ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

MECCANICA LAGRANGIANA RELATIVISTICA

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
André Georges Martinez

Presentata da:
Federico Fornasaro

Sessione Unica
Anno Accademico 2017-2018

Indice

Introduzione

La presente tesi ha lo scopo di sfruttare gli strumenti propri della meccanica analitica per dedurre alcuni risultati di notevole importanza nella teoria della relatività ristretta sviluppata da Albert Einstein nel 1905. Tale teoria è estremamente complessa, e una trattazione rigorosa andrebbe svolta attraverso il calcolo tensoriale. Questa tesi non ne farà uso, privilegiando una trattazione più classica nella quale considereremo come variabile indipendente il tempo t calcolato rispetto ad un osservatore inerziale. I risultati a cui perverremo rimarranno comunque validi e generalizzabili nel formalismo quadridimensionale attraverso l'introduzione del tempo proprio τ.
Nel primo capitolo vengono introdotti i concetti fondamentali di funzione Lagrangiana ed Hamiltoniana, l'azione lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange e di Hamilton, oltre a un breve ripasso delle equazioni di Maxwell.
Nel secondo capitolo vengono enunciati gli assiomi della teoria della relatività, le trasformazioni di Lorentz e viene mostrato come esse possano essere ricavate dall'invarianza della metrica di Minkowski $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.
Nel terzo capitolo viene derivata l'equazione della Lagrangiana a partire dalla struttura geometrica dello spaziotempo, attraverso l'analogia dell'azione con il funzionale lunghezza. Verranno poi calcolati a partire dalla Lagrangiana l'impulso e l'energia relativistica e saranno illustrati due esempi: il moto relativistico di una particella soggetta a una forza costante, e la correzione relativistica del periodo di un oscillatore armonico 1-dimensionale.
Infine nel quarto capitolo si estenderanno i risultati ottenuti anche in presenza di un campo elettromagnetico, sfruttando il concetto di potenziale generalizzato per la forza di Lorentz. Grazie a quest'ultimo verrà scritta la Lagrangiana relativistica nel campo elettromagnetico, e attraverso di essa calcolate le equazioni del moto e la funzione Hamiltoniana.

Capitolo 1

Prerequisiti

In questa sezione vengono presentati alcuni risultati molto importanti legati alla meccanica classica e all'elettromagnetismo, che ci saranno utili più avanti.

1.1 Richiami di meccanica lagrangiana ed hamiltoniana

Ricordiamo innanzitutto le seguenti:

Definizione 1. *Prendiamo un sistema meccanico, in un campo di forze conservativo, con n gradi di libertà.*
Siano $q_1, \dots, q_n$ *parametri lagrangiani,* $q = (q_1, \dots, q_n)$.
Sia $F = -\nabla V$ *la somma di tutte le forze agenti sul sistema, dove* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è l'energia potenziale del sistema.*
Se l'applicazione $t \to q(t)$*, di classe* C^1*, denota un moto, sia* $T = T(q, \dot{q})$ *l'energia cinetica del sistema.*
Definiamo la funzione di Lagrange (o Lagrangiana) del sistema la quantità $L = T - V$*, o più precisamente l'unica funzione* $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ *tale che per ogni moto* $t \to q(t)$ *si ha* $L(q(t), \dot{q}(t)) = T(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t))$.

Definizione 2. *Per un generico percorso* $[t_0, t_1] \ni t \to q(t) \in \mathbb{R}^n$*, si definisce l'azione lungo* $q(t)$ *come*

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t))dt. \tag{1.1}$$

Definizione 3. *Sia* Ω *aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$*. Sia* $q_0 : [t_0, t_1] \to \Omega$ *funzione di classe* C^1*. Si dice che* q_0 *rende stazionaria l'azione se e solo se* $\forall q : [t_0, t_1] \to$

Ω con $q(t_0) = q_0(t_0)$, $q(t_1) = q_0(t_1)$ si ha $S(q) - S(q_0) = O(N(q-q_0)^2)$, dove $N(q - q_0) = Sup_{[t_0,t_1]}\sqrt{\|q - q_0\|^2 + \|\dot{q} - \dot{q_0}\|^2}$.

Ci chiediamo adesso quando una funzione $q(t)$ rappresenti il moto di un sistema meccanico (a n gradi di libertà) di Lagrangiana $L = L(q, \dot{q}, t)$.
Si ha il seguente:

Teorema 1.1.1. *Un'applicazione $q_0 : [t_0, t_1] \to \Omega$, di classe C^2 rende stazionaria l'azione se e solo se soddisfa le equazioni differenziali*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\nabla_{\dot{q}} L(q_0(t), \dot{q_0}(t), t)\big) = \nabla_q L(q_0(t), \dot{q_0}(t), t). \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Sia $q_0 : [t_0, t_1] \to \Omega$ di classe C^2 e sia $q = q_0 + h$ una variazione di q_0 in Ω (ossia tale che $h(t_0) = h(t_1) = 0$).
Se vale

$$S(q_0+h)-S(q_0) = \int_{t_0}^{t_1} < h(t), \nabla_q L(q_0, \dot{q_0}, t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\nabla_{\dot{q}} L(q_0, \dot{q_0}, t)] > dt + O(N(h)^2), \tag{1.3}$$

allora siccome per ipotesi vale (1.2), si ha $S(q_0 + h) - S(q_0) = O(N(h)^2)$, cioè q_0 rende stazionaria l'azione. Mostriamo quindi che vale (1.3):

$$S(q_0 + h) - S(q_0) = \int_{t_0}^{t_1} [L(q_0 + h, \dot{q_0} + \dot{h}) - L(q_0, \dot{q_0})]dt.$$

Sviluppando con Taylor la funzione integranda si ha

$$S(q_0 + h) - S(q_0) = \int_{t_0}^{t_1} [< \nabla_q L(q_0, \dot{q_0}), h > + < \nabla_{\dot{q}} L(q_0, \dot{q_0}), \dot{h} >]dt + O(N(h)^2)$$

e integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} S(q_0 + h) - S(q_0) &= [< h, \nabla_{\dot{q}} L(q_0, \dot{q_0}) >]_{t_0}^{t_1} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [< h, \nabla_q L(q_0, \dot{q_0}) > - < h, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla_{\dot{q}} L(q_0, \dot{q_0}) > dt + O(N(h)^2) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} < h, \underbrace{\nabla_q L(q_0, \dot{q_0}, t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\nabla_{\dot{q}} L(q_0, \dot{q_0}, t)]}_{A(t)} > dt + O(N(h)^2). \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che q_0 renda stazionaria l'azione, cioè $S(q_0 + h) - S(q_0) = O(N(h)^2)$. Per l'equazione (1.3), ciò è equivalente a

$$\int_{t_0}^{t_1} < h, A(t) > dt + O(N(h)^2) = O(N(h)^2),$$

cioè (per le proprietà di $O(N(h)^2)$) a $\int_{t_0}^{t_1} < h, A(t) > dt = O(N(h)^2)$. Possiamo quindi affermare che esiste una costante $c > 0$ tale che $\forall h : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^2 con $h(t_0) = h(t_1) = 0$ e $Sup_{[t_0,t_1]} \|h\| \leq \frac{1}{c}$, e si ha:

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} < h, A(t) > dt \right| \leq cN(h)^2. \tag{1.4}$$

Sia ora $h_0 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^2, $h_0(t_0) = h_0(t_1) = 0$ e $Sup_{[t_0,t_1]} \|h_0\| \leq \frac{1}{c}$. Allora, per $\lambda \in (0, 1]$, la funzione $h = \lambda h_0$ verifica le stesse condizioni della h presa in precedenza, e dunque possiamo applicare su di essa l'equazione (1.4):

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} < \lambda h_0, A(t) > dt \right| \leq cN(\lambda h_0)^2 \quad \forall \lambda \in (0, 1].$$

Semplificando λ e passando al limite per $\lambda \to 0^+$, otteniamo

$$\int_{t_0}^{t_1} < h, A(t) > dt = 0 \quad \forall h_0 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n.$$

Sia ora $\chi(t) = (t - t_0)(t_1 - t)$; osserviamo che $\chi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$. Prendiamo $h_0(t) = \delta\chi(t)A(t)$, con $\delta > 0$ sufficientemente piccolo in modo che $Sup_{[t_0,t_1]} \|h_0\| \leq \frac{1}{c}$. Otteniamo così

$$\int_{t_0}^{t_1} < \delta\chi(t)A(t), A(t) > dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\chi(t)\|A(t)\|^2}_{\geq 0} dt = 0.$$

Ne consegue che $\chi(t)\|A(t)\|^2 = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow \|A(t)\|^2 = 0$ su (t_0, t_1), quindi per continuità anche su $[t_0, t_1]$, e possiamo allora concludere che

$$A(t) = \nabla_q L(q_0, \dot{q_0}, t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\nabla_{\dot{q}} L(q_0, \dot{q_0}, t)] = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

cioè q_0 è soluzione di (1.2). □

Tali equazioni prendono il nome di equazioni di Eulero-Lagrange (E-L), la cui soluzione rappresenta quindi il moto fisico (cioè il minimo del funzionale azione) di un sistema meccanico.

Conoscendo la funzione Lagrangiana $L = L(q, \dot{q}, t)$, è possibile costruire un'altra funzione, detta Hamiltoniana, partendo dall'applicazione

$$\dot{q} \longmapsto p = \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t), \tag{1.5}$$

che supporremo essere un cambiamento di variabili globale di $\mathbb{R}^d$.
$\forall q \in \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^d$, $p \in \mathbb{R}^d, t \in [t_0, t_1]$, denotiamo quindi con $y(q, p, t) \in \mathbb{R}^d$ l'unico punto critico dell'applicazione

$$\dot{q} \longmapsto < p, \dot{q} > -L(q, \dot{q}, t),$$

ossia $y(q, p, t)$ soddisfa $p = \nabla_{\dot{q}} L(q, y(q, p, t), t)$.

Definizione 4. *Per L che soddisfa* (1.5)*, si pone*

$$H(q, p, t) =< p, y(q, p, t) > -L(q, y(q, p, t), t) \tag{1.6}$$
$$= v.c_{\dot{q}}(< p, \dot{q} > -L(q, \dot{q}, t)) \tag{1.7}$$

dove per $v.c_{\dot{q}}$ *si intende il valore critico della funzione rispetto a* $\dot{q}$.
$H : \Omega \times \mathbb{R}^d \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *si chiama la trasformata di Legendre di L.*
Se L è la Lagrangiana di un sistema meccanico, allora H si chiama Hamiltoniana dello stesso sistema.

Analogamente a quanto visto per la meccanica lagrangiana, è possibile esprimere le equazioni del moto in funzione dei parametri (q, p) (anzichè rispetto a $(q, \dot{q})$).
Il seguente teorema mette in relazione le eq. (1.2) con un nuovo sistema di equazioni, detto di Hamilton.

Teorema 1.1.2. *Sia* $q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$*, e sia p che soddisfa* (1.5)*.*
Se $q(t)$ *è soluzione di* (1.2) *e* $p(t) = \nabla_{\dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t)$*, allora la coppia* $(q(t), p(t))$ *è soluzione di*

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H(q, p, t) \\ \dot{p} = -\nabla_q H(q, p, t). \end{cases} \tag{1.8}$$

Reciprocamente, se un'applicazione $[t_0, t_1] \ni t \mapsto (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^{2d}$ *è soluzione di* (1.8)*, allora q(t) è soluzione di* (1.2) *e* $p(t) = \nabla_{\dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t)$.

1.2 Le equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell rappresentano uno dei più alti traguardi raggiunti dalla fisica teorica dell'800, mettendo in relazione le interazioni reciproche tra campo elettrico e campo magnetico, fino ad allora considerati separatamente.

La prima equazione, detta legge di Gauss, afferma che il flusso di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa S è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie, diviso per la costante elettrica del mezzo in cui si trovano le cariche.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0}, \tag{1.9}$$

dove $\vec{E}$ è il campo elettrico, Q è la carica elettrica e ϵ_0 è la costante elettrica del mezzo.

Per il campo magnetico si dimostra invece che il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è sempre nullo, ossia

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{1.10}$$

Quindi non possono esistere monopoli magnetici (contrariamente alle cariche elettriche), e le linee del campo magnetico sono sempre chiuse.

La terza legge, detta di Faraday-Neumann-Lenz, riguarda la circuitazione del campo elettrico lungo una curva chiusa; essa, ricordando che $\vec{E}$ è un campo conservativo, risulta essere nulla per una generica curva γ. Tuttavia, se siamo in presenza di un campo magnetico $\vec{B}$, la variazione del flusso di tale campo attraverso la superficie S delimitata da γ genera una forza elettromotrice e quindi si viene a formare un campo elettrico "indotto" da $\vec{B}$.
Il verso della corrente indotta è tale da generare un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso ϕ_B che l'ha generata. In simboli:

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t}. \tag{1.11}$$

Infine, l'ultima equazione rappresenta una modifica di Maxwell alla legge di Ampère, che affermava la dipendenza della circuitazione di un campo magnetico dalla somma algebrica delle correnti concatenate alla curva γ.
Maxwell, osservando che anche un campo elettrico variabile genera un campo magnetico indotto, aggiunse un termine all'equazione che tenesse conto dell'aumento della circuitazione proporzionalmente alla variazione del flusso

del campo elettrico.
Si ha quindi:
$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_{\text{conc.}} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\phi_E}{\mathrm{d}t}. \tag{1.12}$$

Sfruttando ora le relazioni
$$Q_V = \int_V \rho dV,$$
dove Q_V è la distribuzione di carica elettrica su un volume V, e ρ è la densità di cariche nel volume infinitesimo dV

e
$$i_S = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S},$$
dove i_S è la corrente totale che scorre sulla superficie S e $\vec{j}$ è la corrente che passa lungo la superficie infinitesima dS

e applicando il principio di conservazione della carica, possiamo scrivere l'equazione di continuità
$$\frac{\mathrm{d}Q_V}{\mathrm{d}t} = \oiint_{S=\partial V} \vec{j}\cdot d\vec{S}. \tag{1.13}$$

Vogliamo ora scrivere le equazioni di Maxwell in forma differenziale (ossia impiegando soltanto operatori differenziali quali divergenza e rotore). Per fare ciò abbiamo bisogno dei seguenti teoremi:

Teorema 1.2.1 (Teorema della divergenza)**.** *Sia V un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^3$ con frontiera $S = \partial V$ di classe C^2, e sia $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$. Allora*
$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V \big(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\big) dV. \tag{1.14}$$

Teorema 1.2.2 (Teorema di Stokes)**.** *Sia S una superficie regolare a tratti, con frontiera $\gamma = \partial S$ di classe C^1, e sia $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^3$. Allora*
$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_S \big(\vec{\nabla}\times\vec{F}\big)\cdot d\vec{S}. \tag{1.15}$$

Sfruttando (1.14), possiamo scrivere

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$
$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Allo stesso modo, grazie a (1.15) e sfruttando la relazione $\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ (e analogamente con ϕ_B), si ha

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Sfruttando la regolarità delle superfici e delle funzioni integrande, possiamo uguagliare gli argomenti degli integrali ottenuti, ottenendo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

In particolare, in assenza di cariche e correnti, le equazioni di Maxwell diventano omogenee, ovvero si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Capitolo 2

Le trasformazioni di Lorentz

2.1 Gli assiomi della teoria della relatività

La teoria della relatività ristretta è basata su un principio di fondamentale importanza, ossia la costanza della velocità della luce per ogni sistema inerziale. Questo è l'unico vero punto di rottura rispetto alla dinamica classica galileiana. Anche in teoria della relatività continuano infatti a valere i seguenti principi:

Assioma sui sistemi inerziali

Esistono dei sistemi di riferimento, che diciamo inerziali, aventi la proprietà caratteristica che *i corpi non soggetti a forze si muovono rispetto a essi di moto rettilineo uniforme.*

Principio di relatività

Tutti i sistemi inerziali sono equivalenti.

Quest'ultimo principio deve valere sia nel dominio dei fenomeni meccanici, sia in quello dei fenomeni elettromagnetici. Enunciamo quindi il seguente:

Principio di costanza della velocità della luce

La luce ha la stessa velocità c (nel vuoto) rispetto a qualunque sistema inerziale. Più in generale, si ammette che il principio di relatività si applichi non solo nel dominio dei fenomeni meccanici, ma anche in quello dei fenomeni elettromagnetici.

2.2 Le trasformazioni di Galileo e quelle di Lorentz

Consideriamo il caso di un sistema di riferimento K' che trasli con velocità costante v, lungo l'asse delle x di un sistema inerziale K. Prendiamo ora in considerazione un evento, ossia un oggetto descritto nei due sistemi da due diversi insiemi di coordinate, rispettivamente (x, y, z, t) e (x', y', z', t'). Le trasformazioni di Galileo e di Lorentz forniscono la relazione tra queste coordinate.
Le trasformazioni di Galileo G_v sono date dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t, \end{cases} \tag{2.1}$$

mentre quelle di Lorentz L_v sono date da:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x), \end{cases} \tag{2.2}$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.3}$$

è il cosiddetto fattore di Lorentz, di centrale importanza in tutta la teoria della relatività.

Illustriamo ora alcune conseguenze fondamentali delle trasformazioni di Lorentz:

1. La relazione $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$ comporta la non assolutezza della contemporaneità, ossia l'esistenza di un tempo "locale". Infatti gli eventi contemporanei per K' sono il sottoinsieme caratterizzato da $t' = cost$, ad esempio $t' = 0$. Ma la relazione $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$ mostra che questo insieme di eventi $t' = 0$, quando venga letto nel sistema di coordinate di K, non coincide con un sottoinsieme di contemporaneità per K, cioè non coincide con un insieme definito da $t = cost$, perchè esso è invece definito da $t - \frac{v}{c^2}x = 0$. Pertanto, per conoscere il tempo t' rispetto a

K' non basta conoscere il tempo t rispetto a K, ma bisogna conoscere anche la posizione x rispetto a K.

2. Affinchè il fattore di Lorentz sia ben posto, deve valere $|v| < c$, ossia la velocità relativa di un sistema inerziale rispetto a un altro ha sempre modulo inferiore alla velocità della luce. Non è dunque possibile accelerare una particella fino a portarla a una velocità superiore o uguale a quella della luce (se ciò fosse possibile, sarebbe possibile associare alla particella un sistema di riferimento inerziale che avrebbe velocità di traslazione rispetto al primo uguale o superiore a quella della luce, che però non è consentito dalle trasformazioni di Lorentz).

3. Se si considera $c \to +\infty$, le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo:

$$L_v \to G_v \quad \text{per} \quad c \to \infty$$

Ossia, se $|v| \ll c$ (equivalente a $\frac{v^2}{c^2} \to 0$, e quindi a $c \to \infty$), le trasformazioni di Lorentz sono asintoticamente uguali a quelle di Galileo.

Un'altra immediata conseguenza è la composizione relativistica delle velocità. Denotando con v_{tr} la velocità di trascinamento di K',si ha il seguente:

Teorema 2.2.1. *Siano due sistemi inerziali K e K', con K' che trasla con velocità v_{tr} lungo l'asse x di K. Consideriamo un punto che si muove lungo l'asse x: il suo moto è descritto in K e K' rispettivamente dalle funzioni $x = x(t)$ e $x' = x'(t')$. Vogliamo esprimere la relazione tra la velocità assoluta $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, calcolata rispetto a K, e la velocità relativa $v' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$, calcolata rispetto a K'. Si ha*

$$v = \frac{v' + v_{tr}}{1 + v'v_{tr}/c^2}.$$

In particolare, se $v' = c$ allora $v = c$.

Se poi la velocità del punto ha anche una componente fuori dall'asse x, che chiamiamo $v'_y \neq 0$, allora si ha:

$$v_x = \frac{v'_x + v_{tr}}{1 + v'_x v_{tr}/c^2},$$
$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - v_{tr}^2/c^2}}{1 + v'_x v_{tr}/c^2}.$$

Nel limite non relativistico $|v_{tr}| \ll c$ si riottengono le formule di Galileo $v_x = v'_x + v_{tr}, v_y = v'_y$.

Dimostrazione. Consideriamo la trasformazione inversa $(L_{v_{tr}})^{-1}$ data da

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v_{tr}t') \\ y = y' \\ t = \gamma(t' + \frac{v_{tr}}{c^2}x'). \end{cases}$$

Usando la relazione $dx' = v'_x dt'$ (e analogamente $dy' = v'_y dt'$) si ha:

$$\begin{cases} dx = \gamma(dx' + v_{tr}dt') = \gamma(v'_x + v_{tr})dt' \\ dy = dy' \\ dt = \gamma(dt' + \frac{v_{tr}}{c^2}dx') = \gamma(1 + \frac{v_{tr}}{c^2}v'_x)dt'. \end{cases}$$

Sostituendo $dt' = \frac{dt}{\gamma(1+\frac{v_{tr}}{c^2}v'_x)}$ a dx si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v'_x + v_{tr}}{1 + v'_x v_{tr}/c^2}$$

e ricordando che $dy = dy' = v'_y dt'$ si ha

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{v'_y\sqrt{1 - v_{tr}^2/c^2}}{1 + v'_x v_{tr}/c^2}.$$

□

2.3 Derivazione delle trasformazioni di Lorentz

Consideriamo l'equazione dei fronti d'onda sferici di un segnale luminoso centrati nell'origine degli assi, data da

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0. \tag{2.4}$$

Siccome tali fronti si propagano alla velocità della luce, il raggio della sfera è proprio $r = ct$ e, per il principio di costanza della velocità della luce, la forma dell'equazione resta invariata indipendentemente dal sistema di riferimento che stiamo considerando. Dobbiamo quindi costruire delle trasformazioni lineari che preservino (2.4).
Consideriamo per semplicità un sistema non inerziale K' che si muova rispetto a K (sistema inerziale) soltanto lungo l'asse delle x, ossia tale che $y = y'$ e $z = z'$. L'equazione (2.4) diventa quindi

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2. \tag{2.5}$$

Cerchiamo delle trasformazioni della forma:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bct \\ ct' = Cx + Dct. \end{cases} \tag{2.6}$$

Le trasformazioni devono essere lineari, altrimenti il principio di relatività non sarebbe soddisfatto, dato che potrebbero presentarsi forze fittizie (e quindi accelerazioni) in un sistema di riferimento, mentre in un altro la velocità rimarrebbe costante, e quindi le equazioni non manterrebbero la stessa forma per tutti gli osservatori.
Sostituendo (2.6) in (2.5) otteniamo

$$(ct)^2 - x^2 = [(Cx)^2 + (Dct)^2 + 2CDcxt] - [(Ax)^2 + (Bct)^2 + 2ABcxt] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 - C^2 = 1 \\ D^2 - B^2 = 1 \\ AB = CD. \end{cases}$$

Queste relazioni ci suggeriscono

$$A = D = \cosh\phi, \quad C = B = -\sinh\phi \tag{2.7}$$

dove $\phi \in \mathbb{R}$ e la scelta dei segni è fatta in modo che x e t siano concordi a x' e t'.
Sostituendo (2.7) in (2.6) otteniamo:

$$\begin{cases} x' = x\cosh\phi - ct\sinh\phi \\ ct' = -x\sinh\phi + ct\cosh\phi. \end{cases}$$

Per calcolare ϕ sfruttiamo il fatto che il sistema non inerziale si muove di velocità costante v rispetto a quello inerziale, e quindi se $x' = 0$, allora $x = vt$. Si ha dunque

$$vt\cosh\phi - ct\sinh\phi = 0 \Rightarrow \tanh\phi = \frac{v}{c} =: \beta. \tag{2.8}$$

Da (2.8) si ha $\sinh\phi = \beta\cosh\phi$, e sfruttando la proprietà delle funzioni iperboliche $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$ possiamo scrivere

$$\cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma, \quad \sinh\phi = \gamma\beta.$$

Quindi in conclusione le equazioni (2.6) diventano

$$\begin{cases} x' = x\gamma - ct\gamma\beta = \gamma(x - vt) \\ t' = \frac{1}{c}(-\gamma\beta x + \gamma ct) = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x). \end{cases}$$

Capitolo 3

Lagrangiana della particella libera

3.1 La metrica dello spaziotempo

Abbiamo visto nel capitolo precedente che la relazione $c^2t^2 - l^2$ (dove $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$) non viene modificata dalle trasformazioni di Lorentz. Tale relazione può essere vista come una "distanza" indipendente dal sistema di riferimento. Preso un punto-evento dello spaziotempo possiamo quindi individuarlo, rispetto all'origine del sistema inerziale, da un quadrivettore (ct, x, y, z), la cui norma (o pseudolunghezza, per distinguerla da quella classica euclidea) è data da $s^2 = c^2t^2 - l^2$.
Un quadrivettore nello spaziotempo può quindi avere anche norma negativa (in tal caso s sarà immaginario) o nulla. Questi ultimi sono i vettori definenti il cono di luce con vertice nell'origine, e per questo sono chiamati vettori di tipo luce. Ciò è dovuto al fatto che, se si considerano rette nello spaziotempo giacenti su tale insieme, i corrispondenti movimenti sono tali che $l^2(t) = c^2t^2$, e quindi hanno velocità c, cioè sono raggi di luce.
Analogamente definiamo i vettori di tipo tempo, per i quali $s^2 > 0$ (ovvero tali che $|ct| > l$), e i vettori di tipo spazio, per i quali $s^2 < 0$ (ovvero tali che $|ct| < l$).

Veniamo ora alla "versione infinitesima" della metrica pseudoeuclidea, ossia la relazione

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 \qquad (dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Da questa formula segue che, per le curve di tipo tempo, si ha

$$ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad cdt.$$

Se prendiamo infatti come parametro il tempo t, ricordando $dl = vdt$, si ha

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - v^2dt^2 = c^2dt^2(1 - \frac{v^2}{c^2}).$$

La scelta del segno positivo per la radice di ds^2 è convenzionale, e corrisponde alla scelta di orientare la curva in modo che s cresca al crescere di t.

3.2 Deduzione della Lagrangiana

Vogliamo mostrare ora che la Lagrangiana di una particella libera in ambito relativistico è data da

$$L(q, \dot{q}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}.$$

Tale scrittura è legata all'assegnazione della metrica pseudoeuclidea $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$, ovvero (per le curve di tipo tempo) a $ds = \gamma^{-1}cdt$

Osserviamo innanzitutto che un moto rettilineo uniforme, dato dall'equazione $x(t) = x_0 + v_0t$ (x_0, v_0 vettori assegnati), è una retta nello spaziotempo. Sappiamo che le rette nello spazio euclideo sono geodetiche, cioè sono le curve più corte che congiungono due punti dello spazio. Ciò è equivalente, in meccanica classica, ad affermare che in assenza di forze il moto rettilineo uniforme, di cui la retta è la rappresentazione geometrica, minimizza l'azione lagrangiana (dove la lagrangiana L è data solo dall'energia cinetica).

Se ora guardiamo a un movimento come curva di tipo tempo (cioè con $\|\dot{q}\| < c$) nello spaziotempo, ci aspettiamo che le rette nello spaziotempo (che rappresentano sempre moti rettilinei uniformi) siano anch'esse geodetiche. Vale infatti il seguente

Teorema 3.2.1. *Le rette di tipo tempo sono estremali del funzionale lunghezza*

$$s = \int ds = \int \sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}} \quad cdt,$$

ossia sono geodetiche per la lunghezza pseudoeuclidea.

Dimostrazione. Osserviamo che la lunghezza pseudoeuclidea $s[x(t)]$ di una curva Γ nello spaziotempo, rappresentata da una funzione $x = x(t)$, data da

$$s[x(t)] = \int_\Gamma \sqrt{1 - \frac{\|\dot{x}(t)\|^2}{c^2}} \quad cdt,$$

ha lo stesso aspetto che l'azione $S[q(t)] = \int L(q, \dot{q}, t)dt$, corrispondente a un movimento $q = q(t)$, ha in ambito lagrangiano. Quindi nel nostro caso l'analogo della Lagrangiana è la funzione $f(\dot{q}^2) = c\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}$. Il problema di ricercare i moti $x = x(t)$ che sono estremali della lunghezza nello spaziotempo $(s[x(t)])$ è equivalente a ricercare i movimenti relativi alla Lagrangiana $f(\dot{q}^2)$. Se mostriamo che quest'ultima produce moti rettilinei uniformi, allora concludiamo che tali moti, rappresentati da rette di tipo tempo, minimizzano la lunghezza $s[x(t)]$, e quindi possiamo prendere $f(\dot{q}^2)$ come Lagrangiana relativistica.

Prendiamo per semplicità $c = 1$. Mostriamo che la soluzione delle eq. di Eulero-Lagrange per $f(\dot{q}^2) = \sqrt{1 - \|\dot{q}\|^2}$ è data da un moto rettilineo uniforme. Per (1.2), si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla_{\dot{q}} f(\dot{q}^2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f'(\dot{q}^2)2\dot{q}) = 0 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad < 2f''(\dot{q}^2)\dot{q}, \ddot{q} > \dot{q} + f'(\dot{q}^2)\ddot{q} = 0.
\end{aligned}
$$

Per il teorema della funzione implicita, f è invertibile in un opportuno intorno di $\dot{q}$, quindi $f' \neq 0$ localmente.

Notiamo inoltre che anche $< 2f''(\dot{q}^2)\dot{q}, \ddot{q} > \neq 0$, altrimenti $f'(\dot{q}^2)\ddot{q} = 0$, e per l'invertibilità di f ciò implica $\ddot{q} = 0$, cioè il moto è uniforme (e quindi avrei concluso la dimostrazione).

Si ha quindi che $\ddot{q}$ e $\dot{q}$ sono linearmente dipendenti, ossia $\ddot{q} = \lambda(t)\dot{q} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ (cioè $\lambda(t)$ è una funzione scalare).

Ciò è equivalente a scrivere $\dot{v} = \lambda(t)v$, la cui soluzione è data da $v(t) = v(0)e^{\Lambda(t)}$, con $\Lambda'(t) = \lambda(t)$.

Siccome $e^{\Lambda(t)} \in \mathbb{R}$, $\forall t$ $v(t)$ è parallelo a $v(0)$, quindi il moto è rettilineo.

Siano ora $v_0 := v(0)$, $x_0 := x(0)$ e $\mu(t) := e^{\Lambda(t)}$. Osserviamo che

$$
\dot{q}(t) = \mu(t)v_0 \quad \Rightarrow \quad q(t) = x_0 + M(t)v_0, \quad \textit{dove} \quad M'(t) = \mu(t)
$$

Per mostrare che il moto è anche uniforme, mi basta far vedere che $M(t)$ è lineare.

Sostituendo $\dot{q}(t) = \mu(t)v_0$ in $< 2f''(\dot{q}^2)\dot{q}, \ddot{q} > \dot{q} + f'(\dot{q}^2)\ddot{q} = 0$, otteniamo

$$
< 2f''(\mu^2 v_0^2)\mu v_0, \dot{\mu} v_0 > \mu v_0 + f'(\mu^2 v_0^2)\dot{\mu} v_0 = 0.
$$

Raggruppando $\dot{\mu}$ e semplificando $v_0 \neq 0$, si ha

$$
\dot{\mu}[2f''(\mu^2 v_0^2)\|\mu v_0\|^2 + f'(\mu^2 v_0^2)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mu} = 0,
$$

infatti il termine $2f''(u)u + f'(u)$, dove $f(u) = \sqrt{1-u}$ e $u = \mu^2 v_0^2$, è diverso da 0 $\forall u$ (si vede dal calcolo delle derivate, infatti $f'(u) = -\frac{1}{2}(1-u)^{-1/2}$ e

$f''(u) = -\frac{1}{4}(1-u)^{-3/2}$, quindi siccome u è positivo per definizione i segni sono concordi).
Si ha dunque

$$\dot{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad M'(t) = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad M(t) = \alpha t + \beta,$$

cioè $M(t)$ è lineare. □

Siccome nella scelta della Lagrangiana si ha sempre libera una costante moltiplicativa k (dato che essa non modifica le equazioni del moto), possiamo prendere come Lagrangiana relativistica la funzione

$$L(q, \dot{q}, t) = k\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}.$$

Determiniamo ora il fattore k attraverso il principio di corrispondenza, ovvero richiediamo che, per velocità $\dot{q}$ molto più piccole di quella della luce, la Lagrangiana relativistica si riconduca a quella classica.

$$L \approx \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 + \text{cost} \quad \textit{per} \quad \frac{\|\dot{q}\|}{c} \to 0. \tag{3.1}$$

Questa condizione viene soddisfatta per una opportuna scelta di k.
Sfruttando lo sviluppo di Taylor della radice ($\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ per $x \to 0$), per $\frac{\|\dot{q}\|}{c} \to 0$ si ha

$$k\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}} \approx k - \frac{k}{2}\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}.$$

Quindi, confrontando lo sviluppo appena trovato con (3.1), avremo necessariamente $k = -mc^2$.

Possiamo scrivere finalmente la forma finale della nostra Lagrangiana, data da

$$L(q, \dot{q}) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}. \tag{3.2}$$

Osservazione 1. *Osserviamo che la dimostrazione del teorema 3.2.1 è vera per una generica funzione $F(\dot{q}^2)$ di classe C^2 che soddisfi le ipotesi di invertibilità locale e tale che $2F''(\mu^2 v_0^2)\|\mu v_0\|^2 + F'(\mu^2 v_0^2) \neq 0$ $\forall \mu^2 v_0^2$.*
Per mostrare che la Lagrangiana relativistica è effettivamente (3.2)*, partiamo definendo l'impulso relativistico $p := m\gamma\dot{q}$ in analogia con l'impulso generalizzato $p = m\dot{q}$. Vogliamo che, presa L Lagrangiana del sistema, valga*

$$m\gamma\dot{q} = \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}).$$

Le soluzioni saranno quindi date da $L(q,\dot{q}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}} + \alpha$, *dove* α *è una costante arbitraria (che non modifica le equazioni del moto).*

Nel successivo paragrafo tuttavia ricaveremo l'impulso proprio a partire dalla Lagrangiana ottenuta dal teorema (e non viceversa come abbiamo appena fatto), evitando così di dare per scontata l'equazione dell'impulso relativistico.

3.3 L'energia e l'impulso della particella libera

Introduciamo l'impulso generalizzato $p = \nabla_{\dot{q}} L(q,\dot{q})$ e l'energia generalizzata $E =< p, \dot{q} > -L(q,\dot{q})$, ovvero l'Hamiltoniana H scritta nelle variabili $(q,\dot{q})$.

Teorema 3.3.1. *Per la particella libera, l'impulso* p *e l'energia* E *sono dati da*

$$\begin{aligned} p &= m\gamma\dot{q}, \\ E &= m\gamma c^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

dove chiaramente $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}}$.
Inoltre p *ed* E *non sono indipendenti, ma si ha*

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \|p\|^2 = m^2c^2. \tag{3.4}$$

In particolare, nel limite nonrelativistico $\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2} \ll 1$ *si ha*

$$\begin{aligned} p &= m\dot{q}, \\ E &= \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 + mc^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Svolgendo i calcoli si ha

$$p = \nabla_{\dot{q}} L(q,\dot{q}) = \frac{m\dot{q}}{\sqrt{1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}}.$$

$$E(q,\dot{q}) =< p, \dot{q} > -L(q,\dot{q}) = \frac{m\|\dot{q}\|^2}{\sqrt{1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}} =$$

$$= mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}}\left(\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2} + \left(1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}\right)\right) = mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}}.$$

Analogamente

$$(E/c)^2 - p^2 = m^2\gamma^2(c^2 - \|\dot{q}\|^2) = m^2c^2.$$

Infine le approssimazioni nonrelativistiche si ottengono da
$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. $\square$

Una interessante conseguenza fisica è la presenza della cosidetta "energia a riposo". Infatti, nel limite di piccole velocità, abbiamo ottenuto per l'energia l'espressione

$$E \approx \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 + mc^2.$$

Si ha dunque che l'energia della particella libera è composta da una parte causata dal movimento, cioè che essa possiede per il fatto di muoversi rispetto a un sistema inerziale (l'energia cinetica $m\|\dot{q}\|^2/2$), e da una parte, l'energia a riposo, che essa possiede per il solo fatto di avere una massa, e che coincide con l'energia che essa ha nel sistema "comobile" (data dalla quantità mc^2).

3.4 Esempi

Vediamo un esempio pratico: consideriamo una particella sottoposta a una forza costante $F = ma$ diretta lungo l'asse delle x (e positivamente orientata). Allora la Lagrangiana relativistica sarà:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + max,$$

dove $\beta = \dot{x}/c$.
Osservando che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-(\frac{\dot{x}}{c})^2}},$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = ma,$$

applicando le equazioni di Eulero-Lagrange si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{a}{c}.$$

Integrando entrambi i membri rispetto a t otteniamo

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{at+v_0}{c} \Rightarrow \beta = \frac{at+v_0}{\sqrt{c^2+(at+v_0)^2}},$$

dove abbiamo supposto β positiva (se fosse negativa avremmo lo stesso moto ma in direzione opposta) e v_0 costante di integrazione.
Integrando nuovamente otteniamo

$$x - x_0 = c\int_0^t \frac{at' + v_0}{\sqrt{c^2 + (at' + v_0)^2}} dt' \quad \Rightarrow$$

$$x - x_0 = \frac{c}{a}\left[\sqrt{c^2 + (at + v_0)^2} - \sqrt{c^2 + v_0^2}\right],$$

che è l'equazione del moto della particella.
In particolare, se consideriamo $x_0 = 0, v_0 = 0$, allora l'equazione precedente può essere scritta come

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{a^2},$$

che è l'equazione di una iperbole nel piano (x, t).
Considerando $(at+v_0) \ll c$ (limite nonrelativistico) e sviluppando con Taylor si ha

$$x - x_0 = \frac{c}{a}\left[\sqrt{c^2 + (at + v_0)^2} - \sqrt{c^2 + v_0^2}\right] \quad \Rightarrow$$

$$x - x_0 = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{at + v_0}{c}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}\right] \approx \frac{c^2}{a}\left[1 + \frac{(at + v_0)^2}{2c^2} - 1 - \frac{v_0^2}{2c^2}\right] \quad \Rightarrow$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2a}(a^2t^2 + 2v_0at + v_0^2 - v_0^2) = v_0t + \frac{1}{2}at^2,$$

che rappresenta la ben nota formula del moto uniformemente accelerato (con accelerazione costante a).

Un altro esempio interessante è dato dall'oscillatore armonico relativistico 1-dimensionale. In questo caso la Lagrangiana è

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \beta^2} - \frac{1}{2}kx^2,$$

con β definita come sopra.
Siccome la Lagrangiana L è indipendente dal tempo, l'energia totale E è una costante del moto.
Considerando $E =< p, \dot{x} > -L(x, \dot{x})$ e $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, si ha

$$E = m\gamma\beta^2c^2 + mc^2\gamma^{-1} + \frac{1}{2}kx^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\beta^2 + \sqrt{1 - \beta^2}\right) + V(x) =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V(x) = cost.$$

Isolando β si ha

$$\beta^2 = 1 - \frac{m^2c^4}{(E-V)^2} > 0 \iff E - V > mc^2. \tag{3.6}$$

Essendo $V(x)$ l'equazione di una parabola con vertice nell'origine, se vale (3.6) il punto materiale dovrà oscillare tra due radici semplici, che chiamo b e $-b$ (dato che la funzione potenziale è simmetrica rispetto all'asse delle y). Calcoliamo ora il periodo dell'oscillazione:

$$\beta = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c\sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{(E-V(x))^2}},$$

e integrando sull'intervallo $[0,b]$, a cui corrisponde $1/4$ dell'oscillazione completa, indicando con τ il periodo di oscillazione abbiamo:

$$\frac{\tau}{4} = \int_0^b \frac{dx}{c\sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{(E-V(x))^2}}}. \tag{3.7}$$

Da

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}kb^2$$

otteniamo

$$\frac{E-V(x)}{mc^2} = \frac{mc^2 + \frac{1}{2}(kb^2 - kx^2)}{mc^2} = 1 + \frac{k}{2mc^2}(b^2 - x^2),$$

e considerando $V \ll mc^2$ si ha

$$\frac{E-V(x)}{mc^2} = 1 + \epsilon \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(1+\epsilon)^{-2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\epsilon\big(1 - \frac{3}{2}\epsilon\big)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\left(1 + \frac{3}{4}\epsilon\right).$$

Grazie a queste approssimazioni possiamo calcolare esplicitamente l'integrale (3.7):

$$\tau = \frac{4}{c}\int_0^b \frac{1 + \frac{3}{8}\frac{k}{mc^2}(b^2 - x^2)}{\sqrt{\frac{k}{mc^2}(b^2 - x^2)}}dx = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{3kb^2}{16mc^2}\right).$$

Osserviamo che il periodo dell'oscillazione in ambito relativistico è più lungo di quello classico (dato da $\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$), e contrariamente a quest'ultimo dipende dall'ampiezza dell'oscillazione (cioè, nel nostro caso, da b). Inoltre si ha

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_0} = \frac{3kb^2}{16mc^2} = \frac{3}{8}\frac{V_{\max}}{mc^2}.$$

Capitolo 4

Lagrangiana ed Hamiltoniana di una particella nel campo elettromagnetico

4.1 Il potenziale generalizzato

Introduciamo innanzitutto i potenziali elettromagnetici Φ e $\vec{A}$.

Proposizione 4.1.1. *Le equazioni di Maxwell viste nel capitolo 1 si traducono nella seguente proprietà: esistono un potenziale scalare Φ e un potenziale vettore $\vec{A}$ che forniscono i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ mediante le relazioni*

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{4.1}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. La prima equazione si ha osservando che la divergenza di un rotore è sempre nulla, e quindi se prendiamo $\vec{A}(q,t)$ tale che $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ si ha $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.
La seconda deriva dalla prima, infatti

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Si ha dunque

$$\vec{\nabla} \times \Bigg(\underbrace{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\vec{F}}\Bigg) = 0 \iff \vec{F} \text{ è conservativo} \iff \exists \Phi(q,t) \text{ tale che } \vec{F} = -\nabla\Phi.$$

$\square$

Siamo ora interessati a scrivere la Lagrangiana di una particella in un campo elettromagnetico, ossia sottoposta alla forza di Lorentz

$$\vec{F}(q,\dot{q},t) = e\big(\vec{E} + \dot{q} \times \vec{B}\big),$$

dove e è la particella carica sulla quale agisce $\vec{F}$ ed $\vec{E} = \vec{E}(q,t)$, $\vec{B} = \vec{B}(q,t)$. Il problema è che tale forza non è conservativa, quindi dobbiamo cercare una espressione che generalizzi la nozione di potenziale al caso di forze non conservative. Tenuto conto di ciò diamo la seguente:

Definizione 5. *Siano $P_1, \dots, P_n$ punti materiali di massa $m_1, \dots, m_n$, e sia $Q : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ un sistema di forze applicate a $P = (P_1, \dots, P_n)$. Diciamo che Q ammette $V : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ come potenziale generalizzato se si ha*

$$Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}. \tag{4.3}$$

Sappiamo infatti che nel caso di una forza conservativa l'equazione $\vec{F} = m\ddot{q} = -\nabla V_0$ può essere scritta nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial q} = 0,$$

che non sono altro che le equazioni (1.2) calcolate per ogni coordinata q del vettore dei parametri lagrangiani, e con $L_0 = T - V_0 \quad (T = \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2)$. Se consideriamo l'equazione

$$m\ddot{q} = \vec{F} + \vec{Q}$$

con

$$\vec{F} = -\nabla V_0, \qquad \vec{Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}$$

allora possiamo scrivere tale equazione nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

con $L = L_0 - V$.

E' dunque possibile formulare le equazioni di Eulero Lagrange anche per particelle soggette a forze dipendenti dalla velocità ma ammettenti un potenziale generalizzato V. Vogliamo ora dimostrare che la forza di Lorentz ammette potenziale generalizzato.

Teorema 4.1.2. *La forza di Lorentz* $\vec{F}(q,\dot{q},t) = e\big(\vec{E} + \dot{q} \times \vec{B}\big)$ *ammette un potenziale generalizzato*

$$V(q,\dot{q},t) = e\big(\Phi - <\dot{q}, \vec{A}>\big)$$

dove $\vec{A} = \vec{A}(q,t)$ *e* $\Phi = \Phi(q,t)$ *sono i potenziali visti in precendenza.*

Dimostrazione. Prendiamo per comodità $e = 1$.
Osserviamo che, indicando con $d_q(\vec{A})$ la matrice Jacobiana di $\vec{A}$ rispetto a q, si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial q} \equiv \nabla V = \nabla \Phi - \nabla(<\dot{q}, \vec{A}>) \\
&\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = -\vec{A} \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right) = -<d_q(\vec{A}), \dot{q}> - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Sfruttando l'identità

$$\nabla(<\dot{q}, \vec{A}>) = <d_q(\vec{A}), \dot{q}> - \dot{q} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

si ha infine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial V}{\partial q} = -\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t} + \dot{q} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{E} + \dot{q} \times \vec{B}$$

□

L'equazione di Newton (nonrelativistica)

$$m\ddot{q} = e\big(\vec{E} + \dot{q} \times \vec{B}\big)$$

è equivalente all'equazione di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

dove la lagrangiana L è definita da

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 - e\big(\Phi - <\dot{q}, \vec{A}>\big).$$

4.2 Lagrangiana nel campo elettromagnetico ed equazioni del moto

Vogliamo ora scrivere la Lagrangiana relativistica di una particella in presenza di campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ assegnati (o equivalentemente in presenza dei potenziali Φ e $\vec{A}$).
Procedendo in modo analogo al caso nonrelativistico, e utilizzando la Lagrangiana libera

$$L_0 = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}$$

studiata nel capitolo 3, possiamo formulare il seguente:

Teorema 4.2.1. *La Lagrangiana relativistica di una particella in un campo elettromagnetico è data da $L = L_0 - V$, dove L_0 è la Lagrangiana relativistica libera e V è il potenziale generalizzato della forza di Lorentz, ovvero:*

$$L(q, \dot{q}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}} - e\big(\Phi - < \dot{q}, \vec{A} > \big) \tag{4.4}$$

e ricordando che $\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}} = \frac{m\dot{q}}{\sqrt{1-\frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}} = m\gamma\dot{q}$ si ha l'equazione del moto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(m\gamma\dot{q}\big) = e\big(\vec{E} + \dot{q} \times \vec{B}\big). \tag{4.5}$$

Grazie all'equazione (4.5) possiamo enunciare un teorema analogo a quello dell'energia cinetica in meccanica classica, in cui il lavoro L compiuto da una forza su un corpo di massa m lungo una traiettoria di un moto è uguale alla differenza di energia cinetica $T = \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2$ del corpo nel punto finale e nel punto iniziale. Indicando con dT la variazione infinitesima di energia cinetica e con dL il lavoro infinitesimo, si ha infatti

$$dT = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}dt = < m\dot{q}, \ddot{q} > dt = < m\ddot{q}, \dot{q} > dt = < F, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} > dt = dL$$

Vediamo cosa succede nel caso relativistico, in presenza della forza di Lorentz:

Teorema 4.2.2. *Il lavoro compiuto dalla forza di Lorentz su una particella di carica e è uguale alla variazione infinitesima di energia relativistica $E = m\gamma c^2$, ovvero*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\gamma c^2 = e < \vec{E}, \dot{q} > \tag{4.6}$$

Dimostrazione. E' sufficiente verificare l'identità

$$< \dot{q}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\gamma\dot{q} >= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\gamma c^2 \tag{4.7}$$

Infatti, grazie a (4.5),

$$< \dot{q}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\gamma\dot{q} >=< \dot{q}, e\big(\vec{E} + \underbrace{\dot{q} \times \vec{B}}_{\perp \dot{q}}\big)>=< \dot{q}, e\vec{E} >$$

Dimostriamo che vale (4.7):

$$< \dot{q}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\gamma\dot{q} >=< \dot{q}, m\dot{\gamma}\dot{q} + m\gamma\ddot{q} >= m\dot{\gamma}\|\dot{q}\|^2 + m\gamma < \dot{q}, \ddot{q} >$$

Ricordando che $\dot{\gamma} = \frac{\gamma^3}{c^2} < \dot{q}, \ddot{q} >$, si ha

$$\gamma < \dot{q}, \ddot{q} >= c^2 \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2}$$

e siccome $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}$,

$$\gamma < \dot{q}, \ddot{q} >= \dot{\gamma}\big(c^2 - \|\dot{q}\|^2\big)$$

Quindi in conclusione:

$$m\dot{\gamma}\|\dot{q}\|^2 + m\gamma < \dot{q}, \ddot{q} >= m\dot{\gamma}\big(\|\dot{q}\|^2 + c^2 - \|\dot{q}\|^2\big)= m\dot{\gamma}c^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\gamma c^2.$$

□

Immediata conseguenza del teorema è che il campo magnetico $\vec{B}$ non compie lavoro sulla particella, dato che esso esercita una forza perpendicolare alla velocità.
Grazie al teorema appena dimostrato possiamo inoltre studiare il moto di una particella in un campo magnetico costante.
Supponiamo $\vec{E} = 0$ (oppure $< \vec{E}, \dot{q} >= 0$); allora per (4.6) si ha $m\gamma c^2 = cost \Rightarrow \gamma = cost \Rightarrow \|\dot{q}\|^2 = cost$. L'equazione del moto diventa quindi

$$m\gamma\ddot{q} = e\big(\dot{q} \times \vec{B}\big). \tag{4.8}$$

Siccome non ci sono componenti della forza parallele a $\vec{B}$, possiamo ridurci a studiare il moto sul piano perpendicolare a $\vec{B}$. Si ha dunque $|\dot{q} \times \vec{B}| = |\dot{q}||B|$, e possiamo scomporre $\ddot{q}$ in componente tangenziale e centripeta. Ma allora, indicato con r il raggio della traiettoria, si ha $\ddot{q} = \frac{\dot{q}^2}{r}$, dal momento che l'accelerazione tangenziale è nulla perchè $\dot{q} = cost$. Possiamo quindi riscrivere (4.8) come

$$m\gamma\frac{\dot{q}^2}{r} = e\dot{q}B \Rightarrow \dot{q} = \frac{eBr}{m\gamma}.$$

Possiamo infine calcolare la frequenza di rotazione della particella, che non è altro che una variazione relativistica della frequenza di ciclotrone, ottenuta dalla formula $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Ricordando $\dot{q} = \omega r$, si ha

$$f = \frac{eB}{2\pi m\gamma}.$$

4.3 Hamiltoniana relativistica nel campo elettromagnetico

Ci poniamo infine il problema di scrivere l'Hamiltoniana della particella nel campo elettromagnetico.
Ricordando (1.5), vogliamo esprimere $\dot{q}$ in funzione dell'impulso p.
Definiamo $f(q) := -e\Phi(q)$ e $b(q) := e\vec{A}(q)$, dove i potenziali vengono presi indipendenti dal tempo per non appesantire la notazione (il caso dipendente dal tempo è del tutto analogo). Allora si ha

$$L(q, \dot{q}) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}} + f(q) + < \dot{q}, b(q) > .$$

Possiamo quindi scrivere l'impulso come

$$p = \nabla_{\dot{q}} L = \frac{m\dot{q}}{\sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}} + b(q),$$

ossia

$$m\dot{q} = \sqrt{1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}}\big(p - b(q)\big) \tag{4.9}$$

$$m^2\|\dot{q}\|^2 = \left(1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2}\right)\|p - b(q)\|^2$$

$$\left(m^2 + \frac{1}{c^2}\|p - b(q)\|^2\right)\|\dot{q}\|^2 = \|p - b(q)\|^2.$$

Troviamo così $\|\dot{q}\|^2$, e facendo i calcoli si ha

$$1 - \frac{\|\dot{q}\|^2}{c^2} = \frac{c^2 m^2}{c^2 m^2 + \|p - b(q)\|^2},$$

e sostituendo il termine appena trovato in (4.9) si ha

$$\dot{q} = \frac{c}{\sqrt{c^2 m^2 + \|p - b(q)\|^2}} \big(p - b(q)\big). \tag{4.10}$$

Possiamo quindi dimostrare il seguente:

Teorema 4.3.1. *L'Hamiltoniana di una particella soggetta a un campo elettromagnetico è data da*

$$H(q, p, t) = e\Phi + c\sqrt{m^2 c^2 + \|(p - e\vec{A}\|^2}. \tag{4.11}$$

In particolare, nel limite non relativistico $\|\dot{q}\|^2 / c^2 \ll 1$ *si ha*

$$H = \frac{\|p - e\vec{A}\|^2}{2m} + e\Phi + mc^2. \tag{4.12}$$

Dimostrazione. Siano $f(q)$ e $b(q)$ definiti come sopra.
Applichiamo alla definizione di trasformata di Legendre (1.6) l'equazione (4.10):

$$H(q, p) = < p, \frac{c\big(p - b(q)\big)}{\sqrt{c^2 m^2 + \|p - b(q)\|^2}} > + \tag{4.13}$$

$$+ mc^2 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2(c^2 m^2 + \|p - b(q)\|^2)} \|p - b(q)\|^2} \tag{4.14}$$

$$- f(q) - < \frac{c\big(p - b(q)\big)}{\sqrt{c^2 m^2 + \|p - b(q)\|^2}}, b(q) > \tag{4.15}$$

Siano $\Gamma(q, p) :=$ (4.14) e $\Lambda(q, p) :=$ (4.13) + (4.15), allora si ha

$$\Gamma(q, p) = \frac{m^2 c^3}{\sqrt{c^2 m^2 + \|p - b(q)\|^2}},$$

$$\Lambda(q, p) = \frac{c\|p - b(q)\|^2}{\sqrt{c^2 m^2 + \|p - b(q)\|^2}} - f(q)$$

Quindi

$$H(q,p) = \Gamma(q,p) + \Lambda(q,p) = c\frac{c^2m^2 + \|p - b(q)\|^2}{\sqrt{c^2m^2 + \|p - b(q)\|^2}} - f(q) =$$
$$= c\sqrt{c^2m^2 + \|p - b(q)\|^2} - f(q),$$

e ricordando $f(q) = -e\Phi(q)$ e $b(q) = e\vec{A}(q)$ si ha la tesi.
Il limite nonrelativistico si ottiene dall'equivalenza $\|\dot{q}\|^2/c^2 \ll 1 \iff \|p - b(q)\|^2/c^2 \ll 1$, e dallo sviluppo di Taylor al secondo ordine della radice:

$$H = e\Phi + mc^2\sqrt{1 + \frac{\|p - e\vec{A}\|^2}{m^2c^2}} \approx e\Phi + mc^2 + \frac{1}{2}\frac{\|p - e\vec{A}\|^2}{m}.$$

$\square$

L'Hamiltoniana relativistica permette di studiare le equazioni del moto nello spazio delle configurazioni (q,p) di una particella nel campo elettromagnetico tenendo conto degli effetti relativistici causati dalle alte velocità in gioco. Inoltre, se tale Hamiltoniana è indipendente dal tempo, presa $q = q(t)$ soluzione di (1.2), si ha che $H(q, \nabla_{\dot{q}}L(q,\dot{q}))$ è un integrale primo del moto, e quantifica l'energia totale del sistema.

Bibliografia

[1] Carati-Galgani, *Appunti di meccanica analitica*

[2] Goldstein-Poole-Safko, *Classical mechanics (Third Edition)*, Addison-Wesley, 2001

[3] Rindler, *La relatività ristretta*, Oxford Science Publications, 1982