Se calcoliamo la derivata totale rispetto al tempo di $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

che differisce dal risultato (1.10) per il termine aggiuntivo $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ che è noto con il nome di *derivata convettiva* in cui $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ è la velocità della particella che nella configurazione di riferimento si trova nella posizione \mathbf{X} a cui capita di essere nella posizione \mathbf{x} al tempo t . La derivata totale rispetto al tempo nella descrizione euleriana si annulla quando la grandezza risulta essere indipendente esplicitamente dal tempo e, allo stesso tempo, $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ si annulla, cioè \mathbf{v} e ∇ devono risultare perpendicolari. Se calcoliamo il vettore

accelerazione $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ nella descrizione spaziale, utilizzando la formula (1.13) troviamo

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.14)$$

Di norma, nei trattati di fisica del continuo si utilizza il preciso simbolo $\frac{D}{Dt}$ per indicare la derivata totale rispetto al tempo nella descrizione euleriana e distinguerla da quella lagrangiana. Di seguito, però, non faremo ricorso ad una simile distinzione perchè la descrizione materiale verrà omessa totalmente se non in casi particolari in cui verrà esplicitamente segnalata. D'ora in avanti, quindi, per indicare la derivata (nella descrizione spaziale) di una funzione $\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ utilizzeremo la notazione più compatta

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi} \quad (1.15)$$

Rispettando questa scrittura, l'equazione (1.14) si presenta come

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \quad (1.16)$$

1.3 Gradiente di Deformazione

Le definizioni formali utili in questo ambito fisico non si limitano a descrivere solamente delle grandezze scalari e vettoriali, ma necessitano anche di grandezze più complesse e generiche quali sono i tensori. In questa sezione parleremo di uno dei due tensori che andremo ad utilizzare in seguito, ma ne esistono anche altri molto importanti, ad esempio il tensore di stress di Piola-Kirchhoff (il tensore di stress a cui faremo ricorso è quello di Cauchy).

Una delle grandezze fondamentali nell'analisi delle deformazioni dei mezzi continui è il tensore *gradiente di deformazione* $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ relativo alla configurazione di riferimento: esso fornisce la relazione tra una linea materiale prima di una deformazione e la stessa linea dopo la deformazione. Consideriamo un segmento $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i$ nella configurazione di riferimento corrispondente al segmento $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i$ nella configurazione al tempo t .

Utilizzando la relazione tra di essi, applichiamo l'espansione di Taylor alla definizione di $\Delta \mathbf{x}$ per ottenere

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}_f) - \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}_i) \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}_i)(\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i) + \mathcal{O}(|\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i|^2) \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}_i) \Delta \mathbf{X} + \mathcal{O}(|\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i|^2)\end{aligned}\quad (1.17)$$

Se \mathbf{X}_f e \mathbf{X}_i risultano sufficientemente vicini da poter trascurare i termini di ordine maggiore $\mathcal{O}(|\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_i|^2)$, possiamo definire il tensore gradiente di deformazione come

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}_i) \quad (1.18)$$

e, grazie ad esso, siamo in grado di scrivere la relazione tra le dimensioni dei segmenti nelle varie configurazioni nel seguente modo:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \Delta \mathbf{X} \quad (1.19)$$

Per segmenti di dimensioni infinitesime possiamo ricorrere ai differenziali, i quali ci permettono di definire il tensore $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ con più precisione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t}{\partial \mathbf{X}} \right)^T = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \quad (1.20)$$

e, esplicitando le componenti:

$$F_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (1.21)$$

Il determinante di \mathbf{F} è detto *Jacobiano del moto* e viene indicato con $J = \det(\mathbf{F})$. L'equazione $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{X} = 0$ per $\Delta \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ implica che una linea materiale nella configurazione di riferimento possa essere ridotta a zero da una deformazione. Non essendo fisicamente possibile, concludiamo che $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{X} \neq 0$ per $\Delta \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, ovvero il determinante J del tensore gradiente di deformazione deve essere sempre non nullo. Da questa affermazione deduciamo che \mathbf{F} ammette una funzione inversa \mathbf{F}^{-1} tale che

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) \Delta \mathbf{x} \quad (1.22)$$

1.4 Equazioni Fondamentali

In questa sezione ci occuperemo di presentare leggi che permetteranno di ottenere un sistema di equazioni grazie alle quali si potranno trovare molte delle grandezze necessarie a descrivere completamente il corpo continuo in esame. In particolare, queste equazioni saranno indipendenti dal materiale o dalla natura fisica del corpo, mentre quelle dipendenti da queste caratteristiche verranno presentate più avanti dopo avere derivato le prime.

1.4.1 Equazioni di Bilancio

Consideriamo una regione $\Omega = \Omega(t)$ dipendente dal tempo di un mezzo materiale \mathcal{B} al tempo t . Se prendiamo una grandezza fisica additiva qualsiasi Ψ la sua variazione nel tempo all'interno della regione Ω è data dalla seguente legge

$$\frac{d}{dt}\Psi(\Omega, t) = -\Phi_{\Psi}(\partial\Omega, t) + \Pi_{\Psi}(\Omega, t) \quad (1.23)$$

Questa equazione è detta *equazione di bilancio in forma integrale*. Nel nostro caso abbiamo:

1. $\Psi(\Omega, t)$ è la quantità totale della grandezza Ψ contenuta all'interno della regione Ω al tempo t . Se chiamiamo $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ la densità volumetrica associata a tale grandezza ed indichiamo con d^3x una piccola porzione della regione Ω , la Ψ totale contenuta in d^3x è $d^3x\psi$. Questo significa che la Ψ totale all'interno della regione Ω è

$$\Psi(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \psi \quad (1.24)$$

2. $\Phi_{\Psi}(\partial\Omega, t)$ è la quantità di Ψ uscente dalla frontiera $\partial\Omega$ (la cui normale è diretta verso l'esterno, ecco il perchè del segno negativo) nell'unità di tempo e viene anche chiamata *flusso* di Ψ . Come nel caso precedente, assumiamo l'esistenza di una densità (superficiale) che chiamiamo $\phi_{\Psi} = \phi_{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ tale che:

$$\Phi_{\Psi}(\partial\Omega, t) = \oint_{\partial\Omega} d^2\mathbf{x} \cdot \phi_{\Psi} \quad (1.25)$$

3. $\mathbf{\Pi}_\Psi(\Omega, t)$ è la quantità di Ψ che viene generata all'interno del volume del corpo nell'unità di tempo ed è detta *produzione* di Ψ . Quando Ψ viene generata si dice che $\mathbf{\Pi}_\Psi$ è una sorgente, mentre quando viene distrutta si dice che $\mathbf{\Pi}_\Psi$ è un pozzo. Ancora una volta, chiamata la densità volumetrica $\boldsymbol{\pi}_\Psi = \boldsymbol{\pi}_\Psi(\mathbf{x}, t)$, abbiamo:

$$\mathbf{\Pi}_\Psi(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \boldsymbol{\pi}_\Psi \quad (1.26)$$

Tutte le grandezze fisiche utilizzate vengono rappresentate genericamente da grandezze tensoriali dello stesso ordine k eccetto $\boldsymbol{\phi}_\Psi$ la quale sarà, invece, di ordine $k + 1$. L'equazione di bilancio ci dice, quindi, che la variazione nel tempo della grandezza Ψ contenuta all'interno della regione Ω è dovuta al flusso $\boldsymbol{\Phi}_\Psi$ attraverso la superficie $\partial\Omega$ e alla produzione $\mathbf{\Pi}_\Psi(\Omega, t)$ nell'unità di tempo. Mediante le densità appena descritte, possiamo riscrivere l'equazione di bilancio generale (1.23) come

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \psi = - \oint_{\partial\Omega} d^2\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\phi}_\Psi + \int_{\Omega} d^3x \boldsymbol{\pi}_\Psi \quad (1.27)$$

L'equazione di bilancio può anche essere scritta in forma locale partendo da quella integrale (1.27) ed utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds. Grazie ad esso sappiamo che la derivata temporale dell'integrale al membro di sinistra è data dalla formula

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \psi = \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\psi + \int_{\Omega} d^3x \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (1.28)$$

dove $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ è il campo vettoriale che rappresenta la velocità dei singoli punti materiali del mezzo. Andando a sostituire l'equazione (1.28) all'interno della legge di bilancio (1.27) otteniamo

$$\int_{\Omega} d^3x \frac{\partial\psi}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\psi = - \oint_{\partial\Omega} d^2\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\phi}_\Psi + \int_{\Omega} d^3x \boldsymbol{\pi}_\Psi \quad (1.29)$$

Applicando il teorema della divergenza sugli integrali di superficie risulta

$$\int_{\Omega} d^3x \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}\psi \right] = - \int_{\Omega} d^3x (\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}_\Psi - \boldsymbol{\pi}_\Psi) \quad (1.30)$$

Dovendo valere per qualunque regione del mezzo materiale Ω , possiamo uguagliare gli integrandi dell'equazione (1.30) per ottenere l'*equazione di bilancio in forma locale*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\psi + \phi_{\Psi}) - \pi_{\Psi} = \mathbf{0} \quad (1.31)$$

dove il termine $\mathbf{v} \otimes \psi$ è detto *flusso convettivo di ψ* .

1.4.2 Equazioni di Giunzione

Pur avendo considerato funzioni continue e differenziabili lungo tutto il corpo, ci sono casi in cui può capitare di avere a che fare con delle *discontinuità*. È anche possibile trattare una variazione particolarmente brusca di una certa funzione delimitata da due superfici, la cui distanza è piccola rispetto alla scala rilevante nella fisica del continuo, come una discontinuità e ricorrere allo stesso metodo proposto qui di seguito. È importante specificare che le superfici di discontinuità, in generale, possono trovarsi in movimento rispetto al mezzo continuo di cui fanno parte. Per risolvere i problemi introdotti da tali discontinuità occorre fare ricorso alla *teoria delle distribuzioni*. In questo modo, le equazioni di bilancio integrale (1.27) e locale (1.31) rimarranno valide, ma solo in senso distribuzionale.

Consideriamo una regione Ω . Definiamo la funzione $\chi_{\Omega} = \chi_{\Omega}(\mathbf{x})$ come

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (1.32)$$

χ_{Ω} è detta *funzione caratteristica* di Ω ed ha la proprietà per cui, data una funzione regolare qualsiasi $\xi = \xi(\mathbf{x})$ detta *funzione di test*:

$$\int d^3x \chi_{\Omega} \xi = \int_{\Omega} d^3x \xi \quad (1.33)$$

Oltre alla funzione caratteristica, abbiamo bisogno di un ulteriore strumento.

Consideriamo una superficie Σ . Definiamo la funzione $\delta_{\Sigma} = \delta_{\Sigma}(\mathbf{x})$ come

$$\delta_{\Sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin \Sigma \end{cases} \quad (1.34)$$

δ_Σ è detta funzione *delta di Dirac* di Σ ed ha la proprietà per cui, data una funzione di test $\xi = \xi(\mathbf{x})$:

$$\int d^3x \delta_\Sigma \xi = \int_\Sigma |d^2\mathbf{x}| \xi \quad (1.35)$$

Matematicamente, le equazioni (1.33) e (1.35) definiscono χ_Ω e δ_Σ come delle distribuzioni. Tra le due distribuzioni mostrate esistono delle relazioni che ora andremo ad osservare. Consideriamo una regione $\Omega = \Omega(t)$ dipendente dal tempo con bordo $\partial\Omega = \partial\Omega(t)$ e denotiamo con $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ la normale uscente e il campo di velocità assegnati a quest'ultimo. È importante notare che queste due grandezze sono definite esclusivamente su $\partial\Omega$. Chiamate χ_Ω la funzione caratteristica di Ω e $\delta_{\partial\Omega}$ la delta di Dirac di $\partial\Omega$, possiamo calcolare le derivate parziali di χ_Ω per ottenere le relazioni

$$\nabla \chi_\Omega = -\mathbf{n} \delta_{\partial\Omega} \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \chi_\Omega}{\partial t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \delta_{\partial\Omega} \quad (1.37)$$

Per dimostrarle, chiamiamo $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$ una funzione di test scalare. Nel caso di (1.36) abbiamo

$$\begin{aligned} \int d^3x \nabla \chi_\Omega \xi &= - \int d^3x \chi_\Omega \nabla \xi = - \int_\Omega d^3x \nabla \xi \\ &= - \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{n} \xi = - \int d^3x \mathbf{n} \delta_{\partial\Omega} \xi \end{aligned}$$

in cui, nel primo passaggio, è stata utilizzata una proprietà delle distribuzioni verificabile facilmente utilizzando l'integrazione per parti. Potendo scegliere una funzione di test qualsiasi abbiamo dimostrato la prima relazione. In modo simile, nel caso della seconda abbiamo

$$\int d^3x \frac{\partial \chi_\Omega}{\partial t} \xi = \frac{d}{dt} \int d^3x \chi_\Omega \xi = \frac{d}{dt} \int_\Omega d^3x \xi \quad (1.38)$$

dove il primo passaggio è permesso dall'indipendenza rispetto al tempo del dominio di integrazione \mathbb{R}^3 . Al contrario, Ω dipende dal tempo e possiamo immaginare la differenza tra i volumi $\Omega(t + \delta t) - \Omega(t)$, con δt intervallo di

tempo, come composta da un grande numero di cilindri infinitesimi, ciascuno di area $\Delta \mathbf{A}$ (posta su $\partial\Omega$) ed altezza $\Delta \mathbf{h} = \delta t \mathbf{w}(t)$. Il volume di questi cilindri risulta essere

$$\Delta V = \Delta \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{h} = \delta t \Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{w}(t)$$

perciò possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t+\delta t)} d^3x \xi - \int_{\Omega(t)} d^3x \xi &= \int_{\Omega(t+\delta t) - \Omega(t)} d^3x \xi \\ &= \oint_{\partial\Omega(t)} d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}(t) \xi \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ &= \delta t \oint_{\partial\Omega(t)} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{w}(t) \xi + \mathcal{O}(\delta t^2) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Sapendo che la derivata totale nell'equazione (1.38) è data da

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \xi = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\Omega(t+\delta t)} d^3x \xi - \int_{\Omega(t)} d^3x \xi \right] \quad (1.40)$$

a partire dalle (1.39) e (1.40) otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \xi = \oint_{\Sigma} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \xi = \int d^3x \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \delta_{\partial\Omega} \xi \quad (1.41)$$

Inserendo questa espressione nella equazione (1.38) arriviamo al risultato

$$\int d^3x \frac{\partial \chi_{\Omega}}{\partial t} \xi = \int d^3x \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \delta_{\partial\Omega} \xi$$

che, potendo scegliere una funzione di test qualsiasi, dimostra la relazione (1.37).

Passiamo a mettere in pratica le uguaglianze appena dedotte. Consideriamo una superficie di discontinuità $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)$ dipendente dal tempo e chiamiamo $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ la normale uscente e il campo di velocità di tale superficie, i quali risultano definiti solo su di essa. \mathcal{D} suddivide una regione $\Omega = \Omega(t)$ in due parti $\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}(t)$ di bordi $\partial\Omega_{\pm} = \partial\Omega_{\pm}(t)$ orientati verso l'esterno con normali $\mathbf{n}_{\pm} = \mathbf{n}_{\pm}(\mathbf{x}, t)$ e campi di velocità $\mathbf{w}_{\pm} = \mathbf{w}_{\pm}(\mathbf{x}, t)$

tali che

$$\begin{aligned}\partial\Omega_+ &= \partial\Omega_- = \mathcal{D} \\ -\mathbf{n}_+ &= \mathbf{n}_- = \mathbf{n} \\ \mathbf{w}_+ &= \mathbf{w}_- = \mathbf{w}\end{aligned}$$

Inoltre, prendiamo un campo $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ regolare su tutto Ω eccetto che sulla superficie di discontinuità \mathcal{D} . Utilizzando le funzioni caratteristiche delle regioni Ω_+ e Ω_- possiamo scrivere tale campo come

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_+ \chi_{\Omega_+} + \boldsymbol{\xi}_- \chi_{\Omega_-} \quad (1.42)$$

dove $\boldsymbol{\xi}_+$ e $\boldsymbol{\xi}_-$ sono regolari su Ω_+ e Ω_- . A partire dalle relazioni (1.36) e (1.42) otteniamo

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})_V + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})_S \delta_{\mathcal{D}} \quad (1.43)$$

dove

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})_V &= \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_+ \chi_{\Omega_+} + \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_- \chi_{\Omega_-} \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})_S &= \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\xi}_+ - \boldsymbol{\xi}_-)\end{aligned}$$

sono i termini di volume e superficie. In modo simile, a partire dalle relazioni (1.37) e (1.42), abbiamo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right)_V + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right)_S \delta_{\mathcal{D}} \quad (1.44)$$

in cui i termini di volume e superficie sono

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right)_V &= \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_+}{\partial t} \chi_{\Omega_+} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_-}{\partial t} \chi_{\Omega_-} \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right)_S &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}_+ - \boldsymbol{\xi}_-)\end{aligned}$$

Le equazioni (1.43) e (1.44) mostrano che, lontano dalla superficie di discontinuità \mathcal{D} , la delta di Dirac $\delta_{\mathcal{D}}$ si annulla ripristinando le normali derivate della funzione. Per facilitare la scrittura, introduciamo la notazione

$$[[\boldsymbol{\xi}]] = \boldsymbol{\xi}_+ - \boldsymbol{\xi}_- \quad (1.45)$$

la quale è definita solo sulla superficie di discontinuità e misura il *salto* di ξ su \mathcal{D} . Grazie ad essa, possiamo riscrivere le componenti superficiali delle derivate come

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \xi)_S &= \mathbf{n} \cdot \llbracket \xi \rrbracket \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_S &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \llbracket \xi \rrbracket\end{aligned}$$

Siamo ora in grado di scrivere la legge di bilancio locale (1.31) in presenza di una superficie di discontinuità \mathcal{D} . Infatti, le grandezze ψ e ϕ_Ψ presentano discontinuità in quei casi. Inoltre, supponiamo che la grandezza π_Ψ sia scomponibile nei due termini di volume e superficie e, utilizzando la relazione (1.42), abbiamo

$$\pi_\Psi = \pi_\Psi^V + \pi_\Psi^S \delta_{\mathcal{D}}$$

Consideriamo una regione Ω di un mezzo continuo \mathcal{B} tagliata in due parti, Ω_+ e Ω_- , da una superficie di discontinuità \mathcal{D} . L'equazione di bilancio locale della grandezza Ψ in termini della densità ψ , in senso distribuzionale, verrà ora scritta come:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\psi + \phi_\Psi) - \pi_\Psi & \\ = \frac{\partial \psi_+}{\partial t} \chi_{\Omega_+} + \frac{\partial \psi_-}{\partial t} \chi_{\Omega_-} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \llbracket \psi \rrbracket \delta_{\mathcal{D}} & \\ + \nabla \cdot (\mathbf{v}\psi + \phi_\Psi)_+ \chi_{\Omega_+} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\psi + \phi_\Psi)_- \chi_{\Omega_-} & \\ + \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{v}\psi + \phi_\Psi \rrbracket \delta_{\mathcal{D}} - \pi_\Psi^V - \pi_\Psi^S \delta_{\mathcal{D}} = \mathbf{0} &\end{aligned}$$

Questa equazione risulta valida in ogni punto di Ω , ma si riduce alla forma (1.31) fuori dalla superficie di discontinuità, mentre nei punti appartenenti a \mathcal{D} abbiamo

$$\mathbf{n} \cdot \llbracket (\mathbf{v} - \mathbf{w})\psi + \phi_\Psi \rrbracket = \pi_\Psi^S \quad (1.46)$$

dove il termine $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ rappresenta la *velocità di propagazione* della superficie di discontinuità rispetto alla velocità del mezzo continuo. Questa equazione viene chiamata con il nome di *equazione di giunzione*.

Capitolo 2

Meccanica

In questo capitolo dedurremo le leggi di bilancio di massa, momento lineare e momento angolare, sia in forma integrale che in forma locale. Non meno importanti, saranno mostrate anche le leggi di giunzione nel caso si dovesse aver a che fare con delle superfici di discontinuità. Per fare ciò occorrerà anche introdurre il tensore di stress di Cauchy che tornerà utile per scrivere in maniera semplificata tutte le equazioni che troveremo.

2.1 Bilancio della Massa

Consideriamo una regione Ω di un mezzo materiale \mathcal{B} . La *massa* totale contenuta in tale regione al tempo t è indicata con $m(\Omega, t)$ e, assumendo che esista una funzione densità $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ che ne rappresenta la distribuzione nello spazio al tempo t , può essere calcolata come

$$m(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \rho \quad (2.1)$$

Per la legge di conservazione della massa sappiamo che il valore di $m(\Omega, t)$ non varia nel tempo, per cui abbiamo

$$m(\Omega, t) \equiv m(\Omega) \leftrightarrow \frac{d}{dt}m(\Omega) = 0 \quad (2.2)$$

Riscrivendo questa equazione in funzione della densità ρ utilizzando la (2.1) otteniamo

$$\frac{d}{dt}m(\Omega) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \rho = 0 \quad (2.3)$$

Confrontando la (2.3) con l'equazione di bilancio in forma integrale (1.27), notiamo che esse risultano equivalenti se applicate le sostituzioni

$$\begin{aligned} \psi &= \rho \\ \phi_m &= \mathbf{0} \\ \pi_m &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Questo significa che possiamo ricondurci anche alla legge di bilancio in forma locale, la quale risulta essere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

dove \mathbf{v} è la velocità del mezzo come riportato in precedenza. Questa equazione è anche conosciuta con il nome di *equazione di continuità*.

Chiaramente, possiamo anche fornire un'equazione di bilancio in caso di superfici di discontinuità. Applicando le stesse sostituzioni utilizzate in precedenza all'equazione di giunzione (1.46) otteniamo facilmente

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho] = 0 \quad (2.5)$$

2.2 Tensore di Stress

Introduciamo qui il concetto di *stress*, che rappresenta la forza per unità di superficie che le particelle materiali adiacenti di un mezzo continuo esercitano tra loro. È necessario notare che la forza superficiale agente su un piccolo elemento d'area dipende non solo dal modulo dell'area stessa, ma anche dalla sua orientazione. Denotiamo il vettore unitario normale alla superficie con \mathbf{n} e indichiamo con $\Delta \boldsymbol{\eta}(\mathbf{n})$ la forza su una piccola area $\mathbf{n}\Delta a$ che si trova nella

posizione \mathbf{x} . In tal caso, definiamo il *vettore di stress* $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ come la forza infinitesima $\Delta\boldsymbol{\eta}(\mathbf{n})$ applicata all'area infinitesima $\mathbf{n}\Delta a$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\eta}(\mathbf{n})}{\Delta a} \quad (2.6)$$

Notiamo che tale vettore è una funzione che esiste in ogni punto appartenente alla superficie del corpo. Per la terza legge di Newton sull'azione e la reazione si ha che

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \quad (2.7)$$

come ci si potrebbe aspettare da un qualsiasi sistema meccanico.

Per trovare una relazione esplicita tra il vettore di stress \mathbf{t} e la normale unitaria \mathbf{n} in una deformazione infinitesima, consideriamo un tetraedro in coordinate cartesiane. Indicando con $-\mathbf{t}_1$, $-\mathbf{t}_2$, $-\mathbf{t}_3$ e \mathbf{t} i vettori di stress nella direzione uscente delle facce del tetraedro infinitesimo, le cui aree sono Δa_1 , Δa_2 , Δa_3 e Δa , per la seconda legge di Newton abbiamo

$$\mathbf{t}\Delta a - \mathbf{t}_1\Delta a_1 - \mathbf{t}_2\Delta a_2 - \mathbf{t}_3\Delta a_3 + \rho\Delta v\mathbf{f} = \rho\Delta v\mathbf{a} \quad (2.8)$$

dove Δv è il volume del tetraedro, ρ è la densità di massa, \mathbf{f} è la forza specifica (cioè per unità di massa) applicata al corpo e \mathbf{a} è l'accelerazione. Essendo l'area vettoriale totale di una superficie chiusa nulla (per il teorema del gradiente), otteniamo

$$\Delta a\mathbf{n} - \Delta a_1\mathbf{e}_1 - \Delta a_2\mathbf{e}_2 - \Delta a_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

da cui segue immediatamente

$$\Delta a_1 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})\Delta a \quad (2.10)$$

$$\Delta a_2 = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})\Delta a \quad (2.11)$$

$$\Delta a_3 = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n})\Delta a \quad (2.12)$$

Il volume di un elemento Δv può essere espresso tramite la distanza perpendicolare Δh dall'origine alla faccia inclinata opposta come

$$\Delta v = \frac{\Delta h}{3}\Delta a \quad (2.13)$$

Sostituendo le uguaglianze (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) nell'equazione (2.8) troviamo

$$\mathbf{t} = t_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + t_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) + t_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) + \rho \frac{\Delta h}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{f}) \quad (2.14)$$

Facendo collassare il tetraedro ad un punto, cioè eseguendo il limite $\Delta h \rightarrow 0$, risulta

$$\mathbf{t} = t_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + t_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) + t_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) = t_i(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \quad (2.15)$$

che mostra la relazione che intercorre tra \mathbf{t} e \mathbf{n} .

Riformulando l'espressione (2.15) precedente come

$$\mathbf{t} = (t_1 \otimes \mathbf{e}_1 + t_2 \otimes \mathbf{e}_2 + t_3 \otimes \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \quad (2.16)$$

possiamo considerare il termine tra parentesi come una nuova grandezza tensoriale chiamata *tensore di stress di Cauchy* $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ che rappresenta lo stato dello stress presente in una posizione \mathbf{x} al tempo t :

$$\mathbf{T} = t_1 \otimes \mathbf{e}_1 + t_2 \otimes \mathbf{e}_2 + t_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (2.17)$$

Il tensore di stress appena definito è una proprietà del mezzo stesso ed è indipendente dalla normale \mathbf{n} . Grazie ad esso possiamo scrivere il vettore di stress \mathbf{t} in una maniera più compatta:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^T \quad (2.18)$$

che prende il nome di *formula di stress di Cauchy* . Scritta in forma matriciale si presenta come

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

2.3 Bilancio del Momento Lineare

Dalla seconda legge di Newton sappiamo che la variazione nel tempo del *momento lineare* di un insieme di particelle uguaglia la forza netta totale

esercitata su di esse, che scritta in forma vettoriale si presenta come

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (2.20)$$

dove m è la massa totale, \mathbf{v} è la velocità e \mathbf{F} è la forza risultante agente sulle particelle. Se la massa del sistema risulta essere costante, questa equazione assume l'usuale forma

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2.21)$$

Per ottenere l'equazione di bilancio del momento lineare dobbiamo capire quali forze agiscono sul corpo che stiamo considerando. Le forze applicate ad un volume possono essere suddivise in forze interne ed esterne: quelle interne si oppongono alla tendenza delle varie parti del corpo di separarsi, mentre quelle esterne possono essere suddivise ulteriormente in forze di volume e forze di superficie. Le forze di volume, come le forze gravitazionali o elettromagnetiche, sono solitamente misurate per unità di massa. Denotando con $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ queste forze e con d^3x un volume infinitesimo, la forza di volume totale agente su tale volume è $d^3x\rho\mathbf{f}$. Questo significa che la forza di volume totale agente su di una regione Ω di un mezzo continuo \mathcal{B} è semplicemente

$$\mathbf{F}_V(\Omega) = \int_{\Omega} d^3x \rho\mathbf{f} \quad (2.22)$$

Al contrario, le forze di superficie sono forze di contatto che agiscono sulla parte esterna del corpo e vengono misurate per unità di superficie. Se il vettore di stress \mathbf{t} rappresenta la forza di superficie per unità di area, allora la forza di superficie totale agente su una superficie infinitesima $|d^2\mathbf{x}|$ è $|d^2\mathbf{x}|\mathbf{t}$, mentre considerando tutto il bordo $\partial\Omega$ della regione Ω del mezzo materiale avremo che la forza di superficie totale sarà

$$\mathbf{F}_S(\partial\Omega) = \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{t} \quad (2.23)$$

Sommando il contributo volumetrico a quello superficiale otteniamo la forza totale agente sulla regione Ω del corpo:

$$\mathbf{F}(\Omega) = \mathbf{F}_V(\Omega) + \mathbf{F}_S(\partial\Omega) = \int_{\Omega} d^3x \rho\mathbf{f} + \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{t} \quad (2.24)$$

Utilizzando il fatto che il vettore di stress è collegato al tensore di stress dalla formula di Cauchy (2.18), dove \mathbf{n} rappresenta il vettore unitario normale alla superficie, la forza di superficie può essere riscritta come

$$\oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{t} = \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{T}^T \quad (2.25)$$

in cui abbiamo fatto ricorso all'usuale teorema della divergenza. Mettendo insieme le equazioni (2.20) e (2.25), possiamo riscrivere la seconda legge di Newton nella forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \rho \mathbf{v} &= \int_{\Omega} d^3x \rho \mathbf{f} + \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^T \\ &= \int_{\Omega} d^3x (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}^T) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Come fatto in precedenza, possiamo notare che questa equazione può essere ricondotta all'equazione di bilancio in forma integrale (1.27) eseguendo le sostituzioni

$$\begin{aligned} \psi &= \rho \mathbf{v} \\ \phi_{\mathbf{P}} &= -\mathbf{T}^T \\ \pi_{\mathbf{P}} &= \rho \mathbf{f} \end{aligned}$$

Questa similitudine ci permette di scrivere l'equazione di bilancio locale del momento lineare come

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{v} - \mathbf{T}^T) - \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

Sviluppando le derivate presenti nella formula precedente siamo in grado di ricavarne una forma semplificata:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v} - \mathbf{T}^T) - \rho \mathbf{f} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{T}^T - \rho \mathbf{f} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{T}^T - \rho \mathbf{f} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \mathbf{a} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{T}^T - \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Utilizzando anche l'equazione di continuità (2.4) notiamo che alcuni termini si annullano ed otteniamo, così, l'equazione di bilancio del momento lineare semplificata

$$\rho \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{T}^T - \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Anche questa volta siamo in grado di ottenere un'equazione di bilancio in presenza di superfici di discontinuità ricorrendo all'equazione di giunzione generale (1.46) ed applicando le sostituzioni precedenti che ci portano al risultato

$$\mathbf{n} \cdot \llbracket (\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho \mathbf{v} - \mathbf{T}^T \rrbracket = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

2.4 Bilancio del Momento Angolare

Secondo il principio di conservazione del *momento angolare*, la variazione nel tempo di tale grandezza è uguale alla somma vettoriale dei momenti delle singole forze esterne agenti sul corpo considerato. Utilizzando la suddivisione delle forze esterne (2.24) nelle componenti volumetrica e superficiale, possiamo scrivere questo principio con l'equazione di bilancio

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(\Omega) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} = \int_{\Omega} d^3x \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} + \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{x} \times \mathbf{t} \quad (2.31)$$

dove \mathbf{f} e \mathbf{t} rappresentano rispettivamente il vettore associato alle forze di volume e il vettore di stress entrambi misurati per unità di massa.

Per poter ricondurre tale equazione alla solita equazione di bilancio in forma integrale (1.27) è necessario trasformare l'integrale di superficie in un integrale di volume utilizzando la formula di Cauchy (2.18):

$$\mathbf{x} \times \mathbf{t} = \mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^T) = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}^T \times \mathbf{x}) \quad (2.32)$$

In questo modo possiamo riscrivere l'equazione (2.31) come

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} &= \int_{\Omega} d^3x \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} - \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}^T \times \mathbf{x}) \\
&= \int_{\Omega} d^3x \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} - \int_{\Omega} d^3x \nabla \cdot (\mathbf{T}^T \times \mathbf{x}) \\
&= \int_{\Omega} d^3x [\mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot (\mathbf{T}^T \times \mathbf{x})] \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Dalle equazioni precedenti possiamo sfruttare l'uguaglianza con l'equazione di bilancio in forma integrale (1.27) per passare alla forma locale grazie alle sostituzioni

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi} &= \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \\
\boldsymbol{\phi}_L &= \mathbf{T}^T \times \mathbf{x} \\
\boldsymbol{\pi}_L &= \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f}
\end{aligned}$$

da cui ricaviamo l'equazione di bilancio in forma locale del momento angolare che scriveremo come

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot [\mathbf{v} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) + \mathbf{T}^T \times \mathbf{x}] - \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{2.34}$$

Per semplificare questo risultato è necessario calcolare alcune derivate presenti. Ricordando che la derivata materiale mantiene \mathbf{x} costante, utilizzando la definizione di tale operatore otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) = \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} - \mathbf{x} \times \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{v}) \tag{2.35}$$

Procediamo con il termine successivo: utilizzando gli indici e la base cartesiana, il termine in cui compare il tensore di stress diventa

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{T}^T \times \mathbf{x}) &= (T^{ji} x^k - T^{ki} x^j)_{,i} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \\
&= \nabla \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{x} + \mathbf{T}^T - \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{T}^T - \mathbf{T} \\
&= \nabla \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{x} + \mathbf{T}^T - \mathbf{T} \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Andando a sostituire i risultati (2.35) e (2.36) nella formula (2.34) otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} - \mathbf{x} \times \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot [\mathbf{v} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v})] \\
+ \nabla \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{x} + \mathbf{T}^T - \mathbf{T} - \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Per procedere ulteriormente è necessario utilizzare la legge di bilancio in forma locale semplificata del momento lineare (2.29) nell'equazione precedente, in modo da ottenere

$$-\mathbf{x} \times \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v})] + \mathbf{T}^T - \mathbf{T} = 0 \quad (2.38)$$

Infine, notiamo che il secondo termine può essere riformulato come

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v})] &= -\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\mathbf{v} \times \mathbf{x}) \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\mathbf{v})\mathbf{x} + \mathbf{x}\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{x} \times \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Questo significa che i primi due termini della (2.38) sono opposti e si annullano riducendo l'equazione alla semplice uguaglianza

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.40)$$

cioè l'equazione di bilancio in forma locale del momento angolare richiede che il tensore di stress sia simmetrico.

La condizione di giunzione del momento angolare può essere scritta come

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{x} \times [(\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho\mathbf{v}] - \mathbf{x} \times \mathbf{T}] = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

ma, se il moto risulta una funzione continua della posizione e del tempo, essa può essere riscritta nella forma semplificata

$$\mathbf{n} \cdot \{\mathbf{x} \times [(\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho\mathbf{v} - \mathbf{T}]\} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

che viene automaticamente soddisfatta dalla condizione di giunzione del momento lineare (2.30).

Capitolo 3

Termodinamica

Dopo le leggi di bilancio che governano la meccanica pura di un corpo continuo, passiamo ora a definire quelle che riguardano gli aspetti termodinamici di quest'ultimo, come l'energia interna e l'entropia. Anche per queste forniremo sia le equazioni di bilancio in forma integrale e locale che le equazioni di giunzione da utilizzare in presenza di superfici di discontinuità.

3.1 Termodinamica dei Continui

Le grandezze studiate nella fisica dei continui si dividono in due grandi categorie: le grandezze *estensive* e quelle *intensive*. Una grandezza estensiva ζ è definita per ogni porzione di continuo ed è additiva: questo significa che, se consideriamo due regioni V_1 e V_2 di materiale tali che

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad (3.1)$$

avremo che la quantità di ζ associata all'unione delle due regioni V è data da

$$\zeta(V) = \zeta(V_1) + \zeta(V_2) \quad (3.2)$$

Al contrario, una grandezza intensiva ξ non è additiva e risulta associata ad ogni punto materiale del corpo continuo, ovvero è un campo. Esempi della

prima categoria sono massa, carica (che non andremo a considerare) e volume, mentre nel secondo caso abbiamo temperatura e pressione.

Anche i processi termodinamici possono essere suddivisi in due categorie: i processi *reversibili* sono tali per cui il sistema si trasforma in modo da trovarsi sempre in stati di equilibrio. Inoltre, in tali processi abbiamo che qualsiasi grandezza intensiva ξ non dipende dalla posizione, perciò

$$\nabla\xi = 0$$

I processi *irreversibili*, invece, sono causati dal fatto che il sistema si trova in uno stato di non equilibrio e questo causa una trasformazione verso uno stato di equilibrio. A differenza del caso precedente, i processi irreversibili sono tali per cui qualsiasi grandezza intensiva ξ dipende dalla posizione, cioè

$$\nabla\xi \neq 0$$

Grazie a lavori attribuiti al fisico *J. W. Gibbs*, esiste una formulazione attraverso la quale siamo in grado di trattare i processi irreversibili come trasformazioni tra stati di equilibrio termodinamico.

Consideriamo un corpo continuo \mathcal{B} e suddividiamolo in porzioni così piccole da rendere ogni grandezza intensiva $\xi(\mathbf{x})$ costante rispetto alla posizione all'interno di ciascuna porzione. Nel caso non dovesse risultare costante, è possibile assumerla tale nel caso in cui

$$\frac{l}{L} \ll 1$$

dove l rappresenta l'ordine di grandezza delle distanze tra molecole e L è l'ordine di grandezza per il quale si hanno variazioni di $\xi(\mathbf{x})$ apprezzabili. Presa una delle tante porzioni ed indicando con $\Delta\zeta$ il valore di una grandezza estensiva ζ associata ad essa, la *prima legge della termodinamica* ci dice che

$$d(\Delta U) = \delta Q + \delta L \tag{3.3}$$

dove abbiamo l'energia interna ΔU , il calore δQ e il lavoro δL . È importante notare il fatto che $d(\Delta U)$ è una funzione di stato e dipende solamente dalle condizioni del sistema prima e dopo la trasformazione, mentre le altre due non lo sono e risultano dipendenti dal processo. Per trasformazioni reversibili abbiamo le relazioni

$$\delta Q_{rev} = \Theta d(\Delta S) \quad (3.4)$$

$$\delta L_{rev} = \sum_i f_i d(\Delta Z_i) \quad (3.5)$$

in cui compaiono la temperatura assoluta Θ , l'entropia S , le forze generalizzate f_i e gli spostamenti generalizzati Z_i . Riscrivendo la prima legge della termodinamica utilizzando tali relazioni otteniamo:

$$d(\Delta U) = \Theta d(\Delta S) + \sum_i f_i d(\Delta Z_i) \quad (3.6)$$

Denotando con Δm la massa della porzione e tenendo presente che essa è costante durante una trasformazione, ovvero

$$d(\Delta m) = 0$$

allora risulta lecito scrivere

$$d\left(\frac{\Delta U}{\Delta m}\right) = \Theta d\left(\frac{\Delta S}{\Delta m}\right) + \sum_i f_i d\left(\frac{\Delta Z_i}{\Delta m}\right) \quad (3.7)$$

Facendo collassare la porzione ad un punto materiale, cioè eseguendo il limite per $\Delta m \rightarrow 0$, possiamo riscrivere la prima legge della termodinamica (3.7) in funzione delle grandezze specifiche associate a energia interna, entropia e spostamenti generalizzati definite come

$$\lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta m} = u \quad (3.8)$$

$$\lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta m} = s \quad (3.9)$$

$$\lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta Z_i}{\Delta m} = z_i \quad (3.10)$$

nella seguente maniera

$$du = \Theta ds + \sum_i f_i dz_i \quad (3.11)$$

Se andiamo a considerare un intervallo di tempo infinitesimo dt possiamo scrivere

$$\frac{du}{dt} = \Theta \frac{ds}{dt} + \sum_i f_i \frac{dz_i}{dt} \quad (3.12)$$

Questa è la legge di bilancio dell'energia interna in funzione delle densità specifiche che viene utilizzata quando si ha a che fare con mezzi continui.

3.2 Bilancio dell'Energia

Tutta l'energia contenuta in una porzione Ω di un mezzo materiale \mathcal{B} al tempo t è data dalla somma di due contributi: l'*energia cinetica* $K(\Omega, t)$ e l'*energia interna* $U(\Omega, t)$ che, scritte in funzione della densità $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ e dell'energia interna specifica $u = u(\mathbf{x}, t)$, si presentano come

$$K(\Omega, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3x \rho v^2 \quad (3.13)$$

$$U(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \rho u \quad (3.14)$$

L'energia totale di tale porzione è data, quindi, da

$$E(\Omega, t) = K(\Omega, t) + U(\Omega, t) \quad (3.15)$$

La variazione dell'energia $E(\Omega, t)$ nel tempo è causata da scambi di energia sotto forma di calore e di lavoro. Le due grandezze che rappresentano queste variazioni sono identificate, rispettivamente, dalla *potenza termica* $\mathcal{Q}(\Omega, t)$ e dalla *potenza meccanica* $\mathcal{L}(\Omega, t)$. Come abbiamo visto in precedenza per le forze, anche $\mathcal{Q}(\Omega, t)$ e $\mathcal{L}(\Omega, t)$ possono essere scomposte nelle rispettive densità specifiche e di volume come

$$\mathcal{Q}(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \rho h - \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| q \quad (3.16)$$

$$\mathcal{L}(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \quad (3.17)$$

Qui h rappresenta la densità specifica del rateo di calore, mentre q è la densità superficiale del flusso di calore. Essendo q associata ad ogni punto \mathbf{x} appartenente a tale superficie, ci aspettiamo che dipenda anche dall'orientazione del vettore unitario normale \mathbf{n} oltre che dal punto \mathbf{x} e dal tempo t , perciò definiamo il vettore *densità di corrente di conduzione* $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ tale che

$$q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (3.18)$$

Il segno negativo nella (3.16) indica il fatto che il flusso di energia è positivo quando il corpo materiale assorbe energia, cioè quando il verso di \mathbf{q} è diretto verso l'interno di \mathcal{B} . La relazione che lega la variazione di energia $E(\Omega, t)$ alle nuove grandezze $\mathcal{Q}(\Omega, t)$ e $\mathcal{L}(\Omega, t)$ è data dalla prima legge della termodinamica:

$$\frac{d}{dt}E(\Omega, t) = \frac{d}{dt}[K(\Omega, t) + U(\Omega, t)] = \mathcal{Q}(\Omega, t) + \mathcal{L}(\Omega, t) \quad (3.19)$$

che, utilizzando le uguaglianze (3.16) e (3.17) e la formula di stress di Cauchy (2.18), diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \rho \left(\frac{1}{2}v^2 + u \right) = \int_{\Omega} d^3x \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + h) + \oint_{\Sigma} d^2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}) \quad (3.20)$$

Confrontando questa equazione con l'equazione di bilancio generale in forma integrale (1.27) troviamo

$$\begin{aligned} \psi &= \rho \left(\frac{1}{2}v^2 + u \right) \\ \phi_E &= -\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \\ \pi_E &= \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + h) \end{aligned}$$

il che ci permette di scrivere la legge di bilancio in forma locale dell'energia come

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{2}v^2 + u \right) \rho \right] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2}v^2 + u \right) \rho \mathbf{v} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \right] - \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + h) = 0 \quad (3.21)$$

Questa equazione di bilancio può essere semplificata, quindi vediamo di trovare una forma ridotta costruendo, prima di tutto, un'equazione di

bilancio per l'energia cinetica. Partendo dall'equazione di bilancio in forma locale del momento lineare (2.29) ed eseguendo il prodotto scalare rispetto alla velocità \mathbf{v} otteniamo

$$\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} = 0 \quad (3.22)$$

in cui abbiamo usato il risultato (2.40) per scrivere $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$. Riscrivendo il primo termine come

$$\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} v^2 \quad (3.23)$$

e il secondo utilizzando la legge

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \quad (3.24)$$

otteniamo

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} v^2 - \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} = 0 \quad (3.25)$$

Inoltre, ricorrendo al teorema di Reynolds per riscrivere il primo termine, arriviamo al risultato

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^2) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho v^2 \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} = 0 \quad (3.26)$$

che rappresenta l'equazione di bilancio in forma locale della energia cinetica. Il termine

$$\mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \quad (3.27)$$

è detto *potenza degli stress* e verrà ripreso a breve per essere spiegato dal punto di vista fisico.

Adesso siamo in grado di riscrivere l'equazione di bilancio locale dell'energia. Partendo dalla (3.21) e sottraendo l'equazione (3.26) appena trovata, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) - h = 0 \quad (3.28)$$

Riscrivendo i primi due termini utilizzando il teorema di Reynolds arriviamo alla forma semplificata dell'equazione di bilancio in forma locale dell'energia interna

$$\rho \frac{du}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) - \rho h = 0 \quad (3.29)$$

la quale può essere facilmente scritta anche come equazione di giunzione, la quale risulta

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho u + \mathbf{q}] = [\mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) + h]^S \quad (3.30)$$

Come promesso, andiamo a studiare in modo approfondito il termine

$$\mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \quad (3.31)$$

che compare nell'equazione di bilancio in forma locale dell'energia interna (3.29) dal punto di vista fisico. Tale termine è assimilabile al termine di lavoro δW della termodinamica dell'equilibrio. L'equazione di bilancio dell'energia interna (3.29) è l'analogo differenziale locale della ben nota relazione della termodinamica dell'equilibrio

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (3.32)$$

che esprime quantitativamente la prima legge della termodinamica. Dimostriamo ciò in un semplice ma importante esempio: quello di un fluido perfetto per il quale il tensore di stress \mathbf{T} è proporzionale al campo di pressione ϖ

$$\mathbf{T} = -\varpi \mathcal{I} \quad (3.33)$$

dove \mathcal{I} rappresenta la matrice identità. Non tratteremo in modo approfondito questi o altri fluidi nella sezione corrente, ma verranno ripresi in seguito. Grazie all'equazione precedente, la (3.31) si riduce a

$$\mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) = -\varpi \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.34)$$

dove abbiamo sfruttato la decomposizione di entrambi i termini \mathbf{T} e $\nabla \otimes \mathbf{v}$ nelle rispettive tracce, parti simmetriche e parti antisimmetriche. Consideriamo, ora, una regione Ω del fluido. La variazione del volume di tale regione

è dato da

$$\frac{d}{dt}Vol(\Omega) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3x = \oint_{\partial\Omega(t)} d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega(t)} d^3x \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.35)$$

in cui abbiamo usato la legge di bilancio in forma integrale (1.27). Se la regione considerata è piccola e con volume ΔV , possiamo approssimare l'equazione precedente come

$$\frac{d}{dt}\Delta V = \Delta V \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.36)$$

Moltiplicando entrambi i lati per il campo di pressione ϖ e cambiando segno, otteniamo

$$-\varpi \frac{d}{dt}\Delta V = -\varpi \Delta V \nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta V \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \quad (3.37)$$

che riformulata in funzione del termine che vogliamo studiare fornisce la relazione

$$\mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) = -\frac{\varpi}{\Delta V} \frac{d}{dt}\Delta V \quad (3.38)$$

in cui si riconosce l'espressione del lavoro di un sistema soggetto alla pressione ϖ che si espande (o contrae) al tasso di $\frac{d}{dt}\Delta V$. Al contrario, termini $\nabla \cdot \mathbf{q}$ e ρh sono entrambi di origine termica come si può supporre dalla definizione (3.16) della potenza termica \mathcal{Q} .

3.3 Bilancio dell'Entropia

L'ultima legge di bilancio dei mezzi continui in ambito termomeccanico è quella che riguarda l'*entropia* del sistema. Per ricavarla, è necessario utilizzare la seconda legge della termodinamica e, perciò, introduciamo la *temperatura assoluta* $\Theta = \Theta(\mathbf{x}, t)$ che risulta un campo definito su tutto il corpo e rappresenta la temperatura assegnata alla particella materiale che viene a trovarsi nella posizione \mathbf{x} al tempo t . Questa grandezza possiede la nota proprietà per cui risulta sempre positiva:

$$\Theta(\mathbf{x}, t) > 0 \quad (3.39)$$

Inoltre, in modo simile all'energia interna, introduciamo anche l'entropia $S(\Omega, t)$ di una porzione Ω del corpo \mathcal{B} al tempo t come una grandezza fisica additiva che può essere espressa attraverso un integrale di volume della densità specifica $s = s(\mathbf{x}, t)$, chiamata *entropia specifica*, nel seguente modo:

$$S(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \rho s \quad (3.40)$$

Ci torna utile definire anche due altre grandezze

$$H(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \rho \sigma - \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \Sigma \quad (3.41)$$

$$Z(\Omega, t) = \int_{\Omega} d^3x \rho z \quad (3.42)$$

che rappresentano l'*entropia scambiata* $H(\Omega, t)$ per unità di tempo e l'*entropia prodotta* $Z(\Omega, t)$ per unità di tempo. Inoltre, abbiamo la densità specifica di entropia scambiata $\sigma = \sigma(\mathbf{x}, t)$, la densità superficiale di entropia scambiata $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}, t)$ e la densità specifica di entropia prodotta all'interno del corpo $z = z(\mathbf{x}, t)$. Pur essendo strutturalmente simili, le densità specifiche σ e z hanno un significato fisico differente: infatti, σ rappresenta degli scambi di entropia con l'ambiente e può risultare anche negativa; z , invece, è data da processi irreversibili interni al materiale stesso e non può mai essere negativa per la seconda legge della termodinamica. È da notare come fatto in precedenza che, essendo una grandezza definita in ogni punto della superficie, Σ deve dipendere anche dalla normale \mathbf{n} , perciò definiamo il vettore associato

$$\Sigma(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \Sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (3.43)$$

Come già visto per l'energia totale, possiamo definire una legge di bilancio dell'entropia che coinvolge le due nuove quantità $H(\Omega, t)$ e $Z(\Omega, t)$ e che sia valida per tutti i corpi:

$$\frac{d}{dt} S(\Omega, t) = H(\Omega, t) + Z(\Omega, t) \quad (3.44)$$

Tale equazione ci permette di scrivere la *seconda legge della termodinamica* come

$$Z(\Omega, t) = \frac{d}{dt} S(\Omega, t) - H(\Omega, t) \geq 0 \quad (3.45)$$

Questa disequazione ci dice che la produzione di entropia $Z(\Omega, t)$ all'interno del volume per unità di tempo non può essere mai negativa e, inoltre, sappiamo che vale per qualsiasi corpo materiale o processo termodinamico.

Scriviamo ora l'uguaglianza (3.44) esplicitando le densità delle varie grandezze attraverso le relazioni (3.40), (3.41) e (3.42) per arrivare all'equazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \rho s &= \oint_{\partial\Omega} |d^2\mathbf{x}| \Sigma + \int_{\Omega} d^3x \rho(\sigma + z) \\ &= - \oint_{\partial\Omega} d^2\mathbf{x} \Sigma + \int_{\Omega} d^3x \rho(\sigma + z) \end{aligned} \quad (3.46)$$

la quale rientra nello schema della solita equazione di bilancio in forma integrale (1.27) ponendo

$$\begin{aligned} \psi &= \rho s \\ \phi_S &= \Sigma \\ \pi_S &= \rho(\sigma + z) \end{aligned}$$

Possiamo, perciò, ricavare la legge di bilancio in forma locale dell'entropia:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v} + \Sigma) - \rho(\sigma + z) = 0 \quad (3.47)$$

e l'equazione di giunzione:

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho s + \Sigma] = [\rho(\sigma + z)]^S \quad (3.48)$$

Il problema di questa formulazione è che z non è affatto semplice da modellizzare. Per aggirare questa difficoltà ricorriamo all'equazione di bilancio in forma locale dell'energia interna in funzione delle densità specifiche che riportiamo:

$$\frac{du}{dt} = \Theta \frac{ds}{dt} + \sum_i f_i \frac{dz_i}{dt} \quad (3.49)$$

Riscritta in funzione della densità specifica s si presenta come

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Theta} \left(\frac{du}{dt} - \sum_i f_i \frac{dz_i}{dt} \right) \quad (3.50)$$

Passiamo ora a sviluppare i singoli termini del membro di destra. Quello contenente l'energia interna è facilmente esprimibile utilizzando l'equazione di bilancio (3.29), ma verrà lasciato in una forma generale per semplificare la scrittura

$$\rho \frac{du}{dt} + \nabla \cdot \phi_U - \rho \pi_U = 0 \quad (3.51)$$

Inoltre, ipotizziamo che anche gli spostamenti generalizzati rispettino un'equazione di bilancio nella forma (rispettando la notazione dell'equazione di bilancio generale (1.27))

$$\rho \frac{dz_i}{dt} + \nabla \cdot \phi_{Z_i} - \rho \pi_{Z_i} = 0 \quad (3.52)$$

dove abbiamo introdotto le due nuove grandezze *densità di sforzo generalizzato* ϕ_{Z_i} e *densità di tasso di produzione di sforzo generalizzato specifica* π_{Z_i} . Sostituendo le (3.51) e (3.52) nell'equazione (3.50) otteniamo

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Theta} \left[-\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \phi_U + \frac{1}{\rho} \sum_i f_i \nabla \cdot \phi_{Z_i} + \pi_U - \sum_i f_i \pi_{Z_i} \right] \quad (3.53)$$

Sviluppiamo ora due dei termini presenti in questa equazione nel seguente modo:

$$-\frac{1}{\Theta} \nabla \cdot \phi_U = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\Theta} \phi_U \right) + \phi_U \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} \right) \quad (3.54)$$

$$\frac{1}{\Theta} \sum_i f_i \nabla \cdot \phi_{Z_i} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\Theta} \sum_i f_i \phi_{Z_i} \right) - \sum_i \phi_{Z_i} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} f_i \right) \quad (3.55)$$

Procedendo con la sostituzione nella (3.53) arriviamo al risultato

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} = & -\nabla \cdot \left[\frac{1}{\Theta} (\phi_U - \sum_i f_i \phi_{Z_i}) \right] + \frac{\rho}{\Theta} (\pi_U - \sum_i f_i \pi_{Z_i}) \\ & + \phi_U \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} \right) - \sum_i \phi_{Z_i} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} f_i \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

la quale può essere messa nella forma generale

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \phi_S = \rho \pi_S \quad (3.57)$$

dove abbiamo le relazioni

$$\phi_S = \frac{1}{\Theta}(\phi_U - \sum_i f_i \phi_{Z_i}) \quad (3.58)$$

$$\pi_S = \frac{1}{\Theta}(\pi_U - \sum_i f_i \pi_{Z_i}) + \frac{1}{\rho} \phi_U \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} \right) - \frac{1}{\rho} \sum_i \phi_{Z_i} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} f_i \right) \quad (3.59)$$

Grazie a queste uguaglianze possiamo scrivere anche l'equazione di giunzione dell'entropia:

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho_S + \phi_S] = \rho\pi_S^S \quad (3.60)$$

3.3.1 Disuguaglianza di Clausius-Duhem

A prima vista, l'entropia soddisfa una legge di bilancio in modo equivalente alle altre grandezze fisiche studiate in precedenza. Partendo dall'equazione di bilancio generale (1.23) di una certa grandezza Ψ , possiamo dividere il termine di produzione Π_Ψ in due parti come

$$\Pi_\Psi = \Pi_\Psi^{est} + \Pi_\Psi^{int} \quad (3.61)$$

In modo equivalente, si può dividere la densità volumetrica π_Ψ associata presente nell'equazione (1.27):

$$\pi_\Psi = \pi_\Psi^{est} + \pi_\Psi^{int} \quad (3.62)$$

Sappiamo che tutte le grandezze incontrate precedentemente all'entropia risultano conservate in un sistema isolato, ovvero abbiamo

$$\pi_\Psi^{int} = 0 \quad (3.63)$$

Infatti, per la massa risulta essere vero sapendo che non abbiamo nè creazione nè distruzione di materia all'interno del mezzo. Nel caso di momento lineare ed angolare è corretta perchè le forze si annullano se considerate nel loro insieme. Infine, l'energia cinetica e l'energia interna non sono conservate singolarmente, ma lo è la loro somma rappresentata dall'energia totale. Questo significa che l'unico modo per variare le quantità di tali grandezze

associate ad un corpo continuo è un'interazione con l'ambiente.

Tornando al caso dell'entropia, vediamo che essa si differenzia in questo per il fatto che il termine di produzione interna è

$$\pi_S^{int} \geq 0 \quad (3.64)$$

dove l'uguaglianza si ha nel caso di processi reversibili. Tale disequazione è conosciuta con il nome di *principio di Prigogine* ed utilizzandola nella (3.62) abbiamo che

$$\pi_S = \pi_S^{est} + \pi_S^{int} \geq \pi_S^{est} \quad (3.65)$$

Considerando l'equazione di bilancio dell'entropia ottenuta in precedenza e dividendo il termine di produzione nelle due componenti otteniamo

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \phi_S - \rho \pi_S^{est} = \rho \pi_S^{int} \quad (3.66)$$

ed inserendo la disuguaglianza (3.65) in tale equazione di bilancio, otteniamo un'altra relazione chiamata *disuguaglianza di Clausius-Duhem* che si presenta come

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \phi_S - \rho \pi_S^{est} = \rho \pi_S^{int} \geq 0 \quad (3.67)$$

Chiaramente, siamo in grado di scrivere anche la relativa equazione di giunzione che risulta

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{v} - \mathbf{w})\rho s + \nabla \cdot \phi_S] - (\rho \pi_S^{est})^S = (\rho \pi_S^{int})^S \geq 0 \quad (3.68)$$

Andiamo ora a mettere in pratica con un esempio i risultati appena ottenuti. L'equazione (3.35) può essere vista come un'equazione di bilancio per il volume. Se applichiamo le sostituzioni

$$\begin{aligned} \phi_{Vol} &= \mathbf{0} \\ \pi_{Vol} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

nell'equazione di bilancio (1.31), otteniamo la corrispondente equazione di bilancio in forma locale di tale grandezza. Se assumiamo l'esistenza di un

solo spostamento generalizzato rappresentato dal volume Vol e di una sola forza generalizzata data dal campo di pressione $-\varpi$, possiamo esplicitare i singoli termini (3.58) e (3.59)

$$\begin{aligned}\phi_S &= \frac{1}{\Theta}(\mathbf{q} + \varpi\phi_{Vol}) = \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \\ \pi_S &= \frac{1}{\Theta}(\rho h + \varpi\pi_{Vol}) + \frac{1}{\Theta}\mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) + \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} \right) + \phi_{Vol} \cdot \nabla \left(\frac{\varpi}{\Theta} \right) \\ &= \frac{1}{\Theta}(\rho h + \varpi\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{\Theta}\mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) + \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} \right)\end{aligned}$$

Utilizzando l'equazione costitutiva dei fluidi perfetti (3.33) otteniamo infine

$$\begin{aligned}\pi_S &= \frac{1}{\Theta}(\rho h + \varpi\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{\Theta}\varpi\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} \right) \\ &= \frac{1}{\Theta}\rho h + \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} \right)\end{aligned}$$

Analizzando π_S , possiamo associare il primo termine a scambi di energia sotto forma di calore con l'ambiente esterno, mentre il secondo termine ad un flusso di calore interno al corpo causato da un gradiente non nullo della temperatura, cioè a processi irreversibili. Questo significa che avremo la seguente separazione nei termini di produzione esterna ed interna:

$$\pi_S^{est} = \frac{1}{\Theta}\rho h \quad (3.69)$$

$$\pi_S^{int} = \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\Theta} \right) \quad (3.70)$$

Adesso possiamo eseguire tutte le sostituzioni all'interno della disuguaglianza di Clausius-Duhem (3.67) che si presenterà come

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right) - \frac{1}{\Theta}\rho h \geq 0 \quad (3.71)$$

Per ulteriori sviluppi è necessario ricorrere al metodo Coleman-Noll che andremo ad esporre in seguito.

Capitolo 4

Relazioni Costitutive

Fino ad ora abbiamo trovato le leggi di bilancio per ben 5 grandezze, ovvero massa, momento lineare, momento angolare, energia ed entropia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^T \\ \rho \frac{du}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) - \rho h &= 0 \\ \rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \phi_S - \rho \pi_S^{est} &\geq 0\end{aligned}$$

Tali equazioni sono universali ed indipendenti dall'oggetto in esame. Esse forniscono 3 vincoli per il tensore di stress \mathbf{T} (dall'equazione di bilancio del momento angolare) e 5 equazioni differenziali per determinare 5 dei rimanenti parametri incogniti, i quali risultano 16 e sono ρ , \mathbf{x} (o \mathbf{v}), \mathbf{T} , u , \mathbf{q} , Θ e s (dando per note le azioni esterne \mathbf{f} e h).

Queste equazioni, quindi, non sono sufficienti a determinare completamente i vari parametri che descrivono il corpo: sono infatti necessarie equazioni aggiuntive dette *relazioni costitutive* che dipendono esclusivamente dalle caratteristiche del materiale. In questa sezione ci occuperemo di fornire degli esempi di equazioni di questo tipo trattando l'ambito di fluidi elastici e fluidi viscosi.

4.1 Fluidi Perfetti

L'esempio più semplice di fluido nella teoria idrodinamica classica è quella di *fluido perfetto*. Con il termine "fluido" si intende un liquido o gas qualsiasi le cui proprietà meccaniche obbediscono alla seguente relazione costitutiva

$$\mathbf{T} = -\varpi \mathbf{I} \quad (4.1)$$

dove $\varpi = \varpi(\mathbf{x}, t)$ rappresenta il campo di pressione, il quale risulta essere definito in ogni punto del corpo continuo. Questa equazione definisce un fluido perfetto, conosciuto anche con il nome di *fluido di Eulero*. Inoltre, vediamo anche che in questo tipo di fluido gli stress idrostatici sono gli unici presenti, cioè qualsiasi effetto dovuto all'attrito può essere trascurato. Pur descrivendo un caso puramente ideale, questo modello garantisce risultati più che soddisfacenti in condizioni di laboratorio standard (temperatura 300 K e pressione 1 Pa)

Il caso più semplice di pressione dipendente dalla densità è quello lineare

$$\varpi = c\rho$$

che definisce il caso particolare dei *gas perfetti*, a patto che la costante di proporzionalità sia dipendente dalla temperatura assoluta

$$\varpi = R'\Theta\rho \quad (4.2)$$

dove R' è un parametro del materiale. Riscrivendo la legge dei gas perfetti nota dalla termodinamica classica come

$$\varpi\Delta V = \Delta n R\Theta \quad (4.3)$$

con ΔV e Δn che rappresentano il volume ed il numero di moli di una piccola porzione di fluido presa in esame e R costante universale dei gas e risolvendola in funzione del campo di pressione come

$$\varpi = \frac{\Delta n}{\Delta V} R\Theta = \frac{\Delta n}{\Delta m} \frac{\Delta m}{\Delta V} R\Theta = k\rho R\Theta$$

vediamo che il parametro R' è dato dalla relazione

$$R' = kR \quad (4.4)$$

dove il parametro

$$k = \frac{\Delta n}{\Delta m} \quad (4.5)$$

rappresenta il numero di moli per unità di massa della porzione ed ha un valore fisso differente per ogni fluido. Dalla relazione costitutiva (4.1) e dalle leggi di bilancio di massa (2.4) e momento lineare (2.29) otteniamo il sistema di equazioni che definiscono completamente un fluido perfetto:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla \varpi + \mathbf{f} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.7)$$

dove la prima relazione è detta *equazione di Eulero*. Insieme, le equazioni (4.6) e (4.7) forniscono un sistema di 4 equazioni alle derivate parziali che permettono di definire in modo completo i campi $\rho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ammettendo, però, di conoscere il campo ϖ ed il vettore \mathbf{f} . Nel caso particolare di un fluido incomprimibile abbiamo che la situazione si semplifica grazie al fatto che la densità di massa ρ non dipende nè dalla posizione nè dal tempo:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla \varpi + \mathbf{f} \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.9)$$

4.2 Fluidi Viscosi Lineari

Come abbiamo detto, il modello dei fluidi perfetti non è realistico: infatti, omette un particolare fenomeno detto *attrito interno* o *dissipazione*, il quale è presente in ogni materiale ed influisce più o meno intensamente. Questa importante caratteristica è presa in considerazione dal modello dei *fluidi viscosi lineari*, la cui relazione costitutiva è

$$\mathbf{T} = -\varpi \mathbf{I} + \mathbf{T}^{(d)} \quad (4.10)$$

in cui $\mathbf{T}^{(d)}$ è il tensore *stress dissipativo* e rappresenta tutti quegli sforzi dovuti alla viscosità. Consideriamo un liquido che fluisce in un tubo: analizzando le velocità dei singoli elementi, noteremo che essi scorreranno più lentamente vicino alle pareti e più velocemente al centro del flusso. Questa differenza di velocità relativa causa dell'attrito che, a sua volta, implica una dissipazione di energia. Quindi, possiamo intuire il fatto che il tensore $\mathbf{T}^{(d)}$ dipenderà da tale moto relativo tra gli elementi del fluido, ovvero da un termine come $\nabla \otimes \mathbf{v}$.

L'esempio più semplice è dato dal caso lineare

$$\mathbf{T}^{(d)} = \mathbf{B} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \quad (4.11)$$

dove \mathbf{B} è un generico tensore a 4 indici. Esplicitando le componenti (ed omettendo la somma sugli indici ripetuti) avremo

$$T_{ij}^{(d)} = B_{ijkl} \frac{\partial v^l}{\partial x^k} \quad (4.12)$$

È da sottolineare il fatto che il tensore $\mathbf{T}^{(d)}$ può dipendere anche da termini proporzionali a $\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}$, $\nabla \otimes \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}$ e derivate spaziali di ordine superiore, ma noi ci limiteremo a studiare il caso poco viscoso in cui l'approssimazione fatta è sufficiente a descrivere accuratamente la maggior parte dei fluidi. Per fare in modo che il nostro modello sia in grado di descrivere fluidi isotropi, allora il tensore \mathbf{B} deve essere indipendente rispetto alle rotazioni. Si può dimostrare che, per soddisfare questo requisito, esso deve presentarsi nella forma

$$B_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.13)$$

con λ e μ coefficienti arbitrari. Usando questa espressione per \mathbf{B} , il tensore $\mathbf{T}^{(d)}$ sarà

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(d)} &= [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \frac{\partial v^l}{\partial x^k} \\ &= \lambda \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \\ &= \lambda \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \end{aligned} \quad (4.14)$$

in cui abbiamo introdotto il tensore *velocità di deformazione* \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T] \quad (4.15)$$

il quale può essere inteso come la parte simmetrica del tensore $\nabla \otimes \mathbf{v}$. Una particolarità del tensore \mathbf{B} è il fatto che risulta simmetrico sia per scambio degli indici i e j che per scambio degli indici k e l . Inoltre, notiamo che è anche *blocco simmetrico*, cioè è simmetrico per scambio di coppie ij e kl . Grazie a queste proprietà, vediamo che anche $\mathbf{T}^{(d)}$ risulta simmetrico rispetto a scambi di i e j . Senza andare ad esplicitare le componenti, il tensore $\mathbf{T}^{(d)}$ è

$$\mathbf{T}^{(d)} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathcal{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (4.16)$$

In questo modo, l'equazione (4.10) diventa

$$\mathbf{T} = -\varpi\mathcal{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathcal{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (4.17)$$

che è l'equazione costitutiva dei fluidi viscosi lineari detti anche *fluidi newtoniani*, in cui λ e μ sono parametri legati al mezzo continuo in esame. Richiedendo che il campo di pressione equivalga al valor medio dello stress normale, ovvero

$$\varpi = -\frac{1}{3}tr(\mathbf{T}) \quad (4.18)$$

e sostituendo tale equazione nella legge costitutiva (4.10), considerando unicamente la traccia otteniamo immediatamente

$$tr(\mathbf{T}^{(d)}) = 0 \quad (4.19)$$

In questo modo, estraendo anche la traccia della (4.16) e sapendo che

$$tr(\mathbf{D}) = D^i_i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right] = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (4.20)$$

otteniamo l'equazione

$$(3\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.21)$$

In generale, sappiamo che nel caso di fluidi incomprimibili il termine $\nabla \cdot \mathbf{v}$ non si annulla. Da questa osservazione ricaviamo la relazione

$$\gamma = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad (4.22)$$

che è conosciuta come *relazione di Stokes*, mentre la grandezza γ è detta *viscosità di volume*. Sostituendo l'equazione costitutiva (4.10) nell'equazione di bilancio in forma locale del momento lineare otteniamo, insieme all'equazione di continuità della massa, le leggi che governano i fluidi viscosi lineari:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \varpi + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.24)$$

Esse sono conosciute con il nome di *equazioni di Navier-Stokes* e formano un sistema di quattro equazioni alle derivate parziali che permettono di determinare i campi $\rho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Tali equazioni sono studiate ancora oggi e vengono utilizzate nella descrizione di correnti marine, flussi atmosferici e tanto altro. Anche se non ne andremo a parlare in seguito, è importante segnalare il fatto che queste equazioni sono in grado di modellizzare un *fluido turbolento*, ovvero un fluido in cui il moto delle particelle non segue più delle traiettorie ordinate come nel caso di *regime laminare*, ma avviene in modo caotico.

Assumendo ancora una volta l'incompressibilità del fluido, la relazione costitutiva (4.10) si riduce alla più semplice forma

$$\mathbf{T} = -\varpi \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (4.25)$$

Le equazioni che definiscono completamente un fluido viscoso lineare incompressibile sono

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \varpi + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.27)$$

Pur essendo molto simile al caso dei fluidi elastici, il termine $\nabla^2 \mathbf{v}$ e la non linearità rispetto al termine $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ rendono molto più complicato il compito di trovare delle soluzioni generali.

4.3 Metodo Coleman-Noll

A differenza delle altre equazioni di bilancio, la disuguaglianza di Clausius-Duhem (3.67) non è ancora stata sfruttata per determinare alcune delle grandezze incognite associate ad un mezzo continuo. Per farlo, è necessario ricorrere al metodo Coleman-Noll in cui si assume che non esista un vincolo nè sul tempo iniziale $t = 0$ nè sui valori iniziali delle grandezze. Inoltre, è richiesto che le equazioni costitutive di un determinato mezzo continuo soddisfino la disuguaglianza (3.67) per ogni processo termodinamico.

Partendo dalla disuguaglianza di Clausius-Duhem (3.71), andiamo a sottrarre l'equazione di bilancio in forma locale dell'energia interna (3.29) divisa per la temperatura assoluta Θ per ottenere

$$\rho \left(\frac{ds}{dt} - \frac{1}{\Theta} \frac{du}{dt} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right) - \frac{1}{\Theta} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\Theta} \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \geq 0 \quad (4.28)$$

Utilizzando le relazione

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right) = -\frac{1}{\Theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \Theta + \frac{1}{\Theta} \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (4.29)$$

possiamo scrivere la relazione (4.28) come

$$\rho \left(\frac{ds}{dt} - \frac{1}{\Theta} \frac{du}{dt} \right) - \frac{1}{\Theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \Theta + \frac{1}{\Theta} \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \geq 0 \quad (4.30)$$

Moltiplicando per la temperatura assoluta Θ :

$$-\rho \left(\frac{du}{dt} - \Theta \frac{ds}{dt} \right) - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \Theta + \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \geq 0 \quad (4.31)$$

Introducendo ora l'energia libera specifica di Helmholtz

$$f = u + \Theta s \quad (4.32)$$

nota dalla termodinamica, l'equazione (4.31) diventa

$$-\rho \left(\frac{df}{dt} + s \frac{d\Theta}{dt} \right) - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \Theta + \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \geq 0 \quad (4.33)$$

Da come è stata definita, l'energia libera f potrà dipendere da ρ , Θ e \mathbf{x} (o \mathbf{v}) e anche dalle loro derivate spaziali e temporali. Per semplicità, andremo ad assumere una dipendenza solo dalle prime due grandezze, ovvero $f = f(\rho, \Theta)$. Usando la regola della catena per calcolare la derivata totale rispetto al tempo di f e l'equazione costitutiva dei fluidi perfetti (4.1) otteniamo

$$-\rho \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{dt} + s \frac{d\Theta}{dt} \right) - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \Theta - \varpi \nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad (4.34)$$

Sfruttando la legge di bilancio in forma locale della massa (2.4), possiamo scrivere la derivata totale rispetto al tempo della densità ρ come

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{v}\rho - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \end{aligned}$$

da cui otteniamo immediatamente la relazione

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (4.35)$$

grazie alla quale possiamo riformulare la (4.34) come

$$-\rho \left(\frac{\partial f}{\partial \Theta} + s \right) \frac{d\Theta}{dt} - \rho \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\varpi}{\rho^2} \right) \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \Theta \geq 0 \quad (4.36)$$

Secondo la teoria di Coleman-Noll, è possibile scegliere in modo arbitrario l'istante iniziale $t = 0$ così come i valori iniziali delle derivate totali rispetto al tempo delle grandezze Θ e ρ . Potendo assumere qualsiasi valore, i coefficienti di tali derivate devono annullarsi per poter conservare la disuguaglianza (4.36), perciò avremo le relazioni

$$s = -\frac{\partial f}{\partial \Theta} \quad (4.37)$$

$$\varpi = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \quad (4.38)$$

che corrispondono alle equazioni già note dalla termodinamica che mettono in relazione entropia e pressione alle derivate dell'energia libera di Helmholtz. Rimangono, quindi, con la disequazione

$$-\frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \Theta \geq 0 \quad (4.39)$$

Se imponiamo il *modello di Fourier* tale per cui

$$\mathbf{q} = -k \nabla \Theta \quad (4.40)$$

con k detta *conducibilità termica*, otteniamo immediatamente

$$\frac{k}{\Theta} \nabla \Theta \cdot \nabla \Theta \geq 0 \quad (4.41)$$

da cui possiamo ricavare il risultato

$$k \geq 0 \quad (4.42)$$

che ci mostra il fatto che la conducibilità termica k è sempre non negativa. Il modello di Fourier rappresenta una relazione costitutiva per \mathbf{q} : l'equazione (4.40) descrive \mathbf{q} come un vettore che ha la stessa direzione del gradiente di temperatura, ma verso opposto. In altre parole, \mathbf{q} è diretto dalle regioni più calde del mezzo continuo a quelle più fredde in perfetto accordo con la conservazione dell'energia.

Bibliografia

- [1] R. Abeyaratne. *Lecture Notes on the Mechanics of Elastic Solids*. Electronic Publication, Massachusetts, 2006.
- [2] A. C. Eringen, G. A. Maugin. *Electrodynamics of Continua I - Foundations and Solid Media*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [3] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics, Second Edition*. John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [4] A. Kovetz. *Electromagnetic Theory*. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press, New York, 1971.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, New York, 1966.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press, New York, 1970.
- [8] J. N. Reddy. *An Introduction to Continuum Mechanics, Second Edition*. Cambridge University Press, New York, 2013.
- [9] A. I. Ruban, J. S. B. Gajjar. *Fluid Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 2014.