

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Ricostruzione di mappe MRI da dati sottocampionati

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Elena Loli Piccolomini

Presentata da:
Giacomo Matzeu

Correlatori:
Prof.
Villiam Bortolotti
Ing.
Fulvia Taddei

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	v
1 Principi di risonanza magnetica nucleare	1
1.1 La magnetizzazione del campione	2
1.2 Il segnale RMN: la fase di eccitazione	4
1.3 I gradienti di campo magnetico: la discriminazione spaziale	5
1.4 Le sequenze MRI	5
1.5 Formazione dell'immagine nella Risonanza Magnetica Nucleare	6
1.6 Mappe di immagini MRI	7
2 Ricostruzione di immagini MR sottocampionate	9
2.1 Il teorema di ricostruzione di Shannon e il limite di Nyquist	9
2.2 Compressive Sensing	10
2.3 L'algoritmo FNCR	11
2.3.1 Lo schema iterativo: Continuation Scheme	11
2.3.2 Il metodo IRl1	12
2.3.3 La strategia Forward-Backward	13
2.3.4 L'algoritmo Weighted Split Bregman	15
2.3.5 Un nuovo schema iterativo	17
2.4 FNCR semplificato	18
3 Risultati numerici: simulazioni	21
3.1 Applicazione FNCR semplificato	22
3.2 Studio criteri arresto per IRl1	25
3.3 Confronto con altri metodi	25
3.3.1 Senza Rumore	28
3.3.2 Con Rumore	28
4 Risultati numerici: dati reali	37
4.1 Ricostruzione da spazi k acquisiti sperimentalmente	38
4.2 Mappe MRI da dati sottocampionati	41

4.2.1	Preparazione dei dati.	45
4.2.2	Costruzione delle mappe T_1	45
5	Conclusioni	59

Introduzione

Questa tesi trae motivazione da un progetto di ricerca del Laboratorio di Tecnologia Medica (LTM) dell'Istituto Ortopedico Rizzoli (IOR).

La risonanza magnetica nucleare (RMN) è un potente strumento, non invasivo e non distruttivo, di indagine della struttura della materia basata sullo spin dei nuclei atomici sottoposti a un campo magnetico. In particolare è possibile indagare una sola specie chimica isolandola dalle restanti presenti nel campione studiato. L'immaging a risonanza magnetica (MRI) è una tecnica di generazione di immagini che utilizza i principi di risonanza magnetica nucleare in cui l'atomo indagato è generalmente ^1H .

In una immagine MRI il singolo pixel può rappresentare diverse quantità fisiche dipendenti dal tipo di esperimento di risonanza. Nella maggior parte degli esperimenti queste quantità sono la densità di protoni indagati e i due tempi di rilassamento, longitudinale e trasversale. Attraverso una precisa progettazione dell'esperimento di risonanza magnetica, chiamata *sequenza*, e fittando opportunamente più acquisizioni a tempi diversi è possibile isolare un parametro di risonanza magnetica dipendente dalla sequenza scelta. Tale procedura genera una immagine detta *mappa* MRI.

Le mappe MRI sono un potente strumento di indagine. È possibile, ad esempio, indagare la porosità di un materiale e, in particolare, in ambito medico, la struttura corticale delle ossa o, in campo alimentare, la degradazione di un prodotto. Il più grande limite del MRI, in ambito medico, è il tempo necessario per la realizzazione di una immagine. Come conseguenza dei limiti imposti dai tempi di rilassamento non è possibile tenere in esame un paziente per acquisire tutti i dati necessari per la formazione dell'immagine completa e di qualità. Si rendono dunque necessarie tecniche di ricostruzione dell'immagine a partire da immagini veloci ma incomplete. La recente teoria del *Compressive Sensing* permette di raggiungere questo obiettivo con particolare efficacia. L'algoritmo FNCR (Fast Non Convex Reweighthin) si basa sulla teoria del Compressive Sensing e ricostruisce una immagine di risonanza magnetica a partire da dati fortemente sottocampionati. L'obiettivo di questa tesi è quello di indagare come il sottocampionamento possa influenzare il calcolo delle mappe.

I miei contributi nella tesi consistono nella implementazione di una versione dell'algoritmo FNCR più rigorosa e conforme alla teoria, nella sua sperimentazione, nella implementazione di nuovi tipi di sottocampionamenti, nell'estrazione dei dati grezzi dal

Tomografo di risonanza magnetica e del loro elaborazione.

In particolare la tesi è organizzata come segue. Nel primo capitolo vengono esposti i principi fisici della RMN nella tecnica MRI con applicazione al calcolo delle mappe. Nel secondo capitolo viene analizzato il problema di ricostruzione di immagini sottocampionate. Dopo una breve esposizione della teoria del compressive sensing viene analizzato in dettaglio l'algoritmo FNCR. Nel terzo capitolo viene testato l'algoritmo su dei dati simulati. Nel quarto e ultimo capitolo viene affrontato il problema dell'utilizzo di dati reali e del calcolo delle mappe da immagini sottocampionate.

Capitolo 1

Principi di risonanza magnetica nucleare

La Risonanza Magnetica Nucleare (indicata spesso con l'acronimo RMN o NMR dall'inglese Nuclear Magnetic Resonance) è una tecnica di indagine della struttura della materia che fornisce informazioni sul magnetismo dei nuclei di cui questa è composta.

L'Imaging a Risonanza Magnetica (indicata con MRI dall'inglese Magnetic Resonance Imaging) è una tecnica di generazione di immagini che utilizza i principi della RMN.

In ambito medico la risonanza magnetica nucleare è utilizzata principalmente nella tecnica di MRI soprattutto per scopi diagnostici. L'oggetto di studio sono, in questo caso, i tessuti biologici formati per lo più da atomi di idrogeno ^1H , questo è quindi il principale nucleo di indagine.

Ogni esperimento MRI è caratterizzato dalle seguenti fasi:

1. magnetizzazione del campione tramite un forte campo magnetico costante;
2. eccitazione del campione tramite un impulso a radiofrequenza;
3. discriminazione spaziale tramite dei gradienti di campo magnetico;
4. campionamento del segnale generato dai precedenti step;
5. elaborazione del segnale con formazione dell'immagine.

Ogni fase può variare molto da esperimento a esperimento e può essere combinata con le altre in più di un modo. Questa versatilità è la caratteristica peculiare della MRI che ne fa uno strumento ricco di possibilità.

La prima fase è comune a qualunque tipo di esperimento, infatti senza la magnetizzazione del campione è impossibile produrre alcun segnale. La seconda, terza e quarta fase costituiscono quella che viene comunemente definita *sequenza*. Questa descrive la

tipologia e la tempistica degli impulsi con la quale viene generato e infine rilevato il segnale di un esperimento RMN.

L'ultima fase riguarda il modo con cui i dati acquisiti vengono utilizzati per formare un'immagine.

Sebbene la natura della Risonanza Magnetica Nucleare riguardi la fisica quantistica a livello macroscopico è possibile utilizzare i principi di fisica classica. L'approccio di questa tesi è di tipo macroscopico.

1.1 La magnetizzazione del campione

Nella descrizione microscopica della materia si assume che ogni nucleo possieda un moto di rotazione attorno a se stesso che dà origine a un momento angolare e , a causa della carica elettrica, ad un momento magnetico. Il momento meccanico, detto *spin nucleare*, si esprime in unità di \hbar mediante un numero intero o semintero positivo I e viene indicato con la lettera L . Il momento magnetico è indicato con μ e viene espresso tramite una quantità γ , detta *rapporto giromagnetico* caratteristica di ogni tipo di nucleo ¹. Le due quantità sono in relazione nel modo seguente:

$$\vec{L} = I\hbar, \quad \vec{\mu} = \gamma I\hbar$$

da cui:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L} \quad (1.1)$$

Considerando un campione macroscopico di volume V questo contiene una certa quantità di spin che viene menzionata spesso come *sistema di spin*. Dividendo la risultante della somma vettoriale degli spin per il volume V otteniamo il vettore *densità di magnetizzazione* del campione, indicato con la lettera M . Ponendo $I = \{i \mid \mu_i \in V\}$ si può scrivere M nel modo seguente:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{i \in I} \vec{\mu} \quad (1.2)$$

La presenza di un campo magnetico generico $\vec{B}(t)$ agisce sui singoli spin del campione inducendo un effetto macroscopico sulla magnetizzazione. In un sistema di riferimento solidale con il laboratorio (x, y, z) e indicando con M_x, M_y, M_z le componenti del vettore magnetizzazione, l'effetto del campo magnetico sulla magnetizzazione è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B}(t) - \frac{M_x \hat{x} + M_y \hat{y}}{T_2} + \frac{M_0 - M_z}{T_1} \hat{z} \quad (1.3)$$

¹Nel caso dell'idrogeno: $I = 1/2$ e $\gamma = 42.57 \text{ MHz/T}$

dove T_1 e T_2 sono delle costanti temporali e M_0 è detto valore di *equilibrio* ottenuto per un tempo $t \rightarrow \infty$. Si ha che:

$$M_0 \simeq \rho_0 \frac{B_0}{T}$$

con ρ_0 densità effettiva di spin (numero di spin per unità di volume) e T la temperatura ambiente in gradi kelvin.

Queste equazioni vengono chiamate *equazioni di Bloch* e descrivono l'andamento temporale del vettore magnetizzazione di un campione in presenza di un campo magnetico.

Negli esperimenti di risonanza magnetica il campione esaminato viene sottoposto ad un campo magnetico costante B_0 .

Si suppone che il campo sia costante, omogeneo e orientato con l'asse z ovvero:

$$\vec{B}(t) = B_0 \hat{z}$$

in tal caso le componenti \hat{x} e \hat{y} della magnetizzazione vengono dette *trasversali* e la componente \hat{z} *longitudinale*. In queste condizioni la (1.3) ha le seguenti soluzioni:

$$M_x(t) = e^{-t/T_2} (M_x(0) \cos \omega_0 t + M_y(0) \sin \omega_0 t) \quad (1.4a)$$

$$M_y(t) = e^{-t/T_2} (M_y(0) \cos \omega_0 t - M_x(0) \sin \omega_0 t) \quad (1.4b)$$

$$M_z(t) = M_z(0) e^{-t/T_1} + M_0 (1 - e^{-t/T_1}) \quad (1.4c)$$

dove ω_0 è la frequenza di risonanza di Larmor del sistema di spin ed è data da:

$$\omega_0 = -\gamma B_0 \quad (1.5)$$

Con il seguente cambio di variabili, equivalente a porsi in un sistema di riferimento rotante attorno all'asse \hat{z} alla frequenza di Larmor le componenti diventano:

$$x' = x \cos(\omega_0 t) - y \sin(\omega_0 t) \quad (1.6)$$

$$y' = x \sin(\omega_0 t) + y \cos(\omega_0 t) \quad (1.7)$$

$$z' = z \quad (1.8)$$

e definendo la *magnetizzazione trasversale* M_\perp come

$$M_\perp(t) = M_x(t) \hat{x} + M_y(t) \hat{y}$$

le (1.4) assumono la forma seguente:

$$M_\perp(t) = M_\perp(0) e^{-t/T_2} \quad (1.9a)$$

$$M_z(t) = M_z(0) e^{-t/T_1} + M_0 (1 - e^{-t/T_1}) \quad (1.9b)$$

Sia nel sistema di riferimento solidale con il laboratorio che in quello rotante la componente longitudinale decade dal suo valore iniziale $M_z(0)$ (che varia in base alla procedura utilizzata) al valore M_0 con una legge esponenziale inversa dipendente dalla costante di tempo T_1 . Invece nelle (1.4) le componenti trasversali decadono a zero con un moto di precessione di frequenza ω_0 che nella (1.9a) diventa un semplice decadimento esponenziale dipendente dalla costante di tempo T_2 . È per via di questi processi che le costanti di tempo T_1 e T_2 vengono dette *tempo di rilassamento longitudinale* e *tempo di rilassamento trasversale*.

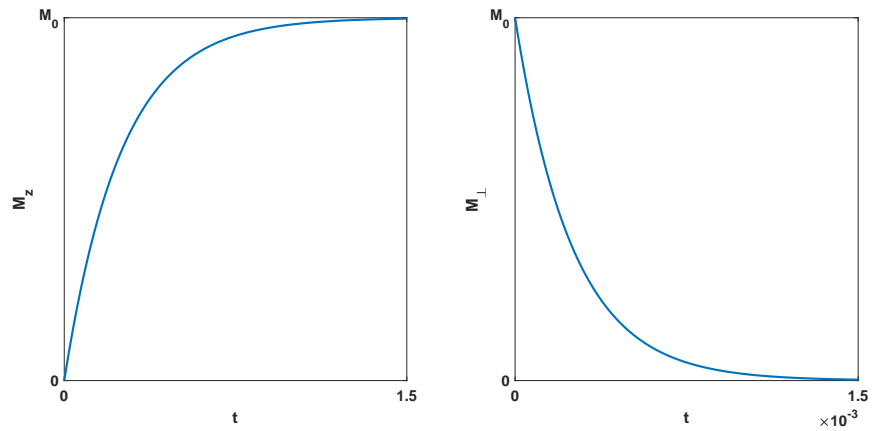


Figura 1.1: Andamento nel tempo della componente longitudinale e perpendicolare nel caso in cui un atomo di idrogeno si trovi nel piano trasversale rispetto a un campo magnetico costante $B_0 = 3T$ (Tesla), $T_1 = 2.5 \cdot 10^{-1}$ e $T_2 = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

1.2 Il segnale RMN: la fase di eccitazione

In un campione sottoposto ad un campo magnetico costante le (1.9) implicano che la magnetizzazione si allinea con il campo. Questa è una condizione di equilibrio che non produce alcun segnale. È possibile perturbare il sistema tramite un impulso a radiofrequenza (indicato con RF) generato da una bobina "accesa" per un breve lasso di tempo. Terminato l'impulso il sistema torna nel suo stato di equilibrio iniziale con la magnetizzazione lungo il campo magnetico costante. Questo processo induce una forza elettromotrice in una apposita bobina ricevente, ossia il segnale rilevato dallo strumento MRI.

1.3. I GRADIENTI DI CAMPO MAGNETICO: LA DISCRIMINAZIONE SPAZIALE⁵

La bobina trasmittente applica al campione un campo magnetico a radiofrequenza $\vec{B}_1(t)$, tipicamente oscillante lungo una sola direzione [10], non costante nel tempo. Durante l'impulso RF il campo magnetico applicato al campione è quindi

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_1(t) + B_0 \hat{z}. \quad (1.10)$$

Un impulso RF ha l'effetto di ruotare il vettore magnetizzazione dal suo stato di equilibrio di un angolo dato da:

$$\theta = \gamma \int_0^\tau B_1(t) dt \quad (1.11)$$

dove τ è il tempo di attivazione dell'impulso. Finita la fase di eccitazione il vettore magnetizzazione non si troverà più allineato con il campo magnetico costante e, in virtù delle leggi di Bloch si muoverà verso la sua posizione di equilibrio. Questo processo produce una forza elettromotrice d'induzione che genera nella bobina ricevente una corrente d'induzione.

1.3 I gradienti di campo magnetico: la discriminazione spaziale

La situazione appena descritta riguarda la totalità del campione analizzato e dunque non vi è alcun modo di ricavare delle informazioni spaziali dal segnale. Ad occuparsi di questo è il sistema di bobine che, applicando al campione dei gradienti di campo magnetico locali, perturbano il campo magnetico totale solo in determinate posizioni spaziali secondo una legge nota.

Sempre tramite un sistema di bobine è possibile selezionare una determinata porzione o fetta del campione da eccitare lasciando in quiete il resto del sistema [10], procedura detta *slice selection*. In tal caso il segnale ricevuto rappresenta quello di una porzione due dimensionale del campione. La combinazione dei gradienti di codifica e di selezione fetta individuano volumi elementari del campione chiamati *voxel*. In questa tesi si considerano solamente immagini bidimensionali.

1.4 Le sequenze MRI

La combinazione della fase di eccitazione, della discriminazione spaziale e dell'acquisizione costituisce la *sequenza* di un esperimento di risonanza magnetica. La tipologia degli impulsi a radiofrequenza e la scelta del momento o dei momenti in cui avviene la discriminazione spaziale fa sì che esistano una moltitudine di sequenze utilizzabili. È la scelta della sequenza che determina la tipologia del segnale acquisito e, sebbene questo sia sempre una combinazione della densità di spin e dei tempi di rilassamento, è possibile

scegliere una sequenza apposita affinché il segnale possa dipendere (per lo più) dal tempo di rilassamento longitudinale o trasversale.

1.5 Formazione dell'immagine nella Risonanza Magnetica Nucleare

Sia S una fetta del campione e $r = (r_x, r_y) \in S$ un generico punto. Durante la discriminazione spaziale, oltre al campo costante B_0 , viene applicato un gradiente di campo. Questo modifica il campo magnetico totale nel punto r al tempo t nel modo seguente:

$$\vec{B}(r, t) = B_0 \hat{z} + r \vec{G}(t) \quad (1.12)$$

con \vec{G} gradiente di campo magnetico che, se \vec{B}_G è il suo campo generatore, si esprime come:

$$\vec{G}(t) = \nabla_r \vec{B}_G(r, t).$$

In generale il segnale RMN nella tecnica MRI è del tipo [4][14]:

$$s(t) = \int_S \rho(r, T_1, T_2) e^{-2\pi i r \cdot k(t)} dr \quad (1.13)$$

dove $\rho(r, T_1, T_2)$ indica la pesatura del segnale [4] e verrà chiamato con un abuso di terminologia *densità di spin*. Il termine $r \cdot k(t)$ è il prodotto scalare tra la posizione r e il termine k che è:

$$k(t) = \gamma \int_0^t G(\tau) d\tau \quad (1.14)$$

D'altra parte la generica trasformata di Fourier della densità di spin è definita come:

$$\hat{\rho}(\xi) = \int \rho(r) e^{-2\pi i \xi \cdot r} dr \quad (1.15)$$

Notando l'analogia tra la (1.13) e (1.15) possiamo affermare che:

$$s(t) = \hat{\rho}(k(t)) \quad (1.16)$$

Poiché l'unica dipendenza temporale nella (1.13) è tramite la (1.14) si può scrivere

$$s(k) = s(k(t)) = s(t)$$

Dunque è possibile ricavare la densità degli spin tramite l'operazione di trasformata inversa di Fourier della (1.16), ovvero:

$$\rho(r) = \int s(k) e^{2\pi i k \cdot r} dk \quad (1.17)$$

In generale [12] $s(k)$ è una funzione a valori complessi e si può quindi scrivere nel seguente modo:

$$s(k) = |s(k)|e^{i\phi(k)} \quad (1.18)$$

dove il termine $|s(k)|$ viene definito *modulo* o *ampiezza*, mentre $\phi(k)$ è detto *fase*. In questo contesto k viene anche chiamato *frequenza*. In generale i valori massimi del modulo sono situati al centro delle frequenze e $s(k)$ ha una struttura Hermitiana [12], ovvero è simmetrico coniugato.

Nel MRI l'insieme dei valori bidimensionali $s(k)$ si chiama *spazio k* . L'insieme dei valori dati dalla (1.14) al variare del tempo descrive una traiettoria nello spazio k ed è detta *traiettoria k* .

1.6 Mappe di immagini MRI

Le mappe di immagini MRI si rivelano uno strumento efficace nell'indagare più aspetti del campione indagato. In generale è possibile indagare la struttura dei mezzi porosi [2] e, in campo medico, questo permette, ad esempio, di indagare la struttura corticale dell'osso con la possibilità di studiarne la fragilità [6][7] o, in campo alimentare, la degradazione nel tempo degli alimenti.

Una *mappa* è una immagine di risonanza magnetica in cui il valore di ogni pixel rappresenta un solo parametro di risonanza.

Per ottenere una tale immagine è necessario prima di tutto acquisire una serie di immagini e successivamente fittarle secondo un modello esponenziale determinato dal particolare esperimento NMR effettuato.

Ai fini di questa tesi verrà considerata solamente una sequenza di tipo Saturation Recovery (SR) il cui segnale è modellato come segue:

$$s(t) = s(\infty)(1 - k_1 e^{-t/T_1})e^{-T_E/T_2} + k_2 \quad (1.19)$$

dove k_1 e k_2 sono costanti e $s(\infty)$ è un termine da confrontare con la magnetizzazione all'equilibrio M_0 . Fittando delle immagini secondo questo modello monoesponenziale è possibile ottenere una mappa in cui ogni pixel rappresenta il tempo di rilassamento longitudinale T_1 .

Capitolo 2

Ricostruzione di immagini MR sottocampionate

Nelle applicazioni cliniche il procedimento dell'acquisizione dei dati viene detto *campionamento*. Per risolvere il problema di ricostruzione diretta (1.17) è sufficiente campionare l'intero spazio k . Ma per vari motivi questo non è possibile. Le sequenze devono rispettare i tempi di rilassamento del campionare correttamente il segnale e, per generare una immagine, vengono ripetute più volte. Inoltre aumentare il tempo d'esame di un paziente aumenta gli artefatti dovuti a naturali movimenti fisiologici e al disagio provocatogli. Poiché nel MRI il tempo di scansione è proporzionale al numero di dati campionati, è necessario ricostruire l'immagine solo da un piccolo campione di dati provenienti dallo spazio k . Questa situazione viene detta sottocampionamento.

Il campionamento avviene tramite le traiettorie k (1.14) che, grazie alle possibilità tecniche del sistema dei gradienti possono essere scelte con una certa libertà.

Poiché le immagini di interesse sono bidimensionali queste sono modellate come delle matrici $N \times N$. Lo spazio k è di conseguenza anch'esso una matrice $N \times N$ e l'insieme delle traiettorie k è modellato come una matrice \mathcal{M} detta *maschera* in cui il generico elemento $(m_{i,j})$ è 1 se (i, j) è una coordinata di una traiettoria, nullo altrimenti.

2.1 Il teorema di ricostruzione di Shannon e il limite di Nyquist

Il segnale RMN è a banda limitata, ovvero tale che $|k| \leq k_{max}$ per un certo k_{max} detto *lunghezza di banda*. Nella teoria del *signal processing* è di fondamentale importanza il seguente teorema [17]:

Teorema (Shannon). *Un segnale a banda limitata può essere ricostruito esattamente dai valori campionati uniformemente ad una frequenza non inferiore a $1/2 k_{max}$ detto*

limite di Nyquist.

Rispettare il limite di Nyquist garantisce l'assenza di fenomeni come l'aliasing nella ricostruzione. Classicamente lo spazio k viene suddiviso in una griglia cartesiana. Quando il campionamento segue la griglia la ricostruzione avviene tramite l'operazione di trasformata inversa. Quando il campionamento non è cartesiano, come nel caso delle traiettorie radiali o a spirale, sono necessarie tecniche più complicate come algoritmi del tipo *filtered back projection* o schemi di interpolazione come *gridding*.

Quando lo spazio k viene campionato ad una frequenza minore del limite di Nyquist viene detto *sottocampionato*. Il problema di ricostruzione è sottodeterminato e quindi esistono infinite soluzioni.

2.2 Compressive Sensing

Un segnale può essere sparso nel dominio di una qualche trasformata. Nel caso del MRI questa trasformata può essere la wavelet o del gradiente. La teoria del *compressive sensing* si occupa della ricostruzione di segnali fortemente sottocampionati sparsi sotto qualche trasformata. In questa tesi viene supposto che l'immagine di interesse u sia sparsa nel dominio del gradiente $Du = (u_x, u_y)$. In queste condizioni la ricostruzione è un processo non lineare modellato come la minimizzazione di una funzione F , che impone la sparsità dei coefficienti nel dominio del gradiente, sotto il vincolo della consistenza dei dati z .

$$\min_u F(Du) \quad \text{t.c.} \quad \frac{1}{2} \|\Phi u - z\|_2^2 < \epsilon \quad (2.1)$$

dove Φ è il prodotto di Hadamard tra la maschera e la matrice di Fourier:

$$\Phi = \mathcal{M} \circ \mathbf{F}$$

Viene definita una classe di funzioni dipendenti da un parametro $\mu > 0$ che, se Ω è il dominio dell'immagine u , soddisfano la seguente proprietà:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{\Omega} F_{\mu}(Du) = \|Du\|_0$$

dove:

$$F_{\mu}(Du) = \sum_{i,j} (\psi_{\mu}(|u_x|_{i,j}) + \psi_{\mu}(|u_y|_{i,j}))$$

e $\psi_{\mu}(t): \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ha la seguente espressione:

$$\psi_{\mu}(t) = \frac{1}{\log(2)} \log \left(\frac{2}{1 + e^{-|t|/\mu}} \right), \quad \mu > 0$$

Queste sono delle funzioni crescenti, non convesse, simmetriche, due volte differenziabili e soddisfano la seguente proprietà:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \psi_\mu(t) = \|t\|_0$$

Dunque il problema di minimo (2.1) si riconduce a una successione di problemi di minimo vincolati della forma seguente:

$$\arg \min_u F_\mu(Du) \quad \text{t.c.} \quad \frac{1}{2} \|\Phi u - z\|_2^2 < \epsilon \quad (2.2)$$

2.3 L'algorithmo FNCR

Il metodo utilizzato per risolvere il problema (2.2) è FNCR (dall'inglese Fast Non Convex Reweighting) il quale consiste in cinque cicli annidati in cui il problema viene ridotto ad uno equivalente.

2.3.1 Lo schema iterativo: Continuation Scheme

La successione di problemi dati da (2.2) è implementato come uno schema iterativo sul parametro μ detto *Continuation Scheme*. L'iterazione verrà indicata con la lettera l . A partire da un vettore iniziale $u^{(0)} = \Phi^T z$ viene calcolata una sequenza di soluzioni approssimate $u^{(1)}, \dots, u^{(l+1)}$ nel modo seguente:

$$u^{(l+1)} = \arg \min_u F_{\mu_l}(Du) \quad \text{t.c.} \quad \frac{1}{2} \|\Phi u - z\|_2^2 < \epsilon, \quad l = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

con $\mu_l < \mu_{l-1}$. L'aggiornamento del parametro è il seguente:

$$\mu_l = 0.8\mu_{l-1}$$

Ad ogni iterazione l il problema (2.3) è equivalente alla forma vincolata:

$$u^{(l+1)} = \arg \min_u \left\{ \lambda F_{\mu_l}(Du) + \frac{1}{2} \|\Phi u - z\|_2^2 \right\}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

Ci si è ricondotti a una successione di problemi di ottimizzazione non convessa.

Le iterazioni sono arrestate secondo il seguente criterio. Definendo

$$e^{(l)} = \begin{cases} \|u^{(0)}\| & \text{se } l = 0 \\ \frac{\|u^{(l-1)} - u^{(l)}\|}{\|u^{(l-1)}\|} & \text{per } l \geq 1 \end{cases}$$

Proseguire fintantoché

$$e^{(l+1)} < e^{(l)} \quad (2.5)$$

L'algorithmo è riportato nel codice 2.1.

Codice 2.1: Algoritmo Continuation Scheme

```

input: z

u(0) = ΦTz,  μ = ‖∇u(0)‖1,  e(0) = ‖u(0)‖,
l = 0,  stopCS = 1,

while stopCS

    risolvere (2.4)
    μ = 0.8μ
    e(l) = ‖u(l-1) - u(l)‖ / ‖u(l-1)‖
    stopCS = e(l+1) < e(l)
    l = l+1

end

```

2.3.2 Il metodo IRL1

Per risolvere il problema (2.4), ad ogni iterazione $l + 1$, viene applicato l'algoritmo IRL1 (Iterative Reweighting l_1) il quale produce una successione, con indice h , di soluzioni approssimanti $\bar{u}^{(0)}, \dots, \bar{u}^{(h)}$. Per ogni iterazione h la funzione non convessa $F_{\mu_l}(Du)$ è localmente approssimata con una sua maggiorazione convessa $\mathcal{F}_{h,\mu_l}(Du)$ ottenuta linearizzando $F_{\mu_l}(Du)$ nel gradiente della h -esima soluzione approssimata.

$$\mathcal{F}_{h,\mu_l}(Du) = F_{\mu_l}(D\bar{u}^{(h)}) + f_{h,\mu_l}(Du) - f_{h,\mu_l}(D\bar{u}^{(h)}) \quad (2.6)$$

dove

$$f_{h,\mu_l}(Du) = \sum_{i,j=1}^N (\psi'(|\bar{u}_x^h|_{i,j})|u_x|_{i,j} + \psi'(|\bar{u}_y^h|_{i,j})|u_y|_{i,j}) \quad (2.7)$$

Definendo

$$\mathcal{P}(\lambda_h, \mathcal{F}_{h,\mu_l}(Du), u) = \left\{ \lambda_h \mathcal{F}_{h,\mu_l}(Du) + \frac{1}{2} \|\Phi u - z\|_2^2 \right\} \quad (2.8)$$

il problema da risolvere ad ogni iterazione h è

$$\bar{u}^{h+1} = \arg \min_u \mathcal{P}(\lambda_h, \mathcal{F}_{h,\mu_l}(Du), u), \quad h = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

Poiché l'unica dipendenza da u è nel termine f il problema si riduce al seguente:

$$\bar{u}^{(h+1)} = \arg \min_u \left\{ \lambda_h f_{h,\mu_l}(Du) + \frac{1}{2} \|\Phi u - z\|_2^2 \right\} \quad (2.10)$$

Il termine di regolarizzazione λ_h viene calcolato in maniera iterativa. Partendo un valore sufficientemente grande $\lambda_0 = r_0 \|u^{(0)}\|_1$ con $0 < r < 1$ è una costante. Si crea una successione decrescente λ_h , $h = 0, 1, \dots$ nel seguente modo:

$$\lambda_{h+1} = \lambda_h \frac{\mathcal{P}(\lambda_h, \mathcal{F}_{h,\mu_l}(D\bar{u}^{(h)}), \bar{u}^{(h)})}{\mathcal{P}(\lambda_{h-1}, \mathcal{F}_{h-1,\mu_l}(D\bar{u}^{(h-1)}), \bar{u}^{(h-1)})} \quad (2.11)$$

È stato provato [11] che questa scelta adattiva del termine di regolarizzazione riduce il numero di iterazioni per la soluzione del problema di minimo.

Arresto di IR11

Sono stati testati due criteri d'arresto differenti. Il primo segue la stessa regola di quello visto in 2.3.1, dunque definendo

$$e^{(h)} = \begin{cases} \|u^{(0)}\| & \text{se } h = 0 \\ \frac{\|u^{(h-1)} - u^{(h)}\|}{\|u^{(h-1)}\|} & \text{per } h \geq 1 \end{cases}$$

Proseguire fintantoché

$$e^{(h+1)} < e^{(h)} \quad (2.12)$$

Il secondo criterio testato è il seguente. Ricordando la 2.8, definendo:

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{P}(\lambda_h, \mathcal{F}_{h,\mu_l}(Du), u) \quad (2.13)$$

L'iterazione IR11 continua fintantoché:

$$\frac{\mathcal{P}(h-1) - \mathcal{P}(h)}{\bar{\mathcal{P}}} < \frac{1}{\|u^{(h)}\|} \quad (2.14)$$

dove $\bar{\mathcal{P}}$ è la media aritmetica dei valori $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(h)$.

L'algoritmo con il criterio d'arresto 2.12 verrà chiamato FNCR, mentre quello con il criterio 2.14 FNCR modificato e denotato con $FNCR_M$.

2.3.3 La strategia Forward-Backward

Poiché $\psi'_\mu > 0$ per $\mu > 0$ si può riscrivere (2.7) come

$$f_{h,\mu_l}(Du) = \|\nabla_x^w u\|_1 + \|\nabla_y^w u\|_1$$

dove

$$\|\nabla_x^w u\|_1 = \sum_{i,j}^N (w_{i,j}^x) |u_x|_{i,j}, \quad \|\nabla_y^w u\|_1 = \sum_{i,j}^N (w_{i,j}^y) |u_y|_{i,j}$$

Codice 2.2: Algoritmo CS e IR1

```

input: z, r0

u(0) = ΦTz, μ0 = ‖∇u(0)‖1, e(0) = ‖u(0)‖,
l = 0, stopCS = 1,

while stopCS

    repeat
        risolvere (2.10)
        wi,jx = ψ'μl(|ūx(h+1)|), wi,jy = ψ'μl(|ūy(h+1)|)
        aggiornare λh+1 come (2.11)
        h = h+1
    until (2.12) o (2.14)
    μl+1 = 0.8μl
    u(l+1) = ū(h)
    λ0 = λh
    l = l+1
    e(l) = ‖u(l-1) - u(l)‖ / ‖u(l-1)‖
    stopCS = e(l+1) < e(l)

end

```

con

$$w_{i,j}^x = \psi'_{\mu_l}(|\bar{u}_x^{h+1}|_{i,j}), \quad w_{i,j}^y = \psi'_{\mu_l}(|\bar{u}_y^{h+1}|_{i,j})$$

Dunque il problema (2.10) diventa:

$$\bar{u}^{h+1} = \arg \min_u \left\{ \lambda_h (\|\nabla_x^w u\|_1 + \|\nabla_y^w u\|_1) + \frac{1}{2} \|\Phi u - z\|_2^2 \right\} \quad (2.15)$$

Questo nuovo problema di minimo è ora convesso e ha una unica soluzione calcolata con una la strategia *Accelerated Forward Backward* dove il passo backward viene calcolata con una strategia FISTA accelerata [1]. Ad ogni passo vengono create due successioni di iterate ($\hat{v}^{(n)}, \hat{u}^{(n)}$) con $n = 1, 2, \dots$ tali che:

$$\hat{v}^{(n)} = \hat{u}^{(n-1)} + \beta \Phi^t (z - \Phi \hat{u}^{(n-1)}) \quad (2.16)$$

$$\tilde{u}^{(n)} = \arg \min_u \left\{ \lambda_h (\|\nabla_x^w u\|_1 + \|\nabla_y^w u\|_1) + \frac{1}{2\beta} \|u - \hat{v}^{(n)}\|_2^2 \right\} \quad (2.17)$$

$$\hat{u}^{(n)} = \tilde{u}^{(n-1)} + \alpha (\tilde{u}^{(n)} - \tilde{u}^{(n-1)}) \quad (2.18)$$

dove α viene scelto come segue:

$$t_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{n-1}^2}}{2}, \quad \alpha = \frac{t_{n-1} - 1}{t_n}, \quad t_0 = 1 \quad (2.19)$$

Per questioni di convergenza del metodo si deve avere

$$0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{\max}(\Phi^t \Phi)}$$

Poiché nel MRI Φ è ortogonale risulta $0 < \beta < 2$. Il criterio d'arresto per questo metodo iterativo è il seguente:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} < \gamma \lambda_h \quad (2.20)$$

dove $\gamma > 0$ è una opportuna tolleranza e:

$$\Delta_n = \sum_{i,j=1}^N \left((w_{i,j}^x) |\hat{u}_x^{(n)}|_{i,j} + (w_{i,j}^y) |\hat{u}_y^{(n)}|_{i,j} \right)$$

Si nota come mentre $\hat{v}^{(n)}$ e $\hat{u}^{(n)}$ sono calcolati esplicitamente, il calcolo di $\tilde{u}^{(n)}$ richiede un metodo di risoluzione più complesso.

2.3.4 L'algorithmo Weighted Split Bregman

Il problema da risolvere è ora il (2.17). Viene risolto efficacemente tramite la strategia di *Weighted Split Bregman algorithm*. Introducendo due vettori $D_x, D_y \in \mathbb{R}^N$ il problema si scrive come:

$$\min_u \left\{ \lambda_h (\|D_x\|_1 + \|D_y\|_1) + \frac{1}{2\beta} \|u - \hat{v}^{(n)}\|_2^2 \right\} \quad \text{t.c.} \quad D_x = \nabla_x^w u, \quad D_y = \nabla_y^w u, \quad (2.21)$$

Che può essere riscritto nella sua forma vincolata:

$$\min_{u, D_x, D_y} \left\{ \lambda_h (\|D_x\|_1 + \|D_y\|_1) + \frac{1}{2\beta} \|u - \hat{v}^{(n)}\|_2^2 + \frac{\theta}{2} (\|D_x - \nabla_x^w u\|_2^2 + \|D_y - \nabla_y^w u\|_2^2) \right\} \quad (2.22)$$

dove θ è il termine di penalizzazione.

Applicando il metodo Split Bregman, da un iterato iniziale $U^{(0)}$, viene calcolata una successione di iterati $U^{(1)}, \dots, U^{(j+1)}$ tramite lo splitting di (2.22) in tre sottoproblemi di minimo. Denotando con q la generica variabile x o y otteniamo la seguente riduzione:

A partire da $e_q^{(0)} = 0$, $D_q^{(0)} = 0$ e $U^{(0)} = \hat{v}^{(n)}$ calcolare:

$$U^{(j+1)} = \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2\beta} \|u - \hat{v}^{(n)}\|_2^2 + \frac{\theta}{2} \|D_x^{(j)} - \nabla_x^w u - e_x^{(j)}\|_2^2 + \frac{\theta}{2} \|D_y^{(j)} - \nabla_y^w u - e_y^{(j)}\|_2^2 \right\} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
D_q^{(j+1)} &= \arg \min_{D_q} \left\{ \lambda_h \|D_q\|_1 + \frac{\theta}{2} \|D_q - \nabla_q^w U^{(j+1)} - e_q^{(j)}\|_2^2 \right\} \\
&= \text{Soft}_\Lambda(\nabla_q^w U^{(j+1)} + e_q^{(j)})
\end{aligned} \tag{2.24}$$

dove

$$\Lambda = \frac{\lambda_h}{\theta} \tag{2.25}$$

e $e_q^{(j)}$ è aggiornato come segue:

$$\begin{aligned}
e_q^{(j+1)} &= e_q^{(j)} + \nabla_q^w U^{(j+1)} - D_q^{(j+1)} \\
&= e_q^{(j)} + \nabla_q^w U^{(j+1)} - \text{Soft}_\Lambda(\nabla_q^w U^{(j+1)} + e_q^{(j)}) \\
&= \text{Cut}_\Lambda(\nabla_q^w U^{(j+1)} + e_q^{(j)})
\end{aligned} \tag{2.26}$$

dove gli operatori Soft e Cut sono i seguenti:

$$\text{Soft}_\Lambda(z) = \text{sign}(z) \max\{|z| - \Lambda, 0\} \tag{2.27}$$

$$\text{Cut}_\Lambda(z) = z - \text{Soft}_\Lambda(z) \tag{2.28}$$

Imponendo delle condizioni di ottimo del primo ordine al problema (2.23) si può calcolare il minimo $U^{(j+1)}$ risolvendo il seguente sistema lineare:

$$\left(\frac{1}{\beta} I - \theta \Delta^w \right) U^{(j+1)} = \frac{1}{\beta} \hat{v}^{(n)} + \theta (\nabla_x^w)^T (D_x^{(j)} - e_x^{(j)}) + \theta (\nabla_y^w)^T (D_y^{(j)} - e_y^{(j)}) \tag{2.29}$$

con

$$\Delta^w = - \left((\nabla_x^w)^T \nabla_x^w + (\nabla_y^w)^T \nabla_y^w \right) \tag{2.30}$$

Definendo

$$A = (I - \beta \theta \Delta^w) \tag{2.31}$$

e ponendo

$$b^{(j)} = \hat{v}^{(n)} + \beta \theta (\nabla_x^w)^T (D_x^{(j)} - e_x^{(j)}) + \beta \theta (\nabla_y^w)^T (D_y^{(j)} - e_y^{(j)}) \tag{2.32}$$

si può riscrivere (2.29) come un sistema lineare:

$$AU^{(j+1)} = b^{(j)} \tag{2.33}$$

Dunque il problema ora si è ridotto alla risoluzione di un sistema lineare

L'algoritmo che risolve il problema (2.17) è riportato nel codice 2.3

Codice 2.3: Algoritmo fast split per il problema (2.3)

```

 $U^{(j)} = \text{FastSplit}(\lambda, \theta, \beta, \hat{v}^{(n)}, w^x, w^y)$ 
 $\Lambda = \frac{\lambda}{\theta}, \bar{m} = 0,$ 
 $U^{(0)} = \hat{v}^{(n)}, e_x^{(0)} = e_y^{(0)} = 0,$ 
 $j = 1$ 
repeat
     $U_x = \nabla_x^w U^{(j-1)}, U_y = \nabla_y^w U^{(j-1)},$ 
     $X_x^{(0)} = U_x, X_y^{(0)},$ 
     $z_x = U_x + e_x^{(j-1)}, z_y = U_y + e_y^{(j-1)}$ 
     $e_x^{(j)} = \text{Cut}_\Lambda(z_x), e_y^{(j)} = \text{Cut}_\Lambda(z_y),$ 
     $m = 0,$ 
    repeat
         $X^{(m+1)} = \hat{v}^{(n)} - \beta\theta \left( (\nabla_x^w)^T (X_x + 2 \cdot e_x^{(j)} - z_x) + (\nabla_y^w)^T (X_y + 2 \cdot e_y^{(j)} - z_y) \right)$ 
         $X_x = \nabla_x^w X^{(m+1)}, X_y = \nabla_y^w X^{(m+1)},$ 
         $m = m+1$ 
    until condizione (2.41)
     $U^{(j+1)} = X^m,$ 
     $\bar{m} = \bar{m} + m, j = j + 1$ 
until condizione (2.41)

```

2.3.5 Un nuovo schema iterativo

Per risolvere il sistema lineare (2.33) si effettua uno splitting della matrice $A = E - F$ con

$$E = I, \quad F = \beta\theta\Delta^w \quad (2.34)$$

Si ha che, scegliendo il parametro θ tale che

$$0 < \theta < \frac{1}{\beta\|\Delta^w\|} \quad (2.35)$$

il raggio spettrale $\rho(E^{-1}F) < 1$ e dunque il metodo iterativo

$$X^{(m+1)} = FX^{(m)} + B, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.36)$$

converge alla soluzione del sistema lineare $AX = B$ qualunque sia B .

Dunque si ottiene la soluzione $U^{(j+1)}$, $j = 0, 1, \dots$ calcolando esplicitamente la (2.36) con $B = b^{(j)}$.

$$X^{(m+1)} = -\beta\theta((\nabla_x^w)^T \nabla_x^w + (\nabla_y^w)^T \nabla_y^w)X^{(m)} + b^{(j)} \quad (2.37)$$

Sostituendo la (2.32) nella (2.37) si ottiene:

$$X^{(m+1)} = \hat{v}^{(n)} + \beta\theta \left((\nabla_x^w)^T (-\nabla_x^w X^{(m)} + D_x^{(j)} - e_x^{(j)}) + (\nabla_y^w)^T (-\nabla_y^w X^{(m)} + D_y^{(j)} - e_y^{(j)}) \right) \quad (2.38)$$

Per evitare di calcolare esplicitamente il termine $D_x^{(j)}$ e $D_y^{(j)}$ nella (2.38) si attua la seguente strategia. Sottraendo la (2.24) alla (2.26) e sfruttando la (2.28) abbiamo che

$$\text{Soft}_\Lambda(\nabla_q^w U^{(j+1)} + e_q^{(j)}) = (\nabla_q^w U^{(j+1)} + e_q^{(j)}) - \text{Cut}_\Lambda(\nabla_q^w U^{(j+1)} + e_q^{(j)})$$

da cui segue che

$$e_q^{(j+1)} - D_q^{(j+1)} = 2e_q^{(j+1)} - (\nabla_q^w U^{(j+1)} + e_q^{(j)}) \quad (2.39)$$

e sostituendo questa espressione nella (2.38) si ottiene una formula più efficiente:

$$X^{(m+1)} = \hat{v}^{(n)} - \beta\theta \left((\nabla_x^w)^T [\nabla_x^w X^{(m)} + 2e_x^{(j)} - (\nabla_x^w U^{(j)} + e_x^{(j-1)})] + (\nabla_y^w)^T [\nabla_y^w X^{(m)} + 2e_y^{(j)} - (\nabla_y^w U^{(j)} + e_y^{(j-1)})] \right) \quad (2.40)$$

I metodi iterativi dati in (2.33) e (2.40) hanno il seguente criterio di arresto

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\| \leq \tau \|w^{(k)}\| \quad (2.41)$$

dove $w = U$ e $k = j$ nel primo caso e $w = X$ e $k = m$ nel secondo caso e τ è una opportuna tolleranza.

2.4 FNCR semplificato

É stata utilizzata anche una versione semplificata dell'algoritmo, $FNCR_S$, in cui viene applicato il metodo IR11 per una sola iterazione. Questo passo risulta quindi contemporaneo al Continuation Scheme. Dunque in una unica iterazione esterna k vengono eseguiti entrambi i passi. L'algoritmo termina quando viene raggiunto un numero n_{max} di iterazioni del ciclo n . L'implementazione è riportata nel codice 2.5.

Codice 2.4: FNCR

Input: r_0, z, β

$$u^{(0)} = \Phi^T z, \quad w^x = 1, \quad w^y = 1, \quad \lambda_0 = r_0 \|u^{(0)}\|_1, \quad \mu = \|\nabla u^{(0)}\|_1$$

$$\theta = \frac{0.8}{\beta \|\Delta^w\|_\infty}$$

$$\tilde{u}^{(0)} = \hat{u}^{(0)} = u^{(0)},$$

$l = 0,$

repeat

$h = 0,$

repeat

$n = 0,$

repeat

$$\hat{v}^{(n+1)} = \hat{u}^{(n)} + \beta \Phi^T (z - \Phi \hat{u}^{(n)})$$

$$\tilde{u}^{(n+1)} = \text{FastSplit}(\lambda_h, \theta, \beta, \hat{v}^{(n+1)}, w^x, w^y)$$

calcolare α **come in** (2.19)

$$\hat{u}^{(n+1)} = \tilde{u}^{(n+1)} + \alpha (\tilde{u}^{(n+1)} - \tilde{u}^{(n)})$$

$n = n+1$

until **condizione** (2.20)

aggiornare λ_{h+1} **come** (2.11)

$$\bar{u}^{(h+1)} = \hat{u}^{(n)}$$

$$w_{i,j}^x = \psi'_{\mu_i}(|\bar{u}_x^{(h+1)}|), \quad w_{i,j}^y = \psi'_{\mu_i}(|\bar{u}_y^{(h+1)}|)$$

$$\hat{u}^{(0)} = \hat{u}^{(n)}$$

$h = h+1$

until **criterio** (2.12) **o** (2.12)

$$\mu = 0.8\mu$$

$$u^{(l+1)} = \bar{u}^{(h)}$$

$l = l+1$

until **criterio** (2.5)

Output: $u^{(l)}$

Codice 2.5: $FNCR_S$

Input : r_0, z, β

$u^{(0)} = \Phi^T z, \quad w^x = 1, \quad w^y = 1, \quad \lambda_0 = r_0 \|u^{(0)}\|_1, \quad \mu = \|\nabla u^{(0)}\|_1$
 $\theta = \frac{0.8}{\beta \|\Delta^w\|_\infty}$
 $\tilde{u}^{(0)} = \hat{u}^{(0)} = u^{(0)},$
 $\mathbf{k} = 0,$
 repeat
 $\mathbf{n} = 0,$
 repeat
 $\hat{v}^{(n+1)} = \hat{u}^{(n)} + \beta \Phi^T (z - \Phi \hat{u}^{(n)})$
 $\tilde{u}^{(n+1)} = \text{FastSplit}(\lambda_h, \theta, \beta, \hat{v}^{(n+1)}, w^x, w^y)$
 calcolare α come in (2.19)
 $\hat{u}^{(n+1)} = \tilde{u}^{(n+1)} + \alpha(\tilde{u}^{(n+1)} - \tilde{u}^{(n)})$
 $\mathbf{n} = \mathbf{n} + 1$
 until condizione (2.20)

 aggiornare λ_{k+1} come (2.11)
 $w_{i,j}^x = \psi'_{\mu_i}(|\bar{u}_x^{(h+1)}|), \quad w_{i,j}^y = \psi'_{\mu_i}(|\bar{u}_y^{(h+1)}|)$
 $\hat{u}^{(0)} = \hat{u}^{(n)}$
 $\mu = 0.8\mu$
 $u^{(k+1)} = \bar{u}^{(h)}$
 $\mathbf{k} = \mathbf{k} + 1$

until convergenza

Output : $u^{(l)}$

Capitolo 3

Risultati numerici: simulazioni

In questo capitolo vengono riportati i risultati delle simulazioni.

Nel primo paragrafo si mostrano i risultati dell'applicazione dell'algoritmo $FNCR_S$ su di una immagine acquisita col tomografo ARTOSCAN (Esaote S.p.A., Genova) del Dipartimento DICAM dell'Università di Bologna, con lo scopo di settarne i parametri e testare i vari sottocampionamenti.

Nel secondo paragrafo si sono testati, sempre con la stessa simulazione, gli algoritmi $FNCR$ e $FNCR_M$ e confrontati con $FNCR_S$.

Nel terzo e ultimo paragrafo si sono confrontate le due versioni di $FNCR$ con $FNCR_S$ e con l'algoritmo $IL_1 - l_q$. Lo studio è stato effettuato su un data base di 200 immagini di risonanza magnetica gentilmente donate dall'Istituto Ortopedico Rizzoli.

In tutte le simulazioni lo spazio k è stato ricavato tramite l'operazione di trasformata di Fourier dell'immagine utilizzata u . I dati z utilizzati dagli algoritmi sono quindi quelli ottenuti dal prodotto dello spazio k con la maschera utilizzata \mathcal{M} , ovvero $z = \Phi u$. Le maschere di sottocampionamento utilizzate sono quella radiale \mathcal{M}_1 , cartesiana \mathcal{M}_2 , random \mathcal{M}_3 e a spirale \mathcal{M}_4 implementata secondo una spirale logaritmica. Il sottocampionamento è quantificato nella percentuale di campionamento, data da:

$$\mathcal{S}_r = \frac{N_{\mathcal{M}}}{N^2}$$

Dove $N_{\mathcal{M}}$ è il numero di pixel non nulli della maschera utilizzata e N^2 è il numero totale di pixel dell'immagine.

La qualità della ricostruzione è quantificata dal PSNR (Peak Signal to Noise Ratio):

$$PSNR = 20 \log_{10} \frac{\max(x)}{rmse}, \quad rmse = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (u_{i,j} - x_{i,j})^2}{N^2}}$$

dove il $rmse$ rappresenta l'errore quadratico medio calcolato in ogni pixel, u è la ricostruzione e x è l'immagine originale. Con il $PSNR_0$ si intende il PSNR della ricostruzione

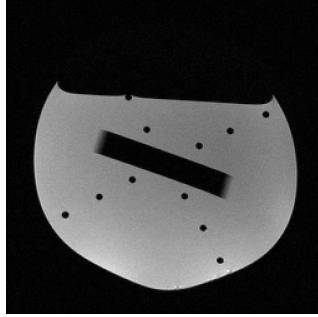


Figura 3.1: Immagine acquisita dal tomografo del fantoccio di calibrazione. Utilizzando questa immagine si è potuta effettuare una simulazione con l'algoritmo $FNCR_S$ con lo scopo di settarne i parametri.

iniziale ottenuta con la semplice inversione dei soli dati z . Risulta quindi una sorta di punto di partenza con cui valutare il miglioramento ottenuto dall'algoritmo.

3.1 Applicazione FNCR semplificato

Come prima prova è stato applicato l'algoritmo $FNCR_S$ (paragrafo 2.4) ai dati $z = \Phi u$, dove u è l'immagine completa (figura 3.1). La sua dimensione è 256x256 pixel. Le percentuali di campionamento con cui è stata effettuata la simulazione sono del 6,5%, 12,5% e del 25%. Per ogni maschera si è partiti dalla scelta dei parametri $r_0 = 5 \cdot 10^{-1}$ e $\gamma = 10^{-1}$ andando poi a decrementare un parametro alla volta e registrando il PSNR ottenuto. La variazione del parametro β non ha registrato variazioni significative nel risultato ed è stato dunque posto pari a 1.

In tabella 3.1 sono riportati i parametri che hanno restituito la migliore ricostruzione con il $PSNR_0$ e il $PSNR$ finale per quanto riguarda le maschere radiale \mathcal{M}_1 , cartesiana \mathcal{M}_2 , random \mathcal{M}_3 e spirale \mathcal{M}_4 .

L'indagine effettuata porta alla scelta dei seguenti parametri

$$r_0 = 5 \cdot 10^{-3}, \gamma = 10^{-2}, \beta = 1 \quad (3.1)$$

I valori di PSNR restituiti dall'algoritmo così settato con le diverse maschere sono riportati in tabella 3.2.

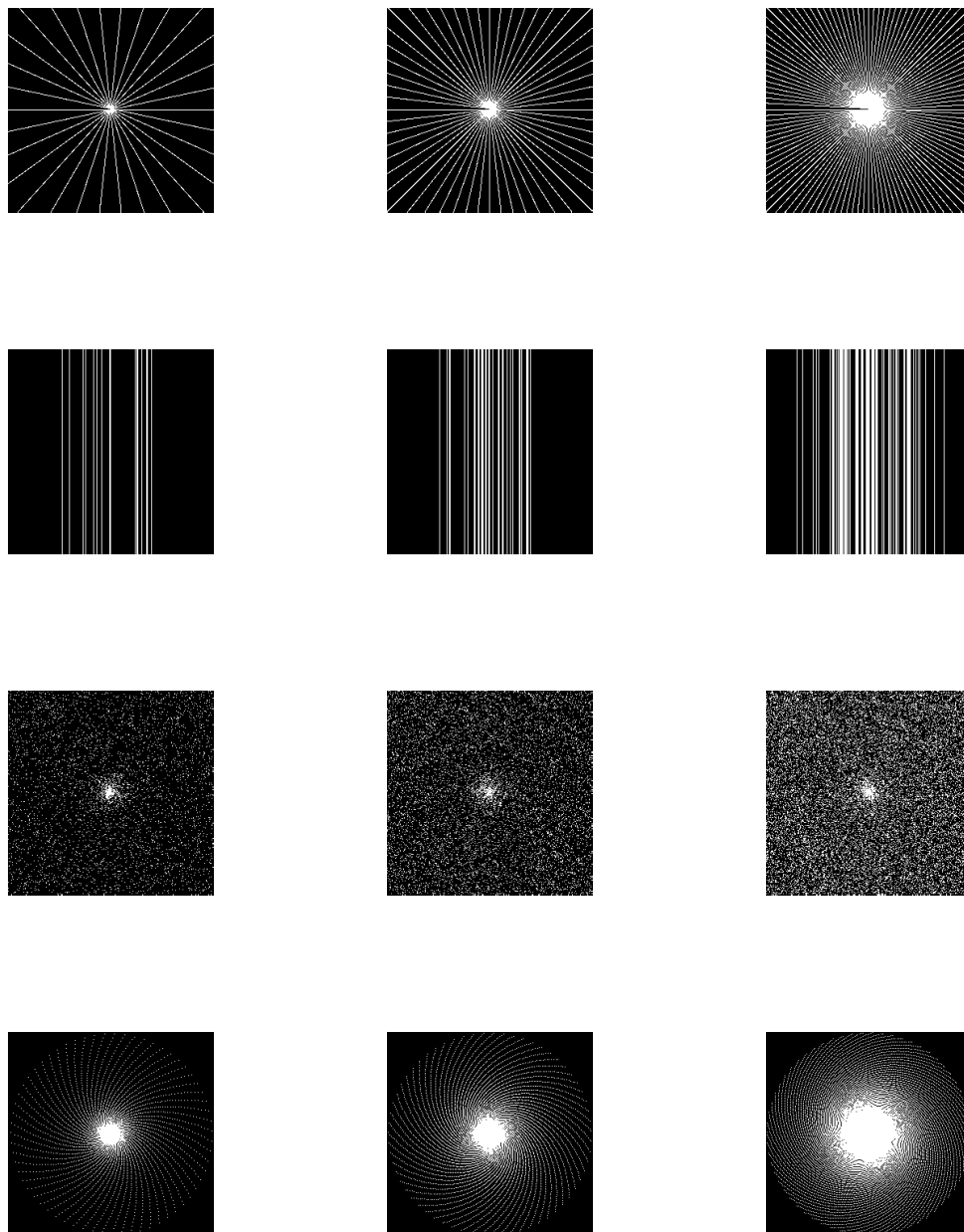


Figura 3.2: Maschere utilizzate nella simulazione. Dalla colonna sinistra a quella destra le percentuali di campionamento sono del 6%, 12, 5%, 25%. Dalla riga più in alto vi sono la maschera radiale \mathcal{M}_1 , cartesiana \mathcal{M}_2 , random \mathcal{M}_3 e a spirale \mathcal{M}_4 .

Maschera	S_r	r_0	γ	$PSNR_0$	$PSNR$
\mathcal{M}_1	6,5%	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-4}	21.5	35.9
	12,5%	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	23.9	37.9
	25%	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	26.5	39.9
\mathcal{M}_2	6,5%	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	15.4	30.4
	12,5%	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	16	35
	25%	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-2}	21.2	39
\mathcal{M}_3	6,5%	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	20.4	36.7
	12,5%	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	20.3	37.2
	25%	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	22.3	39.4
\mathcal{M}_4	6,5%	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	26.7	37.4
	12,5%	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	29.2	38.6
	25%	$5 \cdot 10^{-7}$	10^{-1}	33.1	40.2

Tabella 3.1: Set di parametri scelti in base al PSNR restituito dalla simulazione con le maschere (\mathcal{M}) alle diverse percentuali scelte S_r .

S_r	\mathcal{M}_1	\mathcal{M}_2	\mathcal{M}_3	\mathcal{M}_4
6,5%	35.8	28.6	36.3	35.9
12,5%	37.9	34.7	37.2	37.9
25%	39.9	38.9	39.4	39.4

Tabella 3.2: PSNR con il set di parametri selezionato (3.1).

$S_r = 6,5\%$			$S_r = 12,5\%$			$S_r = 25\%$		
	PSNR	n		PSNR	n		PSNR	n
semp.	35.2	5000	semp.	37.5	5000	semp.	39.6	5000
FNCR	35.5	3289	FNCR	36.2	75	FNCR	39.7	2436
mod.	36.3	471	mod.	37.7	261	mod.	39.8	402

Tabella 3.3: PSNR restituito e iterazioni effettuate dalle tre versioni dell'algoritmo FNCR testate con la maschera radiale alle tre percentuali di campionamento sulla simulazione con l'immagine di laboratorio 3.1.

3.2 Studio criteri arresto per IRL1

Si sono confrontati gli algoritmi $FNCR_S$, FNCR e $FNCR_M$ applicandoli sulla immagine di riferimento (figura 3.1). Le prove sono state fatte con la maschera radiale alle tre percentuali di campionamento del 6,5%, 12,5%, 25%.

Dopo varie prove si è scelto come criterio d'arresto per $FNCR_S$ il raggiungimento di $n = 5000$ iterazioni, valore che permette il raggiungimento della migliore ricostruzione fornita dell'algoritmo. I parametri sono stati fissati come in (3.1). Sia FNCR che $FNCR_M$ sono stati resi indipendenti dalla scelta dei parametri ponendoli pari a uno (essendo parametri moltiplicativi non hanno così alcun effetto).

In figura 3.3 si può confrontare l'andamento del PSNR dell'algoritmo semplificato (in rosso) con FNCR (in azzurro). I marcatori rossi indicano l'uscita dal ciclo Continuation Scheme, quelli verdi dal ciclo IRL1. Analogamente in figura 3.4 si può confrontare l'andamento del PSNR dell'algoritmo semplificato (in rosso) con $FNCR_M$ (in azzurro).

I risultati numerici sono riportati in tabella 3.3. Dalle prove fatte si nota come $FNCR_M$ sembri l'algoritmo migliore in quanto veloce e con i valori di PSNR più alti. Mentre FNCR risulta meno efficiente in termini di costo computazionale (valutato in base al numero di iterazioni impiegate) e in termini di PSNR. L'algoritmo $FNCR_S$ risulta il meno efficiente dei tre in quanto ha un elevato costo computazionale e restituisce dei valori di PSNR più bassi. In ogni caso, la qualità delle ricostruzioni dei tre algoritmi è da considerarsi simile in quanto le differenze sono al più poco più grandi dell'unità. Nella tabella 3.4 è riportato il numero iterazioni l e j che gli algoritmi FNCR e $FNCR_M$ hanno effettuato.

3.3 Confronto con altri metodi

Gli algoritmi derivanti da FNCR sono stati confrontati con l'algoritmo $IL_1 - l_q$, considerato dalla letteratura molto efficiente [18]. Il test è stato effettuato su 200 immagini

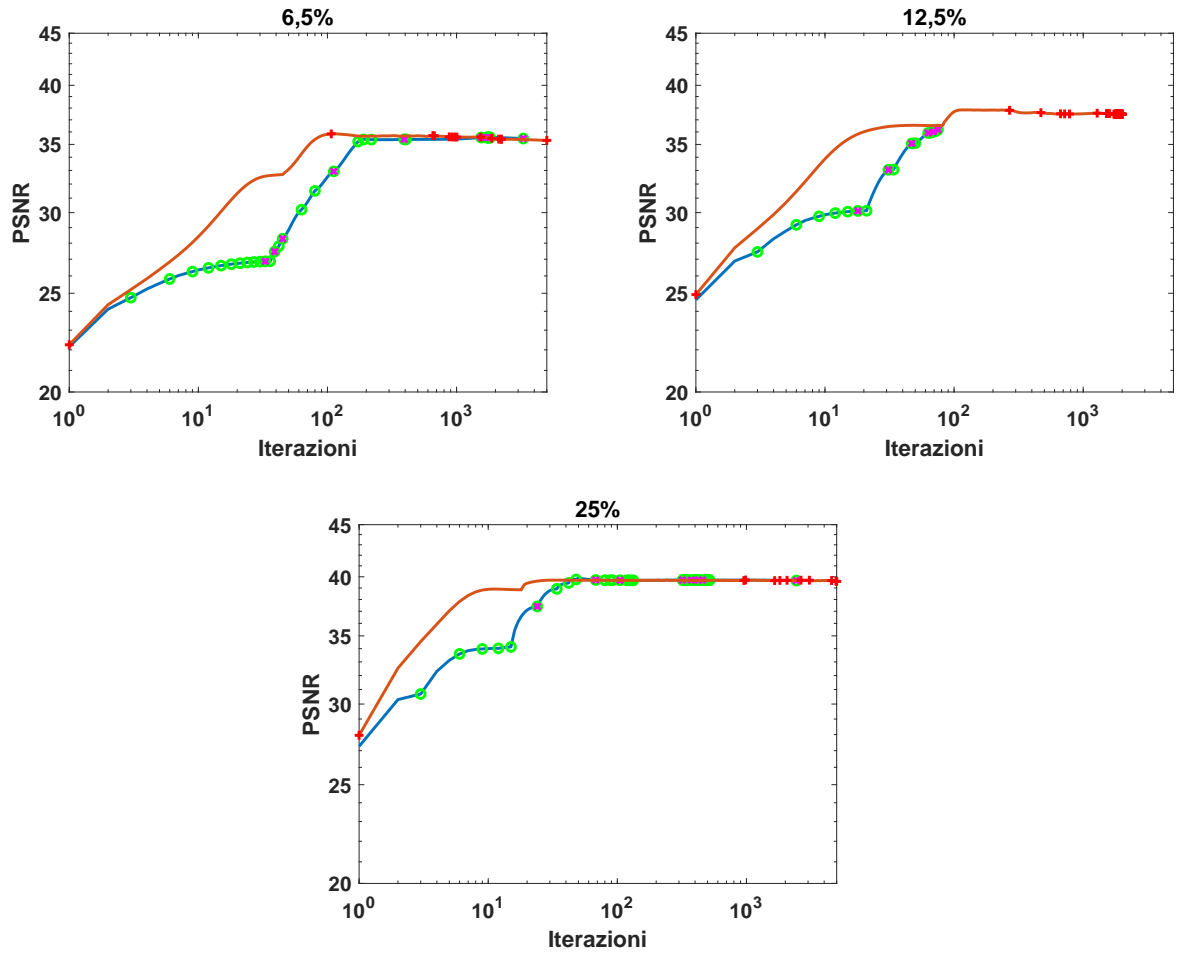


Figura 3.3: Andamento del PSNR rispetto alle iterazioni, alle varie percentuali, dell'algoritmo $FNCR_S$ in rosso e FNCR in blu. Con le croci rosse viene indicato il PSNR registrato all'uscita dall'iterazione più esterna mentre con i cerchi verdi viene indicato il PSNR registrato all'uscita dalla iterazione di IRl_1 .

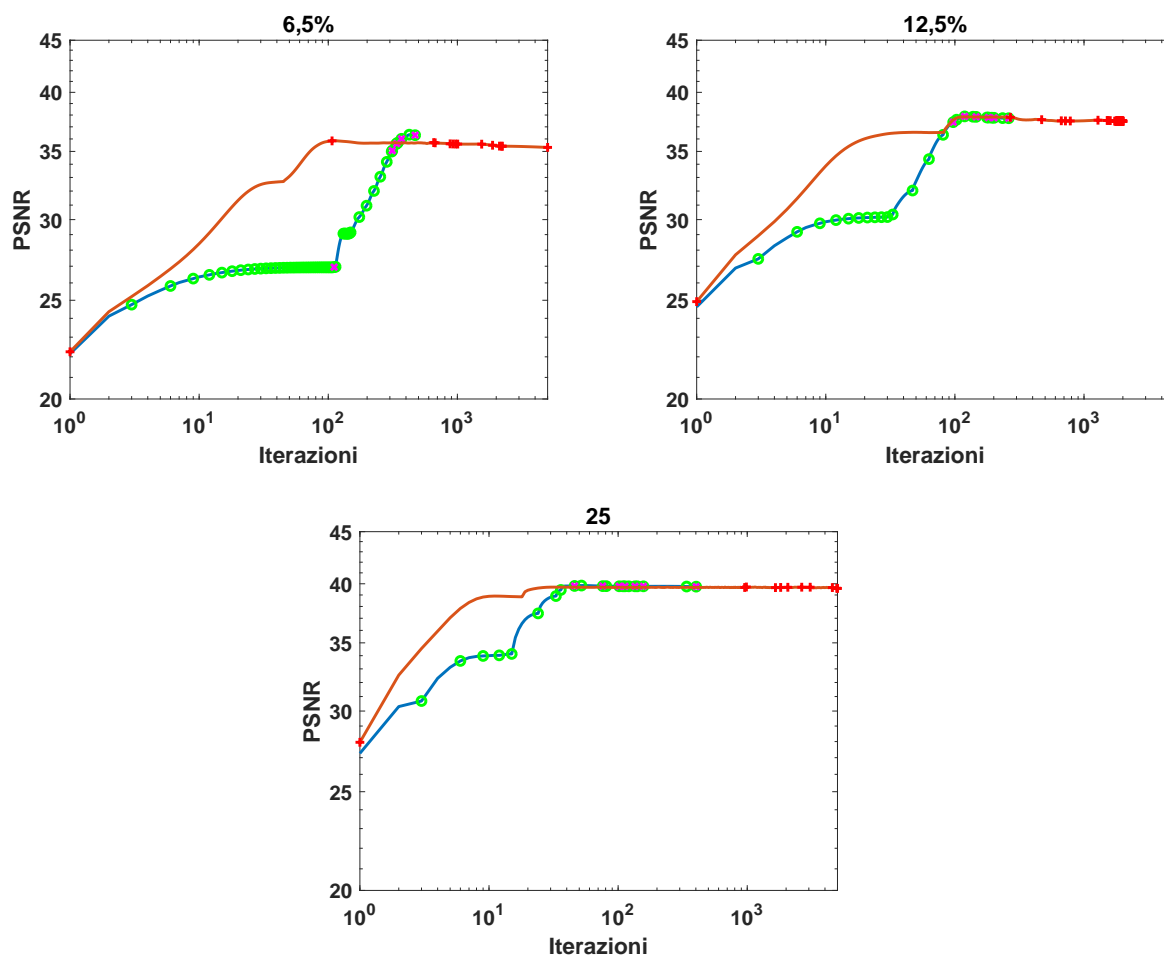


Figura 3.4: Andamento del PSNR rispetto alle iterazioni, alle varie percentuali, dell'algoritmo $FNCR_S$ in rosso e $FNCR_M$ in blu. Con le croci rosse viene indicato il PSNR registrato all'uscita dall'iterazione più esterna mentre con i cerchi verdi viene indicato il PSNR registrato all'uscita dalla iterazione di IRI_1 .

S_r		l	j
6,5%	FNCR	9	32
	mod.	5	58
12,5%	FNCR	6	16
	mod.	6	25
25%	FNCR	8	31
	mod.	7	21

Tabella 3.4: Numero di iterazioni dei cicli (l), *Continuation Scheme* e (j) *IRL1* compiuti dagli algoritmi FNCR e $FNCR_M$ nelle simulazioni i cui risultati sono riportati in tabella 3.3 alle varie percentuali.

di risonanza magnetica sequenziali provenienti dalla banca dati dell'Istituto Ortopedico Rizzoli. La loro dimensione è di 512x512 pixel e in figura 3.5 sono visibili alcune delle immagini utilizzate.

Si è scelto il sottocampionamento radiale con un S_r del 20%. Sono state fatte tre prove, la prima senza rumore, la seconda con un livello di rumore (δ) di $5 \cdot 10^{-3}$ e la terza con un livello di 10^{-3} .

La valutazione della ricostruzione è affidata al valore di PSNR restituito dalla ricostruzione. Per ogni algoritmo è stato creato un boxplot, nel quale è visualizzato un *box* il cui lato inferiore rappresenta il 25esimo percentile e quello superiore il 75esimo percentile. In rosso è rappresentata la mediana. È stata poi calcolata la media dei valori e confrontata tra i vari algoritmi con i vari livelli di rumore. Sono stati confrontati poi gli istogrammi dei risultati di ogni algoritmo con tutti i valori di rumore.

3.3.1 Senza Rumore

Come prima prova ogni algoritmo è stato applicato al set di immagini tenendo traccia del PSNR. Dalla tabella 3.5 si nota come i valori di media e mediana sono pressoché gli stessi per tutti e quattro gli algoritmi. Dallo studio del boxplot in figura 3.6, si nota come l'algoritmo con la distribuzione maggiore è $FNCR_S$ mentre gli altri presentano una distribuzione simile.

3.3.2 Con Rumore

Per simulare la presenza di rumore, i dati sottocampionati z sono stati sommati a del rumore normalmente distribuito δ . Così i dati utilizzati affetti da rumore z_n sono i seguenti:

$$z_n = z + \delta \|z\| v, \quad \|v\| = 1$$

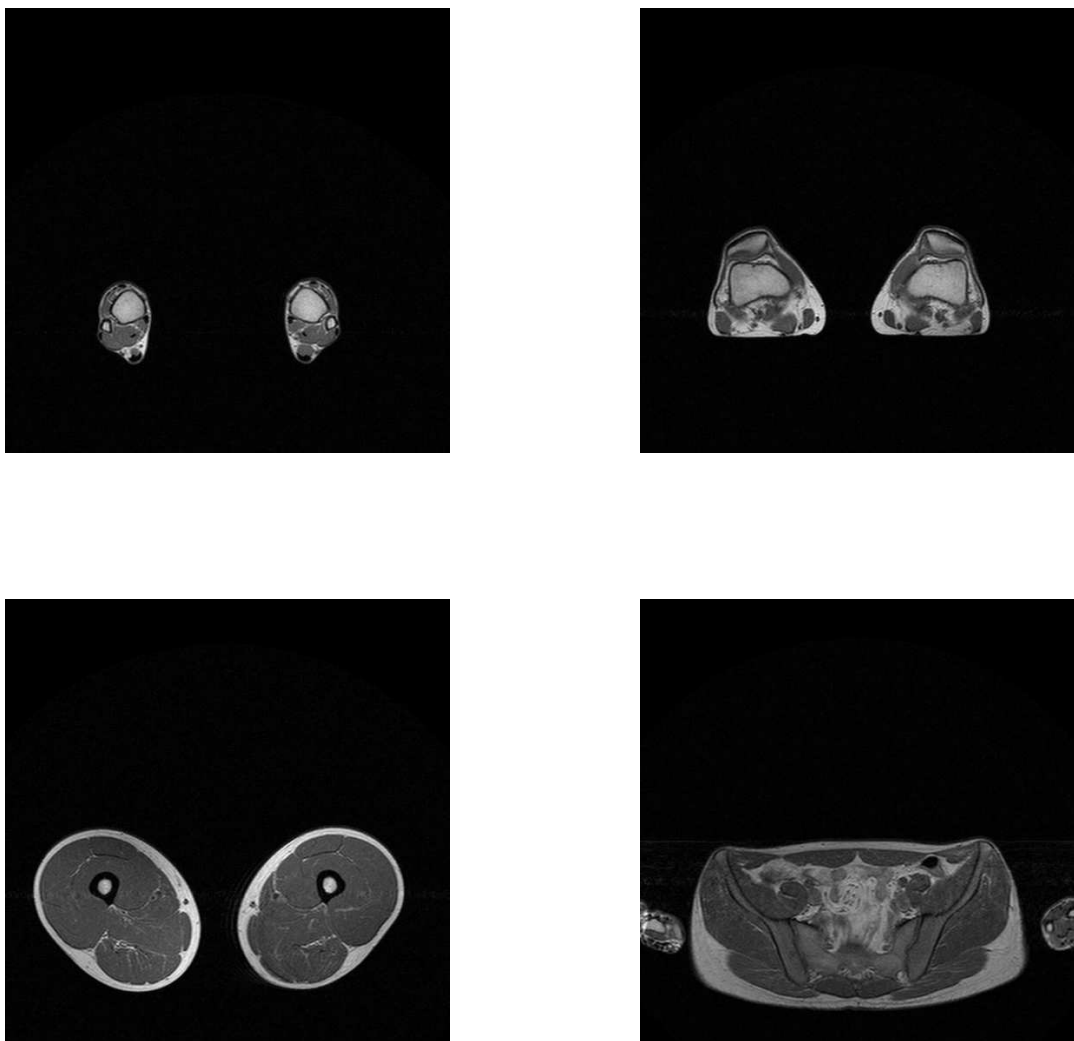


Figura 3.5: Tre delle duecento immagini costituenti il data base con cui sono state effettuate le prove con l'obiettivo di confrontare gli algoritmi $FNCR$, $FNCR_M$, $FNCR_S$ e $IL_1 - l_q$. Si tratta di una sequenza di immagini provenienti dalla scansione degli arti inferiori di un paziente dell'Istituto Ortopedico Rizzoli.

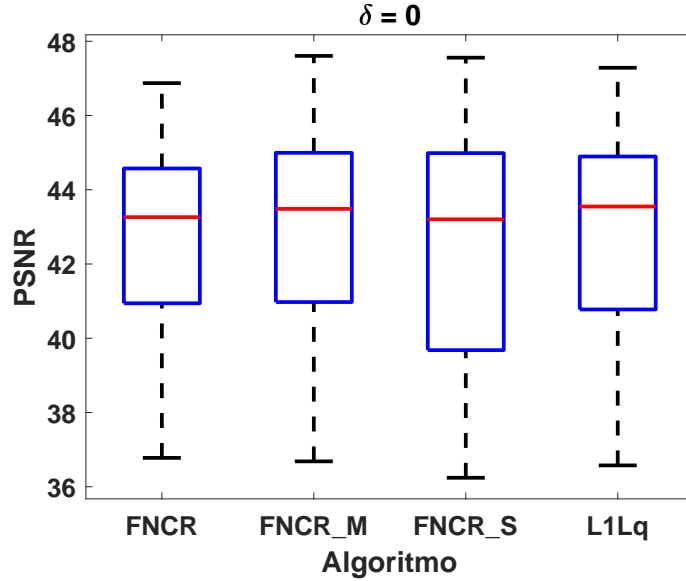


Figura 3.6: Boxplot delle simulazioni effettuate sul data base senza aggiunta di rumore ($\delta = 0$). Da sinistra a destra i box degli algoritmi FNCR, $FNCR_M$, $FNCR_S$ e $IL_1 - l_q$.

	FNCR	mod.	semp.	$IL_1 - l_q$
media	42.6	42.8	42.5	42.8
mediana	43.3	43.5	43.2	43.5

Tabella 3.5: Media e mediana dei valori del PSNR restituito dalle ricostruzioni del data base senza rumore.

dove v è un vettore casuale unitario ottenuto con la funzione Matlab `randn`. I valori di δ utilizzati sono $5 \cdot 10^{-3}$ e 10^{-3} .

In tabella 3.6 sono riportati i risultati. Per ogni algoritmo è stata calcolata la media e la mediana ad ogni livello di rumore δ . Nelle figure 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 si possono confrontare, a sinistra con dei boxplot e a destra con degli istogrammi, i risultati senza rumore e con rumore degli algoritmi FNCR, $FNCR_M$, $FNCR_S$ e $IL_1 - l_q$ rispettivamente.

L'algoritmo FNCR (tabella 3.6a) restituisce delle differenze di circa 1 punto quando i dati hanno un rumore di $\delta = 10^{-3}$ mentre con $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ si ottengono valori pressoché identici al caso senza rumore. Nelle figure in 3.7 si può apprezzare come con il livello di rumore più alto la varianza dei dati sia molto più contenuta rispetto al livello di rumore più basso.

L'algoritmo $FNCR_M$ restituisce dei risultati molto stabili al variare del rumore sia nel calcolo della media che della mediana (tabella 3.6b). Fatto apprezzabile anche in figura 3.8. Da notare come l'istogramma affetto da rumore (in porpora) combaci molto

	$\delta = 0$	$\delta = 10^{-3}$	$\delta = 5 \cdot 10^{-3}$		$\delta = 0$	$\delta = 10^{-3}$	$\delta = 5 \cdot 10^{-3}$
media	42.6	40.9	42.4	media	42.8	42.6	42.4
mediana	43.3	42.0	43.3	mediana	43.5	43.4	43.3
(a) FNCR				(b) $FNCR_M$			
	$\delta = 0$	$\delta = 10^{-3}$	$\delta = 5 \cdot 10^{-3}$		$\delta = 0$	$\delta = 10^{-3}$	$\delta = 5 \cdot 10^{-3}$
media	42.5	40.2	40.0	media	42.8	42.8	42.8
mediana	43.2	39.6	39.6	mediana	43.5	43.6	43.6
(c) $FNCR_S$				(d) $IL_1 - l_q$			

Tabella 3.6: Media e mediana dei valori di PSNR restituiti dalle ricostruzioni delle 200 immagini di risonanza magnetica utilizzando diversi livelli di rumore δ .

bene con quello senza rumore.

Si osserva invece come $FNCR_S$, con i dati affetti da rumore, restituisca valori medi di PSNR inferiori di circa due punti e di tre nel calcolo delle mediane (tabella 3.6c). Dagli istogrammi di colore azzurro (figura 3.9) si può osservare la grande varianza dei valori di PSNR restituiti già in assenza di rumore, replicata nel caso con rumore ma con una media inferiore.

L'algoritmo $IL_1 - l_q$ risulta il più stabile. La media risulta invariata nell'approssimazione utilizzata e la mediana presenta differenze minime. Dai boxplot e dagli istogrammi (figura 3.10) si apprezza come la presenza di rumore non abbia effetti significativi nella ricostruzione.

In figura 3.11 si possono confrontare i boxplot ottenuti con $\delta = 10^{-3}$ (figura 3.11a) e $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ (figura 3.11b)

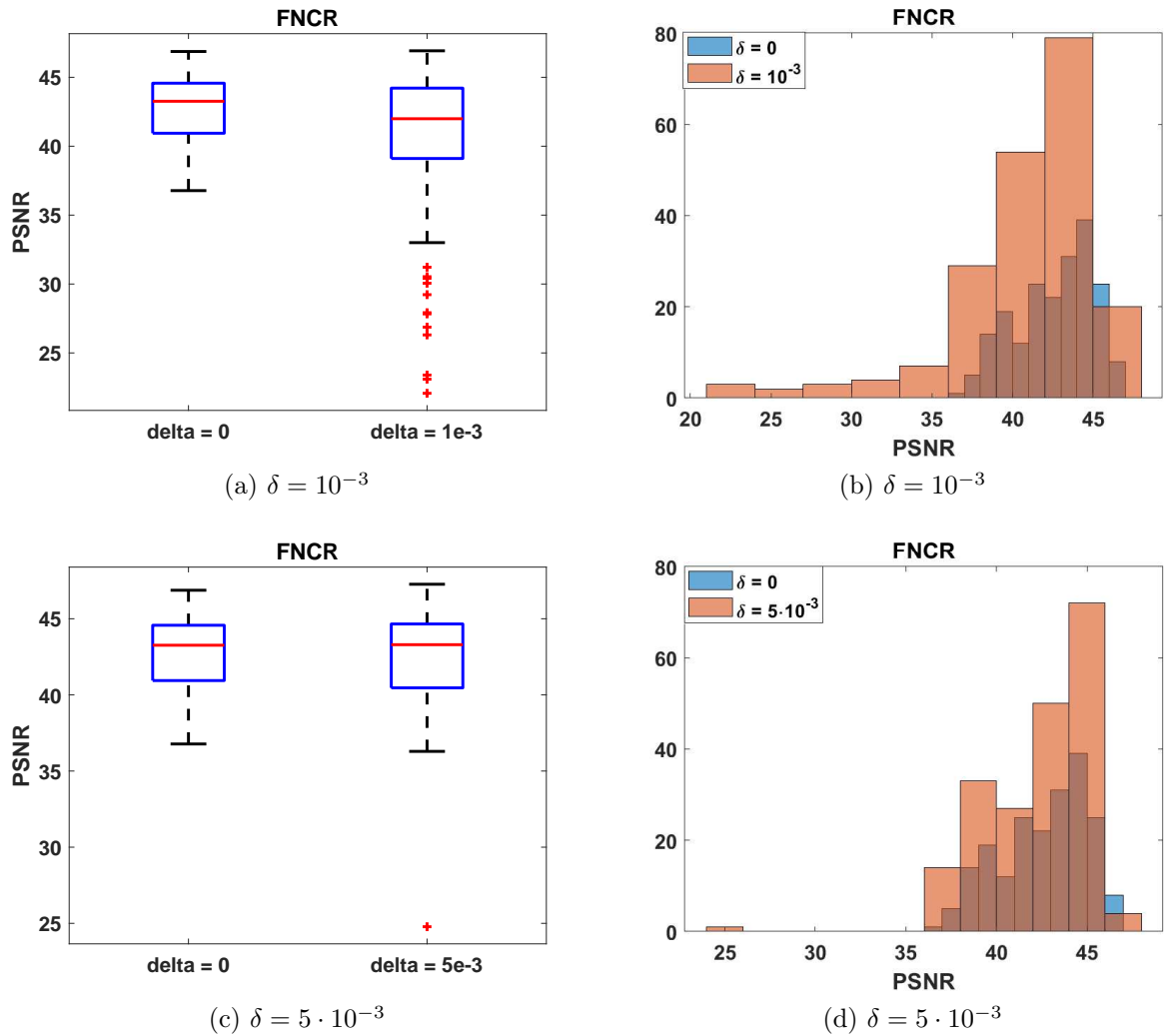


Figura 3.7: Nella prima colonna vi sono i boxplots e nella seconda gli istogrammi dei valori di PSNR restituiti dall'algoritmo FNCr ottenuti con i dati senza rumore e con rumore. Nella prima riga il livello di rumore è di $\delta = 10^{-3}$, nella seconda riga è di $\delta = 5 \cdot 10^{-5}$.

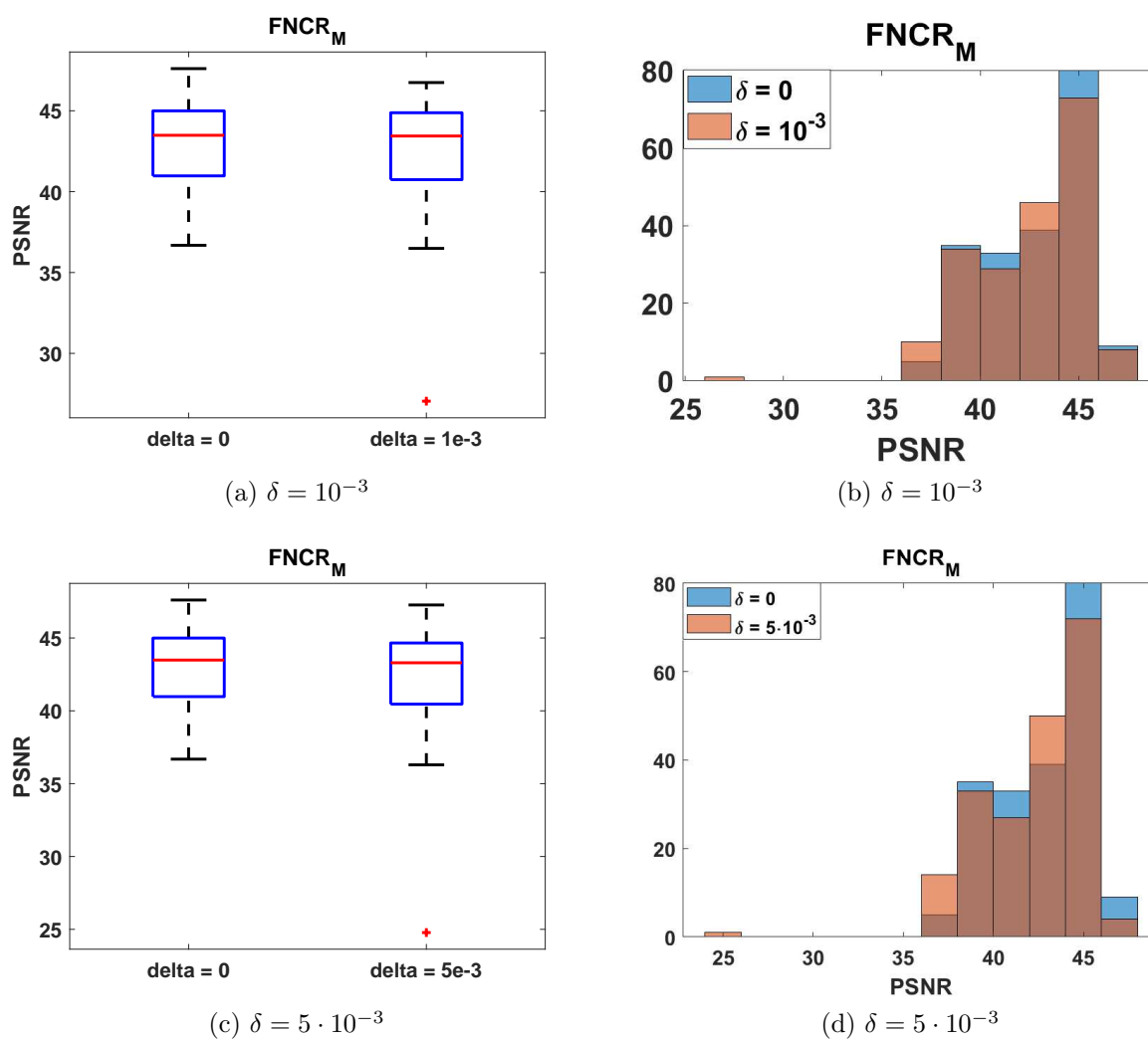


Figura 3.8: Nella prima colonna vi sono i boxplots e nella seconda gli istogrammi dei valori di PSNR restituiti dall'algoritmo $FNCR_M$ ottenuti con i dati senza rumore e con rumore. Nella prima riga il livello di rumore è di $\delta = 10^{-3}$, nella seconda riga è di $\delta = 5 \cdot 10^{-5}$.

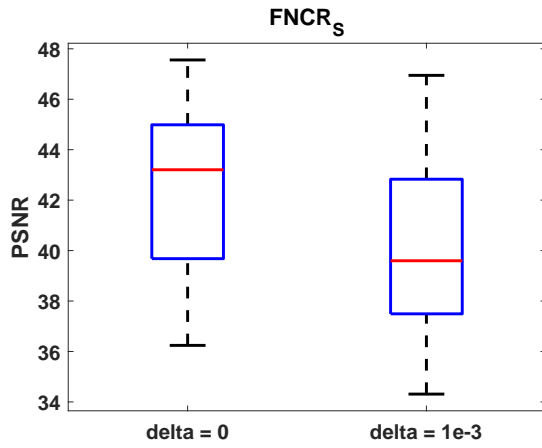
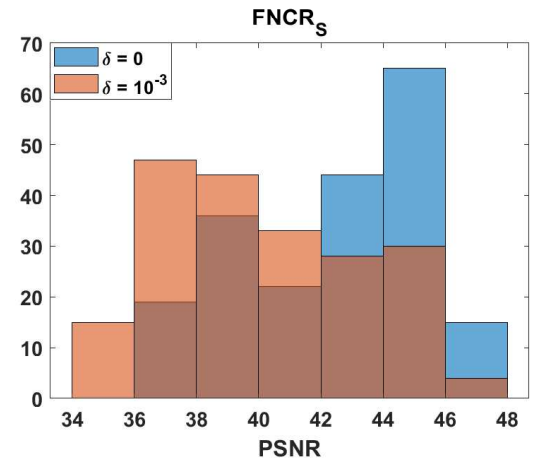
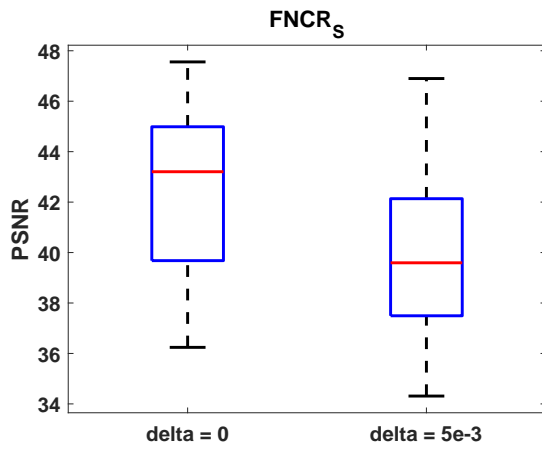
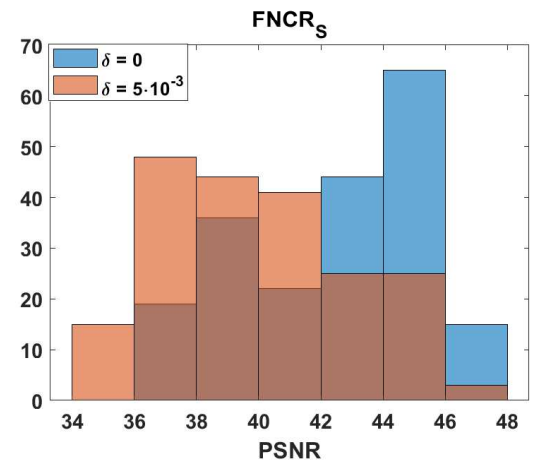
(a) $\delta = 10^{-3}$ (b) $\delta = 10^{-3}$ (c) $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ (d) $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$

Figura 3.9: Nella prima colonna vi sono i boxplots e nella seconda gli istogrammi dei valori di PSNR restituiti dall'algoritmo $FNCr_S$ ottenuti con i dati senza rumore e con rumore. Nella prima riga il livello di rumore è di $\delta = 10^{-3}$, nella seconda riga è di $\delta = 5 \cdot 10^{-5}$.

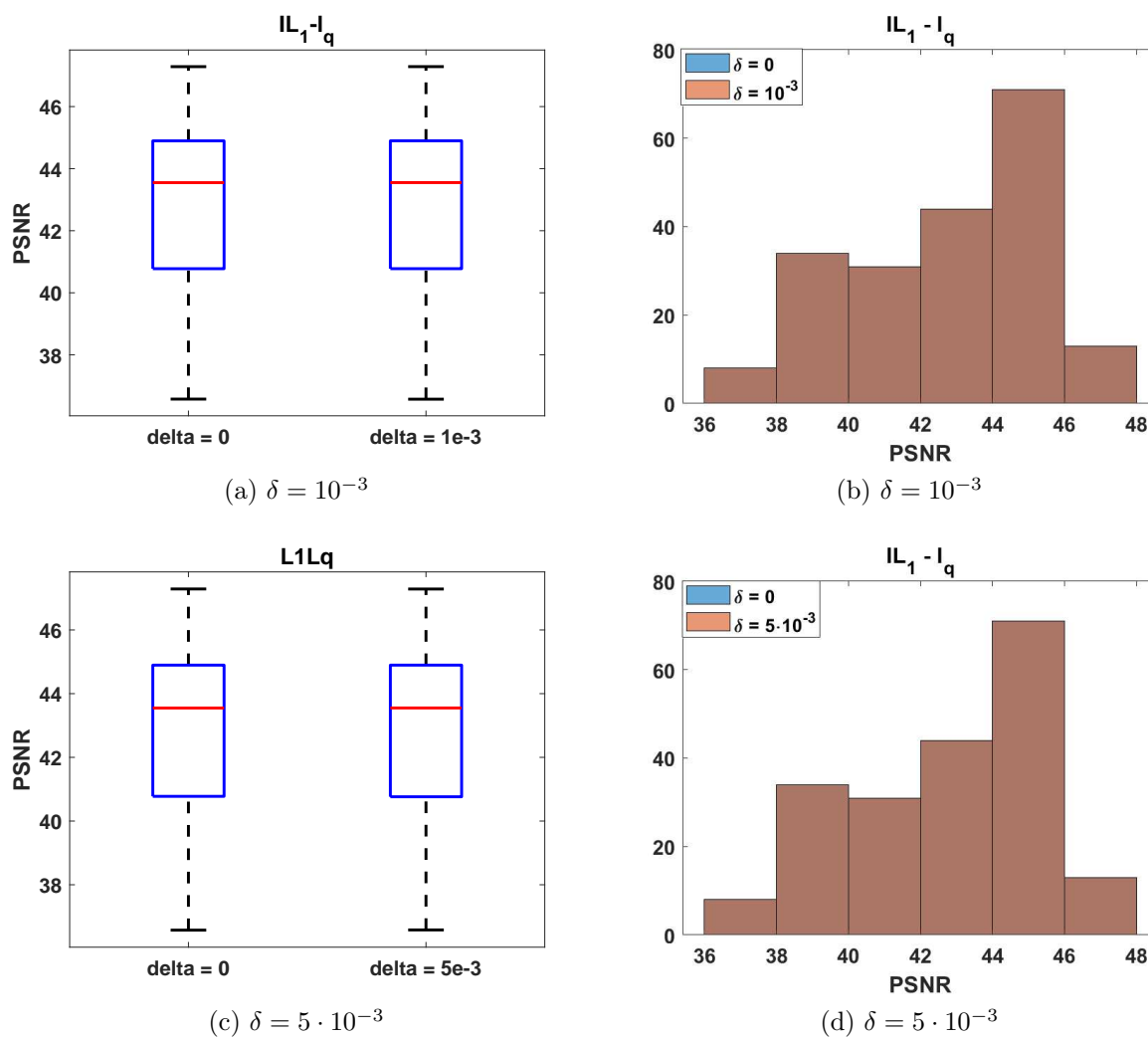
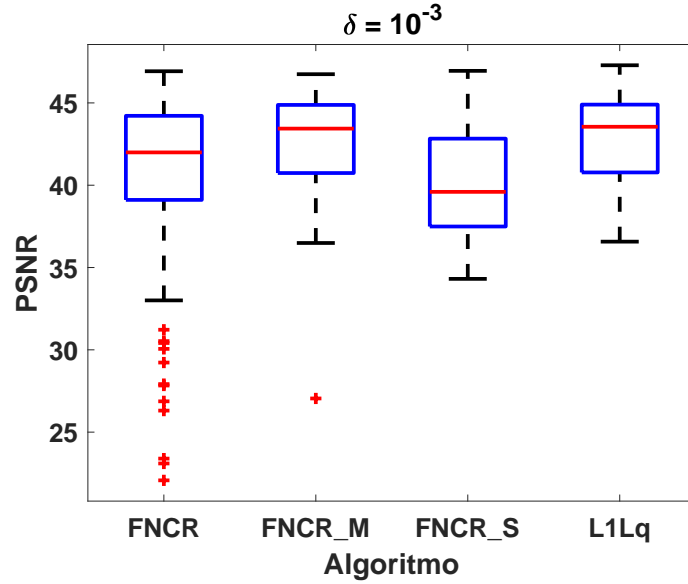
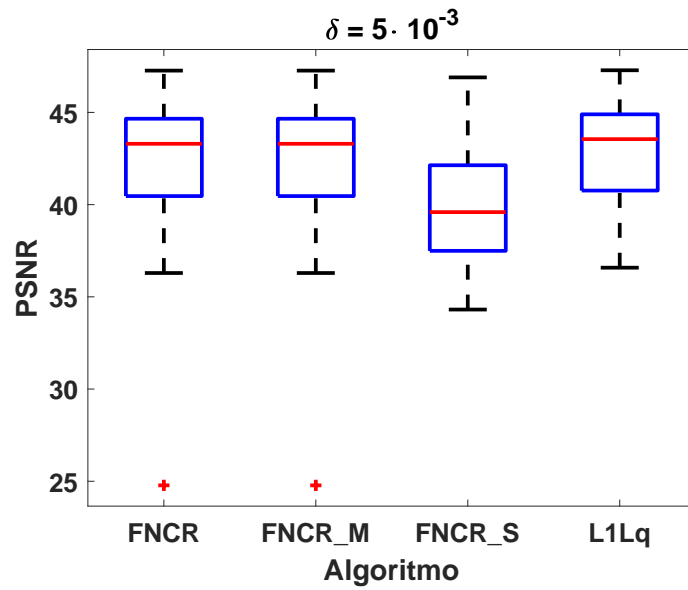


Figura 3.10: Nella prima colonna vi sono i boxplots e nella seconda gli istogrammi dei valori di PSNR restituiti dall'algorithm $IL_1 - l_q$ ottenuti con i dati senza rumore e con rumore. Nella prima riga il livello di rumore è di $\delta = 10^{-3}$, nella seconda riga è di $\delta = 5 \cdot 10^{-5}$.



(a)



(b)

Figura 3.11: Nella figura 3.11a sono riportati i boxplots dei valori di PSNR restituiti dalle ricostruzioni delle immagini del data base utilizzato con un livello δ di rumore pari a 10^{-3} . Nella figura 3.11b il livello di rumore è pari a $5 \cdot 10^{-3}$.

Capitolo 4

Risultati numerici: dati reali

Con lo scopo di studiare gli effetti del sottocampionamento sulla ricostruzione sono stati utilizzati due tipologie di dati da spazi k reali provenienti da due diverse strumentazioni. In questo caso i dati utilizzati dagli algoritmi per la ricostruzione sono quelli ottenuti dal sottocampionamento della matrice completa dello spazio k misurato dal tomografo. In un caso i dati sono non quadrati e dunque si è reso necessario estendere la procedura a matrici non quadrate, in particolare il sottocampionamento è implementato come una funzione che agisce sullo spazio k . I dati hanno così la seguente espressione:

$$z = \mathcal{M}(S)$$

dove S è la matrice dello spazio k completa e \mathcal{M} è il sottocampionamento scelto.

Nel primo paragrafo si discutono i risultati ottenuti utilizzando dei dati provenienti da uno scanner con un campo da 3T tramite una sequenza turbo spin-echo.

Nel secondo paragrafo invece si utilizza un set di immagini acquisite da un Tomografo da 0.2T attraverso una sequenza Saturation Recovery (SR).

In entrambi i casi i dati vengono dalla scansione di un fantoccio. Un fantoccio è un oggetto progettato per essere scansionato dalla macchina allo scopo di testarla e calibrarla. È generalmente costituito da delle porzioni contenenti un materiale, generalmente liquido, generatore di segnale interrotte da delle porzioni costituite da un materiale che non genera alcun segnale e dunque, eventuali rivelazioni sono da imputarsi al rumore. Nel caso del calcolo delle mappe questo è riempito di un liquido di cui si conoscono i valori dei tempi di rilassamento T_1 e T_2 , in modo da poter valutare con precisione gli esperimenti fatti.

4.1 Ricostruzione da spazi k acquisiti sperimentalmente

Con lo scopo di studiare la ricostruzione di dati reali sottocampionati è stato applicato FNCR ad un set di dati scaricati dalla rete [9] provenienti da una acquisizione di un fantoccio con una macchina dotata di un campo magnetico costante di 3T con una sequenza turbo spin-echo. Le immagini sono riportate in figura 4.1 e hanno dimensione 340x256 pixel.

L'utilizzo di tali spazi k ha reso necessario un adattamento dell'algoritmo FNCR. In particolar modo si è reso necessario modificare i criteri d'arresto del passo Continuation Scheme (2.5), indicato dall'iterazione l , con il criterio in (4.1) e di *IRL1* (2.12), indicato con h , con (4.2).

$$e^{(l+1)} < \tau_l \quad (4.1)$$

$$e^{(h+1)} < \tau_h \quad (4.2)$$

Effettuando delle prove sono stati scelti come valori delle due tolleranze quelli di $\tau_l = 10^{-3}$ e $\tau_h = 10^{-1}$. Gli altri parametri di ricostruzioni sono stati scelti dopo varie prove come $r_0 = 10^3$, $\gamma = 10^3$ e $\beta = 1.3$.

È stata studiata la ricostruzione di due diversi pixel corrispondenti a due oggetti generatori del segnale. Su questi si valuta la accuratezza della ricostruzione. In figura 4.2a sono riportati i due pixel scelti; in blu quello di coordinate (156,72) e in rosso quello di coordinate (108,136). In figura 4.2 è possibile osservare nelle ordinate dei grafici l'intensità del segnale su ogni immagine del set utilizzato delle immagini di riferimento, anche dette *Ground Truths* (GT). Il grafico 4.2b si riferisce al pixel (156,72) mentre il grafico 4.2c al pixel (108,136). Per ogni sottocampionamento le percentuali utilizzate sono del 10%, 20% e 30%.

In figura 4.4 sono visibili i risultati riferiti al pixel (156,72). Si può notare come la ricostruzione migliore avvenga con un campionamento spirale (figura 4.4d) dove le curve della Ground Truth e delle ricostruzioni sono quasi sovrapposte. Anche il sottocampionamento radiale (figura 4.4a) restituisce una ottima approssimazione della Ground Truth mentre, il campionamento casuale (figura 4.4c) e soprattutto quello cartesiano (figura 4.4b) restituiscono delle approssimazioni non altrettanto efficienti.

In figura 4.5 è possibile osservare la ricostruzione del pixel di coordinate (108,136). Si può osservare ancora una volta la bontà della ricostruzione nel caso di un sottocampionamento a spirale (4.5d). In questo caso il sottocampionamento radiale (figura 4.5a), pur restituendo una ottima ricostruzione, risulta meno efficiente di quello a spirale a differenza del caso studiato in precedenza. I sottocampionamenti casuale (figura 4.5c) e cartesiano (figura 4.5b) risultano ancora una volta i meno efficienti, in particolar modo

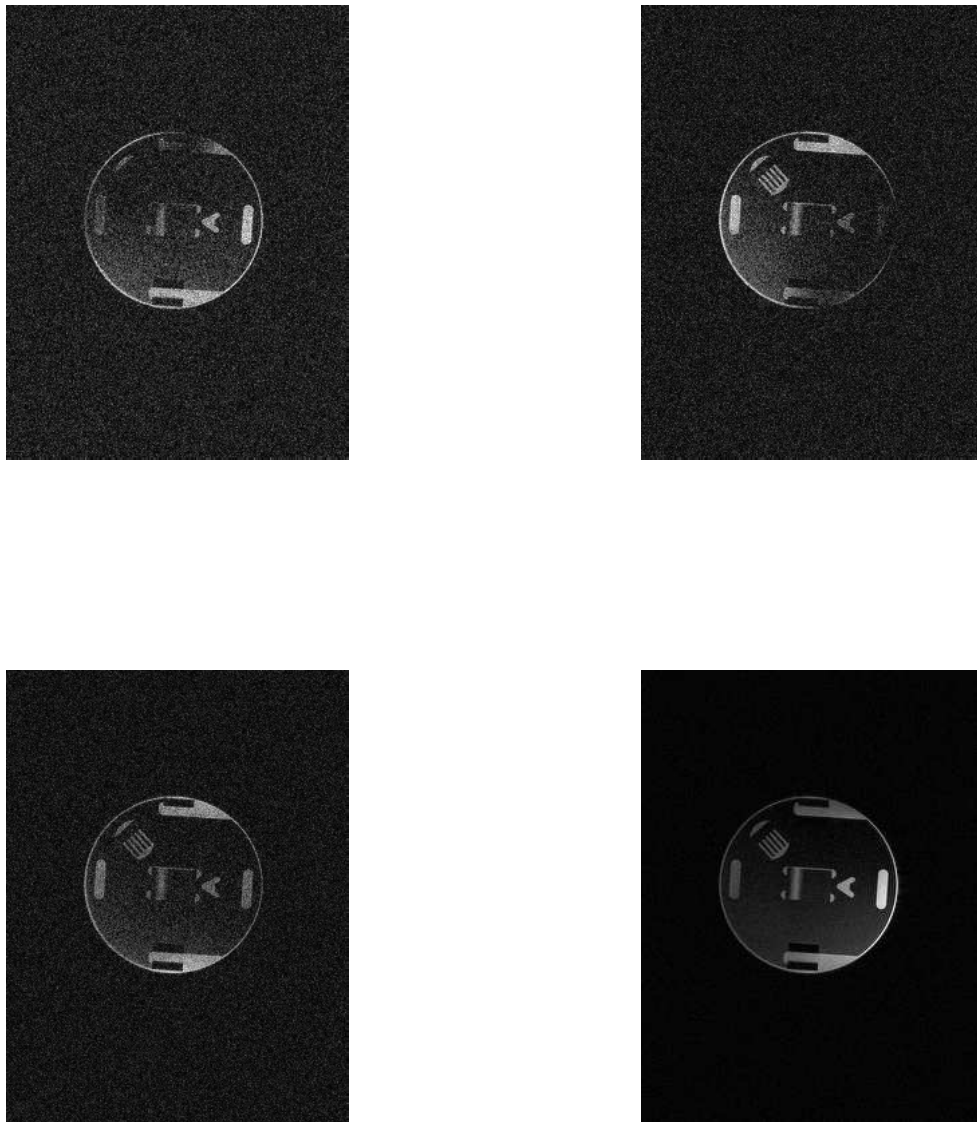
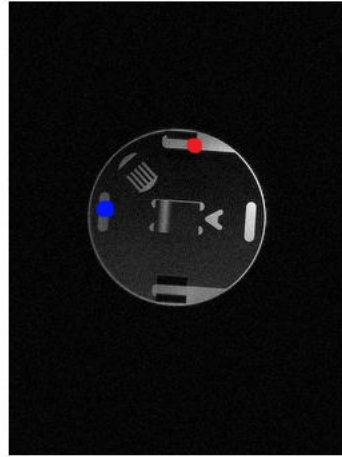
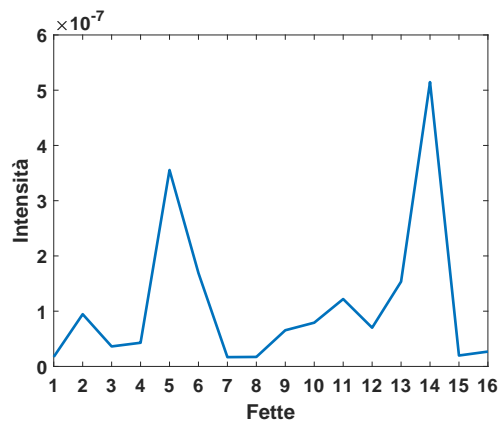


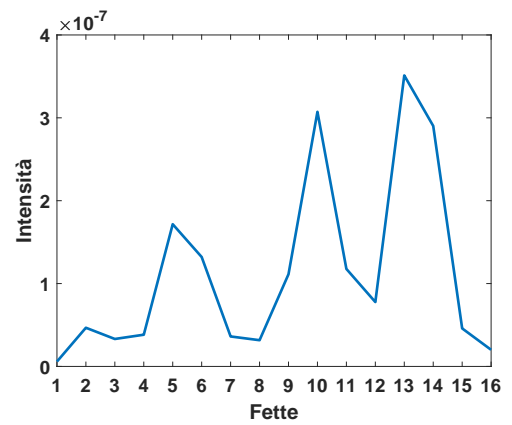
Figura 4.1: In senso orario a partire dalla prima riga a sinistra: la prima, quarta, ottava e dodicesima delle sedici immagini della sequenza turbo spin-echo con la quale è stato utilizzato l'algoritmo FNCR.



(a)



(b) Pixel blu di coordinate (156,72).



(c) Pixel rosso di coordinate (108,136).

Figura 4.2: Nella figura 4.2a si può osservare in blu il pixel di coordinate (156,72) e in rosso il pixel di coordinate (108,136) su cui sono state valutate le ricostruzioni. L'immagine è la dodicesima fetta. Nelle figure 4.2b e 4.2c si possono osservare le curve della Ground Truths nei due pixel scelti al variare delle fette.

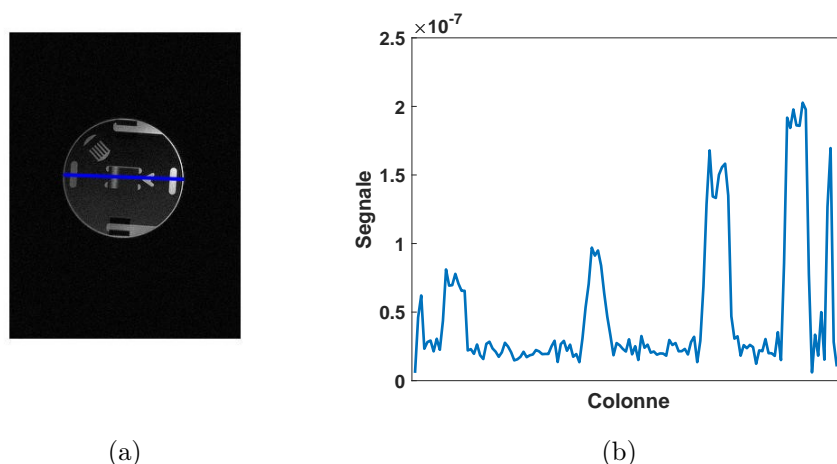


Figura 4.3: A sinistra la riga 160 e a destra i valori corrispondenti.

nel caso cartesiano si nota un comportamento anomalo in quanto la ricostruzione peggiore si ha con la percentuale intermedia del 20% e non in quella più bassa del 10% come ci si potrebbe aspettare.

È stata valutata la ricostruzione della riga 160 limitata nella colonne dove è presente l'oggetto di interesse (figura 4.3a). La particolare forma geometrica del fantoccio permette di valutare come la ricostruzione si comporti sia in presenza del segnale (corrispondente alle zone di grigio) sia in presenza di rumore (corrispondente alle zone più scure). I valori della Ground Truth (figura 4.3b) sono stati confrontati con quelli delle ricostruzioni, tutte effettuate con il 30% di campionamento.

In figura 4.6 si possono vedere i risultati ottenuti. Le ricostruzioni restituite dai sottocampionamenti radiale (figura 4.6a) e spirale (figura 4.6d) ricostruisce molto efficacemente i picchi corrispondenti agli oggetti e risulta meno efficiente nel ricostruire le oscillazioni corrispondenti alle zone più scure, riconducibili al rumore, si assiste quindi a un effetto regolarizzante. Risulta molto efficiente anche il campionamento casuale (figura 4.6c) mentre il campionamento cartesiano risulta essere poco accurato nella ricostruzione dei picchi più bassi rendendoli quasi equivalenti al rumore rendendo quindi la ricostruzione inaffidabile.

4.2 Mappe MRI da dati sottocampionati

Con lo scopo di studiare gli effetti del sottocampionamento nel calcolo delle mappe è stato acquisito un set di dati. Questi sono stati acquisiti a temperatura ambiente dal tomografo ARTOSCAN (Esaote S.p.A., Genova) del Dipartimento DICAM dell'Università di Bologna operante alla frequenza di risonanza di 8 MHz, con un campo magnetico

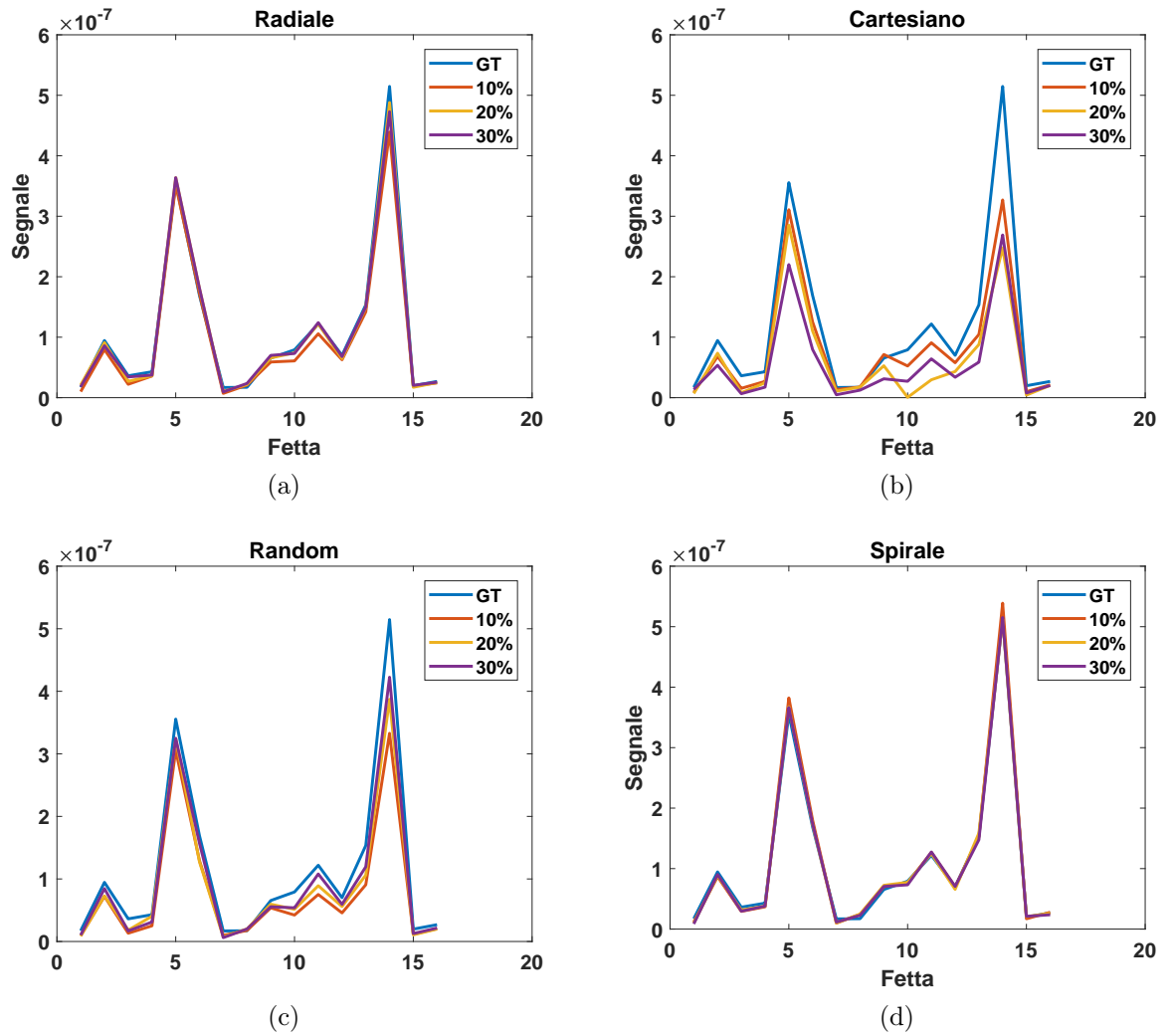


Figura 4.4: Ricostruzione del pixel di coordinate (156,72) delle sedici fette con i sottocampionamenti radiale, cartesiano, random e spirale alle percentuali 10%, 20% e 30%.

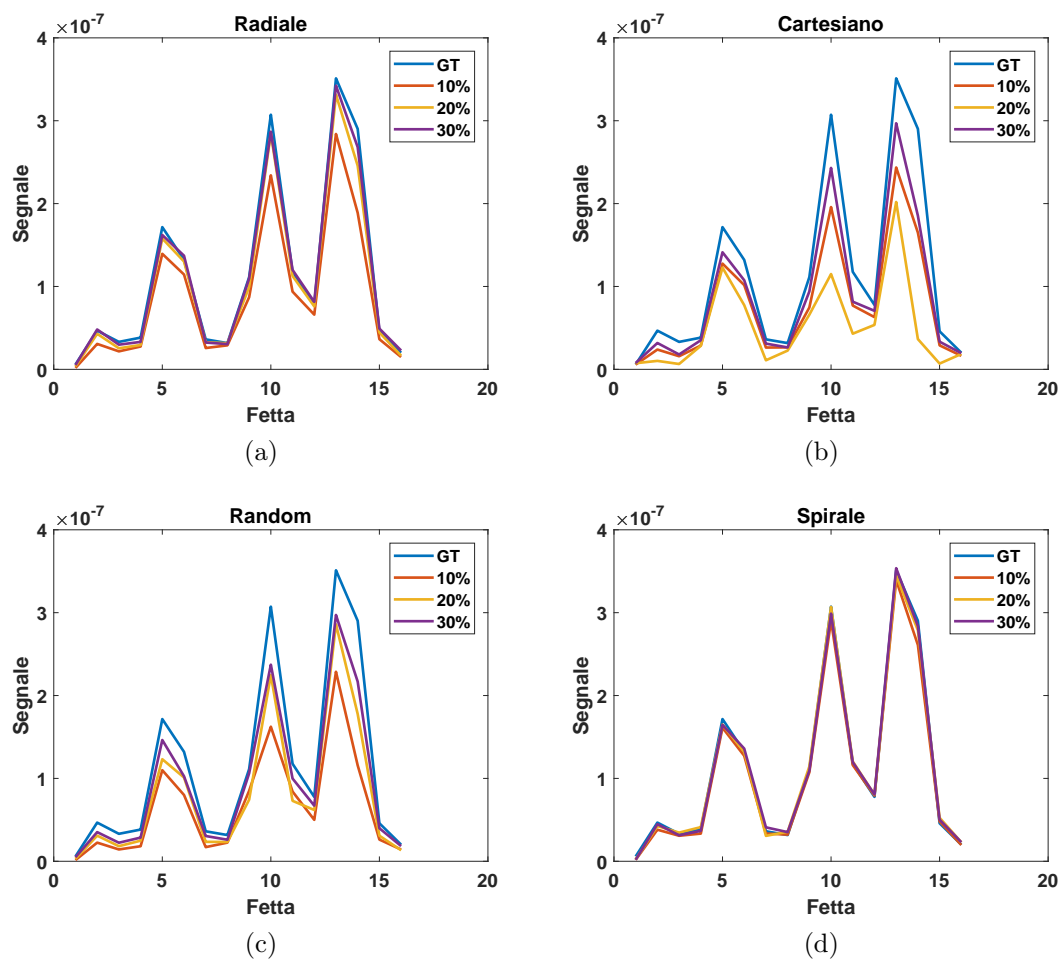


Figura 4.5: Ricostruzione del pixel di coordinate (108,136) delle sedici fette con i sottocampionamenti radiale, cartesiano, random e spirale alle percentuali 10%, 20% e 30%.

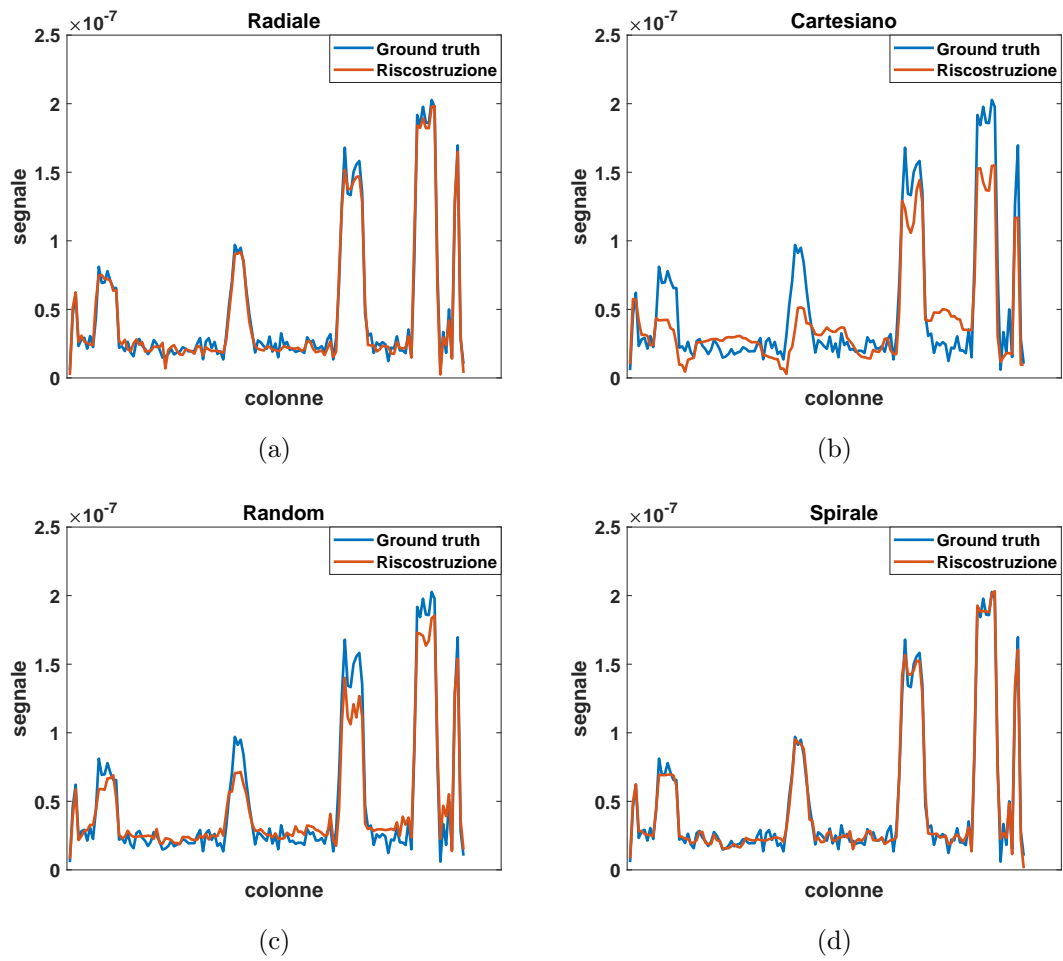


Figura 4.6: Ricostruzioni della riga 160 nella sola porzione dell'oggetto in esame della dodicesima fetta.

costante di 0.2 T, con una intensità massima di gradiente di 10 mT/m. Il tomografo fornisce, oltre agli spazi k , le immagini già ricostruite. La sequenza utilizzata è una SR (Saturation Recovery) che permette di ottenere delle immagini pesate in T_1 (tempo di rilassamento longitudinale), fittando il segnale secondo il modello monoesponenziale (1.19) si ottengono le mappe in T_1 . Le immagini scansionate sono visibili in figura 4.7. Le mappe sono state create tramite il software ARTS (Advanced Relaxation Tomography Software) [2] il quale fitta i dati di ogni pixel utilizzando un algoritmo basato sul metodo dei minimi quadrati non lineari di Levenberg - Marquardt.

4.2.1 Preparazione dei dati.

Attraverso l'estrazione dei dati grezzi e la loro conversione in formato MatLab, si ha a disposizione lo spazio k del tomografo completamente campionato. Lo spazio k così acquisito risulta con le frequenze massime non posizionate al centro della matrice, osservabile andando a visualizzare il modulo e la fase dello spazio k (figura 4.8).

La ricostruzione da spazi k non centrati con l'algoritmo FNCR produce delle ricostruzioni affette da artefatti. In particolare è richiesta un'alta percentuale di campionamento per ottenere una ricostruzione senza che gli artefatti siano predominanti come in figura 4.11, dove, a sinistra è visibile la ricostruzione ottenuta dai dati sottocampionati con la maschera radiale al 20% dell'ultima fetta della sequenza. Aumentando la percentuale di campionamento compaiono delle righe orizzontali simili a quelle presenti nella fase della ricostruzione. In figura 4.9 è visibile la ricostruzione con un sottocampionamento radiale del 50%.

Per ovviare a questo problema sono stati testati due metodi. Il primo quello di portare al centro della matrice dello spazio k le frequenze massime attraverso uno semplice shift e ponendo a zero gli elementi della matrice necessari a renderla della dimensione precedente. Un'altra è quella di copiare, al posto degli zeri, la parte tagliata sfruttando l'Hermitianità dello spazio k . Le fasi così ottenute dai due spazi k sono visibili in figura 4.10. Utilizzare questi dati produce una ricostruzione accettabile e molto simile (in figura 4.11 a destra è visibile la ricostruzione ottenuta con un sottocampionamento radiale del 20%). Il PSNR è di poco superiore nel caso della matrice completata con degli zeri (figura 4.12) e per questo è stata preferita questa strategia nel trattare i dati.

4.2.2 Costruzione delle mappe T_1

Come prima prova sono state costruite le mappe con le immagini sottocampionate al 50% e confrontate con la mappa di riferimento (figura 4.13c) ottenuta con le immagini ricostruite dal tomografo senza sottocampionamento dello spazio k .

La creazione tramite ARTS delle mappe con le immagini sottocampionate ha prodotto dei risultati accettabili solamente nel caso di un sottocampionamento a spirale. Negli altri casi, anche con percentuali di campionamento elevate sono presenti degli artefatti

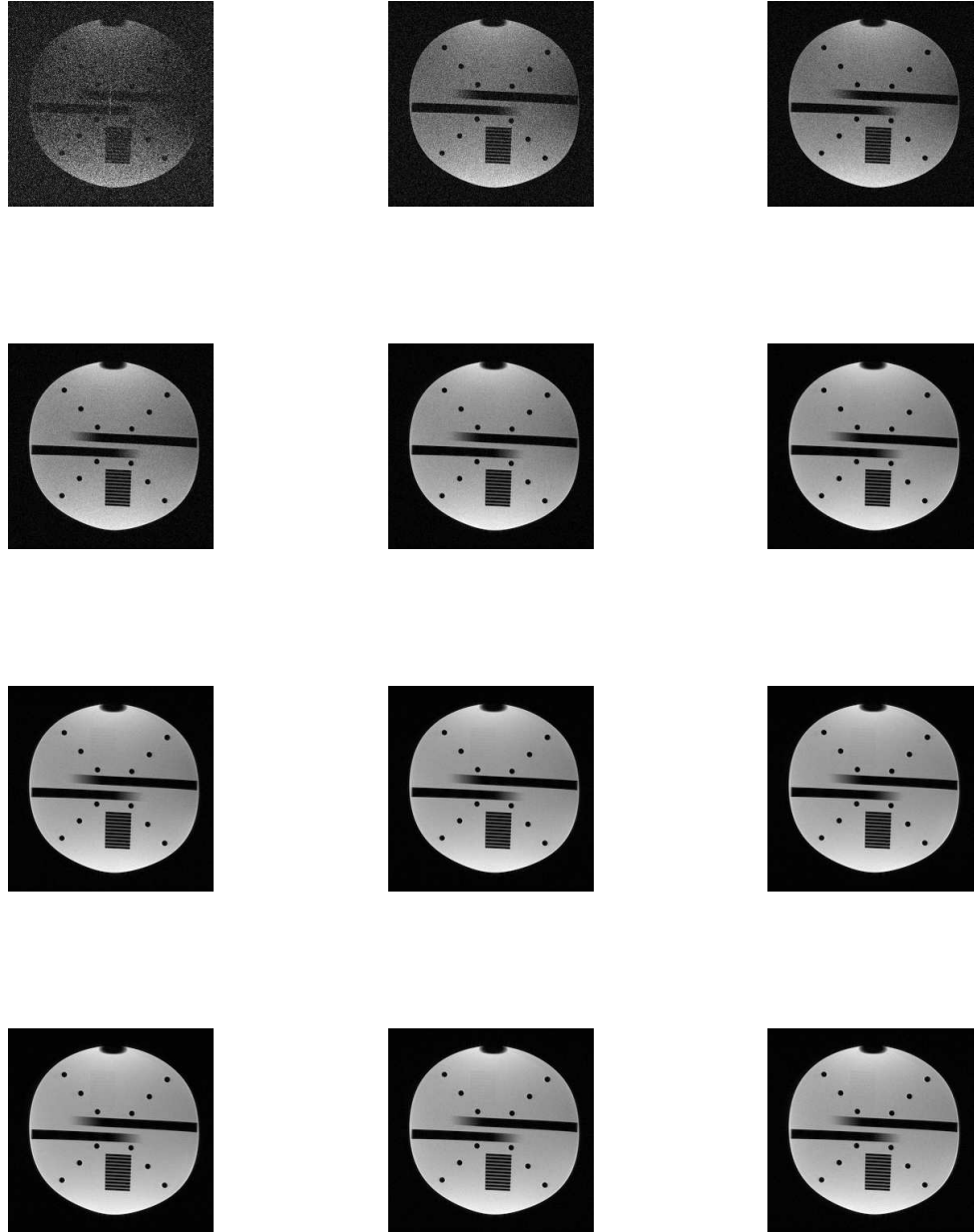


Figura 4.7: Dodici delle tredici immagini acquisite con la sequenza SR con lo scopo di creare una mappa pesata in T_1 .

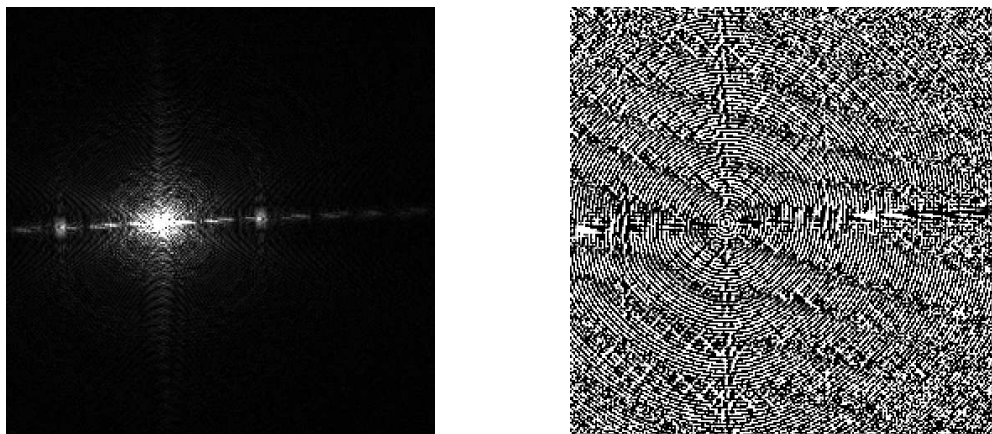


Figura 4.8: A destra il modulo e a sinistra la fase dello spazio k della tredicesima fetta del set di immagini acquisite con il tomografo.

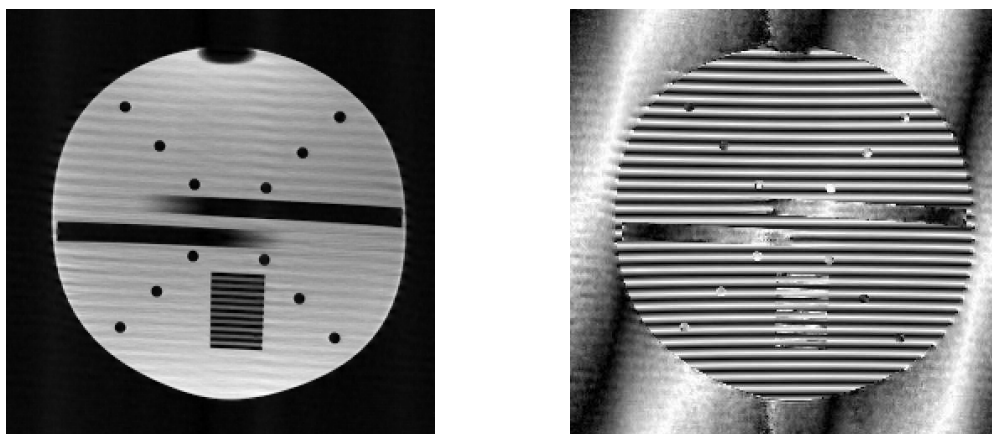


Figura 4.9: Ricostruzione ottenuta utilizzando lo spazio k fornito dalla macchina con FNCR e un sottocampionamento del 50%. La figura a sinistra è l'immagine in modulo, la figura a destra rappresenta la fase.

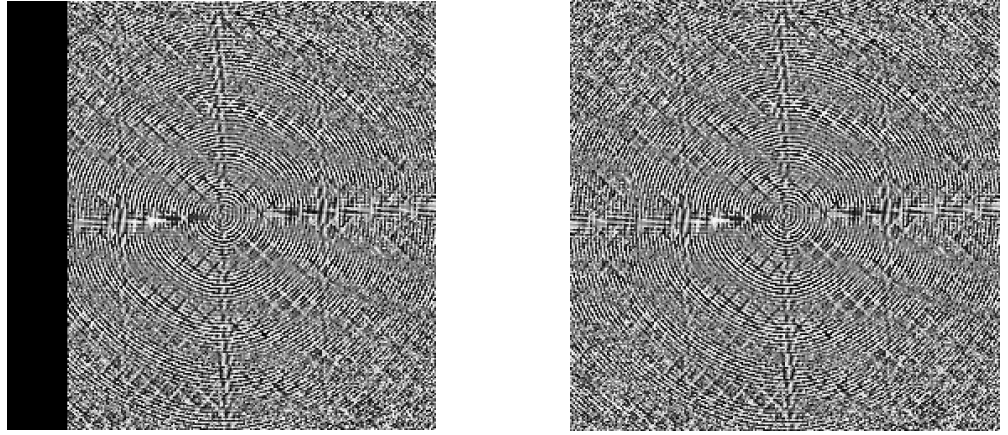


Figura 4.10: A sinistra la fase dello spazio k shiftato e completato con degli zeri, a destra la fase dello spazio k in cui gli zeri sono sostituiti dalla parte tagliata sfruttando l'Hermitianità dello spazio k

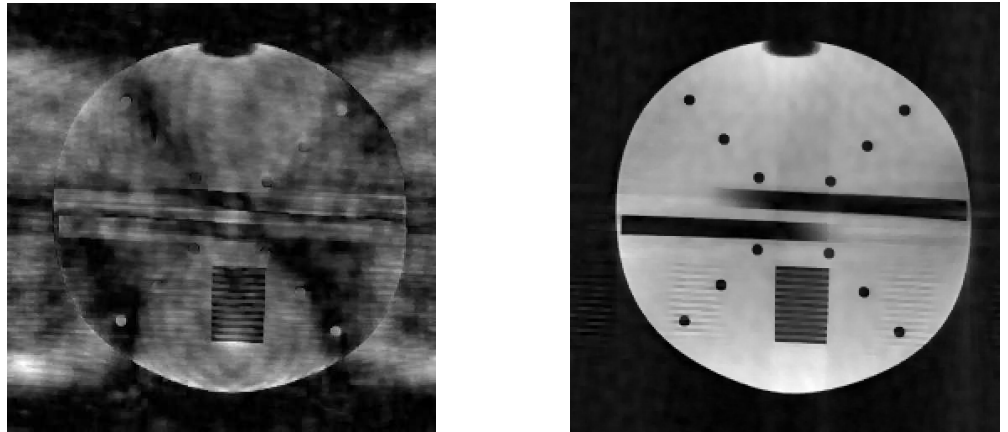


Figura 4.11: A sinistra la ricostruzione dell'ultima fetta ottenuta utilizzando i dati originali, a destra, quella ottenuta con i dati completati. Entrambe sono state ottenute con un sottocampionamento radiale del 20%.

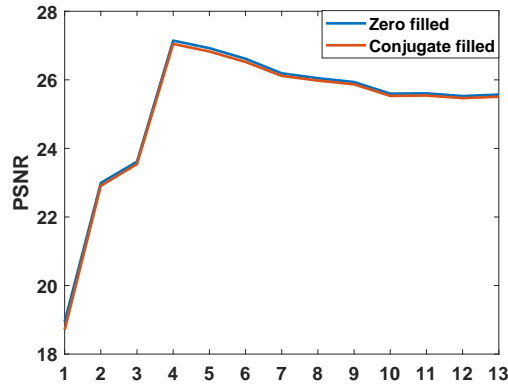


Figura 4.12: PSNR delle ricostruzioni utilizzando i dati delle matrici completate. In blu il risultato ottenuto con la matrice completata con degli zeri e in rosso il risultato ottenuto con la matrice completata con la parte tagliata coniugandola e riflettendola rispetto alle righe.

che le rendono inutilizzabili. In figura 4.13a è osservabile la mappa calcolata con le immagini sottocampionate radialmente al 50% mentre in figura 4.13b è osservabile la mappa calcolata con un sottocampionamento spirale sempre del 50%. In virtù di questi risultati si è approfondito lo studio solamente con il sottocampionamento a spirale.

Per valutare le mappe ottenute con la ricostruzione dei dati sottocampionati sono state scelte diverse ROI (*Region of interest*). In ogni ROI è stato calcolato l'errore relativo:

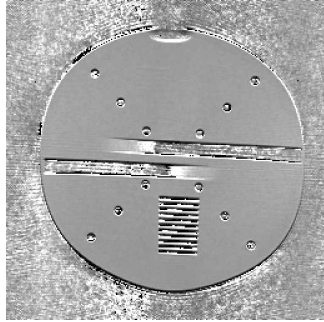
$$E_r = \frac{\|M_0 - M_s\|}{\|M_0\|} \quad (4.3)$$

dove con M_0 si indica la mappa di riferimento, con M_s la mappa ottenuta dal sottocampionamento.

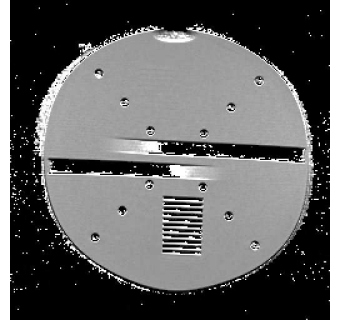
In figura 4.14 si può osservare la ROI gialla (g) posta sulla mappa di riferimento e il grafico degli errori relativi all'aumentare della percentuale di campionamento. Questa regione contiene una figura geometrica di controllo del fantoccio dove il segnale è dovuto al rumore. Si può osservare dal grafico che l'errore tende a diminuire con l'aumentare della percentuale di campionamento con dei picchi corrispondenti alle percentuali del 40% e 70%.

In figura 4.15 la ROI magenta (m) contiene molte zone in cui il segnale è dovuto al rumore e non dalla presenza del liquido di controllo. L'errore relativo ha un andamento oscillante attorno al valore 0.4.

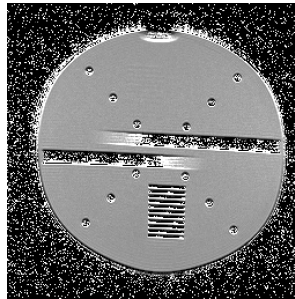
In figura 4.16 la ROI ciano (c) contiene due zone generatrici di rumore. In questo caso l'errore, seppur avente il suo massimo valore nella percentuale di campionamento maggiore, risulta stabile in quanto ha una oscillazione massima di 0.08 tra il campionamento al 20% e quello al 60%. I suoi valori sono attorno a 0.44.



(a) Radiale



(b) Spirale



(c) Mappa di riferimento

Figura 4.13: In alto due mappe calcolate con le immagini ricostruite con un sottocampionamento del 50%. In basso la mappa di riferimento calcolata utilizzando le immagini fornite dal tomografo.

In figura 4.17 la ROI blu (b) è stata scelta in quanto contiene una parte omogenea del campione. In questa porzione si vede che l'errore relativo ha un andamento decrescente all'aumentare della percentuale di campionamento.

Nelle figure 4.18 e 4.19 sono state studiate due colonne, blu indicata con C_b e rossa indicata con C_r , limitate nelle sole righe dove è presente il fantoccio; evitando quindi lo sfondo il cui segnale è dovuto al solo rumore. Come è possibile osservare dai grafici gli errori relativi non hanno un andamento lineare bensì oscillante con picchi anche molto alti (la colonna rossa arriva ad avere un errore relativo di 0.98 nel sottocampionamento del 40% e la blu a 0.9 nel caso del 60%).

Gli errori relativi sono riassunti nella tabella 4.1 dove, nell'ultima colonna sono riportati gli errori relativi riferiti all'intera porzione dell'oggetto avendo impostato una ROI, indicata con F, che escludesse lo sfondo. Come si può osservare l'errore relativo complessivo nella figura è stabile attorno al valore 0.22 mentre, considerando piccole porzioni di oggetto si osservano delle piccole oscillazioni sempre attorno ad un valore (casi (g), (m), (c)). Considerando invece un solo profilo (casi C_b e C_r) gli errori sono molto oscillanti e anche di entità maggiore. Infine in una porzione di oggetto in cui non vi sono sorgenti di rumore (caso (b)) gli errori sono i più piccoli rilevati e tendono a decrescere con l'aumentare della percentuale di sottocampionamento.

Nelle figure 4.22 e 4.23 è possibile confrontare in dettaglio le varie ROI sulla mappa di riferimento e sulla mappa ottenuta con un campionamento a spirale del 20%. Dall'osservazione di queste figure si può notare come la ricostruzione tenda a omogeneizzare la figura e quindi ad avere un effetto regolarizzante sul rumore presente.

In figura 4.21 è possibile osservare i valori medi calcolate nelle varie ROI restituite dalle ricostruzioni confrontate con il valore medio in blu della Ground Truth. Si può apprezzare l'andamento oscillante delle ROI magenta (figura 4.21b) e ciano (figura 4.21c). La media calcolata nella ROI gialla (figura 4.21a) oscilla attorno al valore di riferimento della Ground Truth mentre, la media calcolata nella ROI blu (figura 4.21d) è poco al di sotto del valore di riferimento. Inoltre, sapendo che il liquido del fantoccio generatore del segnale possiede un tempo di rilassamento longitudinale T_1 attorno al valore 300, si osserva come le ROI contenenti porzioni affette da rumore (casi (g), (m) e (c)) hanno valori diversi da quello di riferimento mentre in porzioni in cui il segnale è dovuto solo alla presenza del liquido il valore medio è molto più vicino al valore effettivo (caso (b)).

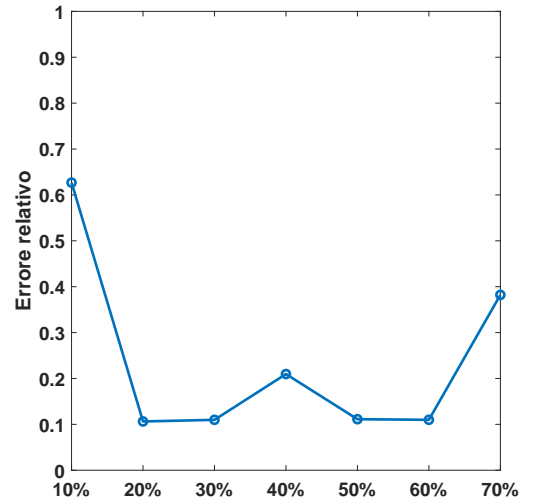
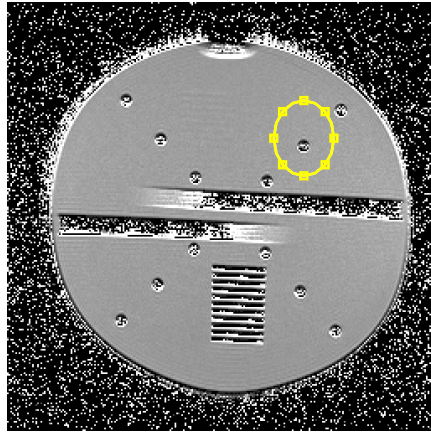


Figura 4.14: Roi gialla e errore relativo della mappa calcolata con le immagini sottocampionate con la maschera a spirale a diverse percentuali.

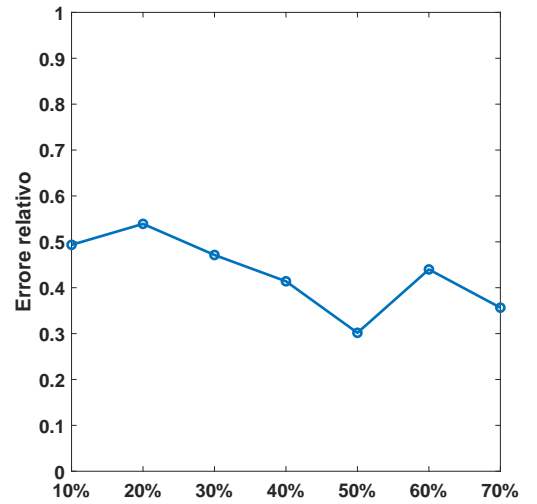
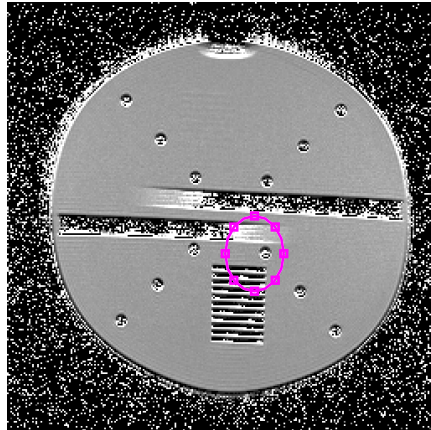


Figura 4.15: Roi magenta e errore relativo della mappa calcolata con le immagini sottocampionate con la maschera a spirale a diverse percentuali.

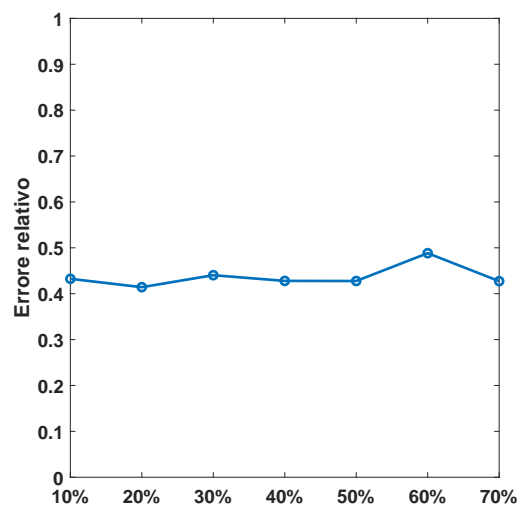
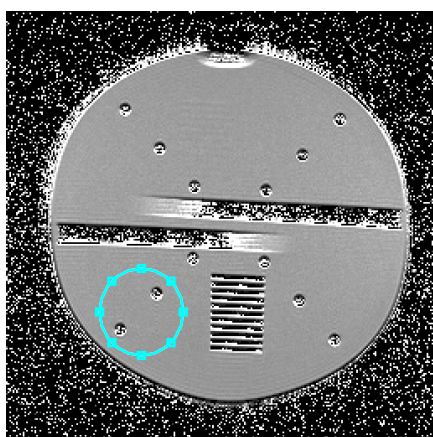


Figura 4.16: Roi ciano e errore relativo della mappa calcolata con le immagini sottocampionate con la maschera a spirale a diverse percentuali.

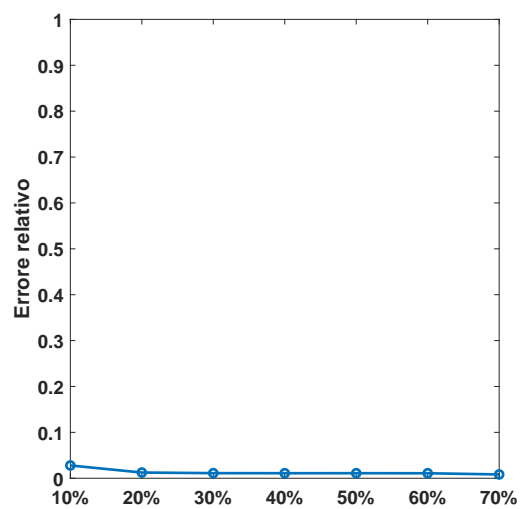
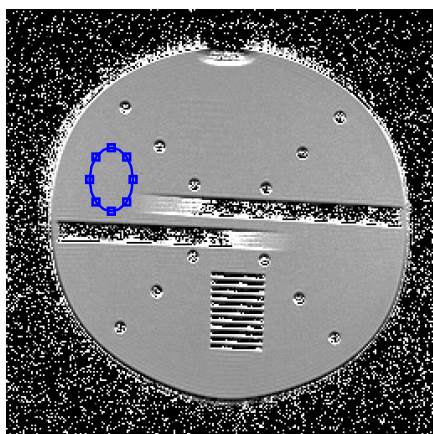


Figura 4.17: Roi blu e errore relativo della mappa calcolata con le immagini sottocampionate con la maschera a spirale a diverse percentuali.

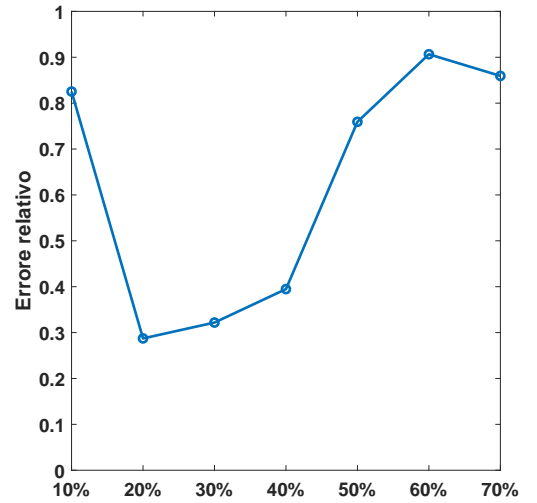
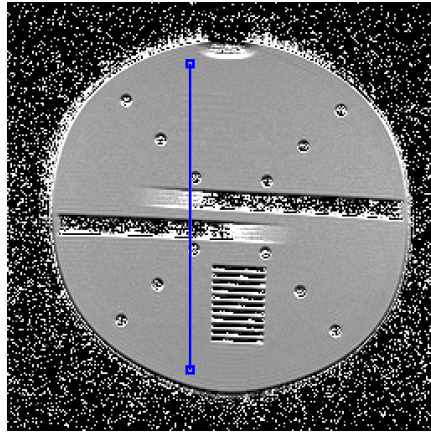


Figura 4.18: Colonna blu e errore relativo della mappa calcolata con le immagini sottocampionate con la maschera a spirale a diverse percentuali.

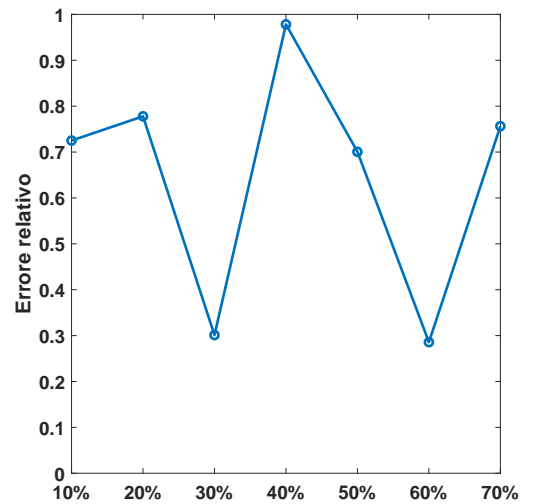
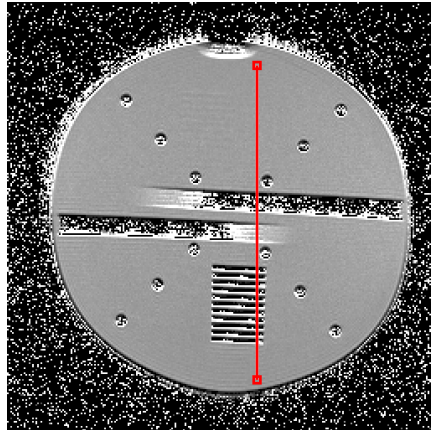


Figura 4.19: Colonna rossa e errore relativo della mappa calcolata con le immagini sottocampionate con la maschera a spirale a diverse percentuali.

S_r	(g)	(m)	(c)	(b)	C_b	C_r	F
10%	0.63	0.49	0.43	0.03	0.73	0.83	0.22
20%	0.11	0.54	0.41	0.01	0.78	0.29	0.23
30%	0.11	0.47	0.44	0.01	0.30	0.32	0.22
40%	0.21	0.41	0.43	0.01	0.98	0.39	0.22
50%	0.11	0.30	0.43	0.01	0.70	0.76	0.22
60%	0.11	0.44	0.49	0.01	0.29	0.90	0.22
70%	0.38	0.36	0.43	0.01	0.86	0.76	0.20

Tabella 4.1: Errori relativi nelle varie Roi delle mappe calcolate con le immagini ricostruite con la maschera spirale con percentuale crescente.

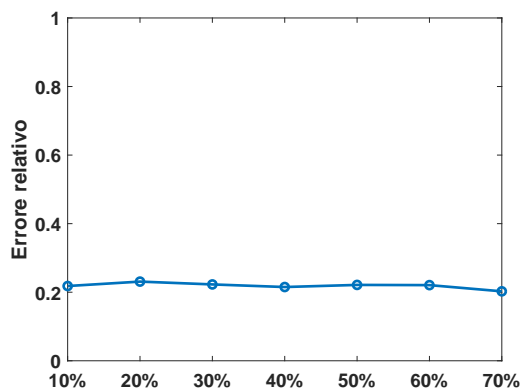
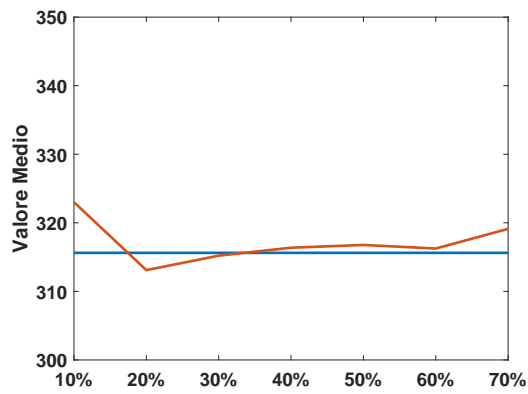
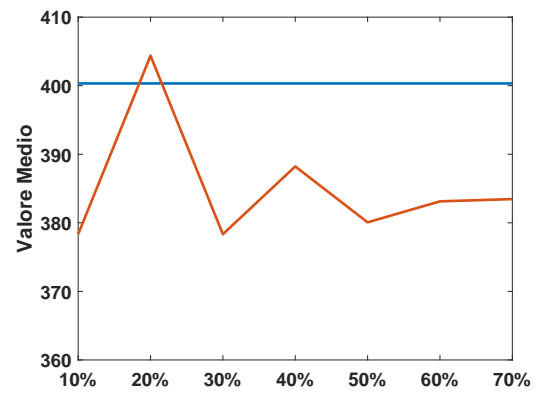


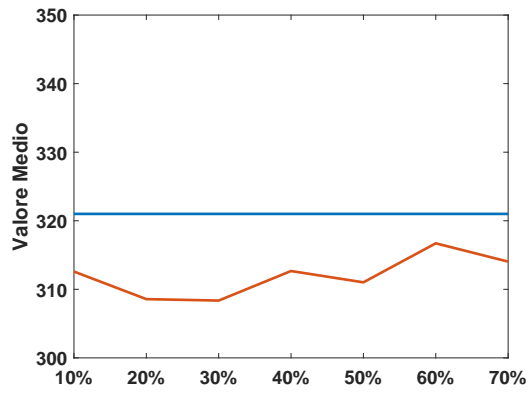
Figura 4.20: Errore relativo calcolato nella sola porzione dell'oggetto, all'aumentare della percentuale di campionamento con la maschera a spirale.



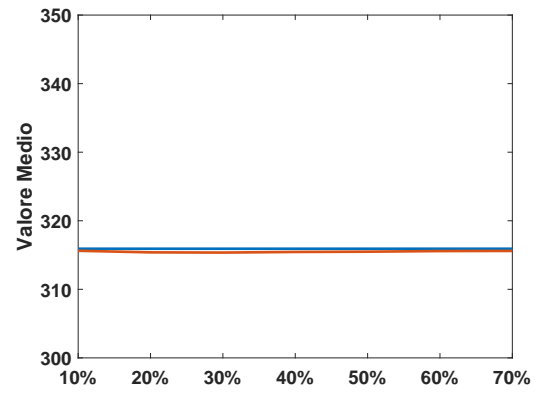
(a) ROI gialla



(b) ROI magenta



(c) ROI ciano



(d) ROI blu

Figura 4.21: Valori medi delle ricostruzioni in rosso e valore medio della GT nelle varie ROI.

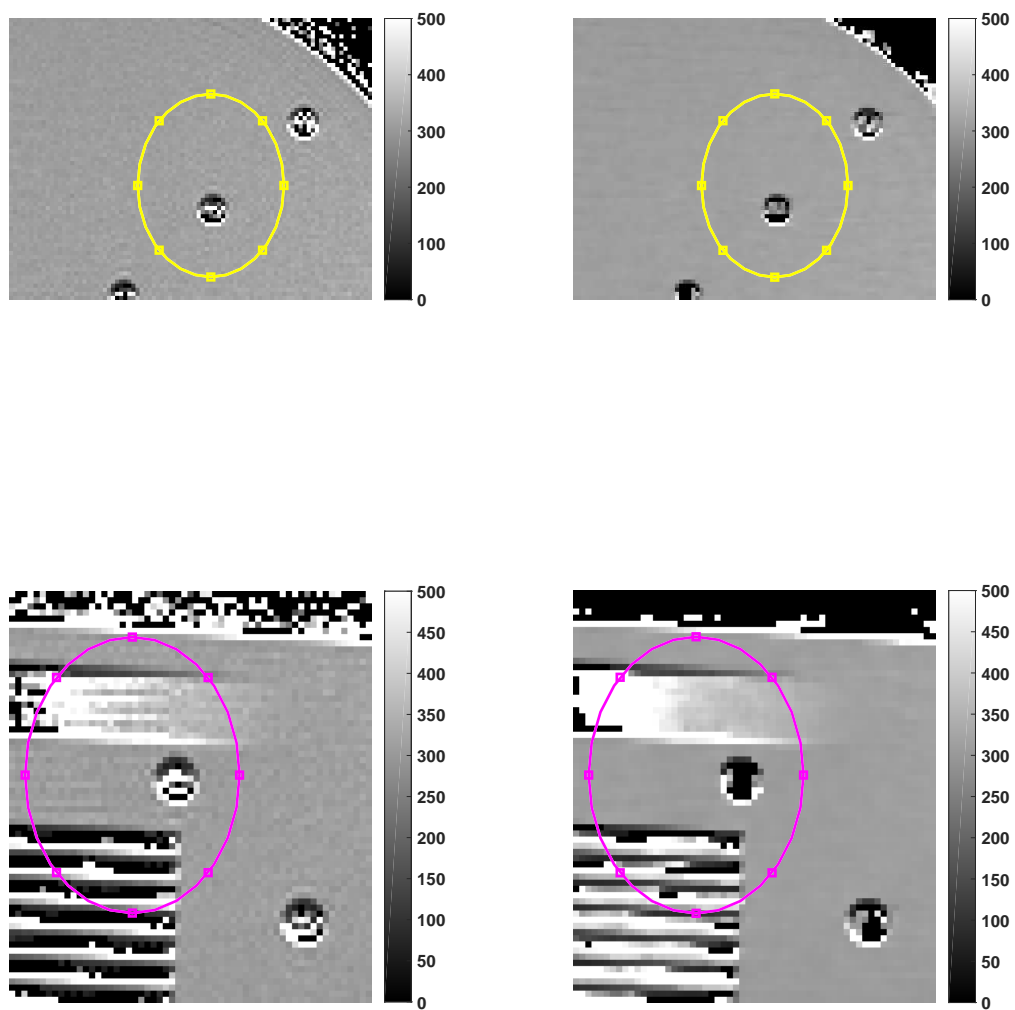


Figura 4.22: Confronto qualitativo tra la mappa di riferimento e quella ottenuta dalle immagini ricostruite con la maschera a spirale al 20% nelle ROI gialla(g) e magenta(m).

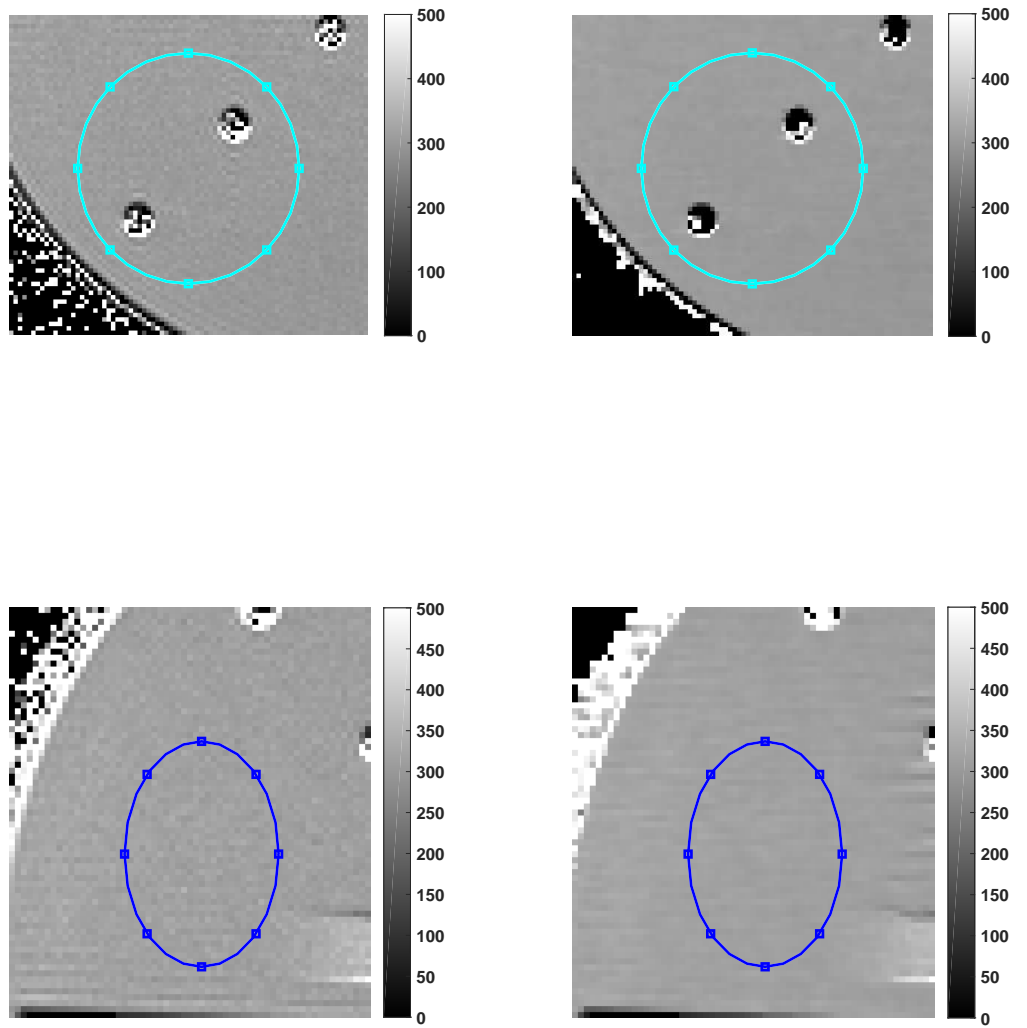


Figura 4.23: Confronto qualitativo tra la mappa di riferimento e quella ottenuta dalle immagini ricostruite con la maschera a spirale al 20% nelle ROI ciano(c) e blu(b).

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi si è affrontato il problema di come il sottocampionamento dello spazio k possa ripercuotersi sul calcolo di mappe MRI. Per farlo si è utilizzato un algoritmo di ricostruzione di immagini da dati sottocampionati che si basa sulla teoria del Compressive Sensing. Inizialmente lo si è provato su problemi test per poi utilizzarlo su dati reali acquisiti grazie alla estrazione dei dati grezzi dal Tomografo utilizzato. L'utilizzo dei dati reali si è rivelato molto complicato e ha richiesto più di una manipolazione, sull'algoritmo prima, sui dati stessi poi, per ovviare alle difficoltà che si presentavano man mano che si procedeva verso il calcolo delle mappe. In particolar modo si è richiesto l'adattamento dell'algoritmo a dati complessi, una nuova ricerca dei suoi parametri e un rifasamento dei dati. È emerso che, nella maggior parte dei casi considerati, sottocampionare i dati, anche con alte percentuali, si ripercuote nel calcolo delle mappe producendo degli artefatti che rendono impossibile il loro utilizzo. Nel caso del sottocampionamento a spirale il calcolo delle mappe ha dato risultati accettabili e ha permesso uno studio più approfondito. In particolare è risultato che la mappa ricostruita tende ad essere meno affetta da rumore rispetto alla mappa di riferimento, effetto questo imputabile all'algoritmo utilizzato. Si è osservato come all'aumentare della percentuale di campionamento non corrisponda una diminuzione degli errori; fatto imputabile all'algoritmo utilizzato in quanto molto efficace se utilizzato con pochi dati ma meno efficiente con grandi quantità di dati caso, quest'ultimo, in cui possono essere efficienti metodi classici di ricostruzione.

Resta da indagare come la procedura di sottocampionamento porti agli artefatti presenti nelle mappe calcolate e come queste dipendano dall'algoritmo utilizzato. È inoltre di interesse futuro quello di ripetere la procedura con delle sequenze diverse da quella utilizzata in modo da studiare il calcolo di altri tipi di mappe, come quelle pesate in T_2 . Infine è di interesse applicativo analizzare campioni biologici, analisi che porterebbe a conclusioni più vicine alla applicazione medica con uno strumento clinico, la quale rappresenta l'obiettivo finale di questo studio.

Bibliografia

- [1] A.Beck, M.Tebulle *Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems*, IEEE Tran. on Imag. Proc., 18(11):2419-2434, 2009
- [2] G.C. Borgia, V. Bortolotti, P. Fantazzini *Changes of the local pore space structure quantified in heterogeneous porous media by ^1H magnetic resonance relaxation tomography*, Journal of Applied Physics, 90, 1155 (2001)
- [3] V. Bortolotti, P. Fantazzini, M. Vannini, E.M. Vasini *Compost biodegradation by ^1H magnetic resonance and quantitative relaxation tomography*, Magnetic Resonance in Food Science: Defining Food by Magnetic Resonance, The Royal Society of Chemistry, 201-210, 2015
- [4] R. W. Brown, Y-C. N. Cheng, E. M. Haacke, M.R. Thompson, R. Venkatesan *Magnetic Resonance Imaging Physical principles and sequence design*, Wiley Blackwell, 2013
- [5] E.J.Candès, J.Romberg and T.Tao *Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction From Highly Incomplete Frequency Information*, IEEE transactions on information theory, vol. 52, no. 2, february 2006
- [6] J.Chen, M. Carl, Y. Ma, H. Shao, X. Lu, B. Chen, E.Y. Chang, Z. Wu, J. Du *Fast volumetric imaging of bound and pore water in cortical bone using three-dimensional ultrashort-TE (UTE) and inversion recovery UTE sequences*, NMR Biomed. 2016; 29(10):1373–80.
- [7] J. Chen, E.Y. Chang, M. Carl, Y. Ma, H. Shao, B. Chen, Z. Wu, J. Du *Measurement of Bound and Pore Water T_1 Relaxation Times in Cortical Bone Using Three-Dimensional Ultrashort Echo Time Cones Sequences*, Magnetic Resonance in Medicine 77:2136-2145 (2017)
- [8] D.L. Donoho *Compressed Sensing*, IEEE Transf. inf. theory, 2006
- [9] J.P.Haldar <https://mr.usc.edu/download/data/>

- [10] W. S. Hinshaw, A. H. Lent *An introduction to NMR imaging: From the Bloch Equation to the Imaging Equation*, proceedings of the IEEE, vol 71, no.3, march 1983
- [11] D. Lazzaro, E. Loli Piccolomini, F. Zama *A fast nonconvex Compressed Sensing algorithm for highly low-sampled MR images reconstruction*
- [12] Z-P. Liang, P.C. Lauterbur *Principles of Magnetic Resonance Imaging a signal processing perspective*, IEEE Press, 2000
- [13] S. Ljunggren *A simple graphical representation of fourier-based imaging methods*, Stoccolma 1983
- [14] M. Lustig *Sparse MRI*, PhD thesis, Standford 2008
- [15] C. Ruffato, L. Buttazzoni, S. Sykora, G. Bonera, G. Paolucci *RMN risonanza magnetica nucleare in medicina*, Piccin, Padova 1984.
- [16] J. Trzasko, A. Manduca *Highly Undersampled Magnetic Resonance Image Reconstruction via Homotopic l_0 -Minimization*, IEEE transactions on medical imaging, vol. 28, no. 1, january 2009
- [17] H. Yan *Signal Processing for Magnetic Resonance Imaging and Spectroscopy*, Marcel Dekker, New York Basel, 2002
- [18] P.Yin, J.Xin *Iterative l_1 minimization for non-convex compressed sensing*, 2016 UCLA CAM Report 16-20

Ringraziamenti

Questa tesi è frutto dell'unione di competenze tra loro diverse, ognuna delle quali mi ha dato la possibilità di crescere professionalmente e umanamente attraverso esperienze che, poco prima di varcare la porta dell'Istituto Ortopedico Rizzoli, non pensavo avrei vissuto.

Ringrazio la prof.ssa Piccolomini la quale ha rappresentato per me un punto di riferimento. Con estrema disponibilità e gentilezza mi ha guidato passo dopo passo verso la conclusione del lavoro dimostrandomi sempre piena fiducia nelle mie capacità e rispettando sempre i miei tempi.

Ringrazio il prof. Bortolotti per la disponibilità, sempre pronto a rispondere alle mie domande con la chiarezza e la passione che caratterizzano ogni sua spiegazione.

Ringrazio l'ing. Taddei per avermi dato la possibilità di affrontare un problema così affascinante e per la disponibilità dimostratami.

Ringrazio la prof. Zama e il dot. Baruffaldi per la loro estrema disponibilità e per il loro supporto.

Ringrazio tutti i componenti del Laboratorio di Tecnologia Medica (LTM) e in particolare quelli del laboratorio di Bioingegneria Computazionale (BIC) per avermi accolto sei mesi e avermi dato la possibilità di vivere una esperienza unica; uno spaccato del mondo della ricerca in una realtà d'eccellenza come quella dell'Istituto Ortopedico Rizzoli.

Non è possibile portare a termine nessun percorso professionale senza che questo non venga affiancato ad un percorso personale. In questi anni ho avuto modo di conoscere tantissime persone e ognuna di loro mi ha dato qualcosa che mi rende quello che scrive in questo momento. E per questo devo loro dei ringraziamenti.

Il primo pensiero va a mia Nonna materna che considero colei senza la quale tutto ciò non sarebbe stato possibile e che sarebbe orgogliosa di questo lavoro frutto in principio dei suoi sacrifici.

A mia madre, la quale ha fatto tutto il possibile per far sì che questo giorno si trasformasse da sogno a realtà. Grazie per averci creduto fino alla fine e grazie per tutti i sacrifici che ha dovuto affrontare. Quello che ha fatto per me ha dell'incredibile. Inoltre le vanno anche le mie scuse, per tutte le volte che ha dovuto sopportare il mio caratteraccio.

A mio padre che, dopo tanto tribolare, rappresenta un punto di riferimento stabile, un porto sicuro dove attraccare, quello che si è soliti definire come famiglia.

Grazie ad entrambi per non avermi mai fatto mancare nulla, fatto che non do per scontato.

A Fabio che per me c'è, c'è stato e sempre ci sarà in ogni momento importante della mia vita ovunque io sia. Più un fratello che un amico sei diventato una di quelle persone che rappresentano per me casa. Grazie per esser qui, ancora una volta.

A Dino per essere stato un fantastico compagno d'avventura con cui condividere gioie e dolori, vittorie e disfatte. Persone come te sono rare e preziose e condividere con te qualunque cosa, un esame, una riflessione filosofica o una battuta è sempre un piacere.

A Sofia la quale è diventata, non senza tribolare, una persona importantissima. Compagna di fatiche, instancabile confortatrice, ha rappresentato spesso la prima spalla su cui andare a cercare un consiglio, un aiuto, uno sfogo. Confidarsi con lei è diventato ormai naturale, un gesto spontaneo.

A tutti i ragazzi del CTBS i quali sono diventati una seconda famiglia, fatta di persone speciali con cui condividere qualunque avventura, sportiva e non, sempre pronti a supportarmi qualunque follia possa inventarmi. Siete un buon motivo per rimanere.

Ad Adele con la quale ho condiviso tanto di questa magistrale: esami, gioie, paure, code in autostrada. Se l'informatica non mi fa più paura è anche merito suo.

Ringrazio tutti quelli con cui ho condiviso questo percorso e che siete troppi per nominarvi tutti ad uno a uno. Vorrei tanto farlo ma non abbiate a male, lo spazio che ho a disposizione è veramente limitato! Ma vi sono veramente grato, grazie di tutto.

Un grazie speciale a Lucia, che è entrata alla fine di questo percorso ma è diventata un'altro tassello fondamentale della mia vita. Grazie per supportarmi in ogni cosa io faccia, grazie per sopportare i miei mille difetti e grazie per starmi sempre vicino nonostante il mio caratteraccio. La serenità che è riuscita ad infondermi in questi ultimi mesi ha del meraviglioso.

Infine un grazie a Bologna, per esser diventata la mia seconda casa.