

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Sistemi Hamiltoniani Vincolati e Particella Relativistica

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Enrico Tartari

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Sistemi Hamiltoniani vincolati	4
1.1	Vincoli	4
1.1.1	Lagrangiana e vincoli primari	4
1.1.2	Condizioni di regolarità sulle funzioni vincolari	6
1.2	Hamiltoniana canonica ed evoluzione temporale	7
1.2.1	Vincoli secondari e condizioni di consistenza	9
1.2.2	Equazioni forti e deboli e restrizioni sulle variabili ausiliarie	10
1.2.3	Hamiltoniana totale	11
2	Funzioni di classe e trasformazioni di Gauge	13
2.1	Vincoli di prima classe e generatori di trasformazioni di Gauge	13
2.1.1	Congettura di Dirac	15
2.2	Hamiltoniana estesa e principio d'azione esteso	15
2.3	Vincoli di seconda classe	16
2.3.1	Parentesi di Dirac	18
3	Gauge-fixing e conteggio dei gradi di libertà	20
3.1	Gauge-fixing	20
3.1.1	Osservazione sui vincoli di seconda classe	22
3.2	Conteggio dei gradi di libertà	22
3.3	Funzioni Gauge invarianti	23
3.3.1	Funzioni sulla superficie vincolata	23
3.3.2	Osservabili	24
4	La particella relativistica	26
4.1	Introduzione alla trattazione relativistica della particella	26
4.2	Particella relativistica come sistema vincolato	28
4.2.1	Quantizzazione	34
5	Appendice	36

Introduzione

Le *teorie di Gauge* ricoprono un ruolo fondamentale nell'analisi di sistemi fisici. La teoria consiste nell'utilizzare nella definizione degli stati permessi per il sistema fisico trattato un numero di variabili maggiore rispetto ai gradi di libertà indipendenti. Si parla quindi di una descrizione "ridondante". Le variabili ed i gradi di libertà di importanza fisica risultano essere quelli invarianti sotto una trasformazione di sistemi di coordinate, intese come coordinate generalizzate che descrivono le variabili dinamiche del sistema. Si può dire che le teorie di Gauge nascono dalla possibilità di scegliere arbitrariamente il sistema di riferimento utilizzando cioè diversi set di variabili per identificare il medesimo stato fisico. Si introducono per questo motivo delle variabili extra che mettono in luce le simmetrie tra i differenti sistemi di riferimento ed evidenziano di conseguenza caratteristiche di rilevanza fisica. Risulta essere curioso che si riesca a semplificare la trattazione aumentando il numero di variabili per palesare le simmetrie piuttosto che ridurre il numero. È di cruciale importanza notare che la scelta del sistema di riferimento può essere eseguita ad ogni istante temporale per cui in una teoria di Gauge non ci si può aspettare che semplicemente fissando le condizioni iniziali le equazioni del moto definiscano in maniera completa l'evoluzione temporale del sistema fisico in esame. La precedente affermazione definisce la seguente proprietà chiave della teoria di Gauge: "*la soluzione generale delle equazioni del moto contiene funzioni arbitrarie del tempo*" [1]. Sarebbe riduttivo affermare che per aggirare il problema sia sufficiente fissare il sistema di riferimento, ovvero eseguire il *gauge-fixing*. Infatti questa operazione può portare ad alcuni inconvenienti: potrebbe rompere l'evidenza di importanti simmetrie o essere del tutto impossibile globalmente per via delle cosiddette *ostruzioni di Gribov*. Emergerà che qualora si goda di una arbitrarietà tale nella scelta delle soluzioni delle equazioni del moto, tale libertà implicherà una dipendenza tra le variabili canoniche del sistema hamiltoniano. Esse dovranno obbedire ad alcune relazioni che le vincolano ad appartenere ad una sottovarietà dello spazio delle fasi, detta *superficie vincolata*. Per questo motivo ogni sistema di gauge è un sistema hamiltoniano vincolato mentre

l'opposto non è sempre vero. Lo scopo di questa tesi è, quindi, sviluppare un formalismo adatto alla trattazione di sistemi hamiltoniani vincolati e portare l'esempio della particella relativistica. Per quanto riguarda lo sviluppo del formalismo si seguirà lo schema del manuale di Henneaux e Teitelboim [1].

La tesi si suddivide in 5 capitoli:

- *Sistemi Hamiltoniani vincolati.* Il fine di questo capitolo è far emergere i vincoli ed introdurre il formalismo adatto alla trattazione di tali vincoli. Si noterà come la formulazione hamiltoniana sia la più adatta a tale scopo.
- *Funzioni di classe e trasformazioni di Gauge.* Il tema affrontato in questo capitolo è la distinzione tra vincoli di prima classe e seconda classe. Si discuterà di come tale distinzione sia intrinseca nella formulazione hamiltoniana. I vincoli di prima classe ricoprono, probabilmente, il ruolo più fondamentale della trattazione. Essi, mediante le *parentesi di Poisson* fungono da generatori di trasformazioni di Gauge.
- *Gauge-fixing e conteggio gradi di libertà.* In questo capitolo si analizzerà la possibilità di fissare una gauge e di contare i gradi di libertà fisici del sistema vincolato. Si tratta di una sorta di scelta di sistema di riferimento che, tuttavia, potrebbe non essere globalmente possibile per via delle ostruzioni di Gribov, oppure potrebbe rompere l'evidenza di alcune simmetrie.
- *La particella relativistica.* Nell'ultimo capitolo, tutto il formalismo costruito nei capitoli precedenti trova una applicazione concreta. Si presenteranno quattro possibili descrizioni equivalenti della dinamica di una particella relativistica. Si noterà come, tramite le simmetrie di Gauge e l'imposizione di vincoli, sia possibile ricavare l'*equazione di Klein-Gordon* sotto quantizzazione del sistema.
- *Appendice.* In appendice sarà riportata la dimostrazione dei teoremi importanti utilizzati nella costruzione del formalismo.

Capitolo 1

Sistemi Hamiltoniani vincolati

1.1 Vincoli

In una teoria di gauge l'arbitrarietà della scelta del sistema di riferimento per ogni istante temporale si trasmette alle soluzioni delle equazioni del moto sottoforma di una presenza di un numero arbitrario di funzioni del tempo. In particolare si riesce a dimostrare che le variabili canoniche non sono tutte indipendenti bensì devono soddisfare alcune equazioni vincolari che derivano intrinsecamente dalla formulazione lagrangiana del problema.

1.1.1 Lagrangiana e vincoli primari

In formalismo lagrangiano è possibile introdurre le equazioni del moto mediante il seguente principio.

Principio d'azione *Le equazioni del moto classiche del sistema sono quelle che rendono stazionaria l'azione sotto variazioni $\delta q^n(t)$ delle variabili lagrangiane q^n ($n = 1, \dots, N$) che si devono annullare agli estremi t_1 e t_2 .*

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (1.1)$$

Le condizioni di stazionarietà sono proprio le *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange possono essere esplicitate risolvendo le derivazioni e risulta:

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \quad (1.3)$$

Da questa scrittura risulta manifesto che le accelerazioni (1.3) risultano univocamente fissate se e solo se la matrice

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}}$$

può essere invertita e ciò è verificato se e solo se :

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} \right) \neq 0. \quad (1.4)$$

In una teoria di Gauge però il caso importante è proprio quello in cui il determinante della matrice sopracitata sia proprio zero. In questo caso, infatti, non avremo più una definizione univoca delle accelerazioni e le soluzioni delle equazioni del moto conterranno, di conseguenza, un numero arbitrario di funzioni del tempo. Questo è il vero e proprio punto di inizio della tesi. Introduciamo la formulazione Hamiltoniana tramite la definizione di momento canonico coniugato:

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \quad (1.5)$$

in cui l'annullarsi del determinante (1.4) si presenta sottoforma di condizione di non invertibilità delle velocità in funzione dei momenti e delle variabili. L'ultima affermazione implica che i momenti non siano tra loro tutti indipendenti ma siano legati da una relazione del tipo:

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M \quad (1.6)$$

Le equazioni (1.6) definiscono i *vincoli primari* e devono il loro nome alla non dipendenza dalle equazioni del moto con la conseguente non restrizione sui valori permessi delle coordinate e delle velocità. Vedremo in seguito che sarà importante assumere che la matrice (1.1.1) abbia rango costante sullo spazio delle fasi e che le equazioni vincolari (1.6) definiscano una sottovarietà liscia contenuta in esso denominata *superficie vincolata*. Le equazioni (1.6) individuano $(N - M')$ equazioni indipendenti, dove M' è il rango della matrice (1.1.1) e la superficie vincolata è una sottovarietà nello spazio delle fasi di dimensione $(2N - M')$, data la presenza delle coordinate e dei momenti.

Dalla inter-dipendenza delle funzioni vincolari si deduce che la trasformazione inversa dai momenti p alle velocità \dot{q} è a molti valori. Infatti, la retroimmagine di un punto (q^n, p_n) , giacente nella superficie vincolata, (q^n, \dot{q}^n) , che soddisfi la definizione di momento canonico, non è univoca. Si tratta, invero, di definire una mappa da una varietà $2N$ dimensionale ad una $(2N - M)$. Sarà necessario introdurre M extra-parametri per rendere univoca la trasformazione ed essi si manifesteranno sottoforma di *multipli di Lagrange*.

1.1.2 Condizioni di regolarità sulle funzioni vincolari

Per passare al formalismo Hamiltoniano è necessario imporre delle *condizioni di regolarità* sulle equazioni vincolari (1.6). La superficie vincolata $(2N - M')$ dimensionale deve ammettere un ricoprimento di aperti su ciascuno dei quali i vincoli ϕ_m siano divisibili in:

1. Vincoli *indipendenti*
2. Vincoli *dipendenti*

Si definiscono vincoli *indipendenti* tutti i vincoli $\phi_{m'} = 0$ (con $m' = 1, \dots, M'$) tali che la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial \phi_{m'}}{\partial (q^n, p_n)}$$

sia di rango M' sulla superficie vincolata.

Si definiscono, invece, vincoli *dipendenti* tutti i vincoli $\phi_{m''} = 0$ (con $m'' = M', M' + 1, \dots, M$) che sono tali come conseguenza di quelli indipendenti.

La condizione sul rango della jacobiana può essere alternativamente interpretata nei seguenti modi:

1. zero è un valore regolare della mappa definita dai vincoli indipendenti, ovvero, i gradienti sono linearmente indipendenti sulla superficie vincolata
2. i vincoli indipendenti possono essere considerati come le prime M' coordinate per un nuovo sistema di riferimento.

Quando i vincoli sono indipendenti si dirà che ci si trova nel caso *irriducibile*, negli altri casi, naturalmente, *riducibile*. Localmente è sempre possibile escludere i vincoli dipendenti dalla trattazione senza perdere informazioni, ma rischiando di perdere l'evidenza di un qualche tipo di simmetria. Inoltre, non potendo assicurare la separazione a livello globale si cercherà di sviluppare un formalismo indipendente da tale distinzione.

1.2 Hamiltoniana canonica ed evoluzione temporale

Risulta evidente l'importanza dell'utilizzo di un formalismo hamiltoniano per lo studio dei vincoli e delle loro conseguenze sulle equazioni del moto. Introduciamo, quindi, due teoremi di fondamentale importanza per lo sviluppo quantitativo del formalismo, tratti da [1].

Teorema 1 *Sia G una funzione liscia dello spazio delle fasi tale che si annulli sulla superficie vincolata, allora*

$$G = g^m \phi_m$$

dove g^m sono funzioni.

Teorema 2 *Se*

$$\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$$

per variazioni arbitrarie δq^n e δp_n tangenti alla superficie vincolata, allora su tale superficie valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}$$

per qualche u^m .

A questo punto possiamo definire l'*Hamiltoniana Canonica* come:

$$H = \dot{q}^n p_n - L. \quad (1.7)$$

Dobbiamo adesso dedurre l'evoluzione temporale, e quindi la dinamica, di un sistema hamiltoniano vincolato. Ciò può essere ottenuto mediante un principio variazionale leggermente modificato al fine di rendere compatibili le equazioni del moto ed i vincoli primari. A questo scopo introduciamo alcune extra-variabili u^m che entreranno nei conti sottoforma di moltiplicatori di Lagrange e permetteranno di riottenere, nel rispetto delle condizioni vincolari, le velocità a partire dalla conoscenza dei momenti canonici. Il principio di azione in formalismo hamiltoniano assume la seguente forma:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}^n p_n - H - u^m \phi_m) = 0 \quad (1.8)$$

Sviluppando i conti in maniera esplicita otteniamo:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(p_n \frac{d}{dt} \delta q^n + \dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial H}{\partial q^n} \delta q^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n - \phi_m \delta u^m - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \delta q^n - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \delta p_n \right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} (p_n \delta q^n) - (\dot{p}_n + \frac{\partial H}{\partial q^n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}) \delta q^n + (\dot{q}^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}) \delta p_n - \phi_m \delta u^m \right) = 0$$

L'integrale della derivata temporale è nullo per via dell'annullarsi delle variazioni delle coordinate negli estremi. Per quanto riguarda gli altri termini integrali, invece, essendo arbitrarie le variazioni, per uguagliarne a zero gli integrali l'unico modo è uguagliare a zero i seguenti termini:

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad \dot{p}^n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}, \quad \phi_m(q, p) = 0. \quad (1.9)$$

Le equazioni del moto classiche derivate dalle (1.9) possono essere riscritte:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] + u^m [F, \phi_m]. \quad (1.10)$$

Dove $F(q, p)$ indica una funzione arbitraria delle variabili canoniche e le parentesi quadrate indicano le parentesi di Poisson, definite :

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \quad (1.11)$$

che soddisfano le proprietà di linearità (1.12), antisimmetria (1.13) e del prodotto (1.14) e identità di Jacobi (1.15):

$$[F_1 + F_2, F_3] = [F_1, F_3] + [F_2, F_3] \quad (1.12)$$

$$[F_1, F_2] = -[F_2, F_1] \quad (1.13)$$

$$[F_1 F_2, F_3] = F_1 [F_2, F_3] + [F_1, F_3] F_2 \quad (1.14)$$

$$[[F_1, F_2], F_3] + [[F_2, F_3], F_1] + [[F_3, F_1], F_2] = 0. \quad (1.15)$$

1.2.1 Vincoli secondari e condizioni di consistenza

È intuitivo dovere richiedere che i vincoli primari siano conservati nel tempo. Nell'equazione (1.10) se imponiamo che F sia un vincolo primario, la derivata temporale si annullerà e sviluppando i conti otteniamo quelle che vengono chiamate *condizioni di consistenza* :

$$[\phi_m, H] + u^m[\phi_m, \phi_{m'}] = 0. \quad (1.16)$$

Quando , fissando m , vale $[\phi_m, \phi_{m'}] = 0$ per qualsiasi valore di m' allora la (1.16) non dipende dalle variabili extra u^m . Se la (1.16) è indipendente anche dai vincoli primari allora essa induce un ulteriore vincolo sulle variabili canoniche, descritto da:

$$\phi_{m_2} = [\phi_m, H] = 0, \quad m_2 = 1, \dots, M_2. \quad (1.17)$$

I vincoli così ottenuti sono detti *vincoli secondari*. La differenza fondamentale tra vincoli primari e secondari consiste nel fatto che i vincoli primari derivano esclusivamente dalla definizione di momento canonico mentre quelli secondari dipendono anche dalle equazioni del moto. A questo punto però sugli M_2 vincoli secondari dobbiamo imporre nuovamente le condizioni di consistenza. Detto $X(q, p) = 0$ il vincolo secondario, tali condizioni assumono la forma:

$$[X, H] + u^m[X, \phi_m] = 0. \quad (1.18)$$

In seguito dovremmo verificare se la condizione di consistenza imponga o meno ulteriori vincoli secondari ed eventualmente imporre nuovamente le condizioni di consistenza. Al termine dell'iterazione del procedimento avremo K vincoli secondari denotati:

$$\phi_k = 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K. \quad (1.19)$$

Nel formalismo che sarà sviluppato non sarà importante la distinzione tra vincoli primari e secondari per cui d'ora in avanti indicheremo indistiguibilmente entrambi i vincoli come:

$$\phi_j = 0, \quad j = 1, \dots, M + K = J, \quad (1.20)$$

sui quali valgono le stesse condizioni di regolarità imposte ai vincoli primari. Assumiamo anche che:

$$\text{rank}[C_{jj'}] = \text{rank}[\phi_j, \phi_{j'}] = \text{cost},$$

ovverosia il rango della matrice descritta dalle parentesi di Poisson tra i vincoli (1.20) sia costante su tutta la superficie descritta dagli stessi.

1.2.2 Equazioni forti e deboli e restrizioni sulle variabili ausiliarie

Si definirà in questa sezione l'*uguaglianza debole* " \approx ". Un uguaglianza debole assume la seguente forma:

$$\phi_j \approx 0 \quad (1.21)$$

e significa che la grandezza è numericamente uguale a zero ma non necessariamente nulla su tutto lo spazio delle fasi. In particolare le sue parentesi di Poisson con le variabili canoniche non sono nulle. In generale, se due funzioni differenziabili F , R dello spazio delle fasi coincidono sulla sotto-varietà vincolare $\phi_j \approx 0$ si dirà che F e R sono *debolmente uguali* ovvero $F \approx G$. Se l'uguaglianza persiste su tutto lo spazio delle fasi allora si avrà una *uguaglianza forte*, ovvero sia $F = R$. Utilizzando il Teorema 1 si deduce:

$$F \approx R \Leftrightarrow F - R = c^j(q, p)\phi_j. \quad (1.22)$$

Le ultime condizioni da imporre sono le restrizioni sulle variabili extra u^m . Le restrizioni da imporre sono le seguenti, con variabile u^m e coefficienti che dipendono dalle q e dalle p :

$$[\phi_j, H] + u^m[\phi_j, \phi_m] \approx 0, \quad (1.23)$$

con m sommato tra 1 e M e j che varia da 1 a J .

Assumiamo che esse ammettano soluzione, allora la più generale sarà nella forma:

$$u^m = U^m + V^m, \quad (1.24)$$

con U^m soluzione dell'equazione non omogenea e V^m la soluzione più generale del sistema omogeneo associato

$$V^m[\phi_j, \phi_m] \approx 0. \quad (1.25)$$

La soluzione generale finale sarà:

$$u^m \approx U^m + v^a V_a^m, \quad (1.26)$$

dove V_a^m ($a = 1, \dots, A$) sono le soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo, il cui numero è equivalente per ogni q, p sulla superficie vincolata grazie all'assunzione di rango costante e v^a sono coefficienti del tutto arbitrari. In conclusione siamo riusciti, in questo modo, a separare la parte che rimane arbitraria u^m dalla parte che, per via delle condizioni di consistenza (conservazione nel tempo), rimane fissata.

1.2.3 Hamiltoniana totale

I passaggi seguiti fino a questo punto della trattazione sono stati, sinteticamente, i seguenti:

1. si sono fatti emergere i vincoli primari dalla condizione di determinante nullo (1.4) e richieste le condizioni di regolarità,
2. si sono ricavate le equazioni del moto classiche vincolate a partire da un coerente principio variazionale,
3. dalle equazioni del moto, imponendo, iterativamente, le condizioni di consistenza si sono fatti emergere i vincoli secondari,
4. si sono imposte le restrizioni sulle variabili extra.

Al fine di descrivere chiaramente l'evoluzione temporale del sistema dinamico, possiamo rendere esplicita la distinzione tra i termini che contengono le variabili ausiliare, che sono da fissare per avere una evoluzione temporale compatibile con i vincoli, e i termini che, invece, identificano i gradi di libertà intrinseci del sistema. Per questo motivo definiremo tramite semplici passaggi l'*Hamiltoniana totale*. Definendo:

$$H' = H + U^m \phi_m, \quad (1.27)$$

$$\phi_a = V_a^m \phi_m. \quad (1.28)$$

e utilizzando la (1.26), possiamo riscrivere le equazioni del moto nella forma equivalente:

$$\dot{F} \approx [F, H' + v^a \phi_a] = [F, H_T], \quad (1.29)$$

dove abbiamo denominato H_T l'hamiltoniana totale così definita:

$$H_T = H' + v^a \phi_a. \quad (1.30)$$

È importante evidenziare che la divisione di H_T in H' e $v^a \phi_a$ non è univoca per via della presenza di U^m in H' che rappresenta una arbitraria soluzione delle equazione non omogenee. Questa non univocità dello splitting di H_T può essere ri-assorbita in una nuova definizione delle funzioni arbitrarie v^a . Le equazioni $\dot{F} \approx [F, H_T]$ contengono le funzioni arbitrarie v^a e equivalgono alle equazioni del moto in formalismo Lagrangiano.

Possiamo dimostrare la precedente affermazione, ri-definendo il principio variazionale in maniera coerente, come:

$$\delta S_T = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}^n p_n - H' - v^a \phi_a) = 0 \quad (1.31)$$

Da cui possiamo ricavare, in maniera del tutto analoga alle (1.9), le seguenti equazioni:

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H'}{\partial p_n} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H'}{\partial q^n} - v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^n}, \quad \phi_a(q, p) = 0. \quad (1.32)$$

Per una variabile dinamica F qualsiasi,

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H'] + v^a [F, \phi_a] \approx \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H_T], \quad (1.33)$$

che equivale debolmente alle (1.10) se esplicitiamo la H' . Dall'equazione precedente risulta semplicemente verificata la condizione di consistenza $\dot{\phi}_m \approx 0$ ed in particolare $\phi_a = 0$ sono semplici identità e, dunque, non apportano nessuna restrizione sulle variabili ausiliarie. Dall'equazione (1.33) però è evidente che l'evoluzione temporale di una variabile dinamica non è univocamente determinata a partire dalle condizioni iniziali del sistema per via dell'arbitrarietà delle v^a , risolveremo in seguito questa ambiguità.

Capitolo 2

Funzioni di classe e trasformazioni di Gauge

Abbiamo precedentemente affermato che la distinzione tra vincoli primari e secondari non ha una rilevanza fisica importante. Una diversa classificazione tra i vincoli, invece, detiene un ruolo fondamentale nello sviluppo del formalismo cercato. Si tratta di distinzione tra *Funzioni di Prima Classe* e *Funzioni di Seconda Classe*. Definiamo una funzione $F(q, p)$ funzione di prima classe se le sue parentesi di Poisson con ogni vincolo sono debolmente uguali a zero, ovvero:

$$[F, \phi_j] \approx 0 \quad j = 1, \dots, J. \quad (2.1)$$

Se, al contrario, esiste almeno un vincolo con cui l'uguaglianza debole non sia verificata allora definiremo F funzione di seconda classe. Una proprietà positiva delle funzioni di prima classe è la conservazione della natura di prima classe di una funzione sotto parentesi di Poisson, la dimostrazione sarà riportata in appendice. Riconosciamo dalle loro definizioni che H' e ϕ_a sono di prima classe. In aggiunta, le ϕ_a formano un set completo di vincoli primari di prima classe poichè $v^a V_a^m$ è la soluzione più generale del sistema omogeneo associato (1.25) sulla superficie vincolata $\phi_j = 0$.

Osserviamo che l'Hamiltoniana Totale è la somma proprio di H' e dei vincoli primari di prima classe moltiplicata per dei coefficienti arbitrari.

2.1 Vincoli di prima classe e generatori di trasformazioni di Gauge

Nell'hamiltoniana totale la presenza delle funzioni arbitrarie ci permette di affermare che le p e le q non siano completamente osservabili. In particolare,

nonostante, una volta definito un set di q e p , lo stato fisico del sistema sia univocamente definito, il contrario non è garantito. Esiste infatti più di un set di variabili canoniche che identifichi lo stesso stato fisico. Per rendere più esplicita la affermazione precedente, notiamo che dato un set di variabili canoniche che descriva univocamente uno stato fisico, ci aspettiamo di poter descriverne unicamente anche l'evoluzione temporale tramite le equazioni del moto. Questo, però, non è possibile per via delle funzioni arbitrarie del tempo v^a e dunque l'evoluzione temporale del sistema dipende dalla scelta che viene fatta per queste funzioni per ogni istante successivo. Scendendo nel dettaglio, se $t_2 = t_1 + \delta t$, allora la variazione di una variabile dinamica nello stesso intervallo di tempo dipenderà dalla scelta di due generici v^a e v^{a*} in t_1 , in particolare assumerà la forma:

$$\delta F = \delta v^a [F, \phi_a], \quad \delta v^a = v^a - v^{a*}. \quad (2.2)$$

La proprietà importante che ne segue è che la trasformazione (2.2) non modifica lo stato fisico in t_2 . Si può affermare che *i vincoli primari di prima classe generano trasformazioni di Gauge*. Le trasformazioni di Gauge, definite sopra, sono indipendenti nel caso di vincoli irriducibili mentre nel caso siano presenti vincoli riducibili alcune delle trasformazioni di Gauge sono tali che $\delta F \approx 0$. Si possono affermare i seguenti teoremi:

Teorema 3 *Le parentesi di Poisson $[\phi_a, \phi_{a'}]$ tra due vincoli primari di prima classe genera ancora una trasformazione di Gauge.*

Teorema 4 *Le parentesi di Poisson $[\phi_a, H']$ di ogni vincolo primario di prima classe con l'hamiltoniana H' genera ancora una trasformazione di Gauge.*

I teoremi precedenti indicano l'esistenza di almeno qualche vincolo secondario di prima classe che si comporti come generatore di trasformazioni di Gauge. Nella definizione di vincolo secondario compaiono esclusivamente $[\phi_a, \phi_{a'}]$, ciò vuol dire che saranno combinazioni lineari di vincoli di prima classe. Non si può però garantire la congettura che *ogni vincolo secondario di prima classe sia un generatore di trasformazioni di Gauge* che passa sotto il nome di *congettura di Dirac*.

2.1.1 Congettura di Dirac

Nonostante la *congettura di Dirac* non sia dimostrabile ci sono diversi motivi per postularne la verità, o meglio ancora, postulare che *tutti i vincoli di prima classe, primari o secondari, siano generatori di trasformazioni di Gauge*, tali motivi sono:

1. mentre la distinzione tra vincoli primari e secondari è intrinseca nella formulazione Lagrangiana ma non in quella Hamiltoniana, la distinzione tra vincoli di prima e seconda classe è basata sulla struttura teorica di base Hamiltoniana, ovverosia, le parentesi di Poisson,
2. il formalismo è funzionante:
 - le trasformazioni generate da un vincolo di prima classe preservano il vincolo e mappano uno stato permesso in uno stato permesso,
 - le parentesi di Poisson di due generatori è ancora un generatore di Gauge
3. i metodi di quantizzazione mettono tutti i vincoli di prima classe sullo stesso livello trattandoli esclusivamente come generatori di Gauge, e funziona.

2.2 Hamiltoniana estesa e principio d'azione esteso

Abbiamo evidenziato nella sezione precedente come la naturale distinzione Hamiltoniana dei vincoli sia la distinzione tra vincoli di prima e seconda classe piuttosto che vincoli primari e secondari. Dunque, è comodo denotare in maniera distinta le due classi di vincoli. Indicheremo con γ i vincoli di prima classe G li generatori di Gauge, con χ i vincoli di seconda classe ed infine con ϕ_j il set di tutti i vincoli. Ora dobbiamo formulare una hamiltoniana in grado di contemplare l'esecuzione di trasformazioni di Gauge simultanee all'evoluzione temporale del sistema dinamico. A questo fine dovremmo aggiungere ad H_T il prodotto dei vincoli secondari di prima classe e di funzioni arbitrarie u^a poichè l'hamiltoniana totale H_T contiene esclusivamente un numero di trasformazioni di Gauge pari al numero di vincoli primari di prima classe.

Così facendo otteniamo l'*Hamiltoniana estesa*:

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad , \quad (2.3)$$

dove a varia su tutto il set γ .

Introduciamo la seguente definizione:

Variabile dinamica Gauge-invariante : *Una variabile dinamica F tale che $[F, \gamma_a] \approx 0$ è detta variabile dinamica Gauge-invariante.*

Osserviamo che per le variabile Gauge-invarianti l'utilizzo di H_E, H_T o H' per predire l'evoluzione temporale è indifferente, mentre per valutare i gradi di libertà di ogni altro tipo di variabile l'uso dell'*hamiltoniana estesa* risulta fondamentale. Il principio di azione per l'*hamiltoniana estesa* può essere riscritto nella seguente forma:

$$S_E = \int_{t_1}^{t_2} (p_n \dot{q}^n - H' - u^j \phi_j) dt, \quad (2.4)$$

e la somma è fatta su tutti i vincoli. La dinamica si può ora ricavare imponendo la stazionarietà dell'azione estesa.

$$\delta S_E = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_n \dot{q}^n - H' - u^j \phi_j) dt \quad (2.5)$$

Ripercorrendo i passaggi seguiti nella sezione (1.2) otteniamo le seguenti equazioni del moto:

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H'}{\partial p_n} + u^j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_n}, \quad \dot{p}^n = -\frac{\partial H'}{\partial q^n} - u^j \frac{\partial \phi_j}{\partial q^n}, \quad \phi_j(q, p) = 0. \quad (2.6)$$

Esplicitando \dot{q} e \dot{p} :

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H'] + u^j [F, \phi_j] \approx \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H' + u^j \phi_j]. \quad (2.7)$$

2.3 Vincoli di seconda classe

Ricordiamo che si definisce *funzione di seconda classe* qualsiasi funzione che abbia una parentesi di Poisson non debolmente nulla con almeno uno dei vincoli ϕ_j . Analogamente possiamo definire un vincolo, *vincolo di seconda classe*, se la matrice $C_{jj'} = [\phi_j, \phi_{j'}]$ non coincide debolmente con 0 sulla superficie vincolata per qualsiasi valore di j e j' . Essendo interessati all'aspetto qualitativo della trattazione, assumeremo, per semplicità, di trovarci nel caso di vincoli *irriducibili* e che il rango della matrice $C_{jj'}$ sia costante sulla superficie vincolata. In queste condizioni è valido il seguente teorema:

Teorema 5 Se la matrice $C_{jj'} = [\phi_j, \phi_{j'}] \approx 0$, allora esiste almeno un vincolo che sia di prima classe tra il set ϕ_j .

Dim. Se il determinante della matrice C è uguale debolmente a zero, allora si può trovare una soluzione non nulla ρ^j di $\rho^j C_{jj'} \approx 0$. Ora, è possibile verificare che $\rho^j \phi_j$ sia di prima classe.

Ridefinendo i vincoli come $\phi_j \rightarrow r_j^{j'} \phi_{j'}$, tramite l'utilizzo di una matrice invertibile $r_j^{j'}$ per garantire l'univocità della trasformazione, possiamo utilizzare il vincolo $\lambda^j \phi_j$ come il primo vincolo di un set che descriva una superficie vincolata equivalente. Per via della precedente ridefinizione la rappresentazione ottenuta è tale che $C_{1j} = -C_{j1} \approx 0$. Iterando l'applicazione del teorema 5 si riesce a costruire una superficie equivalente tramite vincoli di prima classe $\gamma_a \approx 0$ e di seconda classe $\chi_\alpha \approx 0$. La matrice delle parentesi di Poisson della rappresentazione equivalente con γ_b, χ_β come indici di riga e γ_a, χ_α come indici di colonna, è

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

in cui è ben evidente la separazione dei vincoli di prima e seconda classe, motivo per cui nessuna combinazione di vincoli di prima classe può restituire un vincolo di seconda classe e viceversa. Inoltre, la matrice (2.8) è antisimmetrica e invertibile su tutta la superficie vincolata e per garantire che il suo determinante sia diverso da zero il numero di vincoli secondari deve essere pari. La separazione matriciale è formalmente univoca a meno di una ridefinizione dei vincoli

$$\gamma_a \rightarrow a_a^b \gamma_b, \chi_\alpha \rightarrow a_\alpha^\beta \chi_\beta + a_\alpha^a \gamma_a, \quad (2.9)$$

in cui i determinanti delle matrici devono essere diversi da zero. Per la trattazione dei vincoli secondari è necessaria una ulteriore assunzione, ovvero sia che i vincoli secondari χ_α siano tali che $\det(C_{\alpha\beta}) \neq 0$ non solo sulla superficie descritta da $\chi_\alpha = 0$, $\gamma_\alpha = 0$ ma anche su quella definita da $\chi_\alpha = 0$. I vincoli di seconda classe non possono essere ammessi come generatori di simmetrie di Gauge di un sistema vincolato, poichè le trasformazioni associate non preserverebbero i vincoli: $\phi_j \approx 0$, e

sarebbero, dunque, prive di alcuna rilevanza fisica dal momento che potrebbero mappare uno stato permesso in uno non permesso. Per semplificare la comprensione della modalità di trattazione dei vincoli di seconda classe, riporterò di seguito l'esempio descritto nel manuale *Quantization of Gauge*

Systems di Marc Henneaux e Claudio Teitelboim [1]:

Esempio. Consideriamo il sistema più semplice che contenga vincoli di seconda classe: un sistema con N coppie di variabili canoniche in cui la prima coppia di variabili canoniche sia vincolata ad essere zero: I vincoli secondari sono dunque

$$\chi_1 = q^1 \approx 0 \quad (2.10)$$

$$\chi_2 = p^1 \approx 0 \quad (2.11)$$

e sono di seconda classe poichè $[\chi_1, \chi_2] = 1 \neq 0$.

Notando che il primo grado di libertà non è importante, possiamo scartare dalla trattazione e costruire una parentesi di Poisson modificata nel seguente modo:

$$[F, G]^* = \sum_{n=2}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial G}{\partial q^n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \quad (2.12)$$

E' possibile affermare che la parentesi di Poisson modificata (2.12) di ciascuno dei due vincoli con una variabile dinamica arbitraria è certamente zero per cui è possibile porre i χ_α a zero prima di valutare le parentesi (2.12). Nell'esempio è, dunque, possibile uguagliare fortemente a zero i vincoli. Osserviamo in maniera più precisa le buone proprietà delle parentesi modificate;

E' chiaro che esse garantiscano gli stessi gradi di libertà garantiti dalle parentesi di Poisson classiche per tutte le variabili con n maggiore o uguale a 2. Inoltre le soddisfano tutte le buone proprietà delle parentesi di Poisson, ovvero, *antisimmetria*, *derivazione* $[F, GR]^* = [F, G]^*R + G[F, R]^*$, *identità di jacobi*.

2.3.1 Parentesi di Dirac

Dirac generalizzò le parentesi (2.12) per un set arbitrario di vincoli di seconda classe. Avendo assunto che la matrice $C_{\alpha\beta}$ fosse invertibile, allora, possiederà una matrice inversa $C^{\alpha\beta}$, tale che

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (2.13)$$

Le parentesi di Dirac saranno così definite:

$$[F, G]^* = [F, G] - [F, \chi_a] C^{\alpha\beta} [\chi_\beta, G]. \quad (2.14)$$

Le (2.14) godono delle proprietà:

1.
$$[F, G]^* = -[G, F]^* \quad (2.15)$$

2.
$$[F, GR]^* = [F, G]^* R + G[F, R]^* \quad (2.16)$$

3.
$$[[F, G]^*, R]^* + [[R, f]^*, G]^* + [[G, R]^*, F]^* = 0 \quad (2.17)$$

4.
$$[\chi_a, F]^* = 0, \quad \forall F \quad (2.18)$$

5.
$$[F, G]^* \approx [F, G] \quad \text{di prima classe, } \forall F \quad (2.19)$$

6.
$$[R, [F, G]^*]^* \approx [R, [F, G]] \quad F, G \text{ di prima classe, } \forall R \quad (2.20)$$

La (2.18) ci permette di porre fortemente a zero tutti i vincoli secondari prima di valutare le parentesi di Dirac. Inoltre essendo l'Hamiltoniana estesa di prima classe deriviamo dalla (2.19) che l'hamiltoniana estesa generi le stesse equazioni del moto in termini delle parentesi di Poisson e in termini delle parentesi di Dirac:

$$\dot{F} \approx [F, H_E] \approx [F, H_E]^*, \forall F. \quad (2.21)$$

Infatti, la valutazione di una trasformazione di Gauge è identica in termini delle due parentesi:

$$[F, \gamma_a] \approx [F, \gamma_a]^*, \forall F. \quad (2.22)$$

Ricapitolando, una volta che le parentesi di Poisson vengono utilizzate per la distinzione tra vincoli di prima e seconda classe, esse vengono sostituite dalle parentesi di Dirac, tramite le quali si riformulano tutte le equazioni in cui i vincoli secondari diventano semplici uguaglianze forti che esprimono variabili canoniche in termini di altre. In particolare, in alcuni casi, è addirittura possibile utilizzare i vincoli secondari per eliminare alcune variabili e, quindi, alcuni gradi di libertà dal formalismo.

Capitolo 3

Gauge-fixing e conteggio dei gradi di libertà

La presenza di vincoli di prima classe e il loro ruolo di generatori di trasformazioni di Gauge indica la possibilità di compiere una scelta arbitraria tra diversi set di variabili canoniche che descrivono un medesimo stato fisico e collegatetra loro dalle libertà di Gauge. In qualche situazione è preferibile ridurre l'ambiguità tramite l'imposizione di restrizioni sulle variabili canoniche, dette *condizioni di Gauge canoniche*, al fine di rendere univoca la rappresentazione di uno stato fisico mediante un unico set di variabili canoniche rimaste indipendenti dopo l'imposizione di tali restrizioni. Tale operazione è permessa poichè non influenza le grandezze osservabili associate al sistema, le quali manterranno intatte le proprietà di gauge-invarianza e dunque, di osservabilità. Assumiamo nelle seguenti sezioni di trovarci nella condizione di vincoli irriducibili.

3.1 Gauge-fixing

Un set di *condizioni di Gauge*

$$C_b(q, p) \approx 0 \tag{3.1}$$

deve rispettare due proprietà fondamentali per garantire che le restanti variabili canoniche indipendenti siano in corrispondenza biunivoca con gli stati del sistema fisico:

1. La trasformazione di Gauge scelta deve essere *accessibile*, ovvero, dato un set di variabili canoniche, deve esistere una trasformazione di Gauge ottenuta per iterazione di trasformazioni infinitesime $\delta u^a[F, \gamma_a]$ che

mappi le variabili canoniche in altre variabili canoniche che soddisfino le (3.1). La condizione di accessibilità garantisce che la trasformazione si limiti a ridurre i gradi di libertà di Gauge senza influenzare le grandezze fisiche, le Gauge invarianti. Possiamo osservare che il numero delle condizioni di Gauge indipendenti (3.1) non può essere maggiore del numero di vincoli di prima classe indipendenti γ_a poichè il numero di parametri indipendenti δu^a è strettamente uguale al numero dei γ_a .

2. Le condizioni (3.1) devono essere *complete*, ovvero, devono fissare il Gauge completamente. Non deve esistere nessuna trasformazione di Gauge che preservi le condizioni di Gauge, per cui

$$\delta u^a [C_b, \gamma_a] \approx 0, \quad (3.2)$$

deve necessariamente implicare

$$\delta u^a = 0. \quad (3.3)$$

Unendo le due condizioni deduciamo che il numero di condizioni di Gauge indipendenti deve essere uguale al numero di vincoli di prima classe indipendenti. Se ciò è verificato, allora la matrice delle parentesi di Poisson $[C_b, \gamma_a]$ sarà quadrata e per implicare da (3.2) \rightarrow (3.3) essa dovrà essere invertibile, dunque

$$\det[C_b, \gamma_a] \neq 0. \quad (3.4)$$

Questa condizione forma automaticamente un set di vincoli di seconda classe e al termine di un Gauge-fixing completo non rimarrà alcun vincolo di prima classe, ovvero abbiamo risolto ed eliminato ogni grado di libertà apportato dalla trasformazione di gauge generata da ciascun vincolo di prima classe. Il Gauge-fixing può essere trattato anche dal punto di vista geometrico. Geometricamente, appunto, un buon set di condizioni di Gauge definisce una sottovarietà nello spazio delle fasi tale da intersecare tutte le orbite di Gauge (complete) in un unico punto (accessibili). Poichè ciascuna orbita di Gauge individua una sottovarietà della superficie vincolata di dimensioni pari al numero di vincoli indipendenti di prima classe γ_a , il numero di condizioni di Gauge indipendenti tra le (3.1) deve essere pari a quello dei γ_a .

Può accadere che la geometria della superficie vincolata sia tale da definire delle orbite di Gauge tali da impedire l'esistenza *globale* di condizioni di Gauge valide. Queste problematiche, denominate *ostruzioni di Gribov*, inducono a sviluppare un formalismo il più indipendente possibile dal Gauge-fixing al fine dello studio dell'evoluzione dinamica di un sistema vincolato.

3.1.1 Osservazione sui vincoli di seconda classe

Nella sezione precedente abbiamo evidenziato come i mediante un'operazione di Gauge-fixing sia possibile generare un set di vincoli di seconda classe mettendo in relazione i vincoli di prima classe e le condizioni di Gauge. Intuitivamente, sembrerebbe che ogni set di vincoli secondari di un sistema fisico possa essere interpretato come risultato di un Gauge-fixing di un sistema fisico equivalente contenente una qualche invarianza di Gauge e senza vincoli di seconda classe. Questa operazione può essere eseguita ma la rimozione dei vincoli secondari può non essere unica. Il sistema di Gauge equivalente può contenere sia lo stesso numero di variabili di Gauge sia necessitare di gradi di libertà extra. In ogni caso, la dinamica rimane invariata. L'aggiunta di alcune variabili extra può apportare un importante vantaggio. Innanzi tutto, si dovrà trattare esclusivamente con vincoli di prima classe e, quindi, sarà possibile lavorare semplicemente con le classiche parentesi di Poisson. Evitare l'utilizzo delle parentesi di Dirac non induce esclusivamente vantaggi di formulazione ma anche di trattazione quantitativa di un problema fisico. La realizzazione quantistica delle parentesi di Dirac potrebbe essere altamente complicata e, soprattutto, non garantita.

3.2 Conteggio dei gradi di libertà

Supponiamo di essere riusciti ad eliminare tutti i gradi di libertà di Gauge ed essere rimasti esclusivamente con vincoli di seconda classe, allora non apparirà alcuna funzione arbitraria nell'hamiltoniana che descrive il sistema. A questo punto, il set di variabili canoniche rimaste individuerà biunivocamente lo stato fisico. Per visualizzare con più semplicità la formula successiva denominiamo:

- N_{gdl} , il numero di gradi di libertà fisici.
- N_{vc} , il numero di variabili canoniche.
- N_T , il numero totale di variabili canoniche.
- N_{sc} , il numero di vincoli di seconda classe iniziali.
- N_{pc} , il numero di vincoli di prima classe.
- N_g , il numero di condizioni di Gauge.

Ora possiamo procedere con il *conteggio dei gradi di libertà fisici* del sistema:

$$\begin{aligned} 2N_{gdl} = N_{vc} = N_T - N_{sc} - N_{pc} - N_g = \\ = N_T - N_{sc} - 2N_{pc}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Analizziamo la (3.5). Il numero di vincoli di seconda classe è sempre pari, di conseguenza, anche il numero di variabili canoniche è pari e corrisponde ad un numero intero di gradi di libertà. Questo conteggio è privo di ambiguità per il caso numerabile ma se si passa ad un continuo di gradi di libertà, il discorso si complica leggermente poichè non è più facilmente riconoscibile se una trasformazione sia di Gauge oppure se modifichi lo stato fisico.

3.3 Funzioni Gauge invarianti

In questa sezione si vuole approfondire la caratterizzazione delle osservabili fisiche in formalismo hamiltoniano.

3.3.1 Funzioni sulla superficie vincolata

Denominiamo lo spazio delle fasi standard P e lo spazi delle funzioni lisce sullo spazio delle fasi $C^\infty(P)$. La struttura algebrica dello spazio vettoriale $C^\infty(P)$ è definita da due operazioni:

- La moltiplicazione puntuale ordinaria, che garantisce l'associatività dell'algebra strutturale
- Le parentesi di Dirac, che garantisce che $C^\infty(P)$ sia dotata di un'algebra di Lie.

Siano F_1 , F_2 e F_3 elementi di $C^\infty(P)$, le due operazioni precedenti si combinano:

$$[F_1 F_2, F_3]^* = [F_1, F_3]^* F_2 + F_1 [F_2, F_3]^*. \quad (3.6)$$

Il sistema fisico è vincolato ad appartenere alla superficie vincolata Σ , per cui, le funzioni di rilevanza fisica sono semplicemente quelle lisce su Σ , non su tutto $C^\infty(P)$. In particolare, se due funzioni coincidono su Σ non vi è alcun modo di distinguerle, anche nel caso in cui siano differenti a livello globale. Possiamo procedere ora con la vera caratterizzazione algebrica dello spazio $C^\infty(\Sigma)$. L'insieme delle funzioni che si annullano in Σ formano un *ideale* Ψ in $C^\infty(P)$, ovvero un sottoinsieme di un anello chiuso rispetto alla somma interna e a al prodotto ordinario degli elementi dell'anello, infatti il prodotto

di una funzione arbitraria dello spazio delle fasi e di una che si annulla su Σ si annulla su Σ . Il più generico elemento di Ψ ha forma $\lambda^a \gamma_a + \lambda^\alpha \chi_\alpha$ poichè Ψ è generato da γ_a e χ_α . Consideriamo, ora, l'algebra quoziente $C^\infty(P)/\Psi$ che contiene le classi di equivalenza delle funzioni dello spazio delle fasi che differiscono tra loro per un elemento di Ψ . $C^\infty(P)/\Psi$ è dimostrabile essere semplicemente $C^\infty(\Sigma)$ con il prodotto ordinario in $C^\infty(\Sigma)$.

3.3.2 Osservabili

Dal momento che in un sistema hamiltoniano vincolato, diversi set di variabili canoniche (p, q) possono corrispondere al medesimo stato fisico, emerge la problematica di individuare quali tra le funzioni delle variabili canoniche siano ammissibili quali grandezze fisiche, denominate *osservabili*.

Def. Si definisce *osservabile*, una funzione sulla superficie vincolata che sia Gauge-invariante.

Alternativamente, da un punto di vista più geometrico, la definizione di osservabile può essere raggiunta mediante il seguente ragionamento. Qualora la funzione liscia nello spazio delle fasi associata ad un'osservabile non assuma lo stesso valore su tutti i punti dello spazio delle fasi relativi al medesimo stato fisico, la corrispondenza tra tale funzione e osservabile potrebbe mappare valori distinti di un osservabile nel medesimo stato fisico. Ciò non succede se:

Def. Si definisce *osservabile*, una funzione F dello spazio delle fasi tale che

$$[F, \gamma_a]^* \approx 0. \quad (3.7)$$

Imponendo che le parentesi di Dirac con i vincoli di prima classe sia debolmente uguale a zero, stiamo imponendo che alle variabili dinamiche vadano associate esclusivamente le funzioni costanti sulle orbite di Gauge, che in base alla (2.2) tali funzioni sono proprio le (3.7).

Concretamente, la caratterizzazione algebrica può essere sviluppata nel seguente modo. Abbiamo dedotto che le funzioni associate alle osservabili devono essere $C^\infty(\Sigma)$ e non $C^\infty(P)$ per via della presenza dei vincoli. Ciò significa, come già detto, che le eventuali differenze tra due funzioni dello spazio delle fasi esterne alla superficie vincolata Σ non risulta di alcuna rilevanza fisica. Dunque, anche essendosi ristretti alle funzioni Gauge invarianti, notiamo che la definizione delle parentesi di Poisson e Dirac tra variabili dinamiche Σ non è immediata. Le parentesi di Poisson e Dirac sono, tuttavia, di fondamentale importanza per attribuire alla teoria di Gauge un valore

predittivo. Il fine del paragrafo è, quindi, rendere coerente la richiesta di invarianza di Gauge mediante le parentesi di Dirac (3.7) per funzioni definite su una superficie Σ differente dallo spazio delle fasi P.

Siano F_1, F_2 appartenenti a $C^\infty(\Sigma)$ e F_1^*, F_2^* appartenenti a $C^\infty(\Omega)$ tali che coincidano rispettivamente a F_1, F_2 sulla superficie vincolata Σ . Una definizione spontanea delle parentesi di Dirac di F_1, F_2 su Σ potrebbe essere:

$$[F_1, F_2]_\Sigma^* \equiv [F_1^*, F_2^*]^*|_\Sigma. \quad (3.8)$$

Dobbiamo verificare che il valore della parentesi (3.8) non dipenda dalle funzioni F_1^*, F_2^* scelte ma che sia equivalente per qualsiasi funzione con tali valori sulla superficie vincolata. La più generica funzione dello spazio delle fasi F' la cui restrizione su Σ equivalga a F_2 ha la seguente forma:

$$F' = F_2^* + \lambda^a \gamma_a + \eta^\alpha \chi_\alpha, \quad (3.9)$$

da cui segue che la (3.8) è ben posta se e solo se:

$$[F_1^*, F_2^*]^* \approx [F_1^*, F_2^* + \lambda^a \gamma_a + \eta^\alpha \chi_\alpha]^* \approx [F_1^*, F_2^*]^* + \lambda^a [F_1^*, \gamma_a]^* \iff [F_1^*, \gamma_a]^* \approx 0. \quad (3.10)$$

La condizione è chiaramente indipendente dalla scelta delle funzioni per cui la definizione (3.8) è ben posta. L'insieme delle funzioni $C^\infty(\Sigma)$ gauge-invarianti sarà definito Q e denominato *algebra delle osservabili* e ha proprietà del tutto analoghe a Ψ .

In conclusione, per formulare il concetto di osservabile si sono resi necessari tre passaggi:

1. restrizione dello spazio delle fasi P alla superficie vincolata Σ ;
2. richiesta di invarianza di Gauge (3.7);
3. formulazione coerente per le parentesi di Dirac.

Capitolo 4

La particella relativistica

4.1 Introduzione alla trattazione relativistica della particella

In questa sezione si farà un breve cenno alle proprietà di base della meccanica relativistica che torneranno utili per la comprensione della trattazione della particella relativistica della prossima sezione. È possibile scegliere come punto di partenza dell'allontanamento dalla meccanica classica, l'osservazione dell'incopatibilità delle classiche *trasformazioni di Galileo* e le *trasformazioni di Lorentz*, che garantiscono l'invarianza per le equazioni elettrodinamiche. Le trasformazioni di Galileo sono definite da:

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{4.1}$$

dove $K = (t, x, y, z)$, $K' = (t', x', y', z')$ sono i sistemi riferimento inerziali tra cui si compie la trasformazione e v , la velocità relativa di traslazione tra K e K' , ipotizzando che sia diretta esclusivamente verso l'asse x . Dalle (4.1) si evince l'esistenza di un tempo assoluto. È soprattutto qui che le trasformazioni di Lorentz si allontanano dalla formulazione classica.

Esse, definite da:

$$\begin{aligned}
 t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 y' &= y \\
 z' &= z
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

mostrano, al contrario delle (4.1), un tempo dipendente dalla velocità relativa dei due sistemi di riferimento. Fu Einstein ad intuire che le trasformazioni corrette tra sistemi di riferimento diversi erano le (4.2). Questo determinò il passaggio dalla meccanica classica in *meccanica relativistica*. Dalle trasformazioni di Lorentz si deduce che due sistemi di riferimento diversi percepiscono lo spazio ed il tempo in maniera differente. In particolare, si parla di *contrazione delle lunghezze e dilatazione del tempo*. Il tempo, dunque, è da considerare esattamente come una coordinata spaziale, di fatti, varia al variare sistema di riferimento. Ciò induce a definire uno spazio-tempo quadrimensionale, detto *spazio di Minkowski* descritto da un quadrivettore x^μ in cui, oltre alle tre classiche coordinate spaziali se ne introduce una quarta spaziale definita da ct :

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z). \tag{4.3}$$

Notiamo che la grandezza:

$$s^2 \equiv -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{4.4}$$

determina una grandezza *scalare*, ovverosia, una grandezza invariante per trasformazioni di Lorentz. La grandezza s^2 prende il nome di *distanza invariante*. Un'altra grandezza invariante è per definizione il *tempo proprio* τ :

$$d\tau \equiv dt' = \gamma^{-1}dt = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}} \tag{4.5}$$

Il tempo proprio misura essenzialmente la lunghezza invariante della linea di mondo della particella. Dopo avere concluso il cenno al quadro teorico complessivo a cui fa riferimento la trattazione della particella relativistica, vedremo nella prossima sezione, come è possibile ricavare le equazioni del moto per la particella relativistica considerata come un sistema hamiltoniano vincolato, i cui vincoli primari fungono da generatori di simmetrie locali, le simmetrie di Gauge.

4.2 Particella relativistica come sistema vincolato

In questa sezione approfondiremo la trattazione della particella relativistica. Per definizione, il *principio di azione* che descrive il moto di una particella relativistica deve essere compatibile con l'invarianza per *trasformazioni di Poincarè* e, in particolare per *trasformazioni di Lorentz*. Tra le trattazioni possibili vi compare la trattazione mediante le *simmetrie di Gauge*.

1. Ci poniamo nel sistema di riferimento inerziale di coordinate $x^\mu = (x^0, x^i) = (t, x^i)$, dove poniamo c a 1 per non appesantire la trattazione. Scegliendo come variabili dinamiche le $x^i(t)$, garantiamo l'invarianza relativistica imponendo l'invarianza dell'azione per trasformazioni di Lorentz. Ciò è ottenuto tramite l'utilizzo del *tempo proprio* T^* , definito, per un moto infinitesimo:

$$dT^* = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{dt^2 - dx^i dx_i} = dt \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}_i}. \quad (4.6)$$

Poichè il tempo invariante misura essenzialmente la lunghezza invariante della linea di mondo, T^* rappresenta un invariante relativistico e di conseguenza, anche l'azione S_1 , proporzionale al tempo proprio, definita:

$$S_1[x^i(t)] = -m \int (dT^*) = -m \int dt (\sqrt{1 - \dot{x}^i(t) \dot{x}_i(t)}) \quad (4.7)$$

dove m indica la massa della particella relativistica, è un invariante di Lorentz e Poincarè e dunque un invariante relativistico. Osserviamo che S_1 è coerentemente definita, in quanto nel limite non relativistico $(\dot{x}^i)^2 \ll 1$ ritroviamo l'azione non relativistica. Dal principio di minima azione otteniamo le equazioni del moto:

$$\delta S_1[x^i] = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{x} \dot{x}}} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Le simmetrie sono quelle generate dal gruppo di Poincarè. Non appaiono simmetrie locali di gauge e le tre variabili dinamiche considerate sono tutte *fisiche*.

2. La seconda formulazione possibile prevede una vera e propria trattazione di Gauge. Lo scopo è evidenziare, tramite le coordinate spaziali

x^i e la cordinata temporale $x^0 \equiv t$, le simmetrie del sistema, mettendo in luce l'invarianza relativistica. Stiamo considerando un sistema in cui sono presenti simmetrie locali (*simmetrie di Gauge*), è permesso, dunque, l'utilizzo di quattro variabili dinamiche x^μ , di cui una di loro oppure una loro combinazione deve essere ridondante per garantire la compatibilità con la trattazione del punto precedente. Indichiamo con $x^\mu(\tau)$ le variabili dinamiche che descrivono la linea di mondo della particella. Il parametro temporale τ definisce solamente la parametrizzazione della linea di mondo ed è, dunque, arbitrario. Analogamente al punto precedente, l'azione sarà:

$$S_2[x^\mu(\tau)] = -m \int d\tau (\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}) \quad (4.9)$$

dove però $\dot{x}^\mu \equiv \frac{d}{d\tau} x^\mu$. Dal principio variazionale ricaviamo le equazioni del moto:

$$\delta S_2[x^\mu] = 0 \implies \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} \right) \quad (4.10)$$

Le simmetrie generate dal gruppo di Poincarè individuano le simmetrie rigide:

$$x^\mu(\tau) \rightarrow x'^\mu(\tau) = \Lambda_\nu^\mu x^\nu(\tau) + a^\mu, \quad (4.11)$$

che per trasformazioni infinitesime assumono la forma:

$$\delta x^\mu(\tau) = \omega_\nu^\mu x^\nu(\tau) + a^\mu \quad (4.12)$$

dove $\delta x^\mu(\tau) = x'^\mu(\tau) - x^\mu(\tau)$, come sempre, e $\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu$ con ω_ν^μ e a^μ funzioni infinitesime. Le simmetrie di Poincarè garantiscono per definizione l'invarianza relativistica e le conseguenti grandezze conservate possono essere ottenute mediante l'applicazione del *Teorema di Noether*. In aggiunta a tali simmetrie, è presente anche una simmetria di Gauge:

$$\delta x^\mu = \xi(\tau) \dot{x}^\mu(\tau) \quad (4.13)$$

dove il parametro infinitesimo $\xi(\tau)$ che funge da generatore della simmetria è locale, ovvero dipendente arbitrariamente dalla sua scelta istante per istante. Sotto le trasformazioni generate dalla (4.13) l'azione risulta invariante a meno di termini di bordo, per cui:

$$\delta S_2[x^\mu] = \int (d\tau \frac{d}{dt}(\xi L_2)) \sim 0 \quad (4.14)$$

dove indichiamo con L_2 la lagrangiana presente nell'integrando (4.9). Dal punto di vista geometrico, la simmetria di Gauge corrisponde ad una riparametrizzazione della linea di mondo della particella

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \tau' = f(\tau) \\ x^\mu(\tau) &\rightarrow x'^\mu(\tau') = x^\mu(\tau) \end{aligned} \quad (4.15)$$

che per trasformazioni infinitesime $\tau' = \tau - \xi(\tau)$ si riduce alla (4.13). Per mostrare l'ugaglianza tra questa trattazione la trattazione del punto precedente è necessaria la simmetria di Gauge. Possiamo ottenere l'equivalenza riparametrizzando la linea di mondo, ovvero eseguire una trasformazione di Gauge, per fissare il Gauge, ovvero fissare una delle variabili dinamiche. Infatti possiamo imporre:

$$x^0(\tau) = t(\tau) = \tau \quad (4.16)$$

in modo da rendere non dinamica la variabile $x^0(\tau)$ pochè la sua evoluzione temporale è governata dalla scelta del gauge, che geometricamente indica che x^0 è utilizzato come parametro per indicare i vari punti della linea di mondo della particella. Riproduciamo in questo modo S_1 .

3. La terza formulazione necessita dell'utilizzo di un *campo di gauge*, ovvero sia una variabile dinamica la cui trasformazione di gauge contiene la derivata del parametro di gauge. In particolare, utilizzeremo il campo di gauge $e(\tau)$, diverso da zero e quindi invertibile. L'azione sarà:

$$S_3[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \left(\frac{1}{2} (e^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - em^2) \right). \quad (4.17)$$

La simmetria locale è:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \xi \dot{x}^\mu \\ \delta e &= \frac{d}{d\tau}(\xi e) \end{aligned} \quad (4.18)$$

che implica $\delta S_3 = \int (d\tau \frac{d}{d\tau}(\xi L_3)) \sim 0$. Osserviamo che effettivamente il campo di gauge e contiene la derivata rispetto al parametro di Gauge ξ .

Le simmetrie globali sono, naturalmente le trasformazioni di Poincarè:

$$\begin{aligned}\delta x^\mu(\tau) &= \omega_\nu^\mu x^\nu(\tau) + a^\mu \\ \delta e(\tau) &= 0.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Per il principio di minima azione, le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S[x, e]}{\delta e(\tau)} = 0 &\rightarrow e^{-2} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0 \\ \frac{\delta S[x, e]}{\delta x^\mu(\tau)} = 0 &\rightarrow \frac{d}{d\tau}(e^{-1} \dot{x}^\mu) = 0.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Ricaviamo e per evidenziare l'equivalenza della trattazione con quella precedente:

$$e = \pm \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}.\tag{4.21}$$

Sostituiamo e in S_3 :

$$S_3[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \pm \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = \mp m \int (\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}).\tag{4.22}$$

Notiamo che scegliendo la soluzione positiva mostriamo l'equivalenza con S_2 mentre scegliendo la soluzione negativa evidenziamo l'esistenza delle anti particelle. La formulazione (c) ha l'ulteriore vantaggio di poter trattare particelle non massive imponendo la semplice condizione $m = 0$.

(3-bis) È possibile sfruttare la libertà di gauge per eseguire un gauge-fixing. Per esempio, fissando $e = 1$, sempre possibile a meno di *ostruzioni topologiche di Gribov*, semplifichiamo l'azione S_3 a :

$$S_{3-bis}[x^\mu(\tau)] = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \right).\tag{4.23}$$

Bisogna prestare attenzione all'equazione del moto che, avendo fissato $e = 1$, diventa $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0$. A questo punto, dal punto di vista dinamico, l'azione semplificata S_{3-bis} è equivalente all'azione gauge invariante.

Tutto il necessario per definire l'evoluzione dinamica del sistema è ora contenuto in:

$$\begin{aligned} \text{azione: } S_{3-bis}[x^\mu(\tau)] &= \int (d\tau \frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu) \\ \text{vincolo: } \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

4. Come ultima formulazione analizziamo la formulazione hamiltoniana, utile per la quantizzazione canonica. Introduciamo i momenti coniugati e la corrispondente hamiltoniana:

$$\begin{aligned} p_\mu &= e^{-1} \dot{x}^\mu \\ \bar{H} &= \frac{e}{2} (p^\mu p_\mu + m^2) \equiv eH, \\ \text{con } H &= \frac{1}{2} (p^\mu p_\mu + m^2). \end{aligned} \quad (4.25)$$

L'azione nello spazio delle fasi ottenuta sostituendo i momenti risulta:

$$S_4 = [x^\mu(\tau), p_\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{2} (p^\mu p_\mu + m^2)) \quad (4.26)$$

dove x^μ sono le coordinate nello spazio-tempo della particella, p_μ i momenti coniugati ed e il campo di gauge e sono tre variabili dinamiche indipendenti. Esplicitando la simmetria di Gauge, abbiamo:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \xi p^\mu \\ \delta p_\mu &= 0 \\ \delta e &= \dot{\xi} \end{aligned} \quad (4.27)$$

L'azione è invariante per questa trasformazione, infatti:

$$\delta S_4 = \int d\tau \frac{d}{d\tau} \frac{\xi}{2} (p^2 - m^2) \sim 0. \quad (4.28)$$

Se eliminiamo dal formalismo i momenti coniugati sostituendoli con le relative equazioni del moto algebriche otteniamo la formulazione (3) :

$$\frac{\delta S_4}{\delta p_\mu} = \dot{x}^\mu - e p^\mu = 0 \implies p^\mu = e^{-1} \dot{x}^\mu. \quad (4.29)$$

Analizzando la struttura della S_4 , notiamo che dipende dalle coordinate (x^μ, p_μ) nello spazio delle fasi e dal campo di Gauge e che entra in

gioco come multiplo di Lagrange. Dalle equazioni del moto emerge un vincolo secondario nello spazio delle fasi:

$$H \equiv \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu + m^2) = 0. \quad (4.30)$$

Questo vincolo, essendo di prima classe, funge da generatore di trasformazioni di gauge delle coordinate nello spazio delle fasi mediante le parentesi di Poisson:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= [x^\mu, \xi H] = \xi P^\mu \\ \delta p_\mu &= [p_\mu, \xi H] = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

dove $\xi(\tau)$ rappresenta il parametro infinitesimo locale. In questa forma le (4.31) coincidono con quelle della formulazione precedente.

Per concludere, poichè la trattazione del punto (3) è derivata da principi geometrici che non abbiamo riportato, mostriamo come riottenere la formulazione del punto (4) a partire dalla trattazione hamiltoniana del sistema analizzato nel punto (2). Applichiamo la teoria esposta nella tesi per la trattazione di sistemi hamiltoniani vincolati. Osserviamo che la lagrangiana in (2) è singolare, ovvero

$$L = -m\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (4.32)$$

definisce una matrice quadrata con determinante uguale a zero. Per questo motivo le soluzioni delle equazioni del moto conterranno funzioni arbitrarie del tempo. Dalla definizione di momento canonico coniugato risulta:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}}. \quad (4.33)$$

Da questa relazione emerge un vincolo primario. Infatti calcolando

$$p_\mu p^\mu = \frac{m^2 \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu} = -m^2 \quad (4.34)$$

riconosciamo il vincolo primario ϕ_1

$$\phi_1 \equiv p_\mu p^\mu + m^2 = 0. \quad (4.35)$$

L'hamiltoniana canonica calcolata con la trasformata di Legendre si annulla

$$H' = p_\mu \dot{x}^\mu - L = \frac{m\dot{x}^2}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + m\sqrt{-\dot{x}^2} = 0 \quad (4.36)$$

dove abbiamo denotato $\dot{x}^2 \equiv \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$. Possiamo ora esprimere esplicitamente l'hamiltoniana estesa H_E nel seguente modo:

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad \rightarrow \quad H_E = 0 + e \frac{1}{2} (p^2 + m^2) \quad (4.37)$$

dove e è un moltiplicatore di Lagrange. Le condizioni di consistenza (1.16) non producono vincoli secondari. Dunque ϕ_1 è un vincolo di prima classe e genera le trasformazioni di gauge, riportate già in (4.31). Infine riscrivendo l'azione gauge invariante nello spazio delle fasi, cioè in termini di (x^μ, p_μ) , otteniamo proprio l'azione S_4 :

$$S = S_4 = [x^\mu, p_\mu, e] = \int d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{2} (p^\mu p_\mu + m^2)).$$

4.2.1 Quantizzazione

La formulazione (4) è la più adatta per definire la quantizzazione della particella relativistica. Ponendo $e = 1$, possibile a meno di ostruzioni di Gribov, si ottiene la quantizzazione modificando il formalismo e ragionando in termini di operatori e non più di variabili semplici. In particolare, le variabili dinamiche classiche (x^μ, p_μ) diventano operatori lineari $(\hat{x}^\mu, \hat{p}_\mu)$ agenti su uno spazio di Hilbert \mathbf{H} . Le regole di commutazione sono dedotte dalle parentesi di Poisson:

$$[x^\mu, p_\nu] = \delta_\nu^\mu \quad \rightarrow \quad [\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu]_{\mathbf{H}} = i\hbar \delta_\nu^\mu. \quad (4.38)$$

Un semplice vettore nello spazio di Hilbert $|\phi\rangle \in \mathbf{H}$, però, descrive uno stato fisico del sistema solo se è accoppiato all'equazione del moto del campo di gauge, ovvero $p^\mu p_\mu + m^2 = 0$. Ora l'equazione:

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu + m^2)|\phi\rangle = 0 \quad (4.39)$$

funge da selezionatore degli stati fisici permessi. L'hamiltoniana è proporzionale a questo vincolo, e l'equazione di Schroedinger compatibile con il vincolo risulta:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} |\phi\rangle = \hat{H} |\phi\rangle = 0 \quad (4.40)$$

da cui si evince che lo stato fisico $|\phi\rangle$ è indipendente da τ . La funzione d'onda corrispondente $\phi(x) = \langle x^\mu | \phi \rangle$ che descrive lo stato fisico deve essere indipendente da τ e soddisfare la (4.39).

Nel dettaglio, riconosciamo che la (4.39) è effettivamente l'*equazione di Klein-Gordon*

$$(-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (4.41)$$

In conclusione, è possibile ricavare l'equazione di Klein-Gordon attraverso la quantizzazione della particella relativistica. Si parla, in questo caso, di *prima quantizzazione* poichè questa equazione verrà reinterpretata come una teoria classica di un campo scalare relativistico che verrà a sua volta quantizzato in un processo teorico detto *seconda quantizzazione*. Infine, reintroduciamo, tramite una analisi dimensionale, la velocità della luce c :

$$(\partial_\mu \partial^\mu - \mu^2)\phi(x) = 0 \quad (4.42)$$

con $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ inverso della lunghezza d'onda Compton della particella relativistica $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$. Ciò conclude la trattazione.

Capitolo 5

Appendice

Riportiamo in seguito le dimostrazioni dei teoremi (1), (2) e della proprietà delle parentesi di Poisson di conservare la classe delle funzioni argomento. $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$. Per semplificare la trattazione, riportiamo i teoremi in forma intera:

Teorema 1

Sia G una funzione liscia dello spazio delle fasi tale che si annulli sulla superficie vincolata, allora

$$G = g^m \phi_m$$

dove g^m sono funzioni.

Dimostrazione Teorema 1

La dimostrazione del teorema si basa sulla possibilità di poter localmente identificare i vincoli primari indipendenti $\phi_{m'}$ come le prime coordinate di un sistema regolare di coordinate $(r_{m'}, x_\alpha)$ con $r_{m'} \equiv \phi_{m'}$. Per ipotesi $G(0, x) = 0$, per cui:

$$G(r, x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(tr, x) dt = r_{m'} \int_0^1 G_{m'}(tr, x) dt,$$

da cui, imponendo $g^{m'} = \int_0^1 G_{m'}(tr, x) dt$ con $g^{\bar{m}'} = 0$, ricaviamo

$$G = g^m \phi_m.$$

Abbiamo, così, mostrato la validità locale del teorema 1.

Teorema 2

Se per variazioni arbitrarie δq^n e δp_n tangenti alla superficie vincolata vale

$$\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$$

allora su tale superficie valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}$$

per qualche u^m .

Dimostrazione Teorema 2

Poichè la superficie vincolata è di dimensione $2N - M'$ e le variazioni tangenti $\delta q^n, \delta p_n$ definiscono uno spazio vettoriale $2N - M'$ -dimensionale, allora esistono esattamente M' soluzioni indipendenti di:

$$\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0.$$

Per le *condizioni di regolarità*, gli M' gradienti $(\frac{\partial \phi_{m'}}{\partial q^n}, \frac{\partial \phi_{m'}}{\partial p_n})$ sono indipendenti e formano una soluzione di $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$, per cui definiscono una base per le soluzioni. Ciò dimostra il teorema.

Infine mostriamo esplicitamente che le parentesi di Poisson di due funzioni di prima classe restituiscono una funzione di prima classe. Infatti, se F e G sono di prima classe allora

$$\begin{aligned} [F, \phi_j] &= f_j^{j'} \phi_j, \\ [G, \phi_j] &= g_j^{j'} \phi_j. \end{aligned}$$

Sfruttando l'identità di Jacobi otteniamo il risultato annunciato

$$\begin{aligned} [[F, G], \phi_j] &= [F, [G, \phi_j]] - [G, [F, \phi_j]] \\ &= [F, g_j^{j'} \phi_{j'}] - [G, f_j^{j'} \phi_{j'}] \\ &= [F, g_j^{j'}] \phi_{j'} + g_j^{j'} f_{j'}^{j''} \phi_{j''} - [G, f_j^{j'}] \phi_{j'} - f_j^{j'} g_{j'}^{j''} \phi_{j''} \approx 0. \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] C. Teiteboim e M. Henneaux, *Quantization of gauge systems* (Princeton University Press, 1992).
- [2] K. Lechner, *Elettrodinamica classica*, UNITEXT (Springer Milan, 2014), 10.1007/978-88-470-5211-6.
- [3] V. Barone, *Relatività, principi e applicazioni*, Programma di matematica e fisica (Bollati Boringhieri, 2004).
- [4] P.A.M. Dirac, "*The lagrangian in quantum mechanics*", *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* **3**, 64-72 (1933).
- [5] J.M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Text in Mathematics (Springer-Verlag, 2002), 10.1007/978-0-387-21752-9.
- [6] F. Bastianelli, *Richiami di meccanica classica*, Dispense di Fisica Teorica (Università di Bologna, 2016).