

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# LA DINAMICA DELLE COLATE DI LAVA

Relatore:  
Prof. Michele Dragoni

Presentata da:  
Emanuele Caruso

Anno Accademico 2017/2018

# Sommario

Il seguente lavoro di tesi si pone l'obiettivo di presentare alcuni modelli della dinamica delle colate di lava dovute ad eruzioni effusive. La lava è un sistema multifase ed eterogeneo formato da silicati fusi, con cristalli e bolle di gas in sospensione, il cui comportamento reologico è approssimabile a quello di un fluido Bingham. Il moto della lava sarà studiato durante la discesa su un piano con inclinazione costante, dapprima approssimandola ad un fluido isoterma ed in seguito prendendo in considerazione la perdita di calore per irraggiamento verso l'atmosfera.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Le eruzioni effusive</b>	<b>6</b>
1.1 Attività effusiva dei vulcani . . . . .	6
1.2 Tipi di lava . . . . .	8
1.3 La reologia . . . . .	12
<b>2 Richiami di fluidodinamica</b>	<b>15</b>
2.1 Relazioni costitutive . . . . .	15
2.2 Equazione di Navier-Stokes . . . . .	18
2.3 Reologia di Bingham . . . . .	20
<b>3 Le colate di lava</b>	<b>22</b>
3.1 Modello di flusso newtoniano . . . . .	23
3.2 Flusso di Bingham . . . . .	26
3.3 Fronte della colata . . . . .	28
3.4 Tubi di lava . . . . .	31
<b>4 Processi termici</b>	<b>36</b>
4.1 Irraggiamento e radianza . . . . .	36
4.2 Effetti della cristallizzazione sulla reologia . . . . .	39
4.3 Formazione della crosta e tubi di lava . . . . .	46
<b>Conclusioni</b>	<b>48</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>50</b>

# Introduzione

La fisica del vulcanismo è lo studio dell'origine del magma, della sua ascesa attraverso il mantello terrestre e della sua eruzione in superficie: si occupa dell'evoluzione chimico-fisica, del trasporto e dell'effusione dei magmi, oltre che della formazione dei depositi vulcanici sulla superficie terrestre.

Si definisce vulcano una frattura della superficie esterna di un pianeta, attraverso la quale avviene la fuoriuscita di materiale fuso, solido e gassoso. Esistono vari tipi di strutture vulcaniche, la cui morfologia è determinata dal gas contenuto, dalla viscosità e dal tasso di effusione dei magmi durante le eruzioni da cui hanno origine.

L'importanza dello studio della nascita e del comportamento dei vulcani ha diverse motivazioni. In primo luogo questi sono la prova più evidente della dinamicità della Terra, pianeta in continua evoluzione e rinnovamento. Infatti, studiando la formazione di tali strutture, si può comprendere l'evoluzione della Terra e dei suoi ambienti superficiali. In secondo luogo, vi sono abbastanza elementi da poter ipotizzare che le prime forme di vita si siano sviluppate in ambienti vulcanici sottomarini, più precisamente nelle zone idrotermali, le quali sono favorevoli allo sviluppo di organismi viventi grazie alle alte concentrazioni di fosforo, che è necessario alla formazione di *ATP*.

Vi sono anche diverse prove che permettono di associare le ricorrenti estinzioni di massa alle grandi effusioni basaltiche: una di queste, della durata di 500 mila anni avvenuta in Siberia tra i 270 e i 250 Ma fa, è stata la causa della più grande estinzione di massa nella storia della Terra, in quanto scomparì oltre il 90% delle specie viventi.

Ragioni più pratiche che rendono importante la fisica del vulcanismo sono gli impatti sul clima e sulla società. Ad esempio, durante un'attività vulcanica vengono immesse nella stratosfera grandi quantità di aerosol (particelle solide o liquide in sospensione), i quali, assorbendo e riflettendo parte della radiazione solare, causano una diminuzione

della temperatura superficiale. Come l'eruzione nel 1815 del vulcano Tambora (Indonesia), che abbassò le temperature mondiali in seguito all'enorme massa di aerosol liberata in atmosfera, motivo per cui l'anno successivo passò alla storia come "l'anno senza estate".

Inoltre i vulcani attivi apportano grandi benefici alla società, in quanto rendono fertili i terreni e forniscono in generale abbondanti risorse idriche, ma, allo stesso tempo, rappresentano anche un grosso rischio per l'incolumità delle persone che vivono nei loro pressi (oltre 800 milioni in tutto il mondo). Basti pensare all'eruzione Pliniana del 79 d.C che distrusse Pompei ed Ercolano, o quella del monte La Pelée (Martinica, Francia) del 1902, il quale fece circa 30.000 vittime. Per la messa in sicurezza delle persone, è dunque molto utile cercare di individuare le zone interessate da una possibile attività vulcanica (effusiva o esplosiva).

Nel seguente lavoro di tesi presenterò alcuni modelli di dinamica delle colate di lava, dovute ad attività vulcaniche di tipo effusivo.

Nel primo capitolo parlerò in linea generale delle varie tipologie di vulcani effusivi, presentando le varie strutture, la loro formazione ed i diversi tipi di lava che caratterizzano tali effusioni. Concluderò parlando dei maggiori fattori che influenzano la reologia delle lave.

Nel secondo capitolo, prima di sviluppare i veri e propri modelli, introdurrò le equazioni a cui farò riferimento nelle modellizzazioni: spiegherò la differenza tra fluidi newtoniani e non newtoniani e le relative relazioni caratteristiche; richiamerò le equazioni di Navier-Stokes per un fluido viscoso omogeneo; ed introdurrò il fluido Bingham, ottima approssimazione per la descrizione del comportamento delle lave.

Nel terzo capitolo presenterò un modello unidimensionale di una colata di lava in approssimazione isoterma, approssimazione ragionevole nei primi momenti di vita della colata. Discuterò tale modello sia per un fluido newtoniano, poichè la lava alla temperatura di liquidus ha un comportamento newtoniano, sia per un fluido Bingham. Parlerò del fronte della colata, quindi dello spessore e della forma che la lava assume nei tratti finali della sua discesa, ed anche dei tubi di lava, cioè dei flussi canalizzati di lava sulla cui superficie è presente una crosta formatasi per raffreddamento, che isola termicamente

il flusso sottostante facilitandone la propagazione.

Infine, nel quarto ed ultimo capitolo, prenderò in considerazione il fenomeno di irraggiamento del calore della lava verso l'atmosfera, principale causa di raffreddamento del flusso. Illustrerò dunque, tramite la legge di Stefan, l'andamento di tale raffreddamento e come questo abbia effetti sulla cristallizzazione e dunque sulla reologia della lava, modificandone viscosità e sforzo di snervamento, oltre a provocare la formazione della crosta sullo strato superficiale.

# Capitolo 1

## Le eruzioni effusive

### 1.1 Attività effusiva dei vulcani

Con il termine di vulcanismo effusivo ci si riferisce alle eruzioni vulcaniche di tipo non esplosivo, le quali producono lave abbastanza fluide da formare delle colate (*lava flows*) che scorrono per effetto della gravità.

I *vulcani basaltici*, ossia vulcani formati interamente o in larga parte da roccia basaltica, costituiscono più della metà dei vulcani totali, e si dividono in due tipologie: *vulcani poligenici* e *vulcani monogenici* (Walker, 1999). I primi eruttano ripetutamente, poiché il loro tasso di alimentazione di magma è abbastanza grande e persistente da non permettere alle porzioni ascendenti di magma di raffreddarsi nel condotto, consentendo così il passaggio nello stesso alle porzioni successive. I secondi, al contrario, eruttano una sola volta: lo scarso tasso di alimentazione di magma lascia raffreddare i condotti, impedendone il riutilizzo.

Ogni vulcano appartiene ad una grande struttura, chiamata *sistema vulcanico*, che racchiude anche altri elementi quali: la regione sorgente del magma, vari tipi di condotti in cui il magma ascende alla superficie terrestre, camere magmatiche, intrusioni e zone geotermali.

Vi sono cinque gruppi di sistemi vulcanici di tipo basaltico:

- vulcani a scudo
- stratovulcani

- campi di vulcani monogenici
- plateau basaltici
- vulcani centrali

**Vulcani a scudo** Sono caratterizzati da: eruzioni che producono in gran parte sottili flussi di lava, con piccoli strati piroclastici; inclinazione del suolo che varia dai 4 agli 8 gradi; ripide pareti alla vetta delle caldere (ampie conche formatesi dopo il collasso della camera magmatica); e altri piccoli crateri simili a caldere ma più piccoli. Esempi di questo tipo di vulcani sono il Mauna Loa ed il Kilauea nelle Hawaii. Il Mauna Loa, inoltre, è il più grande vulcano sulla Terra, con i suoi 40000 km<sup>3</sup> di volume e 4169 m s.l.m. di altezza.

La piccola inclinazione della struttura deriva dalla bassa viscosità della lava, dai grandi tassi di effusione che portano la lava a grandi distanze in poco tempo, da grandi quantità di lava che fuoriescono dalle fratture dei fianchi, dall'allargamento e subsidenza del vulcano. Quest'ultima si verifica nelle zone della sommità e nei rift (regioni in cui la crosta e la litosfera si trovano in condizioni tettoniche distensive). Alcuni vulcani a scudo presentano dei laghi di lava nelle caldere.

**Stratovulcani** Sono costituiti da vari strati di cenere e lapilli eruttati in modo esplosivo, intercalati da strati di lava solidificata. Tendono ad assumere una forma a cono molto ripido, con un'inclinazione nella parte superiore di circa 35 gradi rispetto all'orizzontale. In Italia vulcani di questo tipo sono l'Etna e lo Stromboli, mentre i più grandi sono il vulcano Huzi in Giappone e il Klyuchevskoy nel Kamchatka. Rispetto a quella dei vulcani a scudo, la lava tende ad avere una viscosità più elevata ed a percorrere brevi distanze prima del definitivo raffreddamento. Alcuni stratovulcani possono presentare coni di cenere e bocche eruttive sui fianchi, come l'Etna, oppure la caldera collassata.

**Campi di vulcani monogenici** Sono agglomerati di centinaia di vulcani monogenici, alcuni dei quali possono essere coni di cenere, piccoli scudi di lava solidificata, oppure anelli di tufo o maar (strutture generalmente di forma circolare, il cui fondo è



depresso rispetto al piano di campagna ed occupato da un lago) creati da esplosioni freatomagmatiche.

Il volume tipico di questo tipo di campi vulcanici è di circa  $10 \text{ km}^3$ , e possono generarsi in un tempo che varia dai 50000 ai 5 Ma di anni. Il più esteso è il campo di Michocacan-Guanajuato in Messico, con oltre 1000 vulcani.

**Plateau basaltici** Consistono in grandi porzioni della crosta terrestre ricoperte da ampie colate di lava eruttate da fessure vulcaniche monogeniche, che tendono ad inondare il paesaggio circostante per generarne uno nuovo di tipo basaltico. La formazione di tali plateau si verifica in corrispondenza di hot spot dove ha avuto luogo un significativo movimento della crosta, come ad esempio in Islanda.

La nascita di alcuni grandi plateau basaltici, come quello di Deccan in India, ha un ruolo importante nella storia della Terra, poiché le date in cui hanno avuto origine sono approssimativamente coincidenti con alcune delle grandi bioestinzioni di massa.

**Vulcani centrali** Sono quei vulcani che eruttano magmi sia acidi che basici, cioè, rispettivamente, ad alto o basso contenuto di silice ( $\text{SiO}_2$ ). Comunemente, la composizione è bimodale, e i magmi acidi e basici possono essere ciascuno più voluminosi dei magmi intermedi.

I confini di queste strutture sono grossolanamente circolari e tipicamente di circa 10 km di diametro, valore che riflette la larghezza della sottostante camera magmatica. Peculiarità di tali camere magmatiche è l'assenza di magma basaltico, che non riesce a passare attraverso la camera parzialmente fusa di densità minore. Si pensa che il magma basaltico ascendente, essendo più denso del magma silicico, sia intrappolato alla base della camera silicica e, essendo più caldo, riscaldi il magma silicico riducendone la viscosità e promuovendone l'uscita di gas, così da mobilitare il magma silicico ed innescare l'attività eruttiva.

## 1.2 Tipi di lava

La lava (parola derivante probabilmente dal latino *labi*, ossia scivolare (vocabolario Treccani)) è un sistema multifase eterogeneo formato da roccia fusa contenente cristalli e bolle

di gas in sospensione, che si origina dal degassamento del magma durante la sua ascesa in superficie (Dragoni et al., 1994). Le colate di lava sono la manifestazione vulcanica più diffusa sulla Terra, in quanto ne coprono circa il 70% della superficie (Kilburn, 2000). Dello studio del suo comportamento dinamico se ne occupa la *reologia*.

Al momento della sua fuoriuscita in superficie, la lava ha una temperatura compresa tra gli 800-1200°C, range della temperatura media di fusione delle rocce. A causa della temperatura elevata, è difficile uno studio diretto delle proprietà laviche, e ciò rende necessario l'analisi tramite modelli teorici o evidenze indirette (i. e. studio delle lave solidificate), la cui validità, per gli stessi problemi che impediscono uno studio diretto, è spesso difficile da verificare. Anche lo studio delle lave solidificate presenta i suoi limiti, in quanto non ha la certezza che le proprietà di tali corpi riflettano quelle della lava ancora calda a causa delle probabili modifiche delle caratteristiche subite durante il raffreddamento. Comunque, fino a quando non si avranno dati migliori a nostra disposizione, il miglior modo di quantificare il comportamento di una colata è quello di continuare a creare modelli fluidodinamici ed a confrontarli con le osservazioni disponibili. Tra queste, è importante la morfologia della crosta.

L'aspetto della crosta ci dà le basi per classificare le colate di lava in tre grandi categorie (Kilburn, 2000):

- lave *aa*
- *blocky flows*
- lave a corda, o *pahoehoe*

**Aa** Le lave di tipo aa (da Aā che in hawaiano significa "pietre su cui non si può camminare") presentano una superficie estremamente irregolare, di solito coperta da frammenti di crosta con spessore dell'ordine di decimetri. Il fronte delle colate di questo tipo di lava tende ad avanzare come una singola unità, ed è raro che una parte si muova più velocemente di una sua sezione adiacente. Durante il suo moto mostra una vasta gamma di comportamenti: spesso parte come un fluido laminare, attraversa varie fasi di frattura e di flusso e finisce come una massa quasi solida che si frammenta per consentire l'avanzamento della colata. Il fronte si ingrossa durante l'avanzamento, spesso di circa

dieci volte lo spessore iniziale: dimensioni medie dello spessore sono circa sui 20 m, con una lunghezza totale della colata che può raggiungere le decine di chilometri.

Il flusso sviluppa inizialmente dei canali: questi si formano quando un flusso smette di allargarsi, concentrando il movimento in discesa. Lo spessore dei fronti cresce mentre la colata avanza, poiché decelera a causa della solidificazione, permettendo alla lava più veloce di accumularsi: si può osservare, ad esempio, alcuni fronti di aa avanzare di 10-30 km nelle prime 24 h dall'eruzione, mentre la velocità nei pressi della bocca è anche 10 volte maggiore. È comune per questo tipo di lava che il fronte, una volta arrestato il suo cammino, continui ad essere accresciuto da nuova lava proveniente dalla bocca. Se la pressione della lava è abbastanza forte, questa può aprire una breccia per continuare a fluire e, se la breccia è abbastanza grande, creare un nuovo flusso. Questo può di nuovo arrestarsi e aumentare il suo spessore, fino a ripetere il ciclo: si viene così a creare un campo di lava, prodotto da una singola eruzione effusiva. Se invece la breccia è troppo piccola, questa può chiudersi per raffreddamento o venire tappata da detriti di crosta.

Anche se una breccia può avvenire in qualsiasi punto della colata, è più comune osservarla verso la metà della lunghezza del flusso, e raramente va ad aumentare la lunghezza totale della colata di più della metà della lunghezza iniziale, tendendo invece ad aumentarne la larghezza. Le condizioni per produrre il tipo di superficie specifico per le aa possono anche fornire dei limiti sulla probabile distanza percorsa e la velocità a cui il flusso può viaggiare, necessaria per mantenere la rottura della crosta lavica. Il tempo per cui un flusso di lava può continuare ad avanzare è controllato dalla durata (breve per le aa) dell'eruzione o, durante le lunghe eruzioni, dal tempo necessario affinché il flusso acquisisca un fronte solido.

**Blocky flows** Tali lave, al momento della solidificazione sono caratterizzate da fratture superficiali, coperte per alcuni metri da detriti con superfici lisce, planari ed angolari. Il comportamento delle lave di questo tipo è molto simile a quelle di tipo aa ma, a differenza di queste, sono caratterizzate da una minore viscosità, che le porta ad avere spessori finali della colata di varie decine di metri, ed a formare meno frequentemente delle colate secondarie. Comportamento caratteristico è quello di sgretolarsi sin dall'inizio della fuoriuscita della bocca effusiva formando così un fronte di detriti.

La morfologia delle colate di lava è dunque correlata alla composizione ed al compor-

tamento reologico delle lave, che determinano la velocità delle colate. Vi è dunque una relazione, anche se indiretta, tra le modalità di effusione e la morfologia.

**Pahoehoe** È un tipo di lava caratterizzato da una superficie liscia e continua (in hawaiano "pietre su cui si può camminare"), derivante da magmi basici molto fluidi. Le colate di questo tipo hanno le dimensioni simili a quelle del tipo aa, ma normalmente avanzano circa 10 volte più lentamente.

La crosta rimane continua attorno ai margini e sui fronti, con spessori iniziali di pochi decimetri. Il fronte viaggia più lentamente del resto della colata, poichè rallentato dalla presenza della crosta: a causa di ciò, la diffusione della lava avviene sottoforma di piccole lingue che fuoriescono dalle brecce createsi nella lava solidificata. Nella sua discesa a valle, la nuova lava proveniente dalla bocca eruttiva, passa al di sotto di queste lingue, di fatto aumentando lo spessore del fronte. Quest'ultimo appare così come una raccolta di "lingue" che si mescolano tra di loro, con spessori molto sottili rispetto alla larghezza dell'intera colata. La lava proveniente dalla bocca eruttiva continua a rialzare la superficie e, in qualche settimana, una distesa di lava può raggiungere lo spessore di diversi metri, mentre si continuano a formare altre piccole lingue ai margini della colata e, occasionalmente, in superficie. Scorrendo quindi sotto la crosta, la lava viene isolata termicamente e riesce a rimanere fluida per periodi molto lunghi. Dunque, anche se avanza molto lentamente, a parità di volume copre distanze molto maggiori rispetto alle lave del tipo aa.

A causa del suo movimento sub-crostale, per questo tipo di lava non è possibile stabilire un rapporto tra morfologia della crosta e lunghezza massima raggiungibile dalla colata.

In ogni caso, questi tre tipi di lava non sono entità indipendenti, ma possono avvenire delle trasformazioni dal tipo aa al tipo blocky oppure dal tipo pahoehoe al tipo aa durante il moto di discesa. Queste trasformazioni sono unidirezionali, cioè non possono avvenire nel senso contrario (da aa a pahoehoe o da blocky ad aa).

Osservazioni recenti e testimonianze storiche suggeriscono che le colate di lava hanno le caratteristiche fisiche di un moto laminare, e per questo è stato assunto questo tipo di movimento nello sviluppo di modelli del comportamento lavico. Tuttavia, alcune antiche lave sulla Terra, eruttate circa 2500 milioni di anni fa, potrebbero essere state

sufficientemente fluide da essere oggetto di moti turbolenti. Purtroppo non è possibile affrontare uno studio diretto di lave così antiche, poiché coperte da nuovi strati di materia e deformate dai grandi cambiamenti che ha subito la superficie terrestre.

### 1.3 La reologia

La reologia è lo studio generale delle deformazioni e dello scorrimento dei materiali sotto una forza applicata, e comprende tutti i comportamenti meccanici che appaiono intermedi tra lo stato solido e lo stato liquido, considerati casi limite (Dragoni, 1993). Uno stesso materiale può avere molti tipi di comportamento reologico, in funzione delle condizioni termodinamiche e della scala temporale delle sollecitazioni a cui è sottoposto. Le proprietà reologiche della lava sono di grande importanza nella determinazione della dinamica delle colate, poiché riflettono sia la natura multifase della lava sia la sua struttura interna costituita da silicati fusi.

Dalle osservazioni si vede che una colata di lava costruisce da sola i propri argini, e tende ad arrestarsi su un pendio quando si ferma l'affluire di nuova lava. Inoltre, anche se l'aspetto è simile a quello di un fluido, gli oggetti che vengono lanciati sulla superficie non sempre affondano o galleggiano, nonostante la loro densità possa essere maggiore di quella della lava, ma si comportano come se fossero su una superficie solida.

Il comportamento reologico di un fluido viscoso è generalmente espresso da un'equazione, detta equazione costitutiva, che collega lo sforzo e la deformazione. I fattori che controllano la reologia delle lave sono molteplici.

Innanzitutto, la concentrazione di silicati. Ad una data temperatura e fissato il tensore di sforzo, le lave acide hanno una maggiore viscosità rispetto quelle basiche e tale differenza può essere anche di vari ordini di grandezza. Per esempio, ad una temperatura  $T = 1200^\circ \text{C}$ , il basalto tholeiitico ha una viscosità di  $10^2 \text{ Pa s}$ , mentre la riolite ha  $10^6 \text{ Pa s}$ .

La presenza di acqua disciolta è un altro fattore che riduce significativamente la viscosità della lava. L'effetto è forte nelle lave con alto contenuto di silice dove, ad una temperatura costante, 1wt% di  $H_2O$  abbassa di un ordine di grandezza la viscosità, mentre per le lave basiche l'effetto è meno pronunciato. Ciò è probabilmente dovuto

al fatto che l'acqua abbassa la polimerizzazione dei legami Si-O (McBirney e Murase, 1984). Inoltre, l'abbassamento della viscosità a causa della presenza di acqua è maggiore alle basse temperature.

Grande importanza ricopre la temperatura, poiché da questa dipendono sia lo sforzo di snervamento che la viscosità (Johnson & Pollard, 1973; Pinkerton & Sparks, 1978). Nell'intervallo di temperature in cui la lava è liquida, la dipendenza della viscosità dalla temperatura è data dall'equazione di Arrhenius:

$$\eta(T) = Ae^{\frac{Q}{RT}} \quad (1.1)$$

dove  $A$  è una costante,  $Q$  è l'energia di attivazione per avere un flusso viscoso ed  $R$  è la costante dei gas, con  $A$  e  $Q$  che dipendono dalla composizione del fluido. Per lo sforzo di snervamento si hanno pochi dati sperimentali a cui fare riferimento, quindi le misure disponibili suggeriscono solamente un andamento esponenziale decrescente che può essere espresso come (Chester et al., 1985; Dragoni, 1989)

$$\tau'(T) = \tau'' e^{b(T_1 - T)} \quad T < T_1 \quad (1.2)$$

dove  $\tau'$  è lo sforzo di snervamento,  $\tau''$  lo sforzo di snervamento alla temperatura di *liquidus*  $T_1$  e  $b$  un parametro indice della sensibilità di  $\tau'$  rispetto alla temperatura.

Molte lave hanno una temperatura al di sotto del liquidus, e presentano diverse concentrazioni di cristalli in sospensione. La cristallizzazione di un corpo magmatico è anch'esso un fattore che influenza la reologia. La viscosità di una sospensione aumenta all'aumentare della concentrazione di cristalli, come anche lo sforzo di snervamento (McBirney & Murase, 1984). Secondo i modelli disponibili, ci si aspetta che le proprietà reologiche non vengano disturbate dalla presenza di cristalli se questi non superano il 25% del volume totale, limite oltre il quale danno un contributo importante e modificano anche la morfologia della superficie delle colate (Johnson & Pollard, 1973).

Ultimi rilevanti fattori che influenzano la reologia delle lave sono il degassamento e la vescicolazione, che hanno importanti effetti nei primi momenti di vita delle colate, quando il magma comincia ad uscire in superficie (Sparks, 1977; Sparks & Pinkerton, 1978; Lipman et al., 1985). Infatti, prima dell'eruzione, il magma perde materiali volatili come acqua, diossido di carbonio, cloro e zolfo: tale perdita aumenta la viscosità dei

silicati fusi (Shaw, 1963). Vi sono due diversi processi in cui il magma può perdere i composti volatili (Westrich et al., 1988): la decompressione isoterma, dove il degassamento avviene perché la solubilità dei composti volatili diminuisce con la pressione, e la cristallizzazione isobara, dove i composti volatili sono spinti fuori dal magma in seguito appunto alla cristallizzazione. Conseguenza del degassamento è un veloce raffreddamento, che aumenta il tasso di cristallizzazione (Sparks & Pinkerton, 1978), portando ad un aumento della viscosità ed allo sviluppo di un alto sforzo di snervamento.

Altri fattori che influenzano la reologia, seppur in maniera minore, sono la polimerizzazione, gli effetti di superficie, la tensione superficiale, lo sforzo di rottura della crosta e l'erosione per fusione del terreno su cui si muove la colata (Dragoni, 1993).

Le colate di lava costituiscono un interessante problema fisico, perché sono sistemi la cui dinamica è strettamente accoppiata con i processi termici e le proprietà reologiche.

# Capitolo 2

## Richiami di fluidodinamica

Una sostanza è genericamente definita fluida se non è dotata di forma propria, ma assume la forma del contenitore che lo racchiude, facendo distinzione fra liquido e gas a seconda che la sostanza abbia un volume proprio ben definito oppure occupi tutto il volume del contenitore.

La fluidodinamica si interessa dello studio del moto dei fluidi e, essendo tali fenomeni macroscopici, i fluidi sono trattati come mezzi continui (Landau & Lifshitz, 1987; Kundu, 1990; Batchelor, 1990).

Si farà ricorso dunque al tensore infinitesimo di deformazione

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

simmetrico, che rappresenta le variazioni relative di lunghezza nelle direzioni  $ij$  e la cui traccia  $\epsilon_{kk}$  rappresenta la variazione relativa di volume; ed al tensore degli sforzi  $\tau_{ij}$ , in cui il primo indice denota la direzione normale alla coordinata su cui agisce la trazione ed il secondo indice denota la componente dello sforzo.

Lo scopo principale è cercare le *relazioni costitutive* che esprimono gli sforzi in funzione della deformazione e delle sue derivate rispetto al tempo.

### 2.1 Relazioni costitutive

Un fluido reale oppone una resistenza alle deformazioni di taglio, resistenza che è funzione della velocità di deformazione. Si può definire un fluido come una sostanza suscettibile di deformazione isotropa limitata per effetto di sforzi isotropi limitati e deformazione



deviatorica illimitata sotto l'effetto di sforzi deviatorici finiti (Kundu, 1990). In un fluido all'equilibrio, dunque, le forze di superficie devono essere normali alla superficie stessa:

$$T_i(\hat{\mathbf{n}}) = n_j \tau_{ji} = -p n_i \quad (2.2)$$

dove  $T_i$  è la trazione,  $\hat{\mathbf{n}}$  l'orientazione della superficie su cui è applicata la trazione e  $p$  una quantità scalare. Tale relazione deve valere per un qualunque orientamento della superficie, quindi

$$(\tau_{ij} + p\delta_{ij})n_j = 0 \quad \forall n_i \Rightarrow \tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2.3)$$

con  $\delta_{ij}$  delta di Kronecker. Si nota quindi che la  $p$  rappresenta la pressione.

Se il fluido è in movimento, alla pressione andrà aggiunto un termine  $\sigma$  che rappresenta gli sforzi originati dal moto stesso del fluido

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (2.4)$$

La componente  $\sigma_{ij}$  dipenderà dalla parte simmetrica del gradiente di velocità (poiché la parte antisimmetrica rappresenta una rotazione senza deformazione), detto tasso di deformazione (*strain rate*):

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

Se assumiamo una dipendenza lineare fra le componenti dello sforzo e il tasso di deformazione, possiamo scrivere

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.6)$$

dove  $A_{ijkl}$  è un tensore di rango 4, con 81 componenti. Tale tensore deve essere simmetrico rispetto allo scambio degli indici  $i$  e  $j$  per la simmetria di  $\sigma_{ij}$  e rispetto allo scambio di  $k$  e  $l$  per la simmetria di  $\epsilon_{kl}$ . Inoltre, se il fluido è isotropo, ricorrendo ad un teorema di algebra tensoriale (Aris, 1962), tale tensore è esprimibile come:

$$A_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \eta \delta_{il} \delta_{jk} \quad (2.7)$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\eta$  sono scalari che dipendono dallo stato termodinamico del fluido.

Tenendo conto della simmetria nello scambio degli indici, si ricava che  $\beta = \eta$ , e, sostituendo nell'equazione dello sforzo, otteniamo:

$$\tau_{ij} = (-p + \alpha \dot{\epsilon}_{kk}) \delta_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.8)$$

Se poniamo  $i = j$ , sommando sugli indici ripetuti, otteniamo

$$\tau_{ii} = -3p + (2\eta + 3\alpha)\dot{\epsilon}_{kk} \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{3}\tau_{ii} + \left(\frac{2}{3}\eta + \alpha\right)\dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.10)$$

Si definisce *pressione media*  $\bar{p}$  la componente isotropa del tensore di sforzo, cambiata di segno

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}\tau_{ii} \quad (2.11)$$

La pressione media e la pressione termodinamica coincidono se  $\alpha + \frac{2}{3}\eta = 0$  (assunzione di Stokes) e, sotto tali condizioni, la relazione costitutiva assume la forma

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}\right) \quad (2.12)$$

Questa relazione lineare tra  $\tau$  e  $\dot{\epsilon}$  è consistente con la definizione di Newton della viscosità, perciò i fluidi che seguono questa relazione sono chiamati fluidi viscosi *newtoniani*. Il coefficiente  $\eta$  prende il nome di *viscosità dinamica*. Notiamo dunque che in un fluido newtoniano la traccia del tensore di sforzo è uguale a

$$\tau_{kk} = -3p \quad (2.13)$$

cioè indipendente dal gradiente di velocità, e le componenti deviatoriche sono uguali a

$$\Gamma_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = 2\eta\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}\right) = 2\eta\dot{\epsilon}'_{ij} \quad (2.14)$$

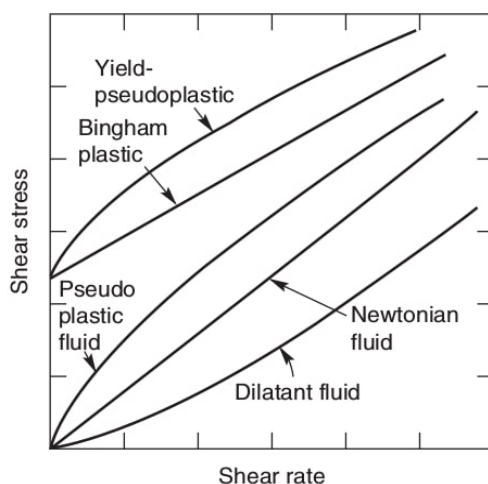
Per i fluidi comuni, come aria e acqua, la relazione lineare è molto accurata per la descrizione della loro dinamica. Altri, però, non seguono il comportamento newtoniano, come le emulsioni o le sospensioni, e sono chiamati appunto fluidi *non newtoniani*. Per tali fluidi la viscosità è chiamata *viscosità apparente*, perché non è costante ad una data temperatura ed ad una data pressione ma dipende dalle caratteristiche del fluido come: la geometria, il tasso di deformazione, a volte persino la storia cinematica del fluido stesso (materiali *viscoelastici*).

Per i fluidi indipendenti dal tempo (categoria di fluidi per cui il tasso di deformazione è determinato unicamente dal valore del tensore di deformazione in quel punto e in

quell'istante, come le lave (Chhabra, Richardson, 2008)) la relazione costitutiva può essere scritta come

$$\tau = \tau' + \eta_p \dot{\epsilon}^n \quad (2.15)$$

dove  $\tau$  rappresenta lo sforzo,  $\tau'$  lo sforzo di snervamento ed  $\eta_p$  la viscosità. Se  $\tau' = 0$  e  $n < 1$ , il fluido è detto pseudoplastico. In un fluido *pseudoplastico*, la viscosità apparente decresce all'aumentare del tasso di deformazione. Un comportamento opposto invece si trova nei fluidi *dilatanti* ( $\tau' = 0$ ,  $n > 1$ ), dove la viscosità apparente aumenta all'aumentare del tasso di deformazione. Alcune curve delle relazioni caratteristiche sono mostrate in figura 2.1.



**Figura 2.1:** Comportamento di vari tipi di fluidi indipendenti dal tempo (Chhabra e Richardson, 2008).

## 2.2 Equazione di Navier-Stokes

Consideriamo un volume  $V_0$  contenente un fluido, la cui massa è  $\int \rho dV$ , dove  $\rho$  è la densità e l'integrale è esteso su tutto il volume  $V_0$ . La massa del fluido che fluisce con velocità  $\vec{v}$  nell'unità di tempo per l'elemento di superficie  $dS_i$  è  $\rho v_i \cdot dS_i$ : se tale quantità è positiva, il fluido scorre verso l'esterno del volume; al contrario sarà negativa quando scorre verso l'interno del volume. La massa totale di fluido che fluisce fuori dal volume

$V_0$  nell'unità di tempo sarà

$$\oint \rho v_i \cdot dS_i \quad (2.16)$$

dove l'integrale è esteso su tutta la superficie che racchiude il volume. Di conseguenza, la diminuzione nell'unità di tempo della massa del fluido all'interno del volume sarà

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \quad (2.17)$$

Le due espressioni devono avere uguale valore quindi, eguagliandole ed applicando la formula di Green per trasformare l'integrale di superficie in integrale di volume, abbiamo

$$\oint \rho v_i \cdot dS_i = \int \nabla \cdot (\rho v_i) dV \quad (2.18)$$

da cui

$$\int \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i) \right) dV = 0 \quad (2.19)$$

Per l'arbitrarietà del volume su cui stiamo integrando, l'integrale può essere rimosso, ottenendo così l'*equazione di continuità*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i) = 0 \quad (2.20)$$

Per il secondo principio della dinamica, la risultante delle forze che agiscono su un mezzo continuo deve eguagliare la derivata rispetto al tempo della quantità di moto

$$\int_{B(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_{B(t)} f_i dV + \oint_{\partial B(t)} \tau_{ki} n_k dS \quad (2.21)$$

con  $B(t)$  l'elemento di volume  $B$  al tempo  $t$ ,  $\partial B(t)$  l'elemento di superficie. Utilizzando il teorema di Gauss della divergenza per trasformare l'integrale di superficie e, raccogliendo tutti i termini sotto lo stesso segno di integrale, si ha

$$\int_{B(t)} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - f_i - \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} \right) dV = 0 \quad (2.22)$$

in cui, per l'arbitrarietà del volume, possiamo rimuovere l'integrale ottenendo così l'*equazione del moto* in forma differenziale per un mezzo continuo

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} \quad (2.23)$$

dove la derivata della velocità è la derivata totale.

Consideriamo dunque la gravità come forza di volume, e la 2.12 per un fluido newtoniano come relazione costitutiva per gli sforzi. Si ottiene

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] \quad (2.24)$$

dove  $g_i$  è l'accelerazione di gravità. Assumendo la viscosità uniforme e raggruppando i termini, si ha così

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left[ \nabla^2 v_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right] \quad (2.25)$$

e se si assume il fluido come incomprimibile si ottiene finalmente

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \nabla^2 v_i \quad (2.26)$$

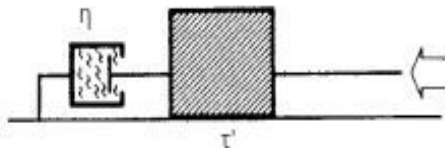
che è l'equazione di *Navier-Stokes* per un fluido omogeneo, isotropo ed incomprimibile.

## 2.3 Reologia di Bingham

Lo studio del comportamento di un fluido di Bingham è molto importante per comprendere la dinamica delle colate di lava. Approssimativamente può essere considerato un fluido pseudoplastico caratterizzato da un'alta viscosità quando è sottoposto ad un piccolo tasso di deformazione. La sua relazione costitutiva è data dalla 2.15 con  $n = 1$  (Dragoni, 1993).

Esperimenti di laboratorio hanno mostrato che le rocce ignee si comportano come un fluido newtoniano se si trovano nel range di temperature di fusione; al contrario, sotto la temperatura di liquidus, hanno un comportamento non newtoniano (Shaw et al., 1968). Il primo a proporre che la lava abbia, approssimativamente, il comportamento reologico di un fluido di Bingham fu Robson (1967), per spiegare la relazione tra lo spessore del flusso e l'inclinazione del suolo su cui fluivano le lave del monte Etna. Nonostante, al contrario della lava, tale fluido sia insipiente dal tempo e dal tasso di deformazione, si è dimostrato comunque molto utile nell'interpretazione e nella modellizzazione delle colate laviche.

Il fluido di Bingham può essere rappresentato da un modello meccanico nel seguente modo (figura 2.2): ad un ammortizzatore, che rappresenta il comportamento viscoso,



**Figura 2.2:** Modello meccanico del fluido Bingham.

è collegato un blocco pesante (elemento di Saint-Venant) che poggia su una superficie ruvida e che si muove solamente quando la forza applicata su di esso supera una certa soglia. Una versione più elaborata della rappresentazione del fluido di Bingham presenta una molla attaccata al blocco, in modo tale da prendere così in considerazione anche l'iniziale risposta elastica del corpo alle sollecitazioni.

L'equazione costitutiva di un fluido Bingham è

$$\dot{\epsilon} = \begin{cases} 0 & \tau < \tau' \\ \frac{\tau - \tau'}{\eta} & \tau > \tau' \end{cases} \quad (2.27)$$

È utile introdurre due numeri adimensionali: il numero di Reynolds  $Re$

$$Re = \frac{\rho \bar{v} H}{\eta} \quad (2.28)$$

ed il numero di Hedstrom  $He$

$$He = \frac{\rho \tau' H^2}{\eta^2} \quad (2.29)$$

dove  $\bar{v}$  è la velocità media ed  $H$  l'altezza del flusso. La loro combinazione determina se il flusso è di tipo laminare o turbolento. Nella grande maggioranza dei recenti flussi di lava osservati sulla Terra, non sono stati trovati moti turbolenti. Il numero di Reynolds solitamente è relativamente piccolo, circa  $Re \approx 10^3$  per un flusso spesso 10m che si muove ad una velocità di pochi metri al secondo con una viscosità di 100 Pa. Sono anche possibili valori più grandi del numero di Reynolds senza avere comunque un flusso turbolento. Più grande è il valore del numero di Hedstrom, più grande deve essere  $Re$  per avere turbolenza. Il valore critico del numero di Reynolds  $Re_c$  per avere turbolenza è legato al numero di Hedstrom dalla seguente relazione (Poloski et al. 2009):

$$Re_c = 1050 \left( 1 + \sqrt[2]{1 + \frac{He}{4500}} \right) \quad (2.30)$$

# Capitolo 3

## Le colate di lava

Si è visto come la lava presenti comportamenti diversi dal momento in cui viene effusa dalla bocca vulcanica fino al suo raffreddamento. È utile dunque modellizzare in maniera diversa i vari momenti della “vita” di una colata di lava, per ottenere un quadro generale delle sue proprietà.

Appena fuoriuscita da una bocca effusiva la temperatura della lava è generalmente prossima a quella del liquidus, dunque è ragionevole utilizzare modelli di flusso newtoniani. Come visto prima, un fluido newtoniano, omogeneo, isotropo ed incompressibile è descritto dalle seguenti equazioni, in forma tensoriale indiciale:

$$\rho (\dot{v}_i + v_j v_{i,j}) = -p_{,i} + \eta v_{i,jj} + \rho g_i \quad (3.1)$$

$$v_{i,i} = 0 \quad (3.2)$$

$$\rho c_p \left( \dot{T} + v_i T_{,i} \right) = \kappa T_{,ii} + \frac{1}{2} \eta (v_{i,j} + v_{j,i})^2 + H \quad (3.3)$$

La 3.1 e la 3.2 rappresentano rispettivamente le equazioni di Navier-Stokes e di continuità, mentre la 3.3 rappresenta l'equazione del calore (Landau e Lifshitz, 1987), dove  $T$  indica la temperatura,  $c_p$  il calore specifico,  $\kappa$  la conducibilità termica ed  $H$  l'insieme delle eventuali sorgenti di calore.

Si tratta dunque di un sistema di 5 equazioni scalari a 5 incognite: le tre componenti della velocità, la temperatura e la pressione, mentre sono considerate note  $\rho, \eta, g$  ed  $H$ . L'assunzione di omogeneità implica:

- 1)  $\eta, \rho, \kappa$  ed  $H$  non dipendono dalle coordinate spaziali;

2) le equazioni di Navier-Stokes e del calore non sono accoppiate, i.e. la temperatura  $T(\vec{x}, t)$  è determinata dalla velocità  $v(\vec{x}, t)$  ma non viceversa.

Allora il problema può essere risolto nei seguenti passi: si risolve l'equazione del moto per velocità, la si inserisce nell'equazione del calore, la quale viene infine risolta per la temperatura.

È importante sottolineare che questo procedimento è possibile se il fluido è isoterma, oppure se viene trascurata la dipendenza della viscosità del fluido dalla temperatura. Se tale dipendenza venisse presa in considerazione:

1) cadrebbe l'assunzione di omogeneità e l'equazione del moto non sarebbe più quella di Navier-Stokes, ma la 2.24 che contiene il gradiente di  $\eta$ ;

2) l'equazione del moto dipenderebbe dalla temperatura e sarebbe perciò accoppiata all'equazione del calore; ciò implica che le due equazioni debbano essere risolte simultaneamente.

Una quantità utile per modellizzare e distinguere vari tipi di flussi di lava è il rapporto tra lo spessore e la larghezza del flusso, che indichiamo con  $A$ . È stato osservato che tale rapporto è molto minore di 1 dove viene prodotta lava con bassi valori di sforzo di snervamento ( $\tau'$ ), tipicamente lave basaltiche, mentre lave con più alta presenza di silicati producono flussi con valori di  $A \simeq 1$  (Walker, 1973).

### 3.1 Modello di flusso newtoniano

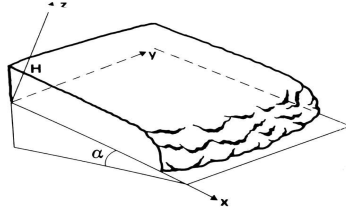
Consideriamo un fluido omogeneo, ed assumiamo che la velocità del flusso abbia una direzione costante e che dipenda solamente dalla coordinata perpendicolare al suolo. Prendiamo, ad esempio, come unica direzione del flusso l'asse  $x$  (Figura 3.1) e la velocità dipendente solo dalla coordinata  $z$

$$v_i = (v_x, 0, 0); \quad v_x = v_x(z). \quad (3.4)$$

Otteniamo che:

- il termine non lineare  $v_j v_{x,j}$  dell'equazione di Navier-Stokes si annulla;
- l'equazione di continuità si riduce a  $v_{x,x} = 0$  e ci dice dunque che la velocità è costante lungo la colata a  $z$  fissato;





**Figura 3.1:** Flusso con larghezza illimitata.

- lo spessore  $h$  della colata è uniforme;
- la pressione non dipende né da  $x$ , né da  $y$ , quindi  $p_{,x} = p_{,y} = 0$  da cui  $p = p(z)$ ;
- il flusso è stazionario, cioè  $v_x$  non dipende dal tempo.

Dunque il modello prende in esame un fluido di spessore fissato con larghezza illimitata che scorre su un piano inclinato, e le equazioni di Navier-Stokes si riducono a:

$$a) \quad \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \rho g \sin \alpha = 0; \quad b) \quad \frac{dp}{dz} + \rho g \cos \alpha = 0 \quad (3.5)$$

Imponiamo le opportune condizioni al contorno per risolvere tali equazioni.

Alla base della colata ( $z = 0$ ) la velocità  $v_x$  della lava deve annullarsi a causa delle forze molecolari tra fluido viscoso e superficie solida (Landau e Lifshitz, 1987), mentre alla sommità della colata ( $z = h$ ) devono annullarsi le componenti di taglio della trazione e la componente normale deve essere uguale alla pressione atmosferica.

Quindi:

$$v_x(0) = 0; \quad (3.6)$$

$$\tau_{zx}(h) = 0; \quad \tau_{zy}(h) = 0; \quad \tau_{zz}(h) = -p_0 \quad (3.7)$$

Dalla 2.14 abbiamo

$$\tau_{zx} = \eta v_{x,z} \quad (3.8)$$

quindi la condizione al contorno su  $\tau_{zx}$  implica

$$v_{x,z}(h) = 0 \quad (3.9)$$

La soluzione che soddisfa queste condizioni è dunque

$$v_x(z) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z (2h - z) \quad (3.10)$$

da cui ricaviamo

$$\tau_{xz}(z) = \rho g \sin \alpha (h - z) \quad (3.11)$$

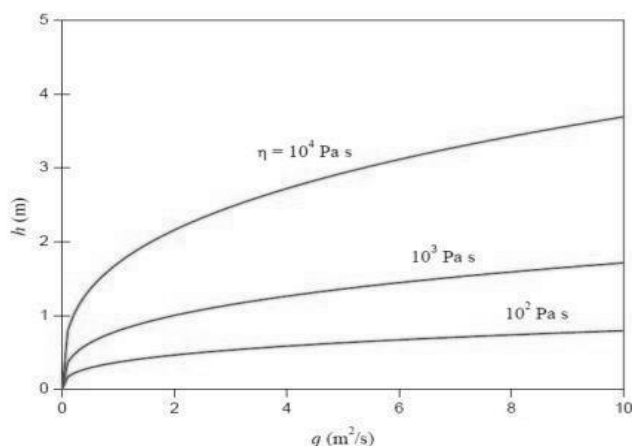
Notiamo quindi che la velocità è massima alla sommità della colata, dove vale

$$v_{max} = v_x(h) = \frac{\rho g h^2 \sin \alpha}{2\eta}. \quad (3.12)$$

È possibile ricavare la portata  $q$  per unità di larghezza della colata, coincidente con il tasso di effusione della lava alla bocca eruttiva, tramite

$$q = \int_0^h v_x(z) dz = \frac{\rho g h^3 \sin \alpha}{3\eta}. \quad (3.13)$$

Se tale tasso è costante, possiamo ricavare lo spessore  $h$  della colata.



**Figura 3.2:** Spessore della colata in funzione della portata per diversi valori della viscosità  $\eta$ . Sono stati utilizzati i valori  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$ ,  $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ .

Infine, studiando l'equazione del calore, possiamo ottenere il valore della dissipazione viscosa per unità di volume

$$w = \frac{1}{2} \eta (v_{i,j} + v_{j,i})^2 \quad (3.14)$$

da cui

$$w(z) = \frac{\rho^2 g^2 \sin^2 \alpha}{\eta} (h - z)^2 \quad (3.15)$$

Il valore medio della dissipazione è

$$\bar{w} = \frac{1}{h} \int_0^h w(z) dz = \frac{\rho^2 g^2 h^2 \sin^2 \alpha}{3\eta} \quad (3.16)$$

e se esprimiamo, tramite la 3.13, l'altezza in funzione della portata, abbiamo

$$\bar{w} = \left( \frac{\rho^4 g^4 q^2 \sin^4 \alpha}{3\eta} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.17)$$

Vediamo quindi che la dissipazione viscosa è inversamente proporzionale alla radice cubica della viscosità: ciò è dovuto al fatto che la velocità e i gradienti di velocità sono inversamente proporzionali ad  $\eta$ . In liquidi molto viscosi, come la lava, tale termine dissipativo è molto piccolo e nella maggior parte dei casi può essere trascurato.

## 3.2 Flusso di Bingham

Consideriamo il caso di lave basaltiche, e prendiamo in esame un fluido Bingham su un piano inclinato non limitato da bordi.

Si considera dunque un flusso infinitamente largo ( $A \ll 1$ ) che scorre su un piano inclinato, con il moto nel verso delle  $x$  e l'asse  $z$  perpendicolare al piano.

Il problema è essenzialmente uguale al caso unidimensionale di un fluido newtoniano, ma questa volta l'equazione costitutiva è la 2.27. Quindi, unendo la 2.27 con la 3.5a, otteniamo l'equazione per lo sforzo

$$\tau(z) = \begin{cases} \rho g \sin \alpha (h - z) - \tau' & , 0 < z < h - h_p \\ 0 & , (h - h_p) < z < h \end{cases} \quad (3.18)$$

dove  $h - h_p$  è una particolare altezza in cui  $\tau(h - h_p) = 0$ . Dalla relazione precedente otteniamo che l'altezza critica è

$$h_p = \frac{\tau'}{\rho g \sin \alpha} \quad (3.19)$$

Questo significa che non c'è sforzo di taglio all'altezza  $z > (h - h_p)$ :  $h_p$  è l'altezza della parte non deformata del flusso, ed è chiamato "plug" (Dragoni et al., 1986). Se il flusso si riduce ad un'altezza  $h_p$ , il flusso si ferma. La velocità del flusso è ottenuta integrando la 3.18

$$v_x(z) = \begin{cases} \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\rho g \sin \alpha}{2} z(2h - z) - \tau' z \right] & , 0 < z < (h - h_p) \\ \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (h - h_p)^2 & , h - h_p < z < h \end{cases} \quad (3.20)$$

La portata, per unità di larghezza della colata, è

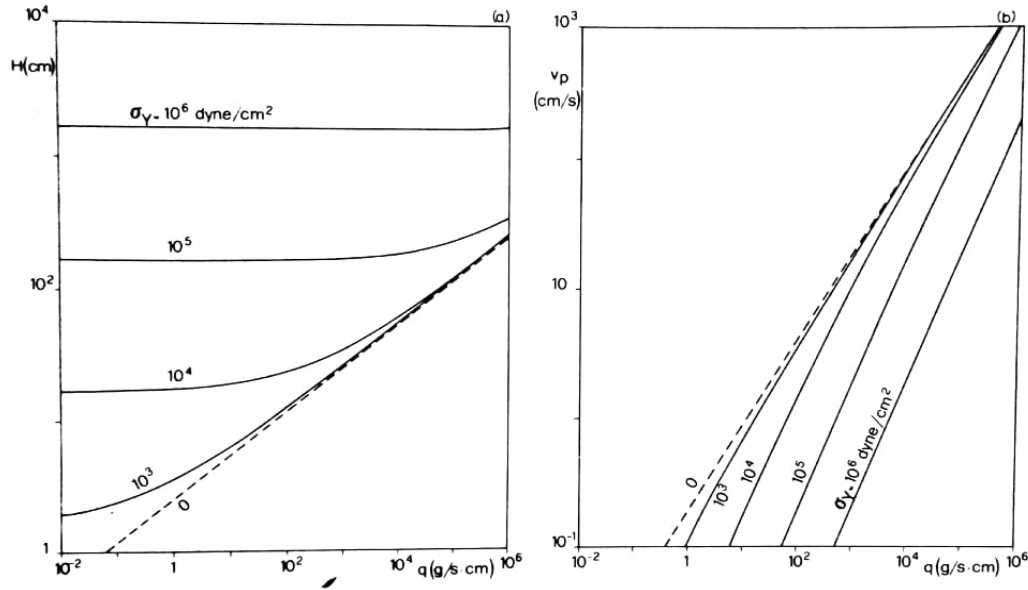
$$q = \int_0^h v_x(z) dz = \frac{\tau h_p^2}{3\eta} \left[ \left( \frac{h}{h_p} \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{h}{h_p} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (3.21)$$

e, per ricavarsi lo spessore della colata, è necessario risolvere un'equazione algebrica di terzo grado.

È interessante notare come, in specifici range di parametri, un fluido Bingham ha un comportamento molto simile ad un fluido newtoniano, almeno per quanto riguarda l'altezza e la velocità di un flusso. Per piccoli valori di  $\tau'$ , il flusso è essenzialmente nel regime newtoniano, all'aumentare di  $\tau'$  entra nel regime di un fluido Bingham. Graficando l'andamento dell'altezza in funzione dello sforzo di snervamento, si vede un asintoto per  $h = h_p$ , ciò significa che un fluido Bingham non può diventare più sottile di  $h_p$ . Dunque il regime Bingham è generalmente caratterizzato da spessori più grandi e velocità più piccole del regime newtoniano, a parità di effusione.

Aspetto molto interessante è il seguente: nel regime Bingham, l'altezza del flusso è praticamente indipendente dalla portata (figura 3.3): ciò implica che una variazione della portata si riflette unicamente nella velocità del flusso, che aumenta molto più rapidamente rispetto al caso newtoniano (Dragoni et al., 1986). Inoltre, il regime Bingham non dipende unicamente dal valore dello sforzo, ma anche dal valore della portata: per piccoli valori della portata, prevale il regime Bingham e l'altezza del flusso tende al valore critico  $h_p$ . Per alti valori di  $\tau'$  il regime Bingham prevale fino a portate molto più alte, mentre per bassi valori di  $\tau'$  il regime newtoniano viene raggiunto per portate più piccole. Questo è un aspetto molto importante nel caso delle biforcazioni dei flussi di lava: se un braccio ha una portata molto più piccola dell'altro, sarà nel regime Bingham, anche se il braccio principale è nel regime newtoniano sotto le stesse condizioni.

Se introduciamo anche la dipendenza della temperatura, come già visto nella 1.1 e 1.2, alle alte temperature, cioè vicino al liquidus, il flusso si trova nel regime newtoniano. L'altezza aumenta esponenzialmente e la velocità decresce esponenzialmente al diminuire della temperatura. Paradossalmente, come vedremo, ad un aumento del tasso di effusione segue una diminuzione dell'altezza del flusso in un canale di larghezza fissata. Supponendo che la temperatura aumenti da 1030 a 1050° C, e la portata aumenti da  $10^4$  a  $10^6$  g/s, l'altezza del flusso passerà da 3 a 2 m.



**Figura 3.3:** (a) Spessore  $H$  e (b)  $v_p$  velocità del plug ( $v_p = v_x(h - h_p)$ ) in funzione della portata  $q$  per diversi valori di  $\tau'$ . Le linee tratteggiate rappresentano il caso di un fluido newtoniano. Sono utilizzati i valori:  $\alpha = 0.2$  rad,  $\rho = 3000$  kg m $^{-3}$ ,  $\eta = 1000$  Pa s (Dragoni et al., 1986).

### 3.3 Fronte della colata

Lo spessore  $h$  della colata non può essere uniforme in prossimità del fronte, la cui forma è controllata dalle forze che agiscono su di essa (gravità, gradiente di pressione, attrito, ...). Le componenti della velocità all'interno del flusso hanno importanti variazioni, poiché  $v_z$  non sarà più uguale a zero. Dunque il modello è bidimensionale e, per conservare l'assunzione di modello stazionario, dobbiamo imporre che il fronte abbia una velocità  $v_0$  costante. Le equazioni del moto saranno risolte nel sistema di riferimento solidale col fronte per un fluido newtoniano.

Quindi, le componenti della velocità sono

$$v_x = v_x(x, z), \quad v_z = v_z(x, z) \quad (3.22)$$

e la forma del fronte è data dalla funzione

$$h = h(x) \quad (3.23)$$

Evidenze mostrano che il numero di Reynolds (2.28) in prossimità del fronte è molto minore dell'unità ( $Re \simeq 10^{-5}$  per  $v_x \simeq 10^{-2}$  m s $^{-1}$ ,  $\rho = 2700$  kg m $^{-3}$ ,  $\eta \simeq 10^7$  Pa s,

$H \simeq 10\text{m}$  (Dragoni et al., 2005)) quindi, anche se il termine non lineare dell'equazione di Navier-Stokes non si annulla, il flusso è da considerare laminare e tale termine diventa trascurabile. Ancora, data la lunghezza del fronte molto maggiore dello spessore, è possibile trascurare anche le derivate al secondo ordine della velocità, eccetto  $\partial^2 v_x / \partial z^2$ . Dunque le equazioni che descrivono il moto sono

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (3.26)$$

Poichè lo spessore non è uniforme, si genera un gradiente di pressione  $\partial p / \partial x$  non nullo pari a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g h' \cos \alpha \quad \text{con} \quad h' = \frac{dh}{dx} \quad (3.27)$$

Allora la componente  $x$  dell'equazione di Navier-Stokes (3.25) può essere scritta come

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \rho g f = 0 \quad (3.28)$$

con

$$f(x) = \sin \alpha - h'(x) \cos \alpha \quad (3.29)$$

risolvibile con le opportune condizioni al contorno.

Alla base della colata ( $z = 0$ ) la velocità è:

$$v_x(x, 0) = -v_0 \quad (3.30)$$

$$v_z(x, 0) = 0 \quad (3.31)$$

con  $v_0$  velocità del fronte nel sistema di riferimento solidale al suolo.

Sulla superficie della colata ( $z = h(x)$ ) le componenti deviatoriche dello sforzo sono nulle. La soluzione quindi per la componente  $x$  della velocità è data da

$$v_x(x, z) = \frac{\rho g}{2\eta} f z (2h - z) - v_0 \quad (3.32)$$

con cui possiamo ricavare, inserendola nell'equazione di continuità, la soluzione per  $v_z$

$$v_z(x, z) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} h' z^2 + \frac{\rho g \cos \alpha}{2\eta} z^2 \left[ h'^2 + \left( h - \frac{z}{3} \right) h'' \right] \quad (3.33)$$

La forma del fronte  $h(x)$  può essere ricavata dalla condizione al contorno cinematica

$$v_z(x, h) = v_x(x, h)h' \quad (3.34)$$

da cui si ottiene

$$\frac{dh}{dx} = \frac{3\eta}{\rho gh^2 \cos \alpha} \left( \frac{\rho gh^2 \sin \alpha}{3\eta} - v_0 \right) \quad (3.35)$$

Se poniamo

$$H^2 = \frac{3\eta v_0}{\rho gh^2 \sin \alpha} \quad (3.36)$$

con  $H$  spessore della colata a grande distanza dal fronte, possiamo scrivere la 3.35 come

$$dx = \cot \alpha \frac{h^2}{h^2 - H^2} dh \quad (3.37)$$

da cui, integrando da  $x_0$  ad  $x$  e da 0 ad  $h(x)$ , si ottiene

$$x_0 - x = H \cot \alpha \left( \arctan \frac{h}{H} - \frac{h}{H} \right), \quad x \leq x_0 \quad (3.38)$$

dove  $x_0$  è la posizione del fronte. Si vede quindi che, tramite  $H$ , la forma del fronte dipende dalla sua velocità, dall'inclinazione del suolo e dalla viscosità e densità della lava.

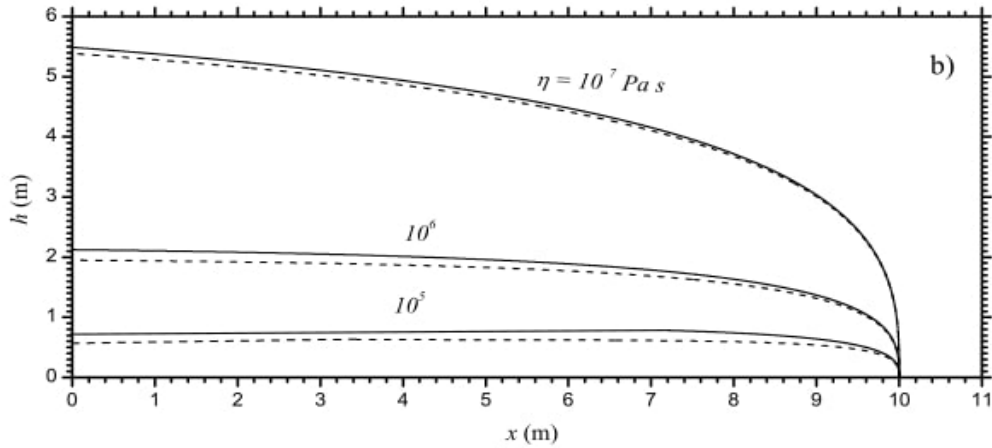
Tutto questo però è valido, come abbiamo detto, per un fluido newtoniano. Per un fluido Bingham, l'equazione per la forma del fronte ci è fornita da Dragoni et al. (2005):

$$x - x_0 = \cot \alpha \left\{ h + \frac{3}{4} H_p \ln \frac{2h^2 - 3H_p h - 2H^2}{2H^2} + \frac{(3H_p)^2 + 8H^2}{4\sqrt{(3H_p)^2 + (4H)^2}} \ln \frac{\left[ 3H_p - \sqrt{(3H_p)^2 + (4H)^2} \right] h + 4H^2}{\left[ 3H_p + \sqrt{(3H_p)^2 + (4H)^2} \right] h + 4H^2} \right\} \quad (3.39)$$

dove  $H_p$  è lo spessore del plug a grandi distanze dal fronte

I profili calcolati per i due modelli sono mostrati in figura 3.4, in cui si nota che il fronte per un fluido Bingham è più ripido di quello di un fluido newtoniano e che, ad una velocità fissata, le colate sono più spesse per maggiori valori della viscosità.

La forma ottenuta per il fronte è quella del nucleo liquido. In realtà le colate reali non presentano un fronte verticale (eccetto forse per le pahoehoe) poichè, a causa della caduta continua di blocchi di lava raffreddata, viene generata una massa di detriti che



**Figura 3.4:** Spessore  $h$  per le colate di un fluido newtoniano e un fluido Bingham in funzione della coordinata  $x$  per diversi valori della viscosità. Le linee continue rappresentano i fluidi Bingham, le linee tratteggiate i fluidi newtoniani. Sono utilizzati i seguenti valori:  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ,  $v_0 = 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ,  $x_0 = 10 \text{ m}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\tau = 2000 \text{ Pa}$  (Dragoni et al, 2005).

si accumula davanti al fronte liquido. Il profilo del fronte si stabilizza (cioè non dipende più dal tempo) quando l'angolo formato dai detriti rispetto l'orizzontale raggiunge un certo valore chiamato angolo di riposo  $\beta$ , il quale dipende dalla composizione della lava ed è compreso tra i  $30^\circ$  e i  $40^\circ$  (Embleton and Thornes, 1979).

### 3.4 Tubi di lava

Come già detto, le colate di lava costruiscono da sé i propri argini, o *levées*. Da una colata canalizzata si possono formare tubi di lava a causa di tre processi principali (Greeley, 1971):

- per raffreddamento, sulla superficie del canale si forma una crosta sufficientemente spessa da sopportare il proprio peso;
- vicino al fronte della colata, per sovrapposizione e coalescenza di lobi di lava raffreddati, si forma il tetto del tubo;
- in flussi che scorrono rapidamente in canali stretti, le fuoriuscite di lava accrescono gli argini che, eventualmente inarcandosi verso l'interno ed unendosi, creano un tubo.



In questo capitolo ci concentriamo sulla formazione di tubi come conseguenza dell'espansione della crosta superficiale, che parte dal centro del canale e si unisce ai margini.

Come modello, prendiamo in considerazione una colata Bingham che scorre in un canale con inclinazione  $\alpha$  costante nella direzione  $x$ , di altezza  $h$ , con flusso stazionario. L'equazione di Navier-Stokes per la componente  $x$  è nuovamente la 3.5a. Consideriamo inoltre che siano attivi i movimenti dei frammenti cristallini di coalescenza e di unione con gli argini, supponendo questi ultimi già completamente formati.

Sulla superficie del flusso ( $z = h$ ) lo sforzo vale

$$\tau_{xz}(h) = -\tau_0, \quad \tau_0 > 0 \quad (3.40)$$

dove  $\tau_0$  è lo sforzo dovuto alla presenza della crosta sulla faccia intermedia tra la stessa ed il flusso di lava. All'inizio della colata, cioè quando la lava fuoriesce dalla bocca eruttiva, la crosta non è ancora presente e dunque  $\tau_0 = 0$ , mentre, una volta iniziata a formarsi, raggiunge il suo massimo valore  $\tau_0 = \bar{\tau}_0$  quando realizza la condizione di stazionarietà rispetto la colata. Contemporaneamente allo sforzo aumenta anche l'altezza del flusso. Se il tetto del tubo di lava è abbastanza spesso da non crollare, l'altezza del flusso diminuisce e  $\tau_0$  torna ad avere valore nullo.

La soluzione per  $\tau_{xz}(z)$  è ottenuta integrando rispetto a  $z$  la 3.5a con la condizione 3.40:

$$\tau_{xz}(z) = \rho g \sin \alpha (h - z) - \tau_0 \quad (3.41)$$

da cui possiamo definire una profondità  $z_0$  in cui  $\tau_{xz} = 0$ :

$$z_0 = h - \frac{\tau_0}{\rho g \sin \alpha} \quad (3.42)$$

Lo spessore  $h_p$  del plug, nei tubi di lava, è definito come quello strato in cui  $|\tau_{zx}| \leq \tau'$  da cui ricaviamo (tenendo conto della 3.41 con la condizione che  $z < h$ ):

$$\begin{aligned} h_p &= h_{p0} + \frac{\tau_0}{\rho g \sin \alpha}, & 0 \leq \tau_0 \leq \tau' \\ h_p &= 2h_{p0}, & \tau_0 \geq \tau' \end{aligned} \quad (3.43)$$

dove  $h_{p0}$  è lo spessore del plug con  $\tau_0 = 0$  (3.19), spessore minimo che il plug può avere. Tale spessore aumenta all'aumentare di  $\tau_0$ , fino a quando non diviene uguale a  $\tau'$ ;

superato tale valore il plug inizia ad affondare nella colata, mantenendo il suo spessore costante (Dragoni et al., 1995).

Ricordando l'equazione costitutiva 2.27 per un fluido di Bingham, con la condizione al contorno

$$v_x(0) = 0 \quad (3.44)$$

otteniamo la velocità del flusso per  $0 \leq \tau_0 \leq \tau'$

$$\begin{aligned} v_x(z) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (z_0 - h_{p_0})^2, & z_0 - h_{p_0} \leq z \leq h; \\ v_x(z) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} z \left( -\frac{1}{2}z + z_0 - h_{p_0} \right), & 0 \leq z \leq z_0 - h_{p_0} \end{aligned} \quad (3.45)$$

e per  $\tau_0 \geq \tau'$

$$\begin{aligned} v_x(z) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \left[ z \left( -\frac{1}{2}z + z_0 + h_{p_0} \right) - 4z_0 h_{p_0} \right], & z_0 + h_{p_0} \leq z \leq h; \\ v_x(z) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (z_0 - h_{p_0})^2, & z_0 - h_{p_0} \leq z \leq z_0 + h_{p_0} \\ v_x(z) &= \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} z \left( -\frac{1}{2}z + z_0 - h_{p_0} \right), & 0 \leq z \leq z_0 - h_{p_0} \end{aligned} \quad (3.46)$$

La portata per unità di lunghezza è data da

$$q = \rho \int_0^h v_x(z) dz \quad (3.47)$$

da cui

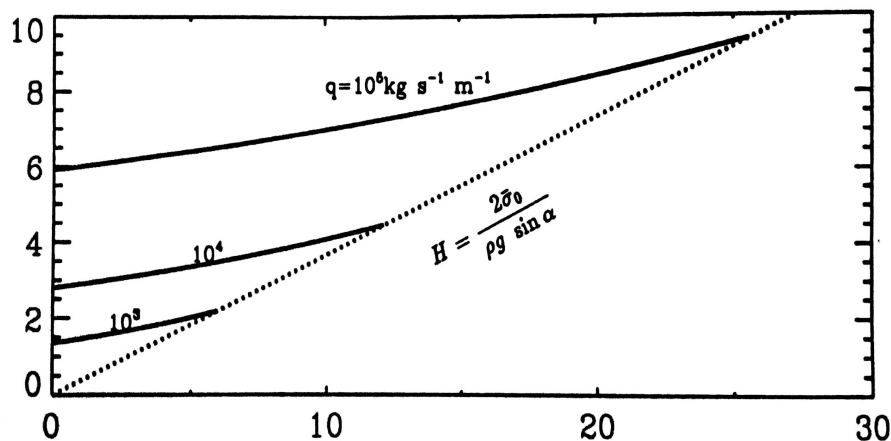
$$2h^3 - 3h^2 \frac{\tau_0 + \tau'}{\rho g \sin \alpha} + \left( \frac{\tau_0 + \tau'}{\rho g \sin \alpha} \right)^3 - \left( \frac{\tau_0 - \tau'}{\rho g \sin \alpha} \right)^3 - \frac{6\eta q}{\rho^2 g \sin \alpha} = 0 \quad (3.48)$$

Tramite quest'ultima relazione possiamo ricavare l'altezza del flusso  $h$  come funzione di  $\tau_0$  e  $q$ .

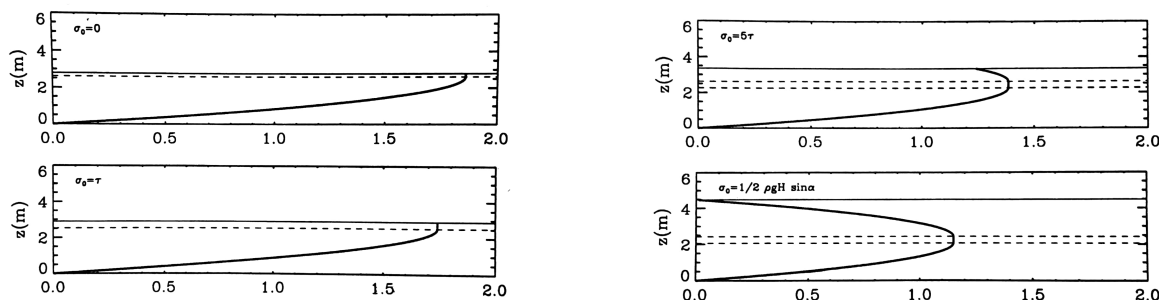
Se un flusso canalizzato rallenta il suo moto superficiale, deve aumentare il suo spessore per mantenere costante la portata. La diminuzione della velocità continua fintantochè la crosta non diventa abbastanza resistente e spessa da non essere più trainata dal flusso sottostante. Da queste ultime relazioni possiamo quindi ottenere l'altezza massima  $H$  che il tubo può raggiungere, corrispondente a  $v_x = 0$  e  $\tau_0 = \bar{\tau}_0$ :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\bar{\tau}_0 + \tau'}{\rho g \sin \alpha}, & 0 \leq \bar{\tau}_0 \leq \tau' \\ H &= \frac{2\bar{\tau}_0}{\rho g \sin \alpha}, & \bar{\tau}_0 \geq \tau' \end{aligned} \quad (3.49)$$

Nel caso  $0 \leq \bar{\tau}_0 \leq \tau'$  non c'è scorrimento di lava nel tubo, perchè il plug sarebbe spesso quanto l'altezza totale (Dragoni et al., 1995).



**Figura 3.5:** Spessore  $h$  del flusso in funzione di  $\tau_0$  per tre differenti valori della portata  $q$ . La linea punteggiata rappresenta  $H$ , lo spessore del tubo. Sono utilizzati i seguenti valori:  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$ ,  $\rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\tau' = 1000 \text{ Pa}$ ,  $\eta = 10^4 \text{ Pa s}$  (Dragoni et al., 1995).



**Figura 3.6:** La velocità  $v_x$  del flusso in funzione di  $z$ , considerando quattro diversi valori di  $\tau_0$ . La linea sottile continua rappresenta la superficie  $z = h$ , mentre le linee tratteggiate rappresentano i contorni del plug. Sono utilizzati i seguenti valori:  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$ ,  $\rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\tau' = 1000 \text{ Pa}$ ,  $\eta = 10^4 \text{ Pa s}$ ,  $q = 10^4 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-1}$  (Dragoni et al. 1995).

Se la portata è costante, il livello della lava nel tubo, una volta raggiunta l'altezza  $H$  e consolidato il tetto, può tornare all'altezza minima  $h_0$  (altezza che ha il flusso quando  $\tau_0 = 0$ , cioè in assenza crosta), gravitazionalmente favorita.

La formazione di un tubo di lava è stata osservata sull'Etna durante l'eruzione del 1991-1992 (Barberi et al., 1992). Ad una distanza  $x = 750 \text{ m}$  dalla bocca eruttiva, il tubo aveva una sezione di c.ca  $40 \text{ m}^2$  ed era riempito per circa un terzo da lava che

scorreva ad una velocità media  $\bar{v}_x = 1 \text{ ms}^{-1}$ . Una misura della portata fatta il 27 Maggio 1992 ha fornito un valore di  $30 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ . La larghezza di tale tubo era  $w \simeq 10 \text{ m}$  e la densità della lava  $\rho \simeq 2650 \text{ kg m}^{-3}$ , quindi una portata per unità di larghezza  $q \simeq 10^4 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$  che, con inclinazione del suolo  $\alpha = 0.5 \text{ rad}$  (secondo misurazioni topografiche), dà come risultato un'altezza del tubo  $H$  pari a 3-4 m, valore confermato dalle osservazioni. Inoltre, il livello del flusso di lava era ad un'altezza  $h_0 \simeq 1 - 1.5 \text{ m}$ .

Tali tubi sono molto comuni nelle colate di lava di tipo pahoehoe, ma possono formarsi anche per le aa, e la loro lunghezza può variare da alcuni metri fino ad anche 100 km (Haraldur et al., 2015) poichè, a causa del raffreddamento molto lento, possono coprire distanze molto più lunghe dei canali aperti.

# Capitolo 4

## Processi termici

Per avere un modello che descriva la dinamica di una colata di lava è necessario introdurre termini che prendano in considerazione il raffreddamento che subisce il flusso durante il suo percorso.

La velocità di raffreddamento di una colata di lava è fortemente disomogenea, e ciò implica una distribuzione disomogenea dei parametri reologici. Comunque tali disomogeneità sono concentrate in prossimità della frontiera, luogo in cui si producono elevati gradienti termici e reologici. In prima approssimazione, è dunque ragionevole trattare il nucleo liquido del flusso come isoterma, fino ad una distanza fissata dalla bocca eruttiva, prima che il lento raffreddamento produca un progressivo cambiamento della reologia.

Tra i vari processi di perdita di calore, sono trascurabili quelli di conduzione con l'atmosfera e, secondo le stime numeriche, anche quelli di convezione apportano contributi molto minori rispetto ai processi di irraggiamento nell'atmosfera (Murase e McBirney, 1970). Inoltre è stato mostrato anche che, per avere un contributo significativo di scambio di calore per conduzione con il suolo, i flussi di lava dovrebbero coprire distanze molto maggiori di quelle che coprono in realtà (Hulme, 1982). Allora il processo che domina sul raffreddamento della lava, e che prenderemo in considerazione, è la perdita di calore per radiazione.

### 4.1 Irraggiamento e radianza

Utilizziamo sempre il modello di flusso di spessore  $h$  che si muove lungo l'asse  $x$  con inclinazione costante. Tale flusso si raffredda per irraggiamento dalla superficie superiore.

Supponiamo inoltre che tale flusso di calore per unità di area  $w$  sia perpendicolare alla superficie della colata:

$$w_i = (0, 0, w_z) \quad \text{dove} \quad w_z = w_z(x, z) \quad (4.1)$$

Se trascuriamo la dissipazione viscosa e il calore latente, l'equazione del calore 3.3 diventa:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_i T_{,i} \right) = -w_{i,i} \quad (4.2)$$

che, se il moto è stazionario e unidimensionale nella direzione  $x$ , si riduce a:

$$\rho c_p v_x \frac{dT}{dx} = \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad (4.3)$$

dove  $T = T(x)$  è interpretato come valore medio sullo spessore  $h$  della colata, in una data sezione, a distanza  $x$  dalla bocca effusiva.

Partendo dalla legge di Stefan, che afferma che la radianza di una superficie di temperatura  $T$  è:

$$w(T) = \epsilon \sigma T^4 \quad (4.4)$$

con  $\sigma$  costante di Stefan ( $5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ) e  $\epsilon$  emissività del materiale, possiamo scrivere per il nostro modello che:

$$w_z(x, h) = \epsilon \sigma T(x)^4 \quad (4.5)$$

Assumendo che  $w_z$  vari linearmente con  $z$  e che

$$w_z(x, 0) = 0, \quad (4.6)$$

la perdita di calore dovuta alla radiazione può essere scritta come

$$\frac{\partial w_z(x)}{\partial z} = \frac{w_z(x, h)}{h} = \frac{\epsilon \sigma T^4}{h} \quad (4.7)$$

Allora l'equazione del calore diventa

$$\rho c_p v_x \frac{dT}{dx} = \frac{\epsilon \sigma}{h} T^4 \quad (4.8)$$

Poichè la lunghezza della colata è molto maggiore del suo spessore, possiamo interpretare la velocità  $v_x(x)$  come il valore medio  $\bar{v}$  della velocità sullo spessore  $h$  della colata

in una data sezione. Quindi la portata in volume  $q$  per unità di lunghezza della colata può essere scritta come

$$q = \bar{v}h \quad (4.9)$$

ed otteniamo, nel caso di miscelamento termico (Pieri e Baloga, 1986), l'equazione del calore

$$\rho c_p q \frac{dT}{dx} = \epsilon \sigma T^4 \quad (4.10)$$

La soluzione è

$$T(x) = T_0 \left( \frac{3\epsilon\sigma T_0^3}{\rho c_p q} x + 1 \right)^{-1/3} \quad (4.11)$$

dove  $T_0$  è la temperatura della lava appena uscita dalla bocca eruttiva. Questa modellizzazione assume che la temperatura sia costante lungo le sezioni verticali del flusso. La soluzione non è valida per qualunque valore positivo di  $x$ , poichè la temperatura deve rimanere al di sopra della temperatura di solidificazione  $T_s$  della lava; inoltre implica una diminuzione della temperatura relativamente rapida, appropriata per le regioni vicine alla bocca effusiva dove la crosta superficiale non è ancora stata prodotta.

Quando sulla superficie viene generata la crosta, è appropriato assumere la temperatura superficiale come costante e che tale temperatura sia quella del *solidus*  $T_s$  (caso di non miscelamento termico). Il flusso di calore superficiale è allora

$$w_z(h) = \epsilon \sigma T_s^4 \quad (4.12)$$

l'equazione del calore diventa

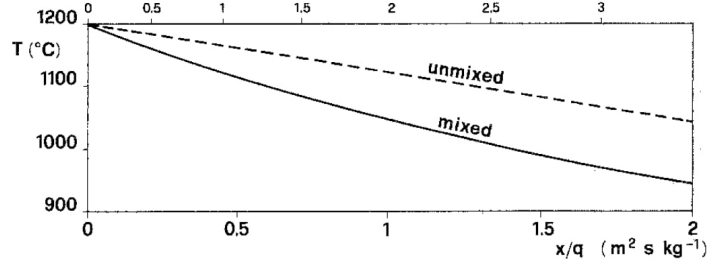
$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\epsilon \sigma T_s^4}{\rho c_p q} \quad (4.13)$$

la cui soluzione è:

$$T(x) = T_0 - \frac{\epsilon \sigma T_s^4 x}{\rho c_p q} \quad (4.14)$$

essendo il membro di destra della 4.13 una costante. Si vede quindi una diminuzione della temperatura lineare con  $x$ .

Facendo un esempio numerico, prendendo  $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$ ,  $\epsilon = 0.6$  e  $T_0 = 1200^\circ\text{C}$ , nel caso di miscelamento termico una temperatura  $T_i = 1000^\circ\text{C}$  è raggiunta a circa 140 m dalla bocca effusiva se  $q = 10^2 \text{ kg s}^{-1}\text{m}^{-1}$ , che rappresenta un piccolo flusso di lava, mentre per il caso di non miscelamento termico



**Figura 4.1:** Temperatura in funzione di  $x/q$  nel caso di mescolamento (mixed) e non mescolamento (unmixed) termico, con  $T_e = 900^\circ\text{C}$ . La linea continua rappresenta il caso di non mescolamento se il valore di  $x/q$  è letto sulla linea orizzontale in alto. È assunta la temperatura iniziale  $T_0 = T_l = 1200^\circ\text{C}$  (Dragoni, 1989).

sarebbe raggiunta ad  $x = 260$  m. Se invece prendiamo un flusso di lava con  $q = 10^4$   $\text{kg s}^{-1}\text{m}^{-1}$  la temperatura  $T_i$  è raggiunta ad una distanza di 14 km con mescolamento, 26 km senza mescolamento. Si vede dunque come i tubi di lava, poichè coperti dalla crosta, riescano a coprire distanze molto maggiori rispetto ai canali aperti prima di raggiungere temperature interne sufficientemente basse da fermare il flusso.

Una legge che lega la massima lunghezza raggiungibile  $L_m$  da un flusso di lava di tipo aa che scorre su una superficie con pendenza angolare media  $\beta$ , è data da (Kilburn, 2000)

$$L_m \approx \frac{\left(\frac{1.5\xi\bar{\tau}_0}{\rho g}\right)^2 \frac{\epsilon\sigma T_0^3}{\kappa\rho c_p}}{\sin^2 \beta} \approx \left(\frac{3\xi\bar{\tau}_0}{\rho g\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

dove:

$\xi$  estensione massima della crosta prima della rottura, per unità di lunghezza

$\kappa$  diffusività termica della crosta

$Q$  portata in volume per unità di tempo

Vediamo così che la lunghezza massima raggiungibile dalla colata aumenta al diminuire della pendenza e all'aumentare del tasso di effusione.

## 4.2 Effetti della cristallizzazione sulla reologia

La lava, come abbiamo già detto, è un sistema multifase e chimicamente eterogeneo. Poichè la temperatura di effusione è solitamente vicina alla temperatura del liquidus,



il suo raffreddamento è accompagnato da una progressiva cristallizzazione dei diversi minerali che la compongono.

Per sviluppare un modello che tenga conto di tali processi, si assume la seguente legge che mette in relazione il grado di cristallizzazione  $\phi$ , ossia la frazione di volume cristallizzata, con la temperatura:

$$\phi = \frac{T_l - T}{T_l - T_s} \phi_{max}, \quad T_s < T < T_l \quad (4.16)$$

dove  $T_l$  è la temperatura del liquidus e  $\phi_{max}$  è il grado di cristallizzazione raggiunto alla temperatura di solidus (Dragoni e Tallarico, 1994). Si assume inoltre che la lava venga effusa ad una temperatura  $T = T_l$ , così da avere  $\phi = 0$  e di conseguenza un comportamento newtoniano della lava vicino la bocca eruttiva.

L'espressione che viene utilizzata per la modellizzazione degli effetti della cristallizzazione sulla viscosità si compone di due termini: il primo esprime la dipendenza della viscosità dalla temperatura di un fluido newtoniano con composizione costante (assenza di cristallizzazione) sul modello di Arrhenius (1.1); il secondo rappresenta gli effetti della cristallizzazione. Tale espressione è

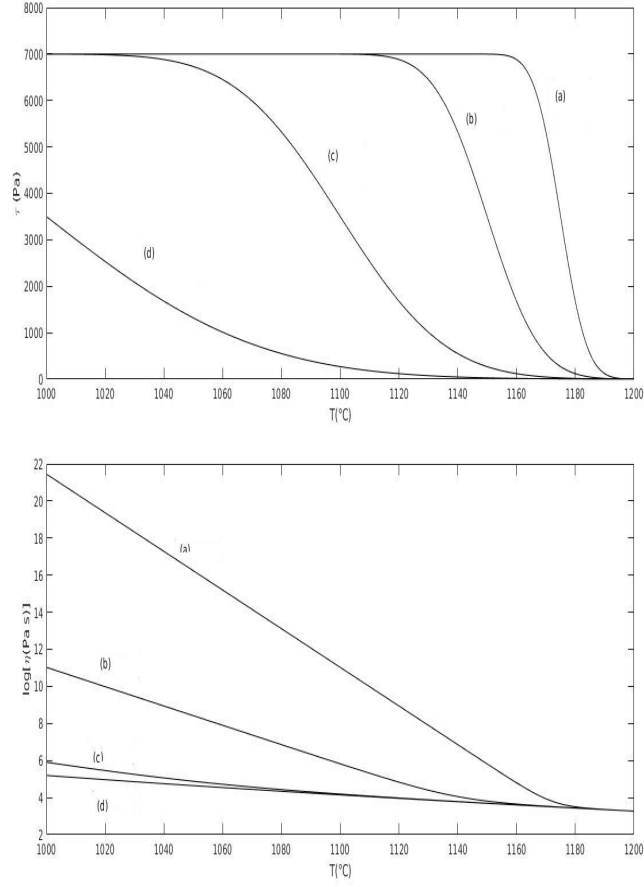
$$\eta(T) = \eta_a e^{a/T} + \eta_0 [e^{b\phi(T)} - 1], \quad T_s < T < T_l \quad (4.17)$$

dove  $\eta_a$ ,  $\eta_0$ ,  $a$  e  $b$  sono parametri empirici. Se la viscosità dunque dipende dalla temperatura, cade l'assunzione di omogeneità e le equazioni del moto e del calore sono accoppiate. Per lo sforzo di snervamento, dati sperimentali e considerazioni teoriche indicano uno sforzo  $\tau$  uguale a zero per  $T = T_l$ , per poi raggiungere un valore massimo  $\bar{\tau}$  quando la cristallizzazione si è saturata (Chester et al., 1985). I dati sperimentali possono essere rappresentati dalla funzione degli errori

$$\tau = \frac{\bar{\tau}}{2} [\operatorname{erf}(d\phi - f) + 1], \quad 0 \leq \phi \leq 1 \quad (4.18)$$

con  $d$  e  $f$  parametri appropriati (Thomas e Lindsay, 1988). Lo sforzo dipende quindi dalla temperatura tramite il grado di cristallizzazione.

Consideriamo il flusso composto da due strati: partendo dal basso, il primo strato ha temperatura interna  $T_i$  omogenea e trasmette calore per conduzione al secondo strato, che sta sopra, il quale produce radiazione di calore verso l'atmosfera. Il secondo strato è



**Figura 4.2:** Andamento dello sforzo di snervamento  $\tau$  e della viscosità  $\eta$  in funzione della temperatura  $T$  per diversi valori di  $\phi_{max}$ : (a) 80%, (b) 40%, (c) 20%, (d) 10%. Sono utilizzati i seguenti valori:  $a = 26500 \text{ K}^{-1}$ ,  $b = 60$ ,  $d = 25$ ,  $f = 2.5$ ,  $T_s = 1000^\circ \text{ C}$ ,  $T_l = 1200^\circ \text{ C}$ ,  $\eta_a = 4.8 \times 10^{-7} \text{ Pa s}$ ,  $\eta_0 = 4 \text{ Pa s}$ ,  $\bar{\tau} = 7000 \text{ Pa}$ .

considerato coincidere con il plug.

La distribuzione della temperatura sarà quindi:

$$T(x, z) = \begin{cases} (T_i - T_e)^{(h-z)/h_p} + T_e & , (h - h_p) \leq z \leq h \\ T_i & , 0 \leq z \leq (h - h_p) \end{cases} \quad (4.19)$$

con  $h_p = h_p(x)$  e  $T_e$  temperatura esterna, diversa da quella interna. La temperatura interna è ottenuta grazie a

$$\frac{dT_i}{dx} = -\frac{\epsilon\sigma}{c_p q} T_e^4(x) \quad (4.20)$$

La soluzione può essere espressa in forma discreta come:

$$T_i(x_n) = T_i(x_{n-1}) - \frac{\epsilon\sigma}{c_p} T_e^4(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{q}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.21)$$

prendendo  $x_0 = 0$  come la posizione corrispondente alla bocca effusiva. Se assumiamo che  $h_p$  sia molto minore di  $h$ , possiamo scrivere

$$k \frac{T_i(x) - T_e(x)}{h_p} = \epsilon\sigma T_e^4(x) \quad (4.22)$$

dove  $k$  è la conduttività termica del plug. Combinando allora la 4.21 e 4.22 otteniamo un'equazione algebrica di quarto grado:

$$T_e^4(x_n) + f(x_n)T_e(x_n) - f(x_n)T_i(x_{n-1}) = 0 \quad (4.23)$$

con

$$f(x_n) = \frac{k}{\left(1 + \frac{k}{c_p h_p} \frac{x_n - x_{n-1}}{q}\right) \epsilon\sigma h_p}. \quad (4.24)$$

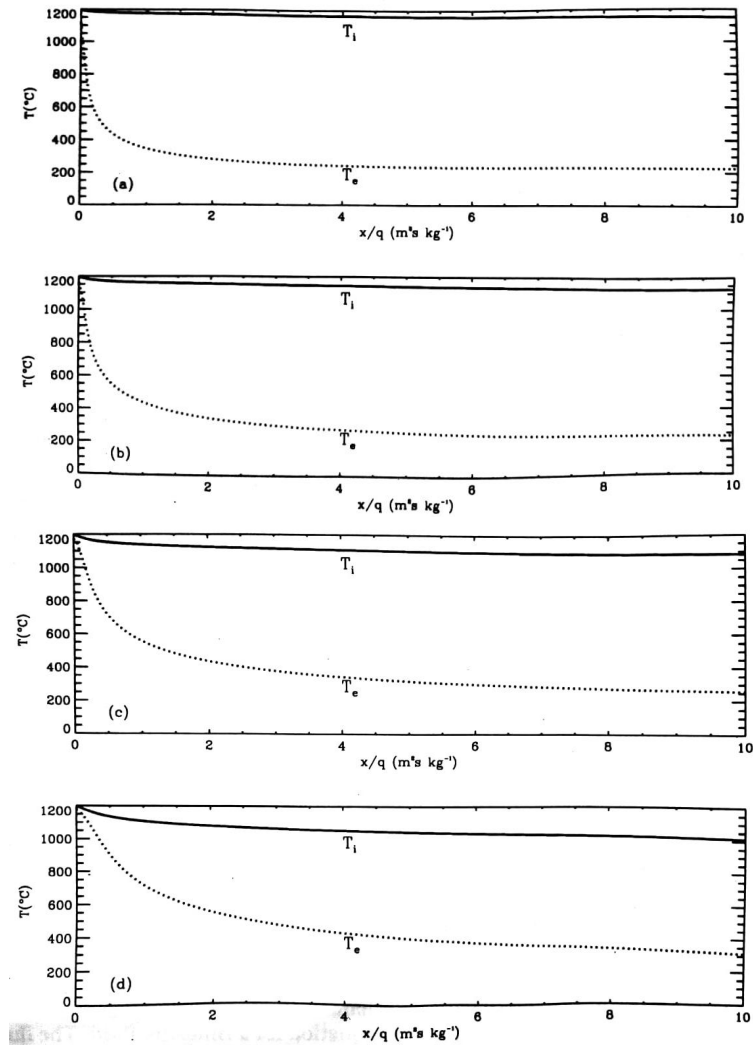
La 4.21 e la 4.23 sono accoppiate, e dovranno essere risolte iterativamente. Poichè lo spessore del plug dipende dallo sforzo, il coefficiente  $f(x_n)$  dipende da  $\phi_{max}$  e diversi valori del grado massimo di cristallizzazione portano a diversi profili di temperatura lungo la colata. Una volta ottenute le proprietà termiche e reologiche, possiamo ricavare il comportamento dinamico del flusso tramite l'equazioni di Navier-Stokes per un fluido di Bingham, ottenendo le già note equazioni 3.20 e 3.21. Lo spessore della crosta  $h_c$  può essere calcolato con

$$h_c(x) = \frac{T_s - T_e}{T_i - T_e} h_p, \quad T_l < T_s < T_i. \quad (4.25)$$

In ultima analisi, possiamo ricavare il numero di Graetz  $Gz$

$$Gz(x) = \frac{v_0 h_0^2}{kx} \quad (4.26)$$

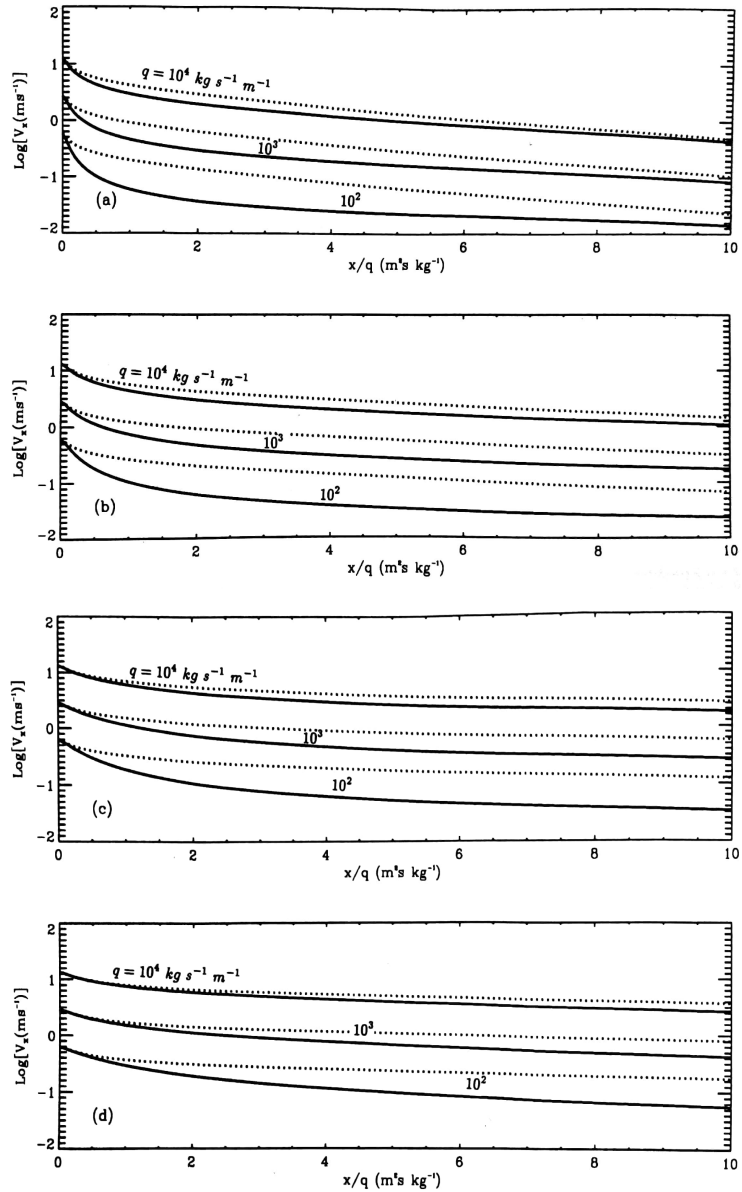
con  $v_0$  e  $h_0$  rispettivamente velocità e altezza del flusso in  $x = 0$ . Il numero di Graetz è una quantità adimensionale che esprime quanto un liquido canalizzato è prossimo alla solidificazione a causa della perdita di calore. Il flusso cessa quando  $Gz$  è diminuito da un iniziale grande valore ad un numero dell'ordine delle centinaia (Pinkerton e Sparks, 1976).



**Figura 4.3:** Variazione di  $T_i$  (curva continua) e  $T_e$  (curva tratteggiata) in funzione di  $x/q$ , avendo posto  $T_i(x_{n-1}) = T_e(x_n) = T_0$ . I quattro grafici si riferiscono a quattro diversi valori di  $\phi_{max}$ : (a) 80%, (b) 40%, (c) 20%, (d) 10%. Assegnato un valore alla portata per unità di lunghezza  $q$ , si ricava la distanza  $x$  dalla bocca effusiva moltiplicando il valore in ascissa per il valore di  $q$ . Sono utilizzati i seguenti valori:  $\rho = 2800 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$  (Dragoni e Tallarico, 1994).

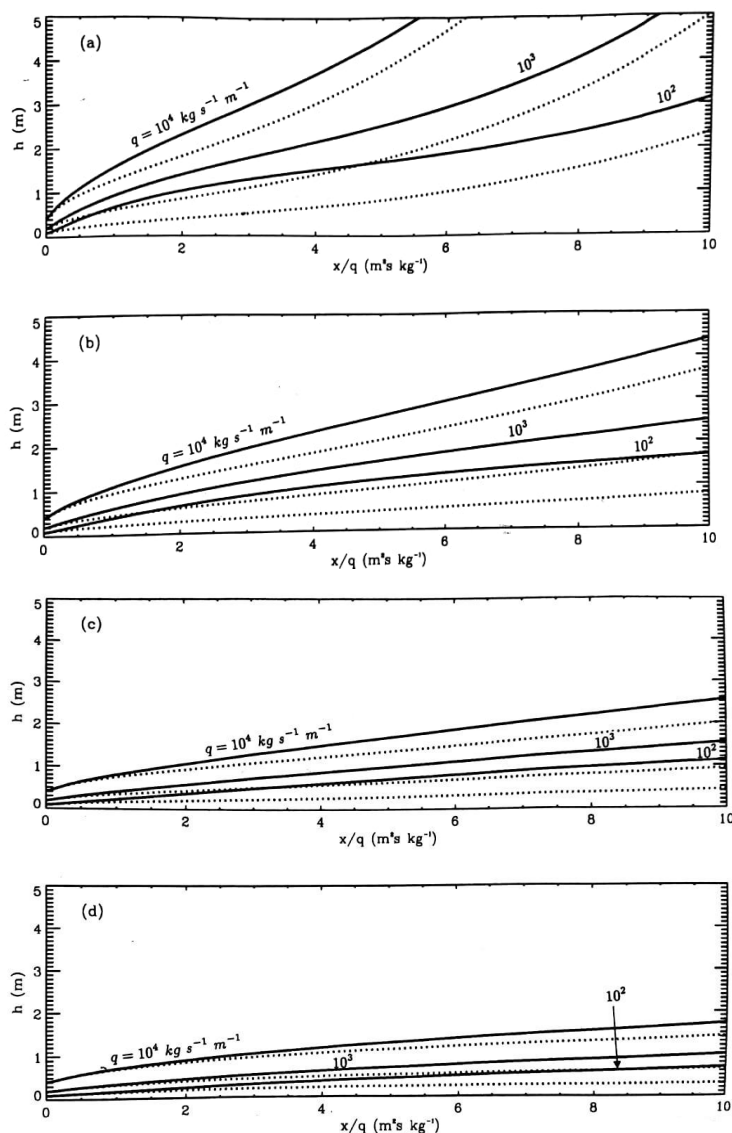
Per la risoluzione delle equazioni precedenti, è stato scelto di porre  $T_0 = T_l$ , così che la lava presenti un comportamento newtoniano in  $x = 0$ . È comunque possibile impostare  $T_0$  a temperature inferiori a quella del liquidus, con la conseguenza di vedere un comportamento binghamiano all'inizio del flusso.

La temperatura interna aumenta mentre quella esterna diminuisce con l'aumentare di



**Figura 4.4:** Velocità dello strato superficiale  $v_x(x, h)$  del flusso in funzione di  $x/q$  per diversi valori di  $q$ . I quattro grafici si riferiscono a quattro diversi valori di  $\phi_{max}$ : (a) 80%, (b) 40%, (c) 20%, (d) 10%. Le curve punteggiate rappresentano le velocità corrispondenti ad un flusso newtoniano. Sono utilizzati i seguenti valori:  $\rho = 2800 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$  (Dragoni e Tallarico, 1994).

$\phi_{max}$ , linearmente con  $x/q$ , questo perchè lo spessore del plug è proporzionale allo sforzo di snervamento per la 3.19. Quindi, poichè  $\tau$  dipende dal grado di cristallizzazione, lo spessore del plug aumenta all'aumentare di  $\phi_{max}$ , in modo tale da isolare la parte



**Figura 4.5:** Spessore  $h$  del flusso in funzione di  $x/q$  per diversi valori di  $q$ . I quattro grafici si riferiscono a quattro diversi valori di  $\phi_{max}$ : (a) 80%, (b) 40%, (c) 20%, (d) 10%. Le curve punteggiate rappresentano gli spessori corrispondenti ad un flusso newtoniano. Si noti come lo spessore aumenta all'aumentare di  $\phi_{max}$ . Sono utilizzati i seguenti valori:  $\rho = 2800 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$  (Dragoni e Tallarico, 1994).

interna del flusso di lava e ridurre il calore trasferito alla superficie del flusso. Tale effetto favorisce da un lato la mobilità della colata, mantenendo bassa la viscosità per la temperatura elevata, dall'altro lato la ostacola, perchè la viscosità aumenta con la cristallizzazione. Si capisce così la diminuzione della velocità con l'aumentare di  $\phi_{max}$

(Figura 4.4). È interessante notare come tutte le quantità dipendano dal rapporto  $x/q$ .

### 4.3 Formazione della crosta e tubi di lava

In seguito al processo di raffreddamento dello strato superficiale della lava, si verifica la formazione della crosta. Assumiamo adesso che tale strato di crosta sia ad una temperatura al di sotto della temperatura di solidus, e tralasciamo gli effetti della cristallizzazione. Per ricavarne lo spessore utilizziamo l'equazione unidimensionale della conduzione del calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.27)$$

con  $\chi$  diffusività termica della lava. La soluzione è (Turcotte e Schubert, 1982):

$$T(z, t) = T_i + (T_e - T_i) \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{\chi t}}. \quad (4.28)$$

Se consideriamo uno spessore costante, la velocità media  $\bar{v}_x$  del flusso sarà

$$\bar{v}_x = \frac{q}{\rho h} \quad (4.29)$$

quindi possiamo scrivere  $t$  come

$$t(x) = \frac{\rho h}{q} x \quad (4.30)$$

dove  $x$  è la distanza dalla bocca effusiva. Inserendo la formula per il tempo nella 4.28 otteniamo la curva per la temperatura mostrata in figura 4.6.

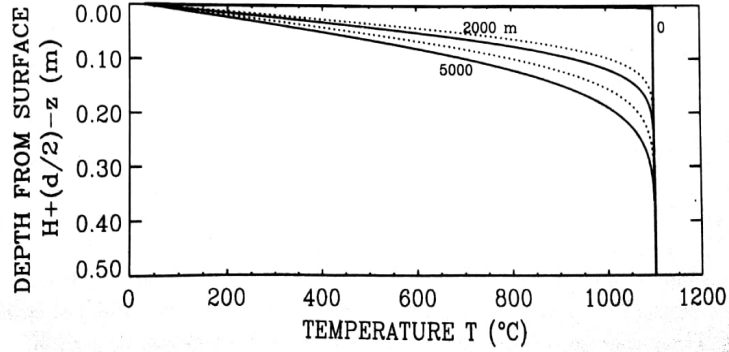
L'assunzione di spessore costante non è realistica, poichè  $h$  varia al variare di  $\tau_0$  (3.48). Consideriamo allora una dipendenza lineare di  $\tau_0$  da  $x$ :

$$\tau_0(x) = \bar{\tau}_0 \frac{x}{\bar{x}} \quad (4.31)$$

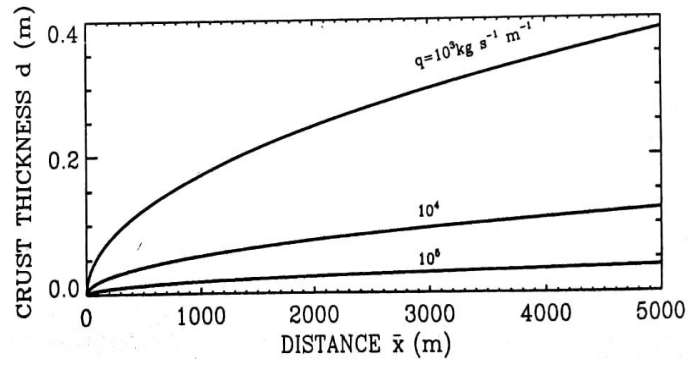
con  $\bar{x}$  distanza dalla bocca effusiva in cui  $\tau_0(x) = \bar{\tau}_0$ . A tale distanza la velocità dello strato superficiale della colata si annulla, e si assume questo punto come l'inizio della formazione di un tubo (Dragoni et al., 1995). Possiamo ricavare allora  $h(x)$  per diversi valori di  $\bar{x}$  inserendo la 3.48 nella 4.31.

Lo spessore della crosta sarà allora ottenuta risolvendo la 4.28, dove  $t$  questa volta vale

$$t(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} \frac{dx}{\bar{v}_x(x)} \quad (4.32)$$



**Figura 4.6:** Temperatura  $T$  in funzione di  $z$  per diverse distanze  $x$  dalla bocca effusiva. La curva continua rappresenta il caso di spessore costante  $h = 3.5$  m; la curva tratteggiata rappresenta il caso  $h = h(x)$ . Sono utilizzati i valori:  $T_e = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_i = 1100^\circ\text{C}$ ,  $\chi = 1.28 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$ ,  $\eta = 10^4 \text{ Pa s}$ ,  $\tau' = 1000 \text{ Pa}$  (Dragoni et al., 1995).



**Figura 4.7:** Spessore della crosta in funzione della distanza  $\bar{x}$  dalla bocca effusiva, per tre diversi valori della portata  $q$ . Sono utilizzati i valori:  $T_e = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_i = 1100^\circ\text{C}$ ,  $\chi = 1.28 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\alpha = 0.2 \text{ rad}$ ,  $\eta = 10^4 \text{ Pa s}$ ,  $\tau' = 1000 \text{ Pa}$ ,  $\rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}$  (Dragoni et al., 1995).

e otteniamo, per  $T = T_s$  (Dragoni et al., 1995)

$$d(x) = 2\sqrt{\chi t(\bar{x})} \operatorname{erfc}^{-1} \frac{T_s - T_i}{T_e - T_i}. \quad (4.33)$$



# Conclusioni

Anche se con molte approssimazioni, i modelli teorici riescono a cogliere alcuni aspetti fondamentali del comportamento delle colate di lava.

Diverse interessanti proprietà possono essere dedotte da semplici modelli come quelli appena esposti, risolvendo le equazioni del moto per fluidi incomprimibili prima in approssimazione isoterma ed in seguito tenendo conto della dissipazione del calore. Un fluido Bingham, per bassi valori di sforzo di snervamento, può comportarsi come un fluido newtoniano; in caso contrario, nel regime Bingham, l'altezza di un flusso è molto più grande rispetto al regime newtoniano e la velocità molto più bassa. L'altezza del flusso, inoltre, è indipendente dal tasso di effusione, il quale ha effetti solo sulla velocità. L'altezza e la velocità del flusso dipendono dall'inclinazione del suolo: controintuitivamente, all'aumentare del grado di inclinazione l'altezza aumenta mentre la velocità diminuisce.

Considerando l'irraggiamento termico e la conseguente diminuzione della temperatura, la reologia della lava viene modificata. I processi di cristallizzazione sono stati modellizzati da un andamento lineare rispetto alla temperatura, assumendo un grado di cristallizzazione pari a zero alla temperatura del liquidus. Sia lo sforzo di snervamento che la viscosità sono dipendenti dal grado di cristallizzazione, oltre che dalla temperatura. La dinamica del flusso è solo leggermente influenzata dai diversi gradi di massima cristallizzazione, poichè questa ha effetti contrastanti, che tendono a cancellarsi vicendevolmente.

In seguito al raffreddamento, inizia a formarsi la crosta superficiale, il cui spessore dipende da quello del flusso, dal valore dello sforzo di snervamento e dall'inclinazione del suolo. Poichè la crosta riduce sensibilmente la perdita di calore, la formazione di un tubo aumenta considerevolmente la lunghezza totale raggiungibile da una colata. La formazione di un tubo può avvenire a distanze molto variabili dalla bocca effusiva come

non verificarsi mai.

I modelli proposti in queste pagine trattano un flusso laminare stazionario di un fluido Bingham su un piano con inclinazione costante. La loro applicazione risulta quindi molto limitata, poichè non prendono in considerazione molti aspetti importanti di una colata di lava, come la formazione degli argini, le variazioni della forma del flusso e del tragitto, l'erosione del suolo.

I dati forniti dagli esperimenti sono consistenti con i risultati dei modelli, ma è impossibile comparare con ragionevole accuratezza i risultati numerici dei modelli con le osservazioni in situ. Le misure infatti sono insufficienti per verificare le predizioni teoriche. Sarebbero necessarie, per un confronto opportuno con i modelli teorici, misure simultanee, prese in punti diversi, dei vari parametri che caratterizzano una colata di lava, come la dimensione e la velocità di un flusso, la temperatura, la viscosità e lo sforzo di snervamento.

Tali misurazioni sono state effettuate soltanto raramente (e.g. Archambault & Tanguy, 1978), in quanto rese difficili dall'inserimento di strumentazioni in un fluido altamente viscoso, chimicamente corrosivo, in movimento e con sforzo superficiale elevato. Oltre a questo, qualora si riuscisse ad introdurre dell'apparecchiatura dentro una colata, agirebbero le forze di galleggiamento nel caso la densità degli oggetti sia minore di quella della lava.

# Bibliografia

Archambault, C., e J. C. Tanguy (1976), *Comparative temperature measurements on Mount Etna lavas problems and techniques*. Journal of Geophysical Research 1, 113-25.

Aris, R. (1962), *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, General Publishing Company.

Chester, D. K., A. M. Duncan, J. E. Guest, C. R. J. Kilburn (1985), *Mount Etna. The anatomy of a volcano*. London: Chapman & Hall.

Barberi, F., M. L. Carapezza, M. Valenza, L. Villari (1992), *L'Eruzione 1991-1992 dell'Etna e gli Interventi per Fermare o Ritardare l'Avanzata della Lava*. Giardini, Pisa.

Chester, D. K., A. M. Duncan, J. E. Guest, C. R. J. Kilburn (1985), *Mount Etna, the Anatomy of a Volcano*. Chapman and Hall, capitolo 7.

Chhabra, R. P., e J. F. Richardson (2008), *Non-newtonian flow and applied rheology - Engineering applications*, Butterworth-Heinemann.

Dragoni, M., M. Bonafede, E. Boschi (1986), *Downslope flow models of a Bingham liquid: implication for lava flows*. Journal of Volcanology and Geothermal Research 30, 305-25.

Dragoni, M. (1989), *A dynamical model of lava flows cooling by radiation*. Bulletin of Volcanology 51, 88-95.

Dragoni, M. (1993), *Modelling the rheology and cooling of lava flows*, in *Active Lavas: Monitoring and Modelling*, C. R. J. Kilburn and G. Luongo, University College of London Press, London, 235-61.

Dragoni, M., e A. Tallarico (1994), *The effect of crystallization on the rheology and dynamics of lava flows*. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 59, 241-52.

Dragoni, M., A. Piombo, A. Tallarico (1995), *A model for the formation of lava tubes by roofing over a channel*. *Journal of Geophysical Research* 100, 8435-47.

Dragoni, M., I. Borsari, A. Tallarico (2005), *A model for the shape of lava flow fronts*. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 110, B09203, doi:10.1029/2004JB003523.

Embleton, C., and J. Thornes (Eds.) (1979), *Process in Geomorphology*, 436 pp., John Wiley, Hoboken, N. J.

Greeley, R. (1971), *Observation of actively forming lava tubes and associated structures, Hawaii*, *Mod. Geol.* 2, 207-23.

Hulme, G. (1982), *A review of lava flow processes related to the formation of lunar sinuous rilles*. *Geophysical Surveys* 5, 245-79.

Johnson, A. M. e D. D. Pollard (1973), *Mechanics of growth of some laccolithic intrusions in the Henry Mountains, Utah*. *Tectonophysics* 18, 261-309.

Kilburn, C. R. J. (1999), *Basaltic Volcanoes and Volcanic Systems*, in *Encyclopedia of Volcanoes*, H. Sigurdsson, Academic Press, 291-305.

Kundu, K. P., e I. M. Cohen (2002), *Fluid Mechanics*, Academic Press.

Landau, L. D., e E. M. Lifchitz (1987), *Fluid Mechanics*, Pergamon Press.

Lipman, P. W., N. G. Banks, J. M. Rhodes (1985), *Gas-release induced crystallization of 1984 Mauna Loa magma, Hawaii, and effects on lava rheology*. *Nature* 317, 604-7.

McBirney, A. R., e T. Murase (1984), *Rheological properties of magmas*. *Annual Reviews in Earth and Planetary Science* 12, 337-57.

Murase, T., e A. R. McBirney (1970), *Viscosity of lunar lavas*. *Science* 167, 1491-93.

Pieri, D. C., e S. M. Baloga (1986), *Eruption rate, area and length relationships for some Hawaiian lava flows*. *Geophys. Res. Lett.* 11, 641-44.

Pinkerton, H., e R. S. J. Sparks (1976), *The 1975 sub-terminal lavas, Mount Etna: a case history of the formation of a compound lava field*. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 1, 167-82.

Pinkerton, H., e R. S. J. Sparks (1978), *Field measurements of rheology of lava*. *Nature* 276, 383-5.

Poloski, A. P., M. L. Bonebrake, A. M. Casella, M. D. Johnson, P. J. MacFarlan, J. J. Toth, H. E. Adkins, J. Chun, K. M. Denslow, M. L. Luna, J. M. Tingey (2009), *Deposition Velocities of Non-Newtonian Slurries in Pipelines: Complex Simulant Testing*, USA: N. p. Web. doi:10.2172/963206.

Robson, G. R (1967), *Thickness of Etnean lavas*. *Nature* 216, 251-2.

Shaw, H. R. T. (1963), *Obsidian-H<sub>2</sub>O viscosities at 1000 and 2000 bars in the temperature range 799 to 900° C.*. *Journal of Geophysical Research* 68, 6337-42.

Shaw, H. R., T. L. Wright, D. L. Peck, R. Okamura (1968), *The viscosity of basaltic magma: an analysis of field measurements in Makaopuhi Lava Lake, Hawaii*. *American*

Journal of Science 266, 225-4.

Sparks, R. S. J (1977), *The dynamics of bubble formation and growth in magmas: a review and analysis*. Journal of Volcanology and Geothermal Research 3, 1-37.

Sparks, R. S. J., e H. Pinkerton (1978), *Effect of degassing on rheology of basaltic lava*. Nature 276, 385-6.

Thomas, P., e J. R. Lindsay (1988), *Magmix: a basic program to calculate viscosities of interacting magmas of differing composition, temperature, and water content*. Comput. Geosci., 14: 213-28.

Treccani, "Lava", <http://www.treccani.it/vocabolario/lava/>.

Turcotte, D. L., e G. Schubert (1982), *Geodynamics, Application of Continuum Physics to Geological Problems*, John Wiley, New York cap. IV, 134-97.

Walker, G. P. L. (1973), *Lengths of lava flows*. Philosophical Transactions of the Royal Society, London A274, 107-18.

Walker, G. P. L. (1999), *Basaltic Volcanoes and Volcanic Systems*, in *Encyclopedia of Volcanoes*, H. Sigurdsson, Academic Press, 283-89.

Westrich, H. R., H. W. Stockman, J. C. Eichelberger (1988), *Degassing of rhyolitic magma during ascent and emplacement*. Journal of Geophysical Research 93, 6503-11.