

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

AREA E VOLUME  
IN  
EUCLIDE E HILBERT

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
MONICA IDÀ

Presentata da:  
CHIARA MICHELETTI

Quarta Sessione  
2017/2018

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Nozioni Preliminari</b>	<b>7</b>
<b>2 Gli Assiomi di Hilbert</b>	<b>11</b>
<b>3 Aritmetica dei segmenti</b>	<b>19</b>
<b>4 Teoria euclidea dell'Area</b>	<b>23</b>
<b>5 Funzioni Misura d'Area</b>	<b>33</b>
<b>6 Dissezione</b>	<b>43</b>
<b>7 Teoria euclidea del Volume</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>



# Introduzione

Euclide riesce a racchiudere nei tredici volumi dei suoi "Elementi" l'essenza del pensiero logico-deduttivo dell'antica Grecia, creando così uno dei più autorevoli manuali di matematica di tutti i tempi.

Di tutto il lavoro di Euclide, in questo elaborato ci siamo concentrati sulle sue teorie di area e volume. Seguendo Robin Hartshorne in "Geometry: Euclid and Beyond", abbiamo studiato come il matematico tedesco David Hilbert (1862-1943) abbia ripreso tali teorie e le abbia rese rigorose nella sua opera del 1899 "Fondamenti della Geometria".

La tesi si compone di sette sezioni, di cui le prime due di preliminari: nella prima vengono fatti alcuni richiami ai campi ordinati e un esempio di campo ordinato non archimedeo, nella seconda si riepilogano i cinque gruppi di assiomi su cui Hilbert fonda la sua geometria piana.

Negli "Elementi" Euclide non usa numeri, e quindi neanche misure. Ad esempio, non viene data una definizione di lunghezza per i segmenti, né di ampiezza per gli angoli, nonostante si lavori con le nozioni di congruenza (chiamata uguaglianza) di questi due enti geometrici e più in generale delle figure; ad esempio, nella (I.4) si parla di "triangoli uguali" nel senso di "triangoli congruenti". A partire dalla (I.35) (*Parallelogrammi che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro*) Euclide introduce una nuova nozione di uguaglianza fra figure piane, che corrisponde a quello che noi chiameremmo "avere uguale estensione" o, volendo utilizzare i numeri e quindi una misura, "avere uguale area".

Hilbert nei Fondamenti ha rielaborato la teoria dell'area esposta negli

"Elementi" costruendo preliminarmente una "aritmetica dei segmenti", cioè un campo ordinato  $F$ , i cui elementi positivi siano le classi di congruenza dei segmenti. Questa costruzione è esposta nella terza sezione.

Cominciamo a parlare effettivamente di area a partire dalla quarta sezione, in cui vediamo come Hilbert introduce e utilizza la relazione "avere lo stesso content" (due figure (rettilinee) hanno lo stesso content se possiamo trasformare l'una nell'altra aggiungendo e sottraendo triangoli congruenti) per dare una solida fondazione logica alla teoria dell'area di Euclide.

Nel quinto capitolo, sempre seguendo [4] e [3], definiamo una funzione misura d'area a valori in un gruppo abeliano e dimostriamo che, in un piano di Hilbert con l'assioma di Playfair, esiste un'unica misura d'area a valori nel gruppo additivo del campo  $F$  dell'aritmetica dei segmenti, tale che l'area di un triangolo sia data da  $\frac{1}{2}$  base per altezza (5.0.2).

Mentre la nozione di content dà una buona teoria generale, non è del tutto pratica: cosa va aggiunto a due figure che hanno lo stesso content, per ottenere due figure equiscomponibili? Nel sesto capitolo approfondiremo il concetto di equiscomponibilità introducendo il problema pratico della dissezione: *Date due figure trovare, se possibile, una scomposizione della prima come unione di sottofigure che possano essere riassemblate nella seconda.*

Se di area tratta già dal Libro I, Euclide affronta la geometria tridimensionale solo a partire dall'undicesimo e, in (XI.28), si occupa per la prima volta del volume di figure solide. Come per il concetto di area non dà una definizione di volume, né precisa che stiamo lavorando con una nuova nozione di uguaglianza, diversa dalla congruenza; ma, dalle dimostrazioni che propone, si capisce che per "figure solide uguali" intende "figure solide con lo stesso volume". Quando negli "Elementi" si arriva al volume delle piramidi, nel Libro XII, Euclide introduce un nuovo metodo di approssimazione infinitesimale non ancora utilizzato né per le aree né per il volume dei prismi; nella proposizione 7.0.2 della sezione 7 di questa tesi viene esposta, seguendo [3], la dimostrazione di un caso particolare di (XII.5): *Piramidi triangolari*

*con altezze uguali e basi con lo stesso content hanno lo stesso volume.*

### **Notazione**

Nel testo ci riferiremo alle proposizioni di Euclide in questo modo: (numero romano.numero arabo). Il numero romano è il libro in cui si trova la proposizione che stiamo prendendo in considerazione, mentre il numero arabo è proprio il numero di tale proposizione.

Ogniqualevolta dovremo riportare l'enunciato di una di queste, lo citeremo, senza modifica alcuna, dal testo di Attilio Frajese [2]. Nel caso venisse proposta una riformulazione sarà specificato.

Nel nostro studio verranno poi richiamati più volte degli assiomi: questo avverrà attraverso lettere maiuscole -a volte accompagnate da numeri- che sono state assegnate, tra parentesi tonde, ad ognuno di essi. (Per gli assiomi di Hilbert si è fatto riferimento a [4]).



# Capitolo 1

## Nozioni Preliminari

In questo breve capitolo introduttivo, forniamo una serie di proposizioni e definizioni che saranno utili al lettore per comprendere al meglio quanto verrà descritto nelle sezioni successive.

**Definizione 1.1.** Un **campo ordinato** è una coppia  $(F, P)$  dove  $F$  è un campo,  $P$  è un suo sottoinsieme, e valgono le seguenti condizioni:

- i) se  $a, b \in P$ , allora  $a + b \in P$  e  $ab \in P$ ;
- ii) per ogni  $a \in F$ , una e una sola condizione tra le seguenti è valida:  
 $a \in P$ ;  $a = 0$ ;  $-a \in P$ .

Se  $(F, P)$  è un campo ordinato e  $x \in P$ , diciamo che  $x$  è *positivo* e scriviamo  $x > 0$ . Poiché in un campo  $0 \neq 1$ , necessariamente  $P \neq \emptyset$ .

Alcune proprietà dei campi ordinati:

- a)  $1 \in P$ , cioè 1 è un elemento positivo;
- b)  $F$  ha caratteristica zero, quindi il più piccolo sottocampo di  $F$  che contiene 1 è isomorfo a  $\mathbb{Q}$ ;
- c) per ogni  $a \neq 0 \in F$ ,  $a^2 \in P$ .



Chiamiamo **ordine** di  $F$  la relazione  $>$  data da:

$$\text{se } a, b \in F, a > b \text{ se e solo se } a - b \in P.$$

La relazione  $>$  gode delle seguenti proprietà:

1. se  $a > b$  e  $c \in F$ , allora  $a + c > b + c$ ;
2. se  $a > b$  e  $b > c$ , allora  $a > c$ ;
3. se  $a > b$  e  $c > 0$ , allora  $ac > bc$ ;
4. dati  $a, b \in F$ , solo una tra le seguenti affermazioni è valida:  
 $a > b$ ;    $a = b$ ;    $a < b$ .

**Esempio 1.0.1.** Il campo dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  con l'ordine usuale è un campo ordinato, dove prendiamo per  $P$  l'insieme dei numeri razionali positivi.

Vale il seguente assioma:

**Assioma** (Assioma di Archimede). *Per ogni  $a > 0$  in un campo ordinato  $F$ , esiste un numero intero  $n$  tale che  $n > a$ .*

*Osservazione 1.* "Dati due segmenti, o, più in generale, altri due rappresentanti di una stessa grandezza fisica, un qualche multiplo del primo supererà il secondo". Quella appena data è una riformulazione dell'assioma di Archimede (A) ed è un concetto tanto radicato nel nostro immaginario, da renderci praticamente impossibile concepire un universo o una geometria in cui questa affermazione non sia valida. Nella matematica astratta, una geometria è qualsiasi cosa che soddisfi un certo gruppo di assiomi. È possibile "costruire" una geometria in cui l'assioma in questione non sia valido, utilizzando un campo ordinato non archimedeeo, cioè un campo ordinato in cui non vale l'assioma di Archimede.

**Proposizione 1.0.2.** Sia  $\mathbb{R}$  il campo dei numeri reali,  $t$  un'indeterminata e sia  $\mathbb{R}(t)$  il campo di tutte le funzioni razionali nell'indeterminata  $t$ , ovvero:

$$\mathbb{R}(t) = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid f, g \text{ polinomi in } t \text{ a coeff. reali, } g(t) \text{ non identicamente nullo} \right\}$$

Allora il campo  $F = \mathbb{R}(t)$  ha un ordine naturale che lo rende un campo ordinato non archimedeo.

*Dimostrazione.* Se  $\varphi \in F$ , pensiamo a  $\varphi$  come ad una funzione  $\varphi(t) = f(t)/g(t)$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , definita ovunque tranne in un numero finito di punti, dove  $g(t) = 0$ . È facile vedere che le considerazioni seguenti non dipendono dal rappresentante scelto per  $\varphi$ , che può essere scritto come  $f(t)h(t)/g(t)h(t)$ . Definiamo l'insieme  $P$  degli elementi positivi di  $F$  come l'insieme delle funzioni  $\varphi$  che sono positive per valori "abbastanza grandi":

$$P = \{\varphi \in F \mid \exists a \in \mathbb{R} \text{ tale che } \varphi(b) > 0, \forall b > a\}.$$

Si osservi che  $\varphi > 0$  se e solo se il quoziente dei coefficienti direttori di  $f$  e  $g$  è positivo in  $\mathbb{R}$ .  $F$  è un campo perché ogni somma, differenza, prodotto o quoziente di funzioni razionali è ancora una funzione razionale. L'insieme  $P$  è chiuso rispetto alla somma e al prodotto, perché la somma e il prodotto di due funzioni positive rimane positivo. Per mostrare che  $(F, P)$  è un campo ordinato, rimane da mostrare che se  $\varphi \in F$ ,  $\varphi \neq 0$ , allora può valere solo una tra le seguenti:  $\varphi \in P$  o  $-\varphi \in P$ . Si osservi che se cambiamo rappresentante per  $\varphi$ , il discorso rimane valido. Certamente, se  $\varphi \neq 0$ , è il quoziente di due polinomi non nulli  $\varphi(t) = f(t)/g(t)$ , ciascuno dei quali ha un numero finito di zeri. Se  $a_0$  è il massimo di tutti gli zeri di  $f(t)$  e  $g(t)$ , allora  $\varphi$  è continua e sempre diversa da 0, per ogni  $b > a_0$ . In questo modo, per il teorema del valor medio,  $\varphi$  è o sempre positiva per  $b > a_0$ , o sempre negativa per  $b > a_0$ . Nel primo caso  $\varphi \in P$ , nel secondo  $-\varphi \in P$ .

Consideriamo ora l'elemento  $t \in F$ . Per ogni intero  $n > 0$ , si ha  $t > n$ , come elementi di  $F$ , in quanto la funzione definita come  $\varphi(t) = t - n$  è positiva. Dunque il campo  $F$  è non archimedeo. Si osservi che in questo

campo si ha:

$$0 < 1 < 2 < \dots < t < t+1 < t+2 < \dots < t^2 < t^3 < \dots .$$

□

**Definizione 1.2.** Sia  $F$  un campo ordinato non archimedeo. Diremo che un elemento  $a \in F$  è **finitamente limitato** se esiste un intero positivo  $n$  tale che  $-n < a < n$ . Altrimenti, diremo che  $a$  è **infinito**. Diciamo che un elemento  $a \in F$  è **infinitesimo** se per ogni intero positivo  $n$  si ha  $-\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$ . Un elemento di  $F$  è **finito** se è finitamente limitato ma non infinitesimo. Ogni numero infinito è maggiore di qualsiasi numero finito.

## Capitolo 2

### Gli Assiomi di Hilbert

Cominciamo quindi col presentare il sistema di assiomi che David Hilbert, verso la fine del XIX secolo, ha individuato come fondamento logicamente rigoroso della geometria del piano e dello spazio tridimensionale formulata intorno al 300 a.C. da Euclide negli "Elementi". Hilbert parte da tre insiemi, i cui elementi verranno detti rispettivamente punti, rette e piani, ma non dice cosa essi siano, e lascia piuttosto che la natura di queste nozioni venga precisata solo implicitamente dagli assiomi, che le collegano e le caratterizzano.

Hilbert chiede quindi che valgano cinque gruppi di assiomi, che andiamo ora ad elencare, seguendo la presentazione di R. Hartshorne in [3]; in particolare sono qui elencati solo gli assiomi necessari alla geometria del piano, vengono considerati solo l'insieme dei punti e l'insieme delle rette, che è dato già in partenza come un sottoinsieme dell'insieme delle parti dell'insieme dei punti.

#### **Assiomi di Incidenza:**

**(I1)** Per ogni coppia di punti distinti  $A, B$ , esiste un'unica retta  $l$  contenente  $A$  e  $B$ .

**(I2)** Ogni retta contiene almeno due punti.

(I3) Esistono tre punti non allineati (cioè tre punti non contenuti in un'unica retta).

**Assiomi di Ordinamento:**

Gli assiomi di questo gruppo definiscono implicitamente la relazione di "stare tra" e rendono possibile l'ordinamento dei punti su una retta. Postuliamo quindi che esista una relazione, che chiamiamo "stare tra", tra terne di punti allineati  $A, B, C$ .

Tale relazione sottostà ai seguenti assiomi:

(B1) Se  $B$  sta tra  $A$  e  $C$ , che denotiamo con  $A * B * C$ , allora  $A, B, C$  sono tre punti distinti su una retta e vale anche  $C * B * A$ .

(B2) Per ogni coppia di punti distinti  $A$  e  $B$ , esiste un punto  $C$  tale che  $A * B * C$ .

(B3) Dati tre punti distinti su una retta, uno ed uno solo di essi sta tra gli altri due.

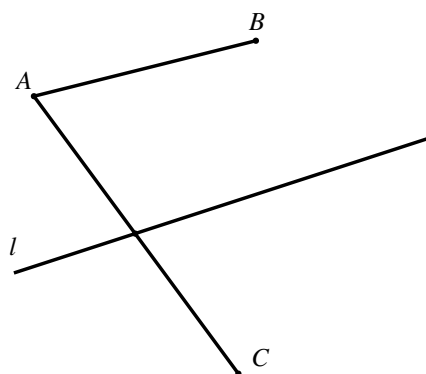
(B4) (Assioma di Pasch) Siano  $A, B, C$  tre punti non allineati e sia  $l$  una retta non contenente nessuno dei tre punti. Se  $l$  contiene un punto  $D$  che sta tra  $A$  e  $B$ , allora deve contenere anche un punto che sta tra  $A$  e  $C$  o un punto che sta tra  $B$  e  $C$ , ma non possono verificarsi entrambe le cose.

Grazie agli assiomi di questo gruppo si possono dare definizioni e risultati che verranno sfruttati nei gruppi successivi:

**Definizione 2.1.** Se  $A$  e  $B$  sono due punti distinti, definiamo il **segmento**  $AB$  come l'insieme che consiste in  $A, B$  e tutti i punti della retta  $AB$  che giacciono tra  $A$  e  $B$ , quindi  $AB = BA$ ; gli *estremi* del segmento  $AB$  sono  $A$  e  $B$ . Definiamo **triangolo** l'unione dei tre segmenti  $AB, BC$  e  $AC$  dove  $A, B$  e  $C$  sono tre punti non allineati. I punti  $A, B$  e  $C$  sono i *vertici* del triangolo, mentre i segmenti  $AB, BC$  e  $AC$  sono i suoi *lati*.

**Proposizione 2.0.1** (Separazione del piano). *Sia  $l$  una retta. Allora l'insieme dei punti che non giacciono su  $l$  può essere diviso in due sottoinsiemi non vuoti  $S_1, S_2$  con le seguenti proprietà:*

1. *due punti  $A, B$  che non stanno su  $l$  appartengono allo stesso insieme ( $S_1$  o  $S_2$ ) se e solo se il segmento  $AB$  non interseca  $l$ ;*
2. *due punti  $A, C$  che non stanno su  $l$  appartengono uno ad  $S_1$  e uno ad  $S_2$  se e solo se il segmento  $AC$  interseca  $l$  in un punto.*

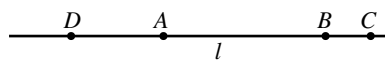


*Ci riferiremo ad  $S_1$  e  $S_2$  come ai due semipiani individuati da  $l$  e diremo "A e B sono dallo stesso lato di  $l$ " o "A e C sono in lati opposti di  $l$ ".*

*Dimostrazione.* [3], prop. 7.1, pag. 75. □

**Proposizione 2.0.2** (Separazione della retta). *Consideriamo un punto  $A$  su una retta  $l$ . Allora l'insieme dei punti di  $l$  non uguali ad  $A$  può essere diviso in due sottoinsiemi non vuoti  $S_1$  e  $S_2$ , che chiameremo i due lati di  $A$  su  $l$ , tali che:*

1. *due punti  $B, C$  sono dallo stesso lato di  $A$  se e solo se  $A$  non appartiene al segmento  $BC$ ;*
2. *due punti  $B, D$  sono in lati opposti di  $A$  se e solo se  $A$  appartiene al segmento  $BD$ .*



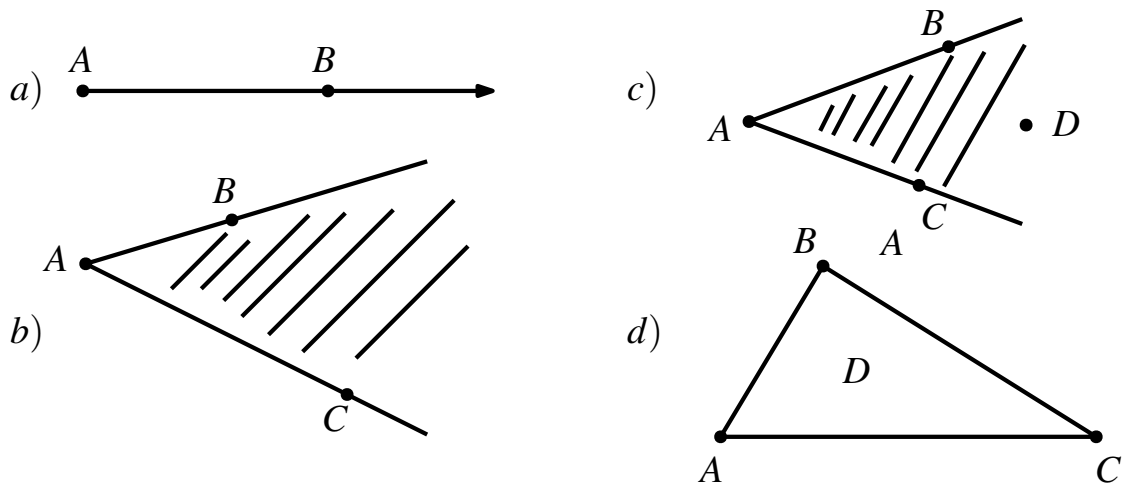
*Dimostrazione.* [3], prop. 7.2, pag. 76. □

Possiamo infine definire quanto segue:

**Definizione 2.2.** a) Se  $A$  e  $B$  sono due punti distinti, chiamiamo **semiretta**  $\overrightarrow{AB}$  l'insieme che consiste in  $A$  e tutti i punti sulla retta  $AB$  che

giacciono dallo stesso lato di  $B$  rispetto ad  $A$ . Il punto  $A$  viene detto *origine* della semiretta.

- b) Un **angolo** è l'unione di due semirette  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  che hanno la stessa origine ma non giacciono sulla stessa retta.
- c) L'**interno** di un angolo  $\widehat{BAC}$  consiste di tutti i punti  $D$  tali che  $D$  sta dalla stessa parte di  $AB$  rispetto a  $C$  e dalla stessa parte di  $AC$  rispetto a  $B$ .
- d) Se  $ABC$  è un triangolo, l'**interno del triangolo**  $ABC$  è l'insieme dei punti  $D$  che sono contemporaneamente interni ai tre angoli  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$ ; il punto  $D$  si dice *interno* al triangolo.



### Assiomi di Congruenza:

Ai precedenti concetti non definiti di punto, retta, ordinamento e agli assiomi (I1)-(I3), (B1)-(B4), aggiungiamo ora le nozioni indefinite di congruenza di segmenti e congruenza di angoli, che soddisfano i seguenti assiomi:

### Segmenti:

- (C1) Dato un segmento  $AB$  e data una semiretta  $r$  con origine in un punto  $C$ , esiste un unico punto  $D$  sulla semiretta  $r$  tale che  $AB$  è congruente a  $CD$  ( $AB \cong CD$ ).

(C2) Se  $AB \cong CD$  e  $AB \cong EF$ , allora  $CD \cong EF$ . Ogni segmento è congruente a se stesso.

(C3) Dati tre punti  $A, B, C$  su una retta che soddisfino  $A * B * C$ , e altri tre punti  $D, E, F$  su una retta che soddisfino  $D * E * F$ , se  $AB \cong DE$  e  $BC \cong EF$ , allora  $AC \cong DF$ .

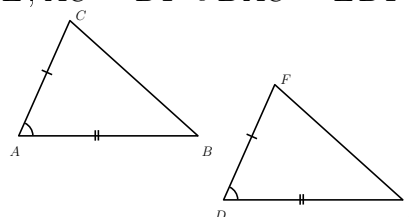
**Angoli:**

(C4) Dato un angolo  $\widehat{BAC}$  e data una semiretta  $\overrightarrow{DF}$ , esiste un'unica semiretta  $\overrightarrow{DE}$ , che sta in un determinato lato della retta  $DF$ , tale che  $\widehat{BAC}$  sia congruente a  $\widehat{EDF}$  ( $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$ ).

(C5) Dati tre angoli qualsiasi  $\alpha, \beta, \gamma$  se  $\alpha \cong \beta$  e  $\alpha \cong \gamma$ , allora  $\beta \cong \gamma$ . Ogni angolo è congruente a se stesso.

(C6) (Terzo criterio di congruenza dei triangoli (**LAL**)) Dati due triangoli  $ABC$  e  $DEF$ , supponiamo che  $AB \cong DE$ ,  $AC \cong DF$  e  $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$ .

Allora i due triangoli sono congruenti, in particolare  $BC \cong EF$ ,  $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$  e  $\widehat{ACB} \cong \widehat{DFE}$ .



**Definizione 2.3.** Due rette distinte si dicono **parallele** se non hanno punti in comune. Diremo che ogni retta è parallela a se stessa.

Unico componente del quarto gruppo è l'assioma delle parallele o assioma di Playfair:

**Assioma** (di Playfair (**P**)). Per ogni punto  $P$  ed ogni retta  $l$ , esiste al più una retta passante per  $P$  e parallela ad  $l$ .

Il quinto e ultimo gruppo consta degli *assiomi di continuità*, ovvero:

**Assioma** (di Archimede (**A**)). Dati due segmenti  $AB$  e  $CD$ , esiste un numero naturale  $n$  tale che  $n$  copie di  $AB$  sommate l'un l'altra saranno maggiori di  $CD$ .



**Assioma** (di Dedekind **(D)**). *Supponiamo che i punti su una retta  $l$  siano divisi in due sottoinsiemi  $S, T$  in modo tale che nessun punto di  $S$  sia tra due punti di  $T$ , e nessun punto di  $T$  sia tra due punti di  $S$ . Allora esiste un unico punto  $P$  tale che per ogni  $A \in S$  e per ogni  $B \in T$  si ha che:*  
 $A = P$  o  $B = P$  o  $A * P * B$ .

Questi assiomi ci permettono di definire dei modelli, con cui lavoreremo nei prossimi capitoli:

**Definizione 2.4.** Un **piano di Hilbert** è un insieme  $X$  i cui elementi sono detti *punti*, e un sottoinsieme di  $\mathcal{P}(X)$  i cui elementi sono detti *rette*, che soddisfi gli assiomi (I1)-(I3), (B1)-(B4) e (C1)-(C6).

**Assioma** (Intersezione tra circonferenza e circonferenza **(E)**). *Date due circonferenze  $\Gamma$  e  $\Gamma'$ , se  $\Gamma'$  contiene almeno un punto dentro a  $\Gamma$  e almeno un punto fuori da  $\Gamma$ , allora  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  si intersecano. (Si può dimostrare che si intersecano esattamente in due punti, si veda [3], pag. 108 e seguenti).*

**Definizione 2.5.** Un **piano Euclideo** è un piano di Hilbert che soddisfa in più l'assioma (E) e l'assioma (P).

**Definizione 2.6.** Un **piano Cartesiano**  $\Pi_F$  è dato dall'insieme  $F^2$  punti e dall'insieme delle rette

$$\left\{ \{(x, y) \in F^2 \mid ax + by + c = 0, a, b, c \in F, (a, b) \neq (0, 0)\} \right\}.$$

In  $\Pi_F$  valgono gli assiomi di incidenza (I1)-(I3) e (P). ([3], prop. 14.1, pag.129)

Nella geometria piana di Euclide, rivisitata da Hilbert, si incontrano i criteri di congruenza dei triangoli (anzi, il terzo figura tra gli assiomi di Hilbert) che elenchiamo qui, perché li sfrutteremo in alcune dimostrazioni dei prossimi capitoli:

**Proposizione 2.0.3 (ALA).** *Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e due angoli a esso adiacenti rispettivamente congruenti.*

**Proposizione 2.0.4 (LLL).** *Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti.*

**Proposizione 2.0.5 (ARLA).** *Due triangoli rettangoli sono congruenti quando hanno uno degli angoli acuti e l'ipotenusa, oppure un cateto, ordinatamente congruenti.*



## Capitolo 3

# Aritmetica dei segmenti

Negli "Elementi" Euclide non usa numeri. È quello che succede, per esempio, con segmenti e angoli: non viene data né una definizione di *lunghezza* per i primi, né una di *ampiezza* per i secondi, nonostante, per quanto indefinite, si lavori con le nozioni di congruenza di questi due enti geometrici. Questo non gli impedisce, tuttavia, di sviluppare una teoria puramente geometrica, che Hilbert rafforza e perfeziona per mezzo dei suoi assiomi, rendendola effettivamente rigorosa. In questo capitolo vedremo sinteticamente (e in modo leggermente semplificato, seguendo Hartshorne) come Hilbert costruisce un'aritmetica per segmenti, necessaria per il suo studio.

La congruenza tra segmenti è una relazione di equivalenza grazie all'assioma (C2). Definiremo ora due operazioni di somma e di prodotto nell'insieme quoziente dell'insieme dei segmenti del piano modulo la congruenza.

Nel seguito con lettere corsive minuscole denotiamo le classi di congruenza dei segmenti.

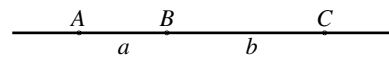
Da qui in poi si suppone di lavorare in un piano di Hilbert con (P).

**Definizione 3.1.** Date le classi di congruenza di segmenti  $a$ ,  $b$ , definiamo la loro **somma** come segue.

Si scelgano due punti  $A$  e  $B$  su una retta in modo tale che il segmento

$AB$  rappresenti la classe  $a$ .

Poi, sulla retta  $AB$  si scelga un punto  $C$  con  $A * B * C$ , tale che il segmento  $BC$  rappresenti la classe  $b$ .



Allora  $a + b$  viene definita come la classe di congruenza rappresentata da  $AC$ .

**Proposizione 3.0.1.** *In un piano di Hilbert, l'addizione di classi di segmenti gode delle seguenti proprietà:*

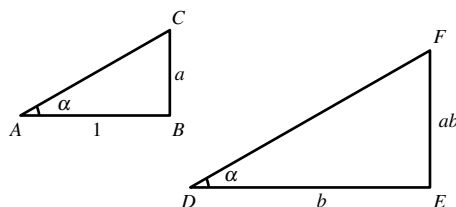
1.  $a + b$  è ben definita, cioè non dipende dalla scelta di  $A$  e  $B$ ;
2.  $a + b = b + a$ ;
3.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;
4. date due classi qualsiasi  $a$  e  $b$  solo una tra le seguenti affermazioni è valida:
  - a)  $a = b$ ;
  - b)  $c$  è una classe  $c$  tale che  $a + c = b$ ;
  - c)  $c$  è una classe  $d$  tale che  $a = b + d$ .

*Dimostrazione.* [3], prop. 19.1, pag. 169. □

Per procedere e definire la moltiplicazione, abbiamo bisogno di un **segmento unità** che sia standard. Esso sarà una classe di congruenza di segmenti, fissata a nostro piacere una volta per tutte, e che denotiamo con il simbolo 1.

**Definizione 3.2.** Date due classi di segmenti  $a$  e  $b$ , definiamo il loro **prodotto**  $ab$  come segue.

Costruiamo dapprima un triangolo  $ABC$ , rettangolo in  $B$ , con  $AB \in 1$  e  $BC \in a$ . Sia  $\alpha$  l'angolo  $\widehat{BAC}$ . Prendiamo poi un nuovo triangolo  $DEF$ , rettangolo in  $E$ , con  $DE \in b$  e  $\widehat{FDE} = \alpha$ . Definiamo quindi  $ab$  come la classe del lato  $EF$ .



**Proposizione 3.0.2.** *In un piano di Hilbert con (P), il prodotto di classi di segmenti gode delle seguenti proprietà:*

1.  $ab$  è ben definita, non dipende cioè dalla scelta dei punti  $A, B$  o  $C$ ;
2.  $a \cdot 1 = a$  per ogni  $a$ ;
3.  $(ab)c = a(bc)$  per ogni  $a, b, c$ ;
4.  $ab = ba$  per ogni  $a, b$ ;
5. per ogni  $a$ , esiste un unico  $b$  tale che  $ab = 1$ ;
6.  $a(b + c) = ab + ac$  per ogni  $a, b, c$ .

*Dimostrazione.* [3], prop. 19.2, pag. 170. □

*Osservazione 2.* Per 3.0.1 non è necessario supporre la validità di (P). Invece, per la definizione stessa di prodotto e per la prova di 3.0.2 l'assioma di Playfair deve valere: non sarebbe altrimenti possibile dimostrare il punto 6. (per dettagli: [3], pag. 172/173).

**Proposizione 3.0.3.** *Dato un piano di Hilbert che soddisfa (P) e scelto un segmento unità 1, c'è un unico (a meno di isomorfismi) campo ordinato  $F$  il cui insieme  $P$  di elementi positivi è l'insieme delle classi di congruenza di segmenti, con le operazioni  $+$ ,  $\cdot$  definite in precedenza.*

*Dimostrazione.* [3], prop. 19.3, pag. 173. □

3.0.3 è una diretta conseguenza di questo lemma:

**Lemma 3.0.4.** *Sia  $P$  un insieme con due operazioni  $+$ ,  $\cdot$  definite su di esso, che soddisfano le proprietà elencate in 3.0.1 e 3.0.2. Allora esiste un unico campo ordinato  $F$  i cui elementi positivi formano l'insieme  $P$ .*

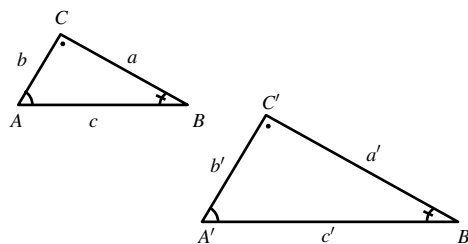
*Dimostrazione.* [3], lemma 19.4, pag. 173. □

Abbiamo quindi definito due operazioni, addizione e prodotto, che rispettano le regole dell'aritmetica che conosciamo. Per farlo ci siamo serviti dell'algebra dei campi ordinati, che ci ha permesso di evitare l'uso di un eventuale nozione di numero, e di seguire più fedelmente il percorso di Euclide.

L'aver costruito un'aritmetica dei segmenti ci permette infine di definire quanto segue:

**Definizione 3.3.** Se  $AB$  è un segmento, la sua classe di congruenza  $a$  è un elemento positivo del campo ordinato  $F$ , definito dall'aritmetica dei segmenti (prop. 3.0.3). Chiamiamo  $a$  **lunghezza** del segmento  $AB$ .

**Definizione 3.4.** Due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  sono **simili**, se i tre angoli del primo sono rispettivamente uguali ai tre angoli del secondo, e le classi di congruenza dei tre lati corrispondenti sono proporzionali, cioè:



$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

É possibile dimostrare che la prima condizione (angoli uguali) implica la seconda (lati proporzionali) e viceversa.

## Capitolo 4

# Teoria euclidea dell'Area

In questo capitolo spiegheremo il concetto di area, come immaginato da Euclide, e ne proporremo la formalizzazione, come elaborata da Hilbert. A partire dalla Proposizione 35 del libro I (*Parallelogrammi che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro*), Euclide introduce una nuova nozione di uguaglianza tra figure, che corrisponde a ciò che oggi chiameremmo "avere area uguale". Il concetto di area a cui siamo abituati, però, attribuisce un numero ad ogni figura: questo è incompatibile con la geometria di Euclide, dove non ci sono numeri. Euclide non definisce questa nuova nozione di uguaglianza, ma possiamo dedurre dalle sue dimostrazioni che la consideri un'altra nozione indefinita, così come fa per la congruenza di segmenti o angoli, che soddisfi certe proprietà simili alle nozioni comuni.

In particolare Euclide assume che:

1. figure congruenti sono "uguali";
2. somme di figure "uguali" sono "uguali";
3. differenze di figure "uguali" sono "uguali";
4. metà di figure "uguali" sono "uguali";
5. il tutto è maggiore della parte;



6. quadrati "uguali" hanno lati "uguali".

Si potrebbe prendere questo concetto di "uguaglianza" come una nozione indefinita, con queste proprietà come assiomi aggiuntivi. Tuttavia, si preferisce non appesantire le basi della geometria con ulteriori nozioni non definite e assiomi non necessari. Quindi, seguendo Hilbert e la trattazione di Hartshorne in [3], mostreremo che può essere definita una buona nozione di "area uguale" e proveremo le sue proprietà, fornendo così una nuova base per la teoria dell'area. Per evitare la ridondanza e l'ambiguità della parola "uguale", parleremo di "stesso content", che definiremo più avanti.

Cominciamo quindi col dare le prime definizioni e i primi risultati.

Supporremo sempre di essere in un piano di Hilbert. Con le parole "triangolo  $ABC$ " intendiamo, d'ora in poi, il sottoinsieme del piano formato dai tre lati  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , e dai punti interni al triangolo. Diciamo che due triangoli *non si sovrappongono* se non hanno punti interni in comune.

Euclide definì in questo modo le figure rettilinee ([2], def. XIX, pag. 69):

*Figure rettilinee sono quelle comprese tra rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere da quattro e multilateri quelle comprese da più di quattro.*

La definizione moderna è:

**Definizione 4.1.** Una **figura rettilinea**, che chiameremo per semplicità **figura**, è un sottoinsieme del piano che può essere espresso come unione finita di triangoli che non si sovrappongono. Un punto  $D$  è interno ad una figura  $P$  se c'è un triangolo  $ABC$  completamente contenuto in  $P$  tale che  $D$  è interno ad  $ABC$ . Due figure **non si sovrappongono**, se non hanno punti interni in comune.

**Definizione 4.2.** Siano  $P$  e  $Q$  due figure,  $Q \subseteq P$ . Chiamiamo **complementare** di  $Q$  in  $P$ , e lo indichiamo con  $P - Q$ , la figura che otteniamo privando  $P$  dell'interno di  $Q$ , ma non dei suoi lati:

Valgono una serie di proprietà: (per la dimostrazione si veda [3], prop. 22.1, pag. 197)

**Proposizione 4.0.1.** *L'intersezione di due figure qualsiasi è una figura.*

*L'unione di due figure qualsiasi è una figura.*

*Il complementare di una figura dentro ad un'altra figura, unito ai segmenti che formano i suoi lati, è una figura. In particolare quindi ogni unione finita di triangoli è una figura.*

Prima di arrivare alla definizione chiave di questa sezione, diamo la seguente

**Definizione 4.3.** Due figure  $P$ ,  $P'$  sono **equiscomponibili** se è possibile scriverle come unioni di triangoli che non si sovrappongono:

$$P = T_1 \cup \dots \cup T_n$$

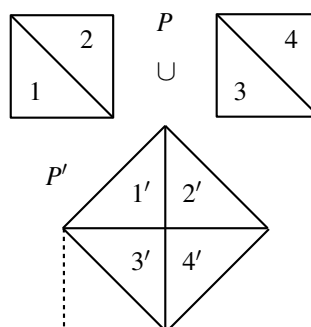
$$P' = T'_1 \cup \dots \cup T'_n$$

in modo tale che, per ogni  $i$ , il triangolo  $T_i$  sia congruente al triangolo  $T'_i$ .

**Definizione 4.4.** Due figure  $P$ ,  $P'$  hanno lo **stesso content** se esistono altre due figure  $Q$ ,  $Q'$  tali che:

1.  $P$  e  $Q$  non si sovrappongono;
2.  $P'$  e  $Q'$  non si sovrappongono;
3.  $Q$  e  $Q'$  sono equiscomponibili;
4.  $P \cup Q$ ,  $P' \cup Q'$  sono equiscomponibili.

**Esempio 4.0.2.** Se  $P$  è unione di due quadrati congruenti in un piano euclideo e  $P'$  è un quadrato costruito sulla diagonale di uno dei quadrati di  $P$ , allora  $P$  e  $P'$  sono equiscomponibili. Infatti  $P$  e  $P'$  sono scomponibili ciascuno in quattro triangoli, a due a due congruenti, come mostrato in figura.



**Esempio 4.0.3.** In un piano euclideo, siano  $ABCD$  e  $EFCD$  due parallelogrammi sulla stessa base  $DC$  e giacenti tra le stesse parallele. La dimostrazione di Euclide di (I. 35) (si veda [2], pag. 131) mostra che  $ABCD$  e  $EFCD$  hanno lo stesso content. Certamente, se poniamo  $P = ABCD$ ,  $P' = EFCD$  e  $Q = Q' = BGE$ , si ha che  $P + Q$  e  $P' + Q'$  sono rispettivamente unione dei triangoli congruenti  $ADE$  e  $BCF$  con  $DGC$ .

Mostriamo che effettivamente  $ADE \cong BCF$ . Per ipotesi  $AB \cong EF$ .

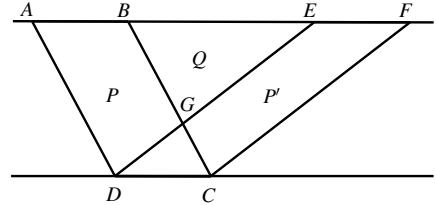
Si ha:

$$AD \cong BC \quad (ABCD \text{ parallelogramma})$$

$$AE \cong BF \quad (AB + BE \cong BE + EF)$$

$$DE \cong CF \quad (EFCD \text{ parallelogramma})$$

$$AB \cong DC, \quad DC \cong EF \Rightarrow AB \cong EF.$$



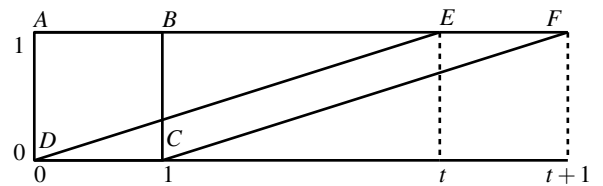
Dunque, per (LLL), i due triangoli sono congruenti.

Dalla definizione sappiamo che se due figure  $P$  e  $P'$  sono equiscomponibili allora hanno lo stesso content. In generale non è però vero il viceversa. Per mostrarlo, utilizziamo i campi ordinati non archimedei.

**Esempio 4.0.4** (stesso content  $\not\Rightarrow$  equiscomponibilità). Consideriamo il piano cartesiano sul campo ordinato non archimedeo  $F$ , definito in 1.0.2. Sappiamo che  $t$  è un elemento infinito del campo  $F$ .

Si consideri il quadrato unitario  $ABCD$  e il parallelogramma di basi  $DC$  e  $EF$ , dove  $E = (t, 1)$  e  $F = (t + 1, 1)$ .

Allora, per (I.35),  $ABCD$  e  $CDEF$



hanno lo stesso content. Non sono però equiscomponibili, infatti ogni triangolo contenuto nel quadrato unitario ha lati di lunghezza minore o uguale a  $\sqrt{2}$  (che è la lunghezza della diagonale). Sia  $G = (0, t + 1)$ . Prendendo un qualsiasi numero finito di tali lati, disposti uno di seguito all'altro, si ha ancora una lunghezza finita in  $F$ . Ma il lato  $CF$  del parallelogramma ha lunghezza (per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo

$CFG) \sqrt{t^2 + 1} > t$ , che è infinito. Dunque nessun numero finito di triangoli contenuti in  $ABCD$  potrà mai "riempire" il parallelogramma  $CDEF$ .

Diamo ora alcuni risultati validi per le relazioni di scomponibilità e content (per le dimostrazioni si rimanda a [3], prop 22.2 e prop. 22.3, pag. 199, 200)

**Proposizione 4.0.5.** *In un piano di Hilbert, la relazione "essere equiscomponibili" tra figure è una relazione di equivalenza. Unioni di figure equiscomponibili non sovrapposte sono equiscomponibili.*

**Proposizione 4.0.6.** *In un piano di Hilbert, la relazione "avere lo stesso content" gode delle seguenti proprietà:*

- a) *è una relazione di equivalenza;*
- b) *figure equiscomponibili hanno lo stesso content;*
- c) *se  $P$  e  $P'$  hanno lo stesso content,  $Q$  e  $Q'$  hanno lo stesso content,  $P$  e  $Q$  non si sovrappongono,  $P'$  e  $Q'$  non si sovrappongono, allora  $P \cup Q$  e  $P' \cup Q'$  hanno lo stesso content;*
- d) *se  $P$  e  $P'$  hanno lo stesso content,  $Q$  e  $Q'$  hanno lo stesso content e  $Q \subseteq P$ ,  $Q' \subseteq P'$ , allora  $P - Q$  e  $P' - Q'$  hanno lo stesso content.*

Con questo abbiamo proprietà sufficienti per dimostrare la maggior parte delle proposizioni di Euclide; in particolare la nozione di stesso content soddisfa le proprietà 1, 2, 3 elencate a pag. 23. Tuttavia questo non è vero per le proprietà 4, 5, 6. Aggiungiamo quindi il seguente assioma alla nostra teoria:

**Assioma** (di De Zolt (**Z**)). *Se  $Q$  è una figura contenuta in un'altra figura  $P$  e se  $P - Q$  ha interno non vuoto, allora  $P$  e  $Q$  non hanno lo stesso content.*

L'assioma di De Zolt può essere visto come una formulazione precisa, per il content, della quinta nozione comune di Euclide "il tutto è maggiore della

parte". In ogni caso, è meglio evitare l'uso di espressioni come "maggiore" o "minore", perché questo implica l'esistenza di una relazione d'ordine tra le figure, che non abbiamo definito. Si può dimostrare che (Z) permette di introdurre una tale relazione d'ordine, e che inoltre implica le restanti proprietà 4 e 6. Riassumendo:

**Proposizione 4.0.7.** *In un piano di Hilbert, la relazione "avere lo stesso content" gode delle proprietà 1, 2, 3 di pag. 23. In un piano Euclideo con (Z), sono valide anche le proprietà 4, 5, 6 di pag. 23.*

*Dimostrazione.* [3], prop. 22.5, pag. 202. □

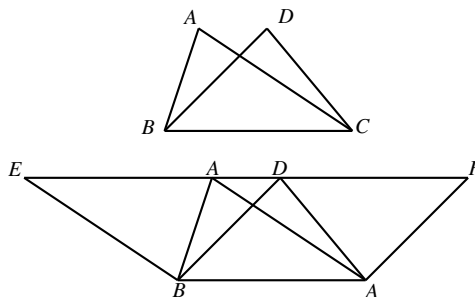
Quindi, ciò che Euclide dimostra riguardo all'uguaglianza nel senso di avere uguale area, utilizzando le proprietà 1, 2 e 3, rimane vero rispetto all'avere lo stesso content, se siamo in un piano di Hilbert; se inoltre il piano è euclideo con (Z), ciò si estende alle proprietà 4, 5, 6.

Ad esempio, nella prova di (I.37) Euclide usa la proprietà "metà di cose uguali sono uguali", che dipende dall'assioma di De Zolt. Proponiamo di seguito sia la dimostrazione euclidea che una dimostrazione che non fa uso di (Z).

**Proposizione 4.0.8 (I.37).** *Triangoli che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali tra loro.*

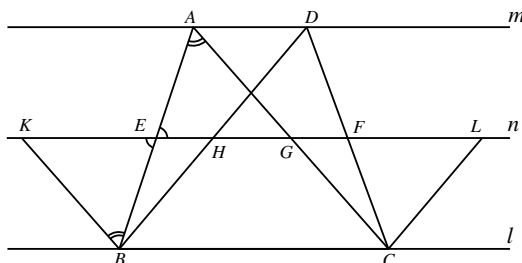
*Dimostrazione di Euclide.* Siano  $ABC$  e  $DBC$  i triangoli dati. Costruiamo due parallelogrammi: tracciamo la retta per  $B$  parallela ad  $AC$  e la retta per  $C$  parallela a  $BD$ . Siano rispettivamente  $E$  ed  $F$  i punti di intersezione di queste rette con la retta per  $AD$ .

$AD$  è parallela a  $BC$  per ipotesi, dunque abbiamo costruito due parallelogrammi che giacciono sulla stessa base e tra le stesse parallele. Per (I.35) i due parallelogrammi hanno lo stesso content.



Quindi, poiché "metà di cose uguali sono uguali tra loro", i triangoli  $ABC$  e  $DBC$  hanno lo stesso content.  $\square$

*Dimostrazione indipendente da (Z).* Siano  $ABC$  e  $DBC$  i triangoli dati, compresi tra le rette parallele  $l$  e  $m$ . Sia  $E$  il punto medio di  $AB$ ; si tracci la parallela  $n$  ad  $l$  e  $m$  passante per  $E$ . Sia  $F$  il punto di intersezione con il segmento  $DC$ .



La proposizione (5.1) di [3] (pag. 52) ci assicura che  $F$  è punto medio di  $DC$ . Si disegnino una retta per  $B$ , parallela ad  $AC$ , che intersechi  $n$  in  $K$  e una retta per  $C$ , parallela ad  $BD$ , che intersechi  $n$  in  $L$ . Poiché le rette sono parallele, seguono una serie di uguaglianze di angoli per cui possiamo affermare che  $AEG \cong BEK$  (per ALA). Dunque il triangolo  $ABC$  ha lo stesso content del parallelogramma  $BCGK$ . Nello stesso modo  $DHF \cong CLF$  e  $DBC$  ha lo stesso content del parallelogramma  $BCLH$ . Per (I.35) questi due parallelogrammi hanno lo stesso content. Dunque, per transitività  $ABC$  e  $DBC$  hanno lo stesso content.  $\square$

Diamo qui di seguito le più importanti proposizioni di Euclide che riguardano la teoria dell'area:

**Proposizione 4.0.9** (I.35). *Parallelogrammi che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.*

**Proposizione 4.0.10** (I.36). *Parallelogrammi che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.*

**Proposizione 4.0.11** (I.38). *Triangoli che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.*

**Proposizione 4.0.12** (I.39). *Triangoli uguali che siano posti sulla stessa base e dalla stessa parte sono anche [compresi] fra le stesse parallele.*

**Proposizione 4.0.13** (I.40). *Triangoli uguali che siano posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche compresi fra le stesse parallele.*

**Proposizione 4.0.14** (I.41). *Se un parallelogrammo ha la stessa base ed è compreso tra le stesse parallele da cui è compreso un triangolo, il parallelogrammo è il doppio del triangolo.*

**Proposizione 4.0.15** (I.42). *Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.*

*Osservazione 3.* Viene usata l'espressione "angolo rettilineo" perché Euclide considera "angolo" ciò che è compreso tra due linee qualsiasi (includendo dunque anche gli angoli curvilinei). L'attributo "rettilineo" serve a specificare che stiamo considerando delle rette.

**Proposizione 4.0.16** (I.43). *In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi [posti] intorno alla diagonale sono uguali fra loro.*

**Proposizione 4.0.17** (I.44). *Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.*

**Proposizione 4.0.18** (I.45). *Costruire un parallelogrammo uguale ad una figura rettilinea data in un dato angolo rettilineo.*

**Proposizione 4.0.19** (I.47). *Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.*

**Proposizione 4.0.20** (I.48). *Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto.*

Nel secondo libro, tutti i risultati che affermano che certe figure hanno lo stesso content di altre rimangono validi nel nostro sistema, così come, nel terzo libro, le proposizioni (III.35) e (III.36):

**Proposizione 4.0.21** (III.35). *Se in un cerchio due corde si tagliano fra loro, il rettangolo compreso dalle parti dell'una è uguale al rettangolo compreso dalle parti dell'altra.*

**Proposizione 4.0.22** (III.36). *Se da un punto preso esternamente si conducono ad un cerchio due rette, una delle quali tagli il cerchio, mentre l'altra sia ad esso tangente, il rettangolo compreso da tutta quanta la retta secante e dalla sua parte esterna sarà uguale al quadrato della retta tangente.*

**Proposizione 4.0.23** (III.37). *Se da un punto preso esternamente si conducono ad un cerchio due rette, una delle quali tagli il cerchio, mentre l'altra abbia un estremo sulla sua circonferenza, e se il rettangolo compreso da tutta quanta la retta secante e dalla sua parte esterna è uguale al quadrato della seconda retta, la seconda retta sarà tangente al cerchio.*

Nel quarto libro, l'unico risultato che necessita della teoria dell'area di Euclide è (IV.10) che richiama, nella sua dimostrazione, la proposizione (III.37) e dunque (Z).

**Proposizione 4.0.24** (IV.10). *Costruire un triangolo isoscele avente ciascuno dei due angoli alla base che sia il doppio dell'angolo rimanente.*

Dato il suo vasto utilizzo nelle dimostrazioni, potremmo considerare (Z) come un assioma aggiuntivo, in modo da avere delle basi soddisfacenti per la



teoria euclidea dell'area. Nella prossima sezione vedremo però che (Z) vale in un piano cartesiano su un campo e quindi, usando il teorema dell'introduzione di coordinate ([3], pag. 187), vale in ogni piano di Hilbert con (P), dunque in un piano Euclideo.

# Capitolo 5

## Funzioni Misura d'Area

Quello che ci proponiamo di fare ora è di collegare la teoria dell'area di Euclide, discussa nella sezione precedente, con la familiare nozione di area intesa come numero. Cominceremo con il definire una funzione misura d'area tramite le proprietà che vogliamo abbia. Discuteremo poi l'esistenza di tale funzione, e mostreremo che ne esiste (una e solo una) in un piano di Hilbert con (P), con la proprietà che l'area di un triangolo sia  $\frac{1}{2}$  (base x altezza). Infine, faremo vedere che l'esistenza di una funzione misura d'area implica la validità dell'assioma di De Zolt (Z).

**Definizione 5.1.** Sia  $G$  un gruppo abeliano. Diciamo che  $G$  è un **gruppo abeliano ordinato** se ha un sottoinsieme  $P$ , i cui elementi sono detti *positivi*, tale che:

a) se  $a, b \in P$ , allora  $a + b \in P$ ;

b) Per ogni  $a \in G$ , solo una tra le seguenti affermazioni è valida:

$$a \in P; \quad a = 0; \quad -a \in P.$$

Come nel caso di un campo ordinato diciamo che  $a > b$ , se  $a - b \in P$ . In particolare, la relazione  $>$  gode delle seguenti proprietà:

i) se  $a > b$  e  $c \in P$ , allora  $a + c > b + c$ ;

- ii) se  $a > b$  e  $b > c$ , allora  $a > c$ ;
- iii) dati  $a, b \in G$ , una e solo una tra le seguenti affermazioni è valida:  
 $a > b$ ;  $a = b$ ;  $a < b$ .

**Definizione 5.2.** Una **funzione misura d'area**, o brevemente una misura d'area, in un piano di Hilbert è una funzione  $\alpha$ , definita sull'insieme  $\mathcal{F}$  di tutte le figure, a valori in un gruppo abeliano ordinato  $G$ , tale che:

1. per ogni triangolo  $T$ ,  $\alpha(T) > 0$  in  $G$ ;
2. se  $T$  e  $T'$  sono triangoli congruenti, allora  $\alpha(T) = \alpha(T')$ ;
3. se due figure  $P$  e  $Q$  non si sovrappongono si ha:  $\alpha(P \cup Q) = \alpha(P) + \alpha(Q)$ .

Chiamiamo il valore  $\alpha(P)$  **area della figura  $P$**  rispetto alla misura d'area  $\alpha$ .

Gode delle seguenti proprietà:

**Proposizione 5.0.1.** *Supponiamo che  $\alpha$  sia una misura d'area in un piano di Hilbert. Allora valgono:*

- a) se  $P$  è una figura qualsiasi con interno non vuoto, allora  $\alpha(P) > 0$ ;
- b) se  $P$  e  $P'$  sono figure equiscomponibili, allora  $\alpha(P) = \alpha(P')$ ;
- c) se  $P$  e  $P'$  sono figure con lo stesso content, allora  $\alpha(P) = \alpha(P')$ ;
- d) se una figura  $Q$  è contenuta in una figura  $P$  e  $P - Q$  ha interno non vuoto, allora  $\alpha(Q) < \alpha(P)$ ;

*Dimostrazione.* **a)** Se scriviamo  $P$  come unione di triangoli non sovrapposti  $T_i$ , per definizione di misura d'area,  $\alpha(P) = \sum_i \alpha(T_i)$ , dove  $\alpha(T_i) > 0 \forall i$ . Dunque  $\alpha(P)$  è somma di termini positivi  $\Rightarrow \alpha(P) > 0$ .

**b)** Segue dal fatto che triangoli congruenti hanno la stessa funzione d'area.

c) Se  $P$  e  $P'$  hanno lo stesso content, per definizione esistono due figure  $Q$  e  $Q'$  che sono equiscomponibili e non si sovrappongono con  $P$  e  $P'$  rispettivamente, tali che  $P \cup Q$  e  $P' \cup Q'$  sono equiscomponibili. Dunque  $\alpha(Q) = \alpha(Q')$  e  $\alpha(P \cup Q) = \alpha(P' \cup Q')$ . Usando l'additività di  $\alpha$  e sottraendo la quantità  $\alpha(Q')$  in  $G$ , otteniamo  $\alpha(P) = \alpha(P')$ .

d) Scriviamo  $P$  in questo modo:

$$P = Q \cup (P - Q)$$

Poiché  $P - Q$  ha interno non vuoto,  $\alpha(P - Q) > 0$ . Dall'additività segue che  $\alpha(P) > \alpha(Q)$ .

□

*Osservazione 4.* La proprietà d), combinata con c), implica la validità dell'assioma di De Zolt (Z). Infatti, supponiamo di avere una figura  $Q$  contenuta in un'altra figura  $P$  e supponiamo che  $P - Q$  abbia interno non vuoto. Allora, per d), vale  $\alpha(Q) < \alpha(P)$ .

La controimplicazione di c) ci dice che se due figure  $P$  e  $P'$  sono tali che  $\alpha(P) \neq \alpha(P') \Rightarrow$  non hanno lo stesso content.

Per definizione  $\alpha$  ha valori in un gruppo abeliano ordinato dunque, per iv) di 5.1,

$$\alpha(P) \neq \alpha(P') \Leftrightarrow \alpha(P) < \alpha(P') \text{ o } \alpha(P) > \alpha(P')$$

Nel nostro caso  $\alpha(Q) < \alpha(P) \Rightarrow Q$  e  $P$  non hanno lo stesso content e vale (Z).

**Teorema 5.0.2.** *In un piano di Hilbert con  $(P)$ , esiste una funzione misura d'area  $\alpha$ , a valori nel gruppo additivo del campo dell'aritmetica dei segmenti  $F$  (3.0.3), che soddisfa ed è univocamente determinata dalla condizione aggiuntiva che segue:*

*Per ogni triangolo  $ABC$ , sia  $b \in F$  la lunghezza di un qualsiasi lato che scegliamo come base, e sia  $h$  la lunghezza di un'altezza perpendicolare a tale base, allora:*

$$\alpha(ABC) = \frac{1}{2}bh.$$

*Dimostrazione.* L'unicità è ovvia, perché la condizione aggiuntiva ci dà il valore di  $\alpha$  per ogni triangolo e ogni figura è unione finita di triangoli.

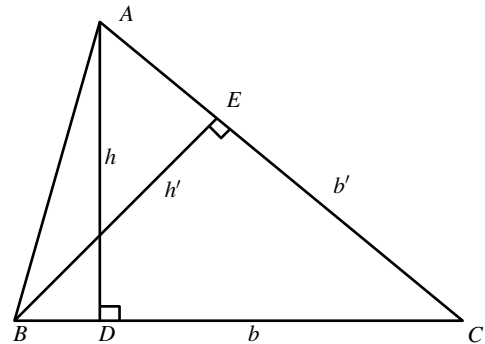
Per l'esistenza di  $\alpha$ , non c'è possibilità di scelta: per ogni figura  $P \in \mathcal{F}$ , si scriva  $P$  come unione finita di triangoli  $P = T_1 \cup \dots \cup T_n$ , per ogni triangolo  $T_i$  si scelga un lato come base  $b_i$  e sia  $h_i$  l'altezza corrispondente. Si definisca infine

$$\alpha(P) = \sum_i \frac{1}{2} b_i h_i.$$

Il problema è mostrare che questa nozione è ben definita: dobbiamo quindi far vedere che  $\alpha(T)$ , dove  $T$  è un triangolo, è indipendente dalla scelta del lato preso come base e, successivamente, che  $\alpha(P)$  è indipendente dalla scelta della triangolazione della figura  $P$  che prendiamo in esame.

Dobbiamo infine verificare che una tale  $\alpha$  soddisfa le proprietà di una funzione d'area. Per farlo, ci serviamo di una serie di lemmi:

**Lemma 5.0.3** ( $\alpha(T)$  è indipendente dalla scelta della base). *In un piano di Hilbert con  $(P)$ , sia  $ABC$  un triangolo qualsiasi. Siano  $b$  e  $b'$  le classi di congruenza di due possibili scelte di basi e  $h$  e  $h'$  le classi di congruenza delle corrispondenti altezze. Allora  $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b'h'$  nel campo dell'aritmetica dei segmenti.*



*Dimostrazione.* Sia  $ABC$  il triangolo con  $b = [BC]$ ,  $h = [AD]$ ,  $b' = [AC]$ ,  $h' = [BE]$ . I due triangoli  $ADC$  e  $BEC$  hanno l'angolo in  $C$  in comune e sono rettangoli, dunque, per differenza,  $\widehat{DAC} \cong \widehat{EBC}$  e i triangoli hanno tutti gli angoli uguali. Sono quindi triangoli simili (si veda [3], pag. 175) e valgono una serie di proporzioni tra cui:

$$h : h' = b' : b \Rightarrow \frac{h}{b'} = \frac{h'}{b}$$

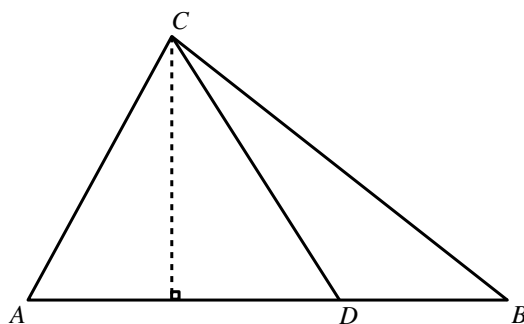
da cui  $bh = b'h'$ . Moltiplicando a destra e sinistra per  $\frac{1}{2}$  otteniamo  $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b'h'$ , come richiesto.  $\square$

**Lemma 5.0.4** ( $\alpha(T)$  è indipendente dalla scelta della triangolazione).

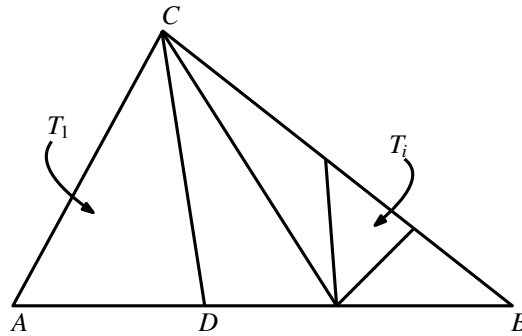
Se un triangolo  $T$  è suddiviso in triangoli più piccoli  $T_i$  in un qualsiasi modo (ma sempre considerandone un numero finito), allora la misura dell'area di  $T$  è uguale alla somma delle misure d'area dei singoli  $T_i$ :

$$\sum_i \alpha(T_i).$$

*Dimostrazione. Passo 1.* Consideriamo il caso particolare in cui un triangolo  $ABC$  sia diviso in due triangoli da un'unica *trasversale*, ovvero una retta che va da un vertice, sia esso  $C$ , a un punto  $D$  sul lato opposto (nel nostro caso  $AB$ ). Scegliendo poi  $AB$  come base per il triangolo grande e i lati  $AD$  e  $DB$  come basi per i due triangoli più piccoli  $ADC$  e  $DBC$ , tutti e tre i triangoli hanno la stessa altezza e  $AD$  e  $DB$ , sommandosi, danno  $AB$ , dunque  $\alpha(ABC) = \alpha(ADC) + \alpha(DBC)$ .



**Passo 2.** Consideriamo ora un caso leggermente più complesso. Supponiamo che il triangolo  $ABC$  sia suddiviso in triangoli  $T_i$  in modo tale che non ci siano nuovi vertici nell'interno del triangolo e su almeno un lato di  $ABC$  ( $AC$  in figura).



Allora:  $\alpha(ABC) = \sum_i \alpha(T_i)$ .

Proviamo questo risultato per induzione sul numero dei triangoli  $T_i$ .

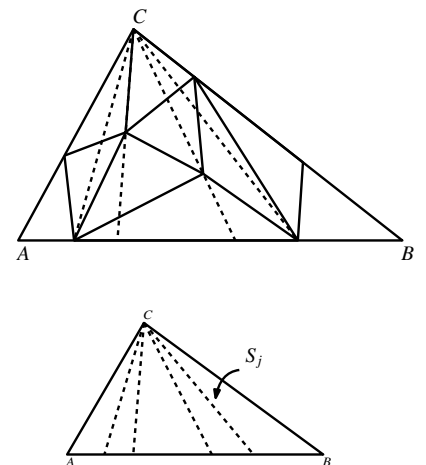
Per  $i=2$ , siamo nel caso del Passo 1. Supponiamo quindi  $i > 2$ . Il lato senza vertici,  $AC$ , deve appartenere a uno dei  $T_i$ , sia esso  $T_1$ , e il terzo vertice  $D$  di  $T_1$  deve stare, per costruzione, o su  $AB$  o  $BC$ . Supponiamo stia su  $AB$ . Allora per Passo 1:

$$\alpha(ABC) = \alpha(T_1) + \alpha(DBC).$$

Si noti che la suddivisione di  $DBC$  ha un triangolo in meno rispetto a quella di  $ABC$ . Inoltre,  $DBC$  soddisfa le ipotesi del Passo 2 perché non ha vertici interni (poiché  $ABC$  non ne aveva), e  $CD$ , essendo nell'interno di  $ABC$ , non contiene vertici. Dunque, per ipotesi induttiva,  $\alpha(DBC) = \sum_{i=2}^n \alpha(T_i)$ , e abbiamo concluso.

**Passo 3.** Affrontiamo infine il caso generale.

Sia dunque il triangolo  $ABC$  suddiviso in sottotriangoli  $T_i$ . Scegliamo uno dei vertici di  $ABC$ , per esempio  $C$ , e tracciamo le rette (tratteggiate in figura) che collegano  $C$  ad ogni vertice della triangolazione, anche quelli che si trovano su  $AB$ . Otteniamo quindi un'altra suddivisione di  $ABC$ , questa volta in triangoli  $S_j$ .



Si osservi che questa nuova triangolazione soddisfa le ipotesi del Passo 2, dunque:

$$\alpha(ABC) = \sum_j \alpha(S_j). \quad (\diamond)$$

Considerando contemporaneamente tutti i  $T_i$  e gli  $S_j$  otteniamo una nuova suddivisione  $ABC = \bigcup_{i,j} T_i \cap S_j$ . Le intersezioni  $T_i \cap S_j$  potrebbero essere triangoli o avere quattro lati. Aggiungiamo altre rette in modo che queste siano unioni di triangoli:  $T_i \cap S_j = \bigcup_k U_{ijk}$ . In questo modo abbiamo una terza triangolazione di  $ABC$  in triangoli  $U_{ijk}$ .

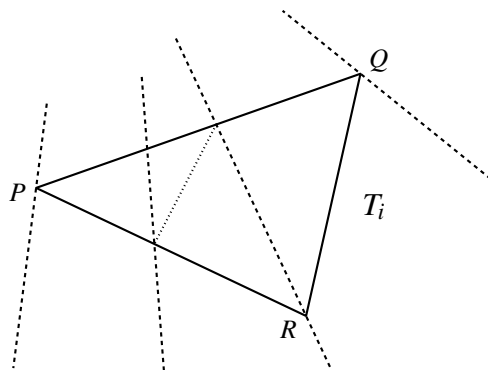
Osserviamo poi che ogni  $S_j$  è unione di triangoli  $U_{ijk}$  con  $i$  e  $k$  che variano. Questa triangolazione di  $S_j$  soddisfa le condizioni del Passo 2: non ha vertici interni, perché le rette che formano i triangoli  $S_j$  passano per tutti i vertici della triangolazione originale, e, per la stessa ragione, il lato di  $S_j$  che giace su  $AB$  non contiene vertici. Quindi, per il Passo 2, per ogni  $j$  si ha:

$$\alpha(S_j) = \sum_{i,k} \alpha(U_{ijk}).$$

Mettendo insieme questo risultato con quello ottenuto in  $(\diamond)$  per  $ABC$  come unione degli  $S_j$ , otteniamo:

$$\alpha(ABC) = \sum_{i,j,k} \alpha(U_{ijk}). \quad (\star)$$

Rimane da studiare la divisione di ogni  $T_i$  nei sottotriangoli  $U_{ijk}$ . Generalmente, una delle rette da  $C$  per i tre vertici  $PQR$  di  $T_i$  dividerà  $T_i$  in due parti,  $T'_i$  e  $T''_i$ . Consideriamo la retta per  $R$ . Per il Passo 1 vale:  $\alpha(T_i) = \alpha(T'_i) + \alpha(T''_i)$ .





Ciascuna di queste parti viene poi nuovamente divisa dalle altre rette per  $C$  e dalle rette che abbiamo aggiunto per rendere triangoli le figure con quattro lati che ottenevamo. Queste triangolazioni di  $T'_i$  e  $T''_i$  soddisfano le condizioni del Passo 2: non ci sono vertici interni e il lato per  $R$ , che abbiamo usato per separare  $T_i$  in  $T'_i$  e  $T''_i$ , non contiene vertici. Dunque, sempre per il Passo 2, sia  $T'_i$  che  $T''_i$  hanno misura d'area uguale alla somma delle misure d'area degli  $U_{ijk}$  in cui sono composti. Si ha:

$$\alpha(T_i) = \sum_{j,k} \alpha(U_{ijk}).$$

Combinando infine questo risultato con (★) otteniamo:

$$\alpha(ABC) = \sum_i \alpha(T_i).$$

Come volevasi dimostrare. □

**Lemma 5.0.5.** *La misura d'area di una figura è indipendente dalla triangolazione usata per definirla.*

*Dimostrazione.* Se una figura  $P$  ha due triangolazioni:

$$P = T_1 \cup \dots \cup T_n$$

$$P = T'_1 \cup \dots \cup T'_m$$

allora l'intersezione dei  $T_i$  con i  $T'_j$  ( $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ ) può essere ulteriormente suddivisa in triangoli  $U_{ijk}$  (per dettagli si veda [3], dim. di 22.2, pag. 199). Applicando ora il lemma 5.0.4 ad ogni  $T_i = \bigcup_{j,k} U_{ijk}$  e ad ogni  $T'_j = \bigcup_{i,k} U_{ijk}$ , troviamo che:

$$\sum_i \alpha(T_i) = \sum_{i,j,k} \alpha(U_{ijk}) = \sum_j \alpha(T'_j).$$

Dunque la misura d'area di  $P$ , calcolata mediante l'una o l'altra triangolazione, è la stessa. □

Concludiamo ora la dimostrazione di 5.0.2:

*Fine dimostrazione 5.0.2.* I lemmi 5.0.3, 5.0.4 e 5.0.5 ci dicono che la funzione  $\alpha$  è ben definita. Resta da verificare che soddisfa le proprietà di funzione misura d'area (elencate in 5.2).

Poiché i segmenti danno elementi positivi di  $F$ ,  $\alpha(T) > 0$  per ogni triangolo. Triangoli congruenti hanno lati e altezze congruenti, quindi, se  $T$  e  $T'$  sono due triangoli congruenti,  $\alpha(T) = \alpha(T')$ .

Se  $P$  e  $Q$  sono figure che non si sovrappongono e se scriviamo  $P = T_1 \cup \dots \cup T_n$  e  $Q = T'_1 \cup \dots \cup T'_m$ , possiamo usare tutti i  $T_i$  e i  $T'_j$  per triangolare  $P \cup Q$ . In questo caso l'additività è ovvia.  $\square$

**Corollario 5.0.6.** *In un piano euclideo, tutte le proposizioni della teoria dell'area di Euclide, (I.35)-(I.48), (II.1)-(II.14), (III.35)-(III.37) e (IV.10), rimangono valide interpretando l'"uguaglianza" come stesso content.*

*Dimostrazione.* Come visto nel capitolo precedente, tutte queste proposizioni seguono dalla definizione di stesso content più (Z). In questo capitolo abbiamo visto che (Z) è una conseguenza dell'esistenza di una misura d'area (5.0.1) e che una misura d'area esiste in un piano di Hilbert con (P) (5.0.2).  $\square$

Dimostriamo, infine, la proposizione seguente:

**Proposizione 5.0.7.** *In un piano di Hilbert con (P), sia  $\alpha$  la misura d'area definita in 5.0.2. Allora*

$$\text{due figure } P \text{ e } Q \text{ hanno lo stesso content} \Leftrightarrow \alpha(P) = \alpha(Q).$$

*Quindi, in un piano di Hilbert con (P), la teoria del content e quella dell'area data dalla funzione misura d'area  $\alpha$ , in cui l'area di un triangolo è data da  $\frac{1}{2}bh$ , sono essenzialmente equivalenti.*

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$  Per c) 5.0.1, se  $P$  e  $Q$  hanno lo stesso content  $\Rightarrow \alpha(P) = \alpha(Q)$ .

⊞ Supponiamo ora che  $\alpha(P) = \alpha(Q)$  e mostriamo che hanno lo stesso content. Per (I.45) possiamo trovare due rettangoli  $P'$  e  $Q'$  di content rispettivamente uguale a  $P$  e  $Q$ . Possiamo inoltre assumere che un lato di questi rettangoli sia l'unità 1 nel campo dell'aritmetica dei segmenti e che gli altri lati dei due rettangoli siano  $a$  e  $b$ . Suddividendo ciascun rettangolo in due triangoli, per 5.0.2, otteniamo:  $\alpha(P') = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a)$  e  $\alpha(Q') = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot b)$ .

Ma  $P'$  e  $Q'$ , per come li abbiamo scelti, hanno lo stesso content di  $P$  e  $Q$ . Dunque, per 5.0.1 c),  $\alpha(P) = \alpha(P') = a$  e  $\alpha(Q) = \alpha(Q') = b$ . Ma, per ipotesi,  $\alpha(P) = \alpha(Q)$  e quindi  $a = b$ . Questo implica che i due rettangoli  $P'$  e  $Q'$  sono congruenti e hanno, pertanto, lo stesso content. Per transitività, anche  $P$  e  $Q$  hanno lo stesso content.  $\square$

*Osservazione 5.* Poiché, in un piano di Hilbert con (P), la teoria del content è essenzialmente equivalente alla teoria dell'area costruita sulla funzione misura d'area  $\alpha$  di 5.0.2, possiamo riformulare la teoria euclidea dell'area anche in termini di  $\alpha$ .

# Capitolo 6

## Dissezione

Nei capitoli precedenti abbiamo visto come Euclide basi la sua teoria dell'area sull'aggiungere e sottrarre figure congruenti. Hilbert formalizza il lavoro del matematico greco dando la definizione di "stesso content", che può essere interpretata anche attraverso una misura d'area. Mentre la nozione di content dà una buona teoria generale, non è del tutto pratica: cosa va aggiunto a due figure che hanno lo stesso content, per ottenere due figure equiscomponibili? In questo capitolo approfondiremo il concetto di equiscomponibilità e, per farlo, introduciamo il problema pratico della **dissezione**:

*Date due figure trovare, se possibile, una scomposizione efficiente della prima come unione di figure più piccole che non si sovrappongono (non necessariamente triangoli) che possano essere riassemblate nella seconda figura.*

**Una dissezione esiste  $\Leftrightarrow$  due figure sono equiscomponibili.  $(\spadesuit)$**

In questo caso diremo che una figura può essere scomposta nell'altra, o che sono *equivalenti per dissezione*.

Lavoreremo in un piano di Hilbert con (P) e, in alcuni casi anche con (A) o (E). Vedremo che alcuni asserti, che Euclide dimostrò per il content, rimangono veri anche usando il concetto più forte di dissezione (il più noto tra questi è (I.47), il Teorema di Pitagora). Dimosteremo anche il teorema di

Bolyai – Gerwien che prova l'equivalenza tra "avere la stessa area" e "essere equivalenti per dissezione" in un piano archimedeo.

Cominciamo dando alcuni risultati generali sull'esistenza di dissezione.

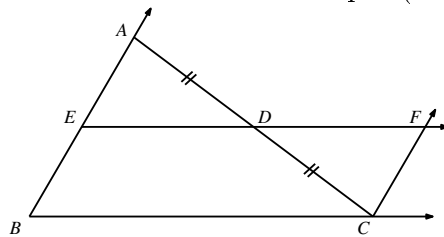
**Proposizione 6.0.1.** *In un piano di Hilbert con (P), un qualsiasi triangolo  $ABC$  può essere scomposto in un parallelogramma.*

*Dimostrazione.* Sia  $ABC$  un triangolo e sia  $D$  il punto medio di  $AC$ . Si traccino la retta per  $D$  parallela a  $BC$  e la retta per  $C$  parallela a  $AB$ . Sia  $F$  il punto di intersezione di queste due rette. Allora  $ADE \cong CDF$  per (ALA):

$$\widehat{EAD} \cong \widehat{DCF} \text{ (alterni interni)}$$

$$AD \cong DC \text{ (per ipotesi)}$$

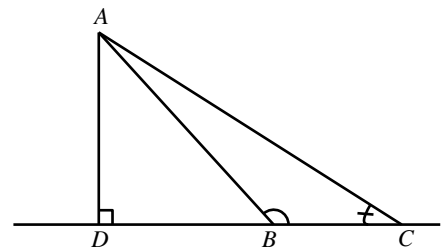
$$\widehat{ADE} \cong \widehat{CDF} \text{ (opposti al vertice)}$$



Dunque  $ABC$  può essere scomposto in  $EBCF$ , che è un parallelogramma.  $\square$

**Lemma 6.0.2.** *Sia  $ABC$  un triangolo e supponiamo che il piede  $D$  della perpendicolare condotta da  $A$  a  $BC$  cada fuori da  $BC$ . Allora uno degli angoli del triangolo, in  $B$  o  $C$ , è ottuso.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $B$  sia tra  $D$  e  $C$ . Allora l'angolo  $\widehat{ABC}$  è un angolo esterno del triangolo rettangolo  $ADB$ , dunque  $\widehat{ABC}$  è maggiore di un angolo retto per (I.16) (In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti).  $\square$



**Proposizione 6.0.3.** *Un qualsiasi parallelogramma  $ABCD$  può essere scomposto in un rettangolo.*

Per procedere con la dimostrazione, abbiamo bisogno dei seguenti risultati:

**Proposizione 6.0.4** (I.32). *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.*

*Dimostrazione.* [2], pag. 125.  $\square$

**Proposizione 6.0.5** (I.34). *I parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali tra loro e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali.*

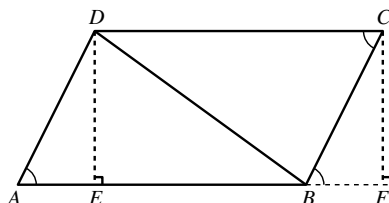
*Dimostrazione.* [2], pag. 129.  $\square$

*Dimostrazione di 6.0.3.* Sia  $ABCD$  il parallelogramma. Si traccino le altezze da  $C$  e  $D$ ; siano  $F$  ed  $E$  le loro intersezioni con il lato  $AB$ . Supponiamo, per esempio, che  $E$  caschi tra  $A$  e  $B$ . Allora il triangolo  $ADE$  è congruente al triangolo  $BCF$  per (ARLA):

$$\widehat{DEA} \cong \widehat{CFB} \text{ retti}$$

$$AD \cong BC$$

$$\widehat{DAE} \cong \widehat{CBF}$$

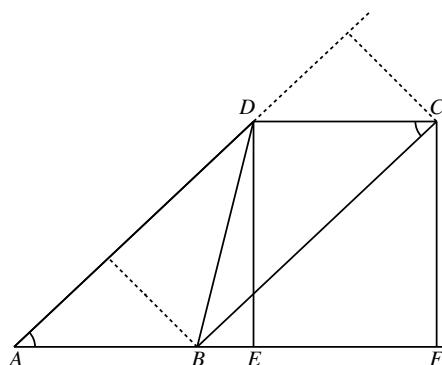


Dunque il parallelogramma è scomposto nel rettangolo  $EFCD$ .

Ora mostriamo che possiamo sempre applicare questa costruzione. In ogni parallelogramma, gli angoli opposti sono uguali (6.0.5) e la somma degli angoli sono quattro angoli retti, dunque due degli angoli opposti sono acuti. (Se così non fosse, avremmo quattro angoli retti e non ci sarebbe nulla da dimostrare.) Assumiamo dunque che l'angolo in  $A$  sia acuto.

Ora, se l'altezza  $DE$  cade fuori da  $AB$ , per 6.0.2 l'angolo  $\widehat{ABD}$  deve essere ottuso.

Questo implica che l'angolo  $\widehat{ADB}$  è acuto (6.0.4) e, scambiando  $B$  con  $D$ , l'altezza da  $B$  ad  $AD$  cascherà tra  $A$  e  $D$  (sempre per 6.0.2). Possiamo quindi applicare la costruzione descritta sopra.



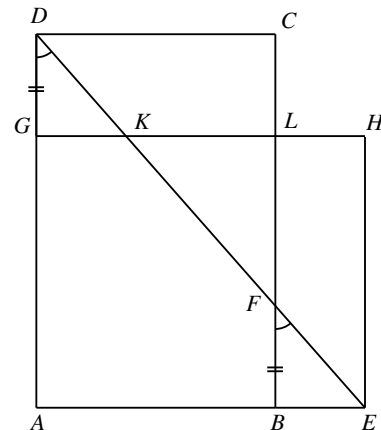
□

**Proposizione 6.0.6.** *Dato un rettangolo  $ABCD$  e dato un segmento  $AE$  tale che  $AB < AE < 2AB$ , il rettangolo  $ABCD$  può essere scomposto in un rettangolo avente un lato uguale ad  $AE$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo siano dati il rettangolo  $ABCD$  e il punto  $E$  sul prolungamento di  $AB$ . Uniamo  $D$  a  $E$ . Sia  $F$  il punto di intersezione tra  $DE$  e  $BC$ . Prendiamo un punto  $G$  su  $AD$  tale che  $DG \cong FB$ . Si costruisca il rettangolo  $AEHG$  e siano  $K$  punto di intersezione tra  $DE$  e  $GH$  e  $L$  punto di intersezione tra  $BC$  e  $GH$ . Le rette parallele  $AD$  e  $BC$  sono tagliate dalla trasversale  $DE$ , dunque gli angoli  $\widehat{ADE}$  e  $\widehat{BFE}$  sono congruenti perché corrispondenti. Per (ARLA),  $DGK \cong FBE$  ( $\widehat{DGK} \cong \widehat{FBE}$  retti,  $\widehat{ADE} \cong \widehat{BFE}$  e  $DG \cong FB$ ).

In particolare  $GK \cong BE$ . Per costruzione si aveva  $AE \cong GH \Rightarrow$  per differenza  $AB \cong KH$ . Infine, sempre per (ARLA),  $DCF \cong KHE$ :

$$\begin{aligned} \widehat{DCF} &\cong \widehat{KHE} \text{ retti per costr.} \\ DC(\cong AB) &\cong KH \\ \widehat{DFC} &\cong \widehat{KEH} \text{ (corrispondenti)} \end{aligned}$$

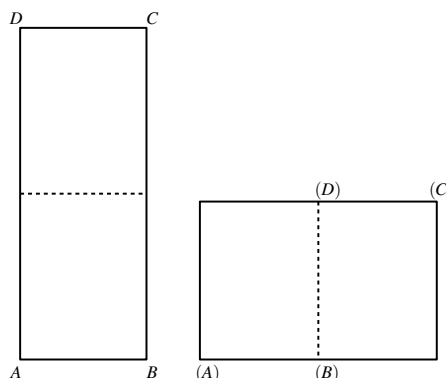


Questo, come richiesto, ci dà la dissezione di  $ABCD$  in  $AEHG$ . □

**Proposizione 6.0.7.** *Si supponga valido l'assioma di Archimede (A). Dato un qualsiasi rettangolo  $ABCD$  e un qualsiasi segmento  $EF$ , esiste un rettangolo  $EFGH$  equivalente per dissezione ad  $ABCD$ .*

*Dimostrazione.* Possiamo sezionare il rettangolo di partenza in un nuovo rettangolo di altezza la metà e base il doppio di quello originale, come in figura.

Applicando (A), dopo aver raddoppiato o dimezzato  $AB$  un numero finito di volte, possiamo assumere che  $AB \leq EF < 2AB$ . A questo punto applichiamo 6.0.6 per ottenere un rettangolo  $EFGH$  come richiesto.



□

**Corollario 6.0.8.** *Si supponga valido l'assioma di Archimede (A) e sia dato un segmento  $EF$ . Allora ogni figura rettilinea può essere scomposta in un rettangolo con un lato uguale ad  $EF$ .*

*Dimostrazione.* [3], cor. 24.6, pag. 215. □

**Teorema 6.0.9** (Bolyai, Gerwien). *In un piano di Hilbert con (P) e (A), sia  $\alpha$  la misura d'area di teorema 5.0.2. Allora due figure  $P$  e  $Q$  sono equivalenti per dissezione  $\Leftrightarrow$  hanno la stessa area.*

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$  Poiché, come visto ad inizio capitolo in ( $\spadesuit$ ), se due figure sono equivalenti per dissezione allora sono equiscomponibili, per b) 5.0.1 abbiamo finito.

$\Leftarrow$  Supponiamo  $P$  e  $Q$  abbiano la stessa area:  $\alpha(P) = \alpha(Q)$ . Per 6.0.8 possono essere scomposti in rettangoli di lati rispettivamente  $1, a$  e  $1, b$ . Allora  $\alpha(P) = 1 \cdot a = a$  e  $\alpha(Q) = 1 \cdot b = b$ . Per ipotesi deve essere  $a = b$ .

I rettangoli sono congruenti dunque, per la transitività della relazione di equiscomponibilità (4.0.5),  $P$  può essere scomposto in  $Q$ . □

*Osservazione 6.* Unendo questo risultato con (5.0.7) abbiamo quindi dimostrato che in un piano di Hilbert con (A) e (P) due figure hanno lo stesso content se e solo se sono equiscomponibili.

**Proposizione 6.0.10.** *Si supponga valido (E). Sia  $ABCD$  un rettangolo di lati  $a = [AB]$  e  $b = [AC]$  tali che valga  $a \leq b \leq 4a$ . Allora esiste un segmento*



*AE tale che il rettangolo ABCD può essere scomposto in un quadrato di lato AE.*

*Dimostrazione.* [3], prop. 24.8, pag. 216. □

**Corollario 6.0.11.** *In un piano euclideo con (A), ogni figura può essere scomposta in un quadrato.*

*Dimostrazione.* [3], cor. 24.9, pag. 217. □

Parliamo ora del teorema di Pitagora, enunciato da Euclide alla proposizione numero 47 del primo libro così: ([2], pag. 146)

*Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.*

Proclo, filosofo e matematico del V secolo d.C., attribuisce ad Euclide il merito di aver provveduto ad una dimostrazione chiara e pulita, ma soprattutto nuova ([2], nota 35, pag. 146), che diamo di seguito.

*Dimostrazione di Euclide.* Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ . Disegniamo i quadrati  $ABFG$  di lato  $AB$ ,  $ACKH$  di lato  $AC$  e  $BCED$  di lato  $BC$ . Vogliamo dimostrare che il content di  $BCED$  è uguale alla somma dei content di  $ABFG$  e  $ACKH$ . Tracciamo la retta per  $A$  parallela a  $BD$  (o, equivalentemente, a  $CE$ ). Sia  $M$  il punto di intersezione di tale retta con il

segmento  $BC$ ,  $L$  quello con il segmento  $DE$ . Congiungiamo  $A$  con  $D$  e con  $E$ ,  $B$  con  $K$  e  $C$  con  $F$ .

Ora, poiché ciascuno dei due angoli  $BAC$  e  $BAG$  è retto,  $AC$  e  $AG$  giacciono sulla stessa retta.

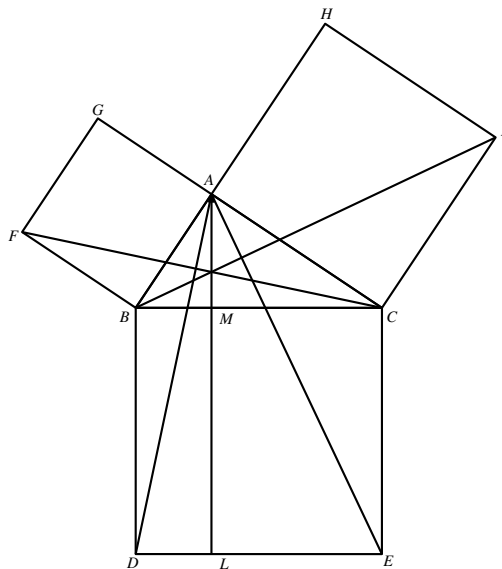
Lo stesso vale per  $BA$  e  $AH$ .

Osserviamo poi quanto segue nei triangoli  $ABD$  e  $FBC$ :

$$\begin{aligned} \widehat{ABD} &\cong \widehat{ABC} + \widehat{CBD} \text{ (che è retto)} \\ \widehat{FBC} &\cong \widehat{ABC} + \widehat{FBA} \text{ (che è retto)} \\ \Rightarrow \widehat{ABD} &\cong \widehat{FBC}. \end{aligned}$$

$$FB \cong AB$$

$$BC \cong BD$$



Dunque, per (LAL),  $FBC \cong ABD$ . I due triangoli hanno quindi lo stesso content. Il parallelogramma  $BMDL$  ha la stessa base  $BD$  e la stessa altezza del triangolo  $ABD$ , e il quadrato  $ABFG$  ha la stessa base e la stessa altezza del triangolo  $FBC$ ; di conseguenza, poiché "doppi di cose uguali sono uguali fra loro",  $BDML$  e  $ABFG$  sono uguali. Allo stesso modo si può dimostrare che il parallelogramma  $MCEL$  e il quadrato  $AHKC$  sono uguali, pertanto, poiché "se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali", il quadrato  $ABCD$  è uguale alla somma dei quadrati  $ABFG$  e  $AHKC$ .  $\square$

La dimostrazione di Euclide è una dimostrazione "fatta per content", infatti usa (I.41), che discende da (I.35), nella quale si prova che parallelogrammi con la stessa base e posti tra le stesse parallele hanno lo stesso content.

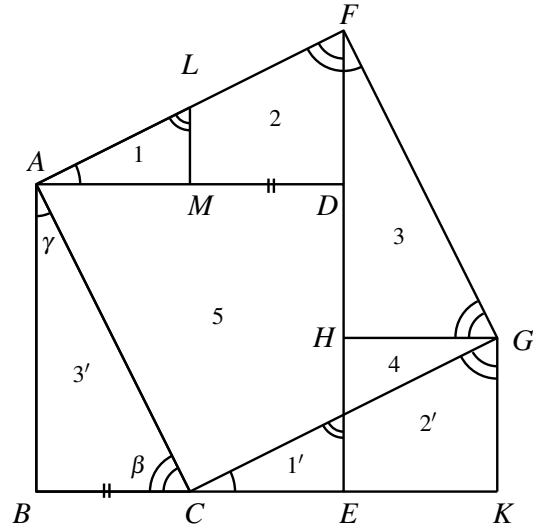
Perché (I.47) valga anche per dissezione dobbiamo assumere, se seguiamo Euclide, che sia valido (A) (si veda [3], pag.217).

In ogni caso, esistono molte prove dirette di (I.47), condotte attraverso dissezione e che non necessitano (A). Ne proponiamo una molto concisa ed

elegante, attribuita a Thabit b. Qyrra (826-901 d.C.); supporremo di essere in un piano di Hilbert con (P).

*Dimostrazione di Qyrra.* Sia  $ABC$  il triangolo rettangolo di partenza. Sia  $ABED$  il quadrato su  $AB$  e  $ACGF$  il quadrato su  $AC$ .

Sia  $K$  il punto di intersezione tra il prolungamento di  $BE$  e la parallela a  $DE$  condotta per  $G$ . Si costruisca dunque il quadrato  $EKGH$  di lato  $EK$ . Sia  $M$  su  $AD$  il punto t.c.  $MD \cong BC$  e si tracci la parallela per  $M$  a  $DE$ , che taglierà  $AF$  in  $L$ . Allora i tre triangoli  $ADF$ ,  $FHG$ ,  $CKG$ , che sono tutti rettangoli per costruzione, sono congruenti ad  $ABC$ .



Infatti,

$$AF \cong FG \cong CG \cong AC \quad (\text{per costr.}) \quad (*)$$

Per comodità, poniamo  $\gamma = \widehat{BAC}$  e  $\beta = \widehat{BCA}$ ; si ha  $\gamma + \beta =$  un angolo retto.

Quindi:

$$\gamma = \widehat{BAC} \cong \widehat{DAF}$$

perché entrambi sono dati da un angolo retto  $-\widehat{CAD}$ , da cui  $\widehat{DFA} \cong \beta \Rightarrow \widehat{GFH}$  è dato dall'angolo retto  $\widehat{GFA} - \beta$ , dunque  $\widehat{GFH} \cong \gamma$  e  $\widehat{FGH} \cong \widehat{CGK}$ , perché entrambi differenza di un angolo retto con  $\widehat{HGC} \Rightarrow \widehat{GCK} \cong \gamma$ .

Quindi, per il criterio (ARLA), i triangoli  $ABC$ ,  $ADF$ ,  $FHG$  e  $CKG$  sono tutti congruenti tra loro.

A questo punto, il quadrato  $ACGF$  costruito sull'ipotenusa  $AC$  è scomposto in cinque pezzi come in figura: 1, 2, 3, 4, 5. Poiché  $AM \cong CE$ , e quindi  $EK \cong MD \cong BC$ ,  $1 \cong 1'$  e  $2 \cong 2'$ .  $3 \cong 3'$  per quanto visto. Il quadrato su  $AB$  è scomposto in  $1'$ ,  $3'$ , 5, mentre il quadrato su  $BC$  è scomposto in  $2'$  e 4 e la proposizione è dimostrata.  $\square$

*Osservazione 7.* Si noti che una dimostrazione per dissezione necessita di:

1. un diagramma che mostri i pezzi della scomposizione e come essi si corrispondono;
2. una descrizione precisa di come sia stata condotta la scomposizione e in che ordine sia stato disegnato il diagramma;
3. una dimostrazione, basata su 2, che mostri come i pezzi corrispondenti sono congruenti.

Potrebbero esserci più modi per scomporre una figura ed è bene valutare quale porti alla dimostrazione più facile ed elegante.



# Capitolo 7

## Teoria euclidea del Volume

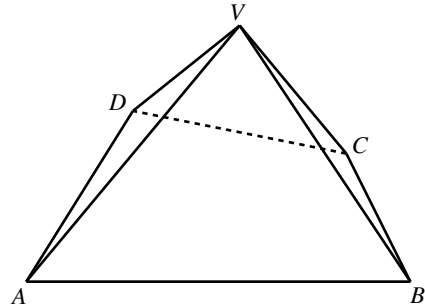
Se di area tratta già dal Libro I, Euclide affronta la geometria tridimensionale solo a partire dall'undicesimo e, in (XI.28), si occupa per la prima volta del volume di figure solide. Come per il concetto di "area" non dà una definizione di "volume", né precisa che stiamo lavorando con una nuova nozione di uguaglianza, diversa dalla congruenza. Dalle dimostrazioni che propone si capisce che per "figure solide uguali" intende "figure solide con lo stesso volume".

In questo capitolo daremo alcuni cenni sulla teoria del volume di Euclide, sorvolando sulle definizioni generali di figura solida, di interno di una figura solida ecc., e supponendo di star lavorando su un campo  $F$  e con una assegnata *funzione di volume*  $v$  tale che: ad ogni figura solida  $P$ , associ un elemento non negativo  $v(P) \in F$  (che chiameremo **volume** di  $P$ ); che se  $P$  e  $Q$  sono due figure solide congruenti  $\Rightarrow v(P) = v(Q)$  e, infine, che se  $P$  e  $Q$  sono due figure solide con interni che non si sovrappongono, allora  $v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$ .

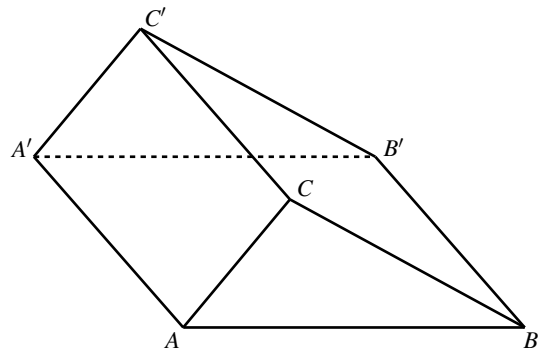
La nostra attenzione si concentrerà su come Euclide, in alcuni casi, dimostra l'"uguaglianza" tra due figure solide, che noi interpreteremo come "avere lo stesso volume".

Definiamo ora alcune figure, che ci torneranno utili:

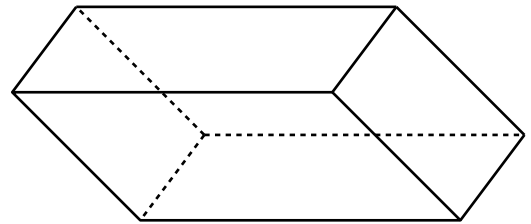
**Definizione 7.1.** Una **piramide** è una figura solida formata prendendo una figura piana, sia essa  $ABCD$ , e unendo i suoi vertici ad un punto  $V$  che si trovi fuori dal piano individuato da  $ABCD$ . Se la base è un triangolo, parliamo di piramide triangolare; se è un quadrato, di piramide quadrata ecc.



**Definizione 7.2.** Un **prisma** è una figura solida formata prendendo due figure congruenti (dette *basi*), su due piani paralleli e con i lati paralleli, e unendo i vertici corrispondenti. Le sue facce consistono nelle due figure iniziali, più i parallelogrammi ottenuti congiungendo i vertici. Quello mostrato in figura è un esempio di prisma triangolare.



**Definizione 7.3.** Un **parallelepipedo** è un prisma le cui basi sono dei parallelogrammi. È formato da tre coppie di parallelogrammi su piani paralleli.



I primi risultati di Euclide sul volume vengono dimostrati con metodi analoghi a quelli usati nel Libro I per l'area, almeno per quanto riguarda prismi e parallelogrammi. Quando si arriva allo studio del volume di piramidi nel Libro XII, la situazione cambia.

Il risultato chiave è la quinta proposizione del Libro XII:

**Proposizione 7.0.1 (XII.5).** *Piramidi che abbiano tra loro altezze uguali e basi triangolari stanno fra loro come le basi.*

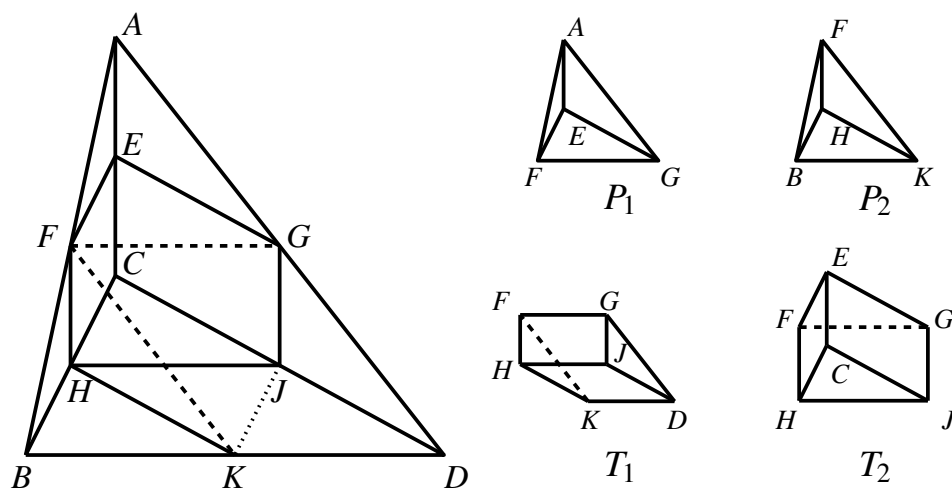
Nella dimostrazione ([2], pag. 945) Euclide si discosta dal tipo di dimostrazioni (per uguaglianze di aree e volumi) condotte fino a questa. Usa, infatti, il *metodo di esaustione* attribuito a Eudosso, matematico greco vissuto nel IV secolo a.C.

Noi studiamo un caso particolare ([3], prop 26.1, pag. 228):

**Proposizione 7.0.2.** *Piramidi triangolari che abbiano tra loro basi uguali (nel senso di content) e altezze uguali hanno lo stesso volume.*

*Dimostrazione.* Siano  $P$  e  $P'$  le piramidi triangolari date, e sia  $P = ABDC$ . Siano:  $E$  punto medio di  $AC$ ,  $F$  punto medio di  $AB$ ,  $G$  punto medio di  $AD$ ,  $H$  punto medio di  $BC$ ,  $J$  punto medio di  $CD$  e  $K$  punto medio di  $BD$ .

Possiamo individuare quattro "pezzi" in cui viene scomposta la piramide  $P$ : la piramide  $P_1 = FGAE$ , la piramide  $P_2 = BKFH$ , il prisma  $T_1 = KDJHFG$  ed il prisma  $T_2 = HJGFEC$ .



Per costruzione, le piramidi  $P_1$  e  $P_2$  sono tra loro congruenti e hanno i lati uguali alla metà dei lati di  $P$ . La faccia di  $T_1$  con il parallelogramma  $HJDK$  è il doppio del triangolo  $CHJ$ : se tracciamo il segmento  $JK$ , per



(I.34) (enunciato in 6.0.5),  $JKD \cong HJK$ . Ma  $HJK \cong CHJ$  per (LLL):

$$\begin{array}{l}
 HJ \text{ comune} \\
 \left. \begin{array}{l}
 CJ \cong JD \text{ (} J \text{ punto medio } CD \text{)} \\
 JD \cong HK \text{ (} HJDK \text{ parallelogramma)}
 \end{array} \right\} \Rightarrow CJ \cong HK \\
 \left. \begin{array}{l}
 CH \cong HB \text{ (} H \text{ punto medio } CB \text{)} \\
 HB \cong JK \text{ (} BKJH \text{ parallelogramma)}
 \end{array} \right\} \Rightarrow CH \cong JK
 \end{array} \quad (\blacksquare)$$

Quindi, per (XI.39),  $T_1$  e  $T_2$  hanno lo stesso volume. Inoltre,  $T_2$  e  $P_1$  hanno la stessa base  $EFG$  e la stessa altezza ( $E$  punto medio  $AC$ ): poiché il primo è un prisma e il secondo è una piramide, in termini di volume,  $T_2$  è maggiore di  $P_1$  (la piramide  $HJEC$  è congruente a  $P_1$  ed è contenuta in  $T_2$ ). Possiamo concludere che il volume di  $T_1 + T_2$  è più della metà del volume di  $P$ .

Dalle (■) si ha che la base triangolare di  $P$  è divisa da  $HJ$ ,  $HK$  e  $JK$  in quattro triangoli congruenti, e quindi la base  $HJDK$  di  $T_1$  è la metà della base  $ABC$  di  $P$ .

Supponiamo ora di dividere la seconda piramide  $P'$  allo stesso modo in due piramidi  $P'_1$  e  $P'_2$  e due prismi  $T'_1$  e  $T'_2$ . Poiché i triangoli che fanno da base a  $P$  e  $P'$  hanno lo stesso content per ipotesi, parallelepipedi aventi le stesse basi di  $T_1$  e  $T'_1$  e con le stesse altezze avranno lo stesso volume (XI.39). Pertanto, le loro metà  $T_1$  e  $T'_1$  avranno lo stesso volume. Dunque  $T_1 + T_2$  e  $T'_1 + T'_2$  hanno lo stesso volume, maggiore della metà del volume di  $P$  e  $P'$  rispettivamente. Inoltre, ciò che rimane, cioè  $P_1 + P_2$  e  $P'_1 + P'_2$ , è unione di piramidi aventi altezze uguali e basi con lo stesso content.

Induttivamente possiamo ripetere questo procedimento scrivendo ciascuna tra  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P'_1$  e  $P'_2$  come unione di quattro pezzi: due piramidi e due prismi e proseguire sempre in questo modo.

Ad ogni passo si decompone quindi sia in  $P$  che in  $P'$  un certo numero di piramidi, ciascuna come unione di piramidi e di sottfigure  $T_j$ , che hanno volume più grande della metà del volume della piramide, in modo che figure

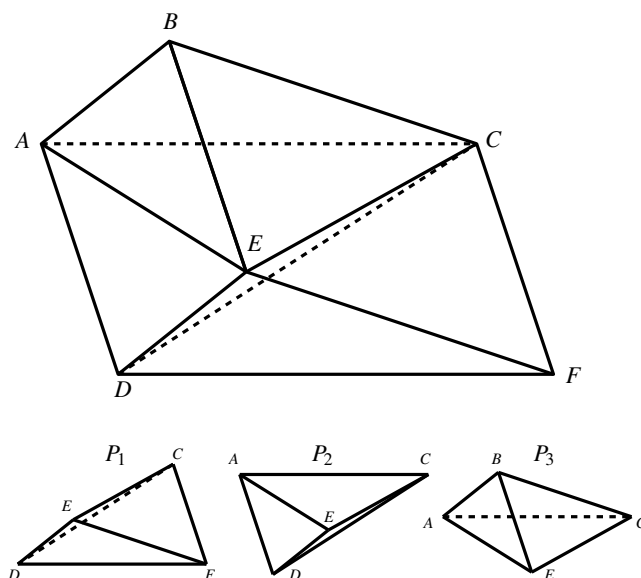
$T_j$  corrispondenti in  $P$  e in  $P'$  abbiano lo stesso volume. Man mano che si va avanti, il volume delle piramidi residue è sempre più piccolo, e la somma di tutte le sottofigure  $T_j$  e  $T'_j$  tende rispettivamente alle piramidi  $P$  e  $P'$ . Di conseguenza, al limite, troviamo che  $P$  e  $P'$  hanno lo stesso volume.  $\square$

Vediamo ora la dimostrazione di (XII.7), che vede l'applicazione di 7.0.2:

**Proposizione 7.0.3** (XII.7). *Ogni prisma che abbia base triangolare si divide in tre piramidi uguali tra loro, aventi basi triangolari.*

*Dimostrazione.* Sia  $T := ABCFDE$  un prisma triangolare. Possiamo pensare a  $T$  come all'unione di tre piramidi:  $P_1 = CDFE$ ,  $P_2 = ACDE$ ,  $P_3 = ACEB$ .

Si pensi a  $P_1$  e  $P_2$  come a piramidi di vertice  $E$  e basi i triangoli  $CDF$  e  $ACD$ . Questi due triangoli sono metà del parallelogramma  $ACFD$ , dunque, per (I.34), hanno la stessa area (o content). Quindi, per 7.0.2,  $P_1$  e  $P_2$  hanno lo stesso volume. Le due piramidi  $P_2$  e  $P_3$  possono essere viste come piramidi di vertice  $C$  e basi  $ADE$  e  $ABE$ .



Come sopra, questi triangoli sono metà del parallelogramma  $ABED$  e, pertanto, hanno lo stesso content (I.34). Le due piramidi hanno anche la

stessa altezza, quindi, sempre per 7.0.2,  $P_2$  e  $P_3$  hanno lo stesso volume. Per transitività anche  $P_1$  e  $P_3$  hanno lo stesso volume. Dunque  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  hanno tutte lo stesso volume, uguale a un terzo del volume del prisma.  $\square$

A questo punto si potrebbero distinguere due diverse teorie del volume: entrambe rigorose, ma una puramente geometrica e l'altra no.

Per la prima abbiamo bisogno dei processi al limite, come il metodo di esaustione spiegato in precedenza. Rispetto a quanto visto per l'area, questo complica notevolmente le questioni. Nella seconda presupponiamo l'esistenza di una funzione di volume e lavoriamo su un campo archimedeo: otteniamo dimostrazioni perfettamente funzionanti, ma non puramente geometriche.

Una domanda che potrebbe sorgere spontanea è: il metodo di esaustione è veramente necessario per ottenere una teoria puramente geometrica? In particolare, lo è per dimostrare (XII.5)? Oppure, è possibile usare, ad esempio, la tecnica della dissezione come per le aree?

Hilbert si pone tale quesito e l'8 agosto del 1900 lo presenta a Parigi, nella sua conferenza al Congresso Internazionale dei Matematici. Lo mette al terzo posto di una lista con quelli che riteneva essere i 23 problemi matematici irrisolti più importanti del XX secolo. Il quesito è:

*Esibire due tetraedri <sup>1</sup> di uguale base ed uguale altezza che non possano in alcun modo essere decomposti in tetraedri congruenti, e che non possano essere combinati con tetraedri congruenti per formare due poliedri che possano, a loro volta, essere decomposti in tetraedri congruenti.*

Riformulandolo in termini di *dissezione* sarebbe:

*Trovare due figure solide dello stesso volume che non siano equivalenti per dissezione, eventualmente anche dopo aver aggiunto altre figure che sono equivalenti per dissezione.*

---

<sup>1</sup>Piramide a base triangolare; il tetraedro regolare è costituito da quattro facce (che sono triangoli equilateri uguali), sei spigoli e quattro vertici.

In particolare, se si fosse riusciti a dimostrare che ciò è impossibile, il metodo di esaurimento sarebbe stato veramente necessario nella dimostrazione di (XII.5).

Ed è quello che fece nel 1901 Max Dehn, matematico tedesco e allievo di Hilbert, che mostrò in particolare che non è possibile sezionare un tetraedro regolare in un numero finito di pezzi che possano essere riassemblati in un cubo.



# Bibliografia

- [1] Boyer C. B., *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1980.
- [2] Frajese A., Maccioni M., *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino, 1970.
- [3] Hartshorne R., *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [4] Hilbert D., *Fondamenti della Geometria con i supplementi di Paul Bernays*, Feltrinelli, Milano, 1970.