Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

LE 27 RETTE SU UNA SUPERFICIE CUBICA NON SINGOLARE

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MONICA IDÀ

Presentata da:
GUIDO FIORILLO

♯ Quarta Sessione
2017/2018

Indice

Introduzione

In questa tesi dimostreremo che su una superficie cubica non singolare di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ esistono esattemente 27 rette distinte. Questo risultato fu ottenuto nel 1849 da A. Cayley e P. Salmon: il primo dimostrò che le rette dovevano essere in numero finito e il secondo stabilì che erano proprio 27. In questo lavoro ne proporremo una prima dimostrazione nel capitolo 2, seguendo un metodo, presentato nel libro di M. Reed *Undergraduate algebraic geometry*, che è molto simile a quello proposto inizialmente da Cayley nell'articolo del 1849 *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*. Il punto più difficile (ignorato da Cayley) è provare che sulla superficie c'è *almeno* una retta.

Nel capitolo 3 mostriamo, facendo uso di quanto si è detto sulla configurazione delle rette, che la cubica non singolare è una *varietà determinantale*, in quanto può essere individuata eguagliando a zero il determinante di una opportuna matrice 3x3 di forme omogenee.

Nel capitolo 4, partendo dalla rappresentazione determinantale della superficie, proviamo che essa può essere parametrizzata tramite un'applicazione genericamente biunivoca definita sul piano proiettivo e mostriamo che la parametrizzazione ha l'effetto di "scoppiare" 6 punti del piano proiettivo trasformandoli in rette.

Utilizzando questa rappresentazione piana per la superficie cubica, ritroviamo le 27 rette, descritte questa volta tramite lo scoppiamento dei sei punti, le trasformate delle rette passanti per due dei punti eccezionali e le trasformate delle coniche passanti per 5 dei punti eccezionali. Questa descrizione consente di indagare facilmente le relazioni d'incidenza fra le rette, e di individuarne, quindi, particolari configurazioni, dette bissesstuple, originariamente scoperte da Schäfli.

Capitolo 1

Risultati preliminari

1.1 Polinomi omogenei

Nel seguito indicheremo con $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d$ il $\mathbb{C}-$spazio vettoriale dei polinomi omogenei nelle variabili $x_0, ..., x_n$. Sia$f \in \mathbb{C}[x_0, ...x_n]_d$. Ricordiamo che vale la formula di Eulero:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = df \tag{1.1}$$

Inoltre, se A e B sono punti di $\mathbb{C}^{n+1}$, $A = (a_0, ..., a_n)$ e $B = (b_0, ...b_n)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, usando la formula di Taylor possiamo scrivere:

$$f(\lambda A + \mu B) = \lambda^d f(A) + \lambda^{d-1} \mu \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) b_i +$$
$$\frac{1}{2} \lambda^{d-2} \mu^2 \sum_{i_1, i_2=0}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(A) b_{i_1} b_{i_2} + ... + \frac{1}{d!} \mu^d \sum_{i_1, ..., i_d=0}^{n} \frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_d}}(A) b_{i_1} ... b_{i_d} \tag{1.2}$$

Ora introduciamo la definizione di forma polare di un polinomio.

Definizione 1.1.1. Dato $k \leq d$, a un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d$ possiamo associare un polinomio $f_k \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n, x'_0, ...x'_n]$,

$$f_k(x_0, ...x_n, x'_0, ...x'_n) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, ..., i_k=0}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x_0, ..., x_n) x'_{i_1} ... x'_{i_k} \tag{1.3}$$

In particolare, f_1 è detta la **forma polare** di f. Poniamo per convenzione $f_0(x_0, ..., x_n, x'_0, ..., x'_n) = f(x_0, ..., x_n)$.

In questa notazione, lo sviluppo di Taylor si scrive:

$$f(\lambda A+\mu B) = \lambda^d f_0(A,B)+\lambda^{d-1}\mu f_1(A,B)+... \tag{1.4}$$
$$... + \lambda\mu^{d-1} f_{d-1}(A,B)+\mu^d f_d(A,B) \tag{1.5}$$

Lemma 1.1.2. *Se* $f \in \mathbb{C}[x_0,...x_n]_d$*,* $k \leq d$*, abbiamo che*

$$\frac{1}{k!}\sum_{i_1,...,i_k=0}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}}(A)b_{i_1}...b_{i_k} = \frac{1}{(d-k)!}\sum_{i_1,...,i_{d-k}=0}^{n}\frac{\partial^{d-k} f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_{d-k}}}(B)a_{i_1}...a_{i_{d-k}}, \tag{1.6}$$

cioè $f_k(A,B) = f_{d-k}(B,A)$*.*

Dimostrazione. Applicando la formula di Eulero ottengo che

$$\begin{aligned}&\sum_{i_2,...,i_d=0}^{n}(\sum_{i_1=0}^{n}\frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_d}}(A)a_{i_1})...a_{i_{d-k}}b_{i_{d-k+1}}...b_{i_d} = \\ &\sum_{i_2,...,i_d=0}^{n}\frac{\partial^{d-1} f}{\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}(A)a_{i_2}...a_{i_{d-k}}b_{i_{d-k+1}}...b_{i_d}\end{aligned} \tag{1.7}$$

e, iterando $d-k$ volte ottengo che:

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1,...,i_d=0}^{n}\frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_d}}(A)a_{i_1}...a_{i_{d-k}}b_{i_{d-k+1}}...b_{i_d} = \\ &(d-k)!\sum_{i_{d-k+1},...,i_d=0}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{d-k+1}}...\partial x_{i_d}}(A)b_{i_{d-k+1}}...b_{i_d}\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ugualmente, con k applicazioni della formula di Eulero,

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1,...,i_d=0}^{n}\frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_d}}(B)a_{i_1}...a_{i_{d-k}}b_{i_{d-k+1}}...b_{i_d} = \\ &k!\sum_{i_1,...,i_{d-k}=0}^{n}\frac{\partial^{d-k} f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_{d-k}}}(B)a_{i_1}...a_{i_{d-k}}\end{aligned} \tag{1.9}$$

Ma le derivate d-esime di un polinomio di grado d sono costanti, per cui

$$\frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_d}}(A) = \frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_d}}(B) \tag{1.10}$$

da cui si vede che

$$
\begin{aligned}
&(d-k)! \sum_{i_{d-k+1},\ldots,i_d=0}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{d-k+1}} \ldots \partial x_{i_d}}(A) b_{i_{d-k+1}} \ldots b_{i_d} \\
&= k! \sum_{i_1,\ldots,i_{d-k}=0}^{n} \frac{\partial^{d-k} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{d-k}}}(B) a_{i_1} \ldots a_{i_{d-k}}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Rinominando gli indici si ottiene le tesi. □

Proposizione 1.1.3. *Se A e B sono punti di $\mathbb{C}^n$, $A = (a_0, ..., a_n)$ e $B = (b_0, ...b_n)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}[x_0, ...x_n]_d$,*

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda A + \mu B) = \\
&\lambda^d f(A) + \lambda^{d-1} \mu f_1(A, B) + \lambda^{d-2} \mu^2 f_2(A, B) + ... \\
&... + \lambda^2 \mu^{d-2} f_2(B, A) + \lambda \mu^{d-1} f_1(B, A) + \mu^d f(B)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Dimostrazione. Dalla formula 1.5, applicando il fatto che $f_{d-k}(A, B) = f_k(B, A)$. □

Vediamo alcuni casi particolari che ci serviranno in seguito.

Corollario 1.1.4. *Se $g \in \mathbb{C}[x_0, ...x_n]$ è una forma quadratica su $\mathbb{C}^{n+1}$, $A, B, C \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, allora:*

$$
g(\lambda A + \mu B) = \lambda^2 g(A) + \lambda\mu g_1(A, B) + \mu^2 g(B). \tag{1.13}
$$

Inoltre g_1 è bilineare e simmetrica, nel senso che

$$
\begin{aligned}
&g_1(\lambda A + \mu B, C) = \lambda g_1(A, C) + \mu g_1(B, C) \\
&g_1(A, \lambda B + \mu C) = \lambda g_1(A, B) + \mu g_1(A, C) \\
&g_1(A, B) = g_1(B, A)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. La formula 1.13 segue dal teorema precedente. La g_1 è simmetrica per 1.1.2. La linearità nel secondo argomento segue dal fatto che, per definizione, $g_1(A, B) = \langle \nabla g(A), B \rangle$, dove $\langle , \rangle$ indica il prodotto scalare. Poiché la forma è simmetrica, ciò basta per dire che è bilineare. □

Corollario 1.1.5. *Se $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_3$,*

$$
f(\lambda A + \mu B) = \lambda^3 f(A) + \lambda\mu f_1(A, B) + \lambda\mu^2 f_1(B, A) + \mu^3 f(B) \tag{1.14}
$$

1.2 Risultanti

In questa sezione richiamiamo senza dimostrazioni alcuni teoremi contenuti in Sernesi, Geometria1, Appendice A; $\mathbb{D}$ sarà per noi un qualunque dominio d'integrità. Dati due polinomi $f, g \in \mathbb{D}[x_0, ...x_n]$,

$$\begin{aligned} f &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \qquad a_n \neq 0 \\ g &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0 \qquad b_m \neq 0 \end{aligned}$$

siamo interessati a capire se abbiano un fattore non costante in comune. Nel caso che $\mathbb{D}$ sia un campo algebricamente chiuso (ad esempio, $\mathbb{C}$), questo equivale al fatto che abbiano una radice comune.

Teorema 1.2.1. *I polinomi f e g hanno un fattore non costante in comune se e solo se si annulla il determinante della matrice seguente:*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & ... & a_n & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & ... & a_n & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & a_0 & a_1 & ... & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & ... & b_m & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & ... & b_m & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & b_0 & b_1 & ... & b_{m-1} & b_m \end{pmatrix} \in M_{n+m}(\mathbb{D}) \qquad (1.15)$$

Definizione 1.2.2. Il determinante precedente si dice il risultante dei polinomi f, g rispetto a x e si indica con $Res_x(f, g)$.

Sia f un polinomio omogeneo in due variabili a coefficienti complessi; in tal caso, se (a_0, a_1) è soluzione di $f(x_0, x_1) = 0$, anche $(\rho a_1, \rho a_2)$, $\quad \rho \in \mathbb{C}$ ne è una soluzione, per cui ha senso definire radice di f un punto $[y_0, y_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che $f(y_0, y_1) = 0$. E' noto che allora f ha $degf$ radici contate con molteplicità (si veda in merito Sernesi, Geometria 1, A.16).

Corollario 1.2.3. *Siano* $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_n$*,* $g \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_m$*,* $f, g \neq 0$*,*

$$\begin{aligned} f &= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1}x_1 + ... + a_0 x_1^n \\ g &= b_m x_0^m + b_{m-1}x_0^{m-1}x_1 + ... + b_0 x_1^m \end{aligned}$$

Allora f e g hanno una radice comune se e solo se si annulla il determinante della matrice seguente:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & ... & a_n & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & ... & a_n & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & a_0 & a_1 & ... & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & ... & b_m & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & ... & b_m & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & b_0 & b_1 & ... & b_{m-1} & b_m \end{pmatrix} \in M_{n+m}(\mathbb{C}) \tag{1.16}$$

Dimostrazione. Indicheremo con $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathbb{C}[X]$ i deomogeneizzati di f e g rispetto a x_1, in cui $X = \frac{x_0}{x_1}$. Osserviamo che il determinante di 1.16 è $Res_X(\tilde{f}, \tilde{g})$. Dunque, se $Res_X(\tilde{f}, \tilde{g})$ si annulla e $a_n, b_m \neq 0$, per il teorema precedente $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ avranno una radice comune y. In tal caso $[y, 1]$ è una radice comune di f, g. Se $a_n = b_m = 0$, $[1, 0]$ è radice comune a entrambi polinomi. Viceversa, se $[y_0, y_1]$ è radice di f e di g, distinguiamo due casi. Se $y_1 \neq 0$, $\frac{y_0}{y_1}$ è radice comune di $\tilde{f}, \tilde{g}$, per cui $Res_X(\tilde{f}, \tilde{g}) = 0$ Se $y_1 = 0$, $a_n, b_m = 0$ e il determinante si annulla perché la matrice 1.16 ha una colonna di zeri. □

Inoltre, grazie ai risultanti si ottiene il teorema seguente:

Teorema 1.2.4. *Siano X, Y ipersuperfici di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. La loro intersezione non è mai vuota.*

Dimostrazione. Siano $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d, g \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_e$ omogenei tali che $f(x_0, ..., x_n) = 0$, $g(x_0, ..., x_n) = 0$ diano equazioni per X, Y. A meno di proiettività, possiamo supporre che $[0, ...0, 1] \notin X, Y$. Chiamando D l'anello $\mathbb{C}[x_0, ..., x_{n-1}]$, abbiamo che $f, g \in D[x_n]$. Il risultante $Res_{x_n}(f, g)$ è, come provato in Sernesi, Geometria 1, Appendice A, pag. 480, un polinomio omogeneo di grado de, oppure è nullo. Se è nullo, sia $h \in D[x_n]$ un fattore comune non costante (cioè $h \in D[x_n] - D$) comune a f e g. $h = a_k(x_0, ...x_{n-1})x_n^k + ... + a_0$ con $a_k \neq 0, k > 0$. Se prendiamo $y_0, ...y_{n-1}$ tali che $a_k(y_0, ...y_{n-1}) \neq 0$, esisterà, poiché il campo complesso è algebricamente chiuso, un y_n tale che $h(y_0, ...y_n) = 0$. Allora $[y_0, ..y_n] \in X \cap Y$.
Supponiamo, ora, $r(x_0, ..., x_{n-1}) := Res_{x_n}(f, g) \neq 0$. Allora, come già visto per h, esistono $y_0, ..y_{n-1}$ per cui $Res_{x_n}(f, g)$ si annulla. Ma questo vuol dire che, posto $\tilde{f} = f(y_0, ...y_{n-1}, x_n)$ e $\tilde{g} = g(y_0, ...y_{n-1}, x_n)$, $Res_{x_n}(\tilde{f}, \tilde{g}) = r(y_0, ...y_n) = 0$. D'altra parte, $[0, ...0, 1] \notin X, Y$, per cui $f(y_0, ...y_{n-1}, x_n), g(y_0, ...y_{n-1}, x_n)$ sono polinomi di grado d ed e, rispettivamente, con coefficiente direttore non nullo. Perciò posso concludere da 1.2.1 che hanno una radice comune y_n. □

1.3 Superfici proiettive

Ricordiamo che una superficie S di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ di grado d è la classe di proporzionalità di un polinomio omogeneo $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_3]_d$. Il luogo dei punti le cui coordinate annullano f si dice, invece, supporto di S. Scriviamo $S\ :\ f(x_0, ..., x_3) = 0$

Proposizione/Definizione 1.3.1. *Sia $S\ :\ f(x_0, ..., x_3)$ una superfice proiettiva, $P \in S, P = [v]$. Sia r una retta passante per i punti P e Q=[w].La molteplicità di $\mu = 0$ come soluzione dell'equazione, omogenea in λ e μ, $f(\lambda v + \mu w) = 0$ non dipende dalla scelta del punto $Q \in r$. Essa si chiama* ***molteplicità d'intersezione di r e S in P*** *e si indica con $I(S, r, P)$. Nel caso che il polinomio $f(\lambda v + \mu w)$ svanisca, poniamo $I(S, r, P) = \infty$*

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella data in Sernesi per le curve algebriche, nella sezione 33. □

Definizione 1.3.2. Sia $P \in S$. Diciamo che P ha per S molteplicità m (e usiamo la notazione $m = m_P(S)$) se e solo se m è il minimo delle molteplicità di intersezione in P fra S e le rette passanti per il punto P. Se $m_P(S) = 1$, diciamo che P è un punto ordinario o non singolare per S; se $m = m_P(S) \geq 2$, diciamo che P è un punto singolare di molteplicità m per S. Una superficie si dice non singolare se tutti i suoi punti sono ordinari, singolare altrimenti.

Analoga definizione si dà per le curve piane.

Proposizione 1.3.3. *Il punto P è ordinario se e solo se non si annullano tutte le derivate parziali di f in P:*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(P) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(P)\right) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella della proposizone 34.3 di Sernesi. □

Definizione 1.3.4. Se $P = [y_0, ...y_3] \in S$, il sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ definito dall'equazione:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}(P) x_k = 0 \tag{1.17}$$

si chiama **spazio tangente a S in P** e si indica con $T_P(S)$.

Osservazione 1.3.5. Dalla proposizione 1.3.3 deriva che il punto P è ordinario per S se e solo se $T_P(S)$ è un piano. Inoltre, si vede facilmente dallo sviluppo secondo Taylor di f che $T_P(S)$ **è il luogo delle rette passanti per P che hanno ivi molteplicità d'intersezione con S almeno 2.**(Si veda Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, pag.101, dove, però, viene trattato il caso delle ipersuperfici affini.)

Osservazione 1.3.6. Si vede subito che se $T_P(S)$ è il piano tangente a S in P e la curva C è $S \cap T_P(S)$, quando la retta r passante per P giace in $T_P(S)$, vale $I(S, r, P) = I(C, r, P)$.

Proposizione 1.3.7. *Se $P \in S$ è ordinario e C è la curva segata su S dal piano $T_P(S)$, P è un punto di molteplicità almeno 2 per C.*

Dimostrazione. A causa dell'osservazione precedente, per ogni retta r di $T_P(S)$ passante per P vale $I(C, r, P) = I(S, r, P) \geq 2$. $\square$

Capitolo 2

Le 27 rette su una superficie cubica

In questo capitolo proveremo che su una superficie cubica non singolare $S \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ esistono ventisette rette distinte. La dimostrazione si articola in tre passaggi:

1. In primo luogo, usando la nozione di risultante di due polinomi, proveremo che su una superficie cubica non singolare esiste almeno una retta.

2. Successivamente, dimostreremo che per ogni retta sulla superficie passano 5 piani distinti, con la proprietà che ciascuno interseca la superficie in ulteriori due rette.

3. Infine, usando il punto 2, troveremo tutte le rette della superficie.

2.1 Esistenza di una retta

Sia S una **superficie cubica irriducibile e non singolare** di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$, $S\ :\ f(x_0, ..., x_3)$. Per semplificare i calcoli successivi, individuiamo ora un riferimento proiettivo in cui l'equazione di S ha una forma particolarmente semplice. In generale, se P è un punto di S, $C = T_P(S) \cap S$ è una cubica piana. Sappiamo già che questa cubica è sempre singolare in P con molteplicità 2 o 3 e vedremo ora che, per un'opportuna scelta di P, o tale singolarità è una cuspide, o la cubica è riducibile e contiene, dunque, una retta. Per indagare meglio la natura di P, introduciamo la quadrica $Q(f, P)$ di equazione

$$Q(f,P) \qquad \sum_{i,j=0}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) x_i x_j = 0. \tag{2.1}$$

Notiamo che, indicando con $X = (x_0, ..., x_3)$ il vettore delle coordinate, tale equazione si scrive in forma matriciale come $XH(f,P)^tX$, dove $H(f,P)$ è la matrice hessiana di f in P. Tale quadrica passa per il punto P; infatti, posto $P = [p_0, ..., p_3]$, applicando la formula di Eulero due volte si ottiene :

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)p_ip_j = 2\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)p_i = 6f(P) = 0.$$

Ora vediamo che S e $Q(f,P)$ hanno lo stesso spazio tangente in P. In particolare, P è un punto ordinario per $Q(f,P)$, poiché $dim\, T_{Q(f,P)}(P) = dim\, T_S(P) = 2$.

Proposizione 2.1.1. $T_P(Q(f,P)) = T_P(S)$

Dimostrazione. Ponendo $g(x_0, ..., x_3) = \sum_{i,j=0}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)x_ix_j$, trovo che $T_P(Q(f,P))$ ha equazioni:

$$\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial g}{\partial x_i}(P)x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)p_jx_i = 0$$

$$\text{(Per il teorema di Eulero)} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)x_i = 0,$$

ma quest'ultima è proprio l'equazione di $T_P(S)$. □

Se la quadrica è irriducibile, la sua intersezione con $T_P(S)$ sarà una coppia di rette (eventualmente coincidenti), mentre se si spezza in due piani distinti, conterrà tutto $T_P(S)$. Osserviamo che non può essere un piano doppio, perché ha almeno P come punto ordinario. Nel prossimo teorema vedremo che questo è legato alla natura del punto P per la cubica C intersezione di S e $T_P(S)$. Premettiamo un lemma:

Lemma 2.1.2. *Sia P un punto ordinario di una quadrica irriducibile X.*

$$T_P(X) \cap X \text{ è una retta doppia} \iff X \text{ è singolare.}$$

Dimostrazione. Supponiamo che X sia una quadrica irriducibile. A meno di un cambiamento di coordinate omogenee, possiamo assumere che $P = [0,0,0,1]$ e che $T_P(X)$ abbia equazione $x_0 = 0$. Allora X avrà equazione $g(x_0, x_1, x_2) + x_0x_3$, dove $g(x_1, x_2, x_3)$ è omogeneo di secondo grado. Se

$T_P(X) \cap X$ è una retta doppia, possiamo supporre che sia la retta $(x_0 = 0) \cap (x_1 = 0)$.Allora l'equazione di X sarà $x_1^2 + x_0x_3$, per cui si vede che si tratta di un cono di vertice $V = [0, 0, 1, 0]$.
Viceversa, per il teorema di classificazione proiettiva delle quadriche, se X è irriducibile e singolare, è un cono e, rispetto a un opportuno riferimento proiettivo, avrà vertice in $[0, 0, 0, 1]$. Possiamo ugualmente supporre che $P = [0, 0, 1, 0]$ e $T_P(S)$ sia $(x_0 = 0)$. Data la posizione del vertice, X avrà un'equazione in cui non compare x_3, cioè del tipo $g(x_0, x_1, x_2)$, con g polinomio omogeneo di grado 2. Imponendo che passi per P e abbia ivi piano tangente $(x_0 = 0)$, otteniamo un'equazione del tipo $x_2x_0 + g_1(x_0, x_1)$, con g_1 omogeneo di grado 2. Vedo allora che $X \cap T_P(X)$ sarà la retta doppia di equazione $(x_1^2 = 0)$ in $T_P(S)$. □

Teorema 2.1.3. *Nelle notazioni precedenti, se $Q(f, P)$ è irriducibile, $m_P(C) = 2$. In tal caso, le tangenti principali a C in P sono date dall'intersezione di $Q(f, P)$ con $T_P(S)$ e P è una cuspide se e solo se $Q(f, P)$ ha un punto singolare (cioè, essendo irriducibile, è un cono).*

Dimostrazione. Pongo $P = [v] = [p_0, ..., p_3] \in S$,$A = [w] = [q_0, ..., q_3]$, chiamo r_A la retta passante per P e Q. Ho che, facendo lo sviluppo secondo Taylor:

$$f(\lambda v + \mu w) = \lambda^2\mu\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)q_i + \frac{1}{2}\lambda\mu^2\sum_{i,j=0}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)q_iq_j + \frac{1}{6}\mu^3 \sum_{i,j,k=0}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(P)q_iq_jq_k. \tag{2.2}$$

Osservo che condizione necessaria e sufficiente affinché $I(S, r_A, P) = 3$ è che i primi due termini dello sviluppo si annullino, cioè che $A \in T_P(S) \cap Q(f, P)$. Ora vediamo che $m_C(P) = 3$ se e solo se per tutti i punti $A \in T_P(S)$ vale $I(C, r_A, P) = I(S, r_A, P) = 3$. Ciò significa che $T_P(S) \subseteq Q(f, P)$, per cui la quadrica sarà riducibile. Dunque, se $Q(f, P)$ è irriducibile, P è un punto doppio per C. Le tangenti principali a C in P saranno le due rette di $T_P(S)$, eventualmente coincidenti, che intersecano C in P con molteplicità almeno 3, ma queste, per quanto detto prima, sono proprio $T_P(S) \cap Q(f, P)$. Essendo C una cubica, P può essere solo una cuspide di prima specie o un nodo ordinario. Pertanto, P sarà una cuspide se e solo se $Q(f, P)$ interseca il proprio piano tangente (il quale coincide con $T_P(S)$) in una retta doppia. Nel lemma precedente abbiamo mostrato che questa condizione equivale alla singolarità della quadrica. □

Il nostro obiettivo è ora dimostrare che su S c'è almeno una retta.
Chiamiamo superficie hessiana di S la superficie $\Sigma : detH(x_0, ..., x_3) = 0$,

dove $H(x_0, ..., x_3)$ è l'hessiana di f. Le superfici S e Σ si incontrano almeno in un punto P. $Q(f, P)$ sarà allora una quadrica singolare, per cui P sarà per la curva C un punto triplo o una cuspide. Se è un punto triplo, C si spezza in tre rette, per cui abbiamo finito. Se P è un nodo e la curva C è riducibile, conterrà una retta, per cui abbiamo in ogni caso trovato una retta su S. Se infine, P è doppio e C è irriducibile, la curva è una cubica cuspidale. Allora rispetto a un opportuno riferimento proiettivo avrò $P = [0, 0, 1, 0]$, $T_P(S) \ : \ x_3 = 0$ e $C = \{[x_0, x_1, x_2, 0] \in T_P(S) | x_0^2 x_2 = x_1^3\}$. In queste coordinate, un'equazione di S sarà:

$$f = x_0^2 x_2 - x_1^3 + x_3 g(x_0, ...x_3) = 0, \tag{2.3}$$

dove g è un polinomio omogeneo di secondo grado. Inoltre, poiché P è un punto ordinario (e pertanto le derivate parziali di f non possono annullarsi tutte in P), $g(0, 0, 1, 0) \neq 0$, pertanto, possiamo prendere $g(0, 0, 1, 0) = 1$. Al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ il punto $P(\alpha) = (1, \alpha, \alpha^3, 0)$ appartiene a C. Notiamo che in realtà tutti i punti di C, tranne [0,0,1,0], sono nella forma $P(\alpha)$, in quanto C è una cubica razionale (in generale, ogni curva algebrica piana di grado n con un punto (n-1)-uplo è razionale) e $P(\alpha)$ è una parametrizzazione razionale della sua parte affine $x_0 \neq 0$. La parametrizzazione razionale di tutta C è data dall'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : &\mathbb{P}^1 \mapsto C \\ &[\alpha, \beta] \mapsto [\beta^3, \alpha\beta^2, \alpha^3, 0] \end{aligned}$$

Ogni retta passante per $P(\alpha)$ incontra il piano $\{x_0 = 0\}$ in un punto Q di coordinate $[0, q_1, q_2, q_3]$. Ora troveremo delle condizioni su α e Q affinché questa retta sia tutta contenuta in S.

Applicando il corollario 1.1.5, otteniamo che:

$$f(\lambda P(\alpha) + \mu Q) = \lambda^3 f(P(\alpha) + \lambda^2 \mu f_1(P(\alpha), Q) + \lambda\mu^2 f_1(Q, P(\alpha)) + \mu^3 f(Q) \tag{2.4}$$

e, dunque, l'equazione di S si può scrivere come:

$$\lambda^3 f(P(\alpha) + \lambda^2 \mu f_1(P(\alpha), Q) + \lambda\mu^2 f_1(Q, P(\alpha)) + \mu^3 f(Q) = 0 \tag{2.5}$$

Ma $P(\alpha)$ appartiene a S, per cui $\lambda^3 f(P(\alpha)) = 0$. Le condizioni affinché la retta $L(P(\alpha), Q)$ giaccia su S (vale a dire, perché l'equazione 2.5 sia un'identità) sono pertanto:

$$f_1(P(\alpha), Q) = f_1(Q, P(\alpha)) = f(Q) = 0 \tag{2.6}$$

Questi ragionamenti algebrici hanno un significato geometrico: confrontando la definizione di forma polare con quella di piano tangente, è chiaro che le condizioni precedenti equivalgono a chiedere che non solo la retta passi per P e Q, ma sia tangente alla superficie in entrambi questi punti, cioè la intersechi con molteplicità almeno 4. Poiché S ha grado 3, questo costringe la retta a giacere interamente su S. Poiché $f = x_0^2x_2 - x_1^3 + x_3g(x_0, ...x_3) = 0$, la forma polare di f sarà:

$$f_1(x_0, ..., x_3') = 2x_0x_2x_0' - 3x_1^2x_1' + x_0^2x_2' + g(x_0, ..., x_3)x_3' + x_3g_1(x_0, ..., x_3, x_0', ..., x_3'), \tag{2.7}$$

dove $g_1(x_0, ...x_3') \in \mathbb{C}[x_0, ...x_3']_1$ è la forma polare di g. Allora, sostituendo le coordinate di $P(\alpha)$ e di Q, le condizioni 2.6 diventano:

$$f_1(P(\alpha), Q) = 0, \quad \text{cioè} \quad -3\alpha^2q_1 + q_2 + g(1, \alpha, \alpha^3, 0)q_3 = 0 \tag{2.8}$$

$$f_1(Q, P(\alpha)) = 0, \quad \text{cioè} \quad -3q_1\alpha^2 + g_1(1, \alpha, \alpha^2, 0, 0, q_1, q_2, q_3)q_3 = 0 \tag{2.9}$$

$$f(Q) = 0, \quad \text{cioè} \quad -q_1^3 + q_3g(0, q_1, q_2, q_3) = 0 \tag{2.10}$$

I primi membri di queste equazioni si possono interpretare come polinomi nelle indeterminate q_1, q_2, q_3 a coefficienti nel dominio $\mathbb{C}[\alpha]$. Poiché $g(0, 0, 1, 0) = 1$, sappiamo che in g il termine x_2^2 ha coefficiente 1, per cui $g(1, \alpha, \alpha^3, 0)$ sarà un polinomio di sesto grado monico in α, che chiamiamo $l(\alpha)$. Da 2.8 troviamo:

$$q_2 = 3q_1\alpha^2 - l(\alpha)q_3. \tag{2.11}$$

Sostituendo in 2.9, usando la bilinearità di g_1 e scrivendo $(0, q_1, 3q_1\alpha^2 - l(\alpha)q_3, q_3)$ come $q_1(0, 1, 3\alpha^2, 0) + q_3(0, 0, -l(\alpha), 1)$:

$$-3q_1^2\alpha + g_1(1, \alpha, \alpha^2, 0, 0, q_1, q_2, q_3)q_3 = \tag{2.12}$$

$$-3q_1^2\alpha + g_1(1, \alpha, \alpha^2, 0, 0, q_1, 3q_1\alpha^2 - l(\alpha)q_3, q_3)q_3 = \tag{2.13}$$

$$b_0q_1^2 + b_1q_1q_3 + b_2q_3^2$$

dove abbiamo posto:

$$\begin{aligned} b_0 &= -3\alpha \\ b_1 &= g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0, 0, 1, 3\alpha^2, 0) = 6\alpha^5 + ... \\ b_2 &= g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0, 0, 0, -l(\alpha), 1) = -2\alpha^9 + ... \end{aligned}$$

Allo stesso modo, sostituendo in 2.10, otteniamo:

$$f(Q) = -q_1^3 + q_3g(0, q_1, 3q_1\alpha^2 - l(\alpha)q_3, q_3),$$

da cui, ricordando che g è una forma quadratica contenente il termine x_2^2:

$$f(Q) = c_0 q_1^3 + c_1 q_1^2 q_3 + c_2 q_1 q_3^2 + c_3 q_3^3, \tag{2.14}$$

con:

$$\begin{aligned} c_0 &= -1 && (2.15)\\ c_1 &= g(0, 1, 3\alpha^2, 0) = 9\alpha^4 + ... && (2.16)\\ c_2 &= g_1(0, 1, 3\alpha^2, 0, 0, 0, -l(\alpha), 1) = -6\alpha^8 + ... && (2.17)\\ c_3 &= g(0, 0, -l(\alpha), 1) = \alpha^{12}... && (2.18)\\ & && (2.19) \end{aligned}$$

Per il teorema 1.2.1, la 2.13 e la 2.14 hanno una radice comune $[\eta, \tau] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se e solo se, posto

$$D(\alpha) = \det = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

si ha $D(\alpha) = 0$ Il termine di grado massimo di $D(\alpha)$ si otterrà prendendo il termine di grado massimo di ciascun elemento della matrice, cioé:

$$\det \begin{vmatrix} -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & 0 & 0 \\ 0 & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 \\ -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^{12} & 0 \\ 0 & -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^{12} \end{vmatrix} = \alpha^{27} \det \begin{vmatrix} -3 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -2 \\ -1 & 9 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \alpha^{27}$$

Il risultante è perciò un polinomio di grado 27 in α e ammette pertanto almeno una radice. Dunque, esiste una scelta di α, q_1, q_2, q_3 per cui le 2.8,2.9,2.10 sono soddisfatte, il che significa che la retta per $P(\alpha)$ e Q giace in S. Abbiamo dunque visto che su S c'è almeno una retta.

2.2 I piani tritangenti

Nel seguito, S indica ancora una superficie cubica non singolare in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

Proposizione 2.2.1. *Un piano π interseca S in una cubica che può essere irriducibile, spezzarsi in una retta e in una conica non degenere o in tre rette distinte.*

Dimostrazione. $S \cap \pi$ è una curva di terzo grado. L'unica cosa che dobbiamo provare è che essa non può contenere una retta doppia $2r$.Per assurdo, supponiamo che la contenga. In coordinate opportune, π avrà equazione $\{x_3 = 0\}$ e r sarà $\{x_2 = x_3 = 0\}$. Allora S avrà equazione $x_2^2 A(x_0, ..., x_3) + x_3 B(x_0, ..., x_3)$ con A polinomio omogeneo di primo grado e B polinomio omogeneo di secondo grado. Ma allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = x_2^2 \frac{\partial A}{\partial x_0} + x_3 \frac{\partial B}{\partial x_0} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2^2 \frac{\partial A}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial B}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 A + x_2^2 \frac{\partial A}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial B}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2^2 \frac{\partial A}{\partial x_3} + B + x_3 \frac{\partial B}{\partial x_3}$$

Ma l'equazione $B(x_0, x_1, 0, 0) = 0$ avrà senz'altro soluzioni e in questi punti tutte le derivate prime si annulleranno, per cui S sarà singolare, contro le ipotesi. □

Proposizione 2.2.2. *Se l è una retta contenuta in S, allora $l \subseteq T_Q(S) \forall Q \in l$. Per ogni punto P di S passano al più tre rette che stanno sulla superficie; nel caso che ce ne sia più di una, sono tutte complanari.*

Dimostrazione. Se la retta passante per $P = [v]$ e $Q = [w]$ è contenuta nella superficie, allora il polinomio $f(\lambda v + \mu w) = 0$ svanisce, per cui $I(S, r, P) = \infty$ e, in particolare, $r \subseteq T_P(S)$. Da questo vediamo che le rette passanti per P sono contenute nell'intersezione di S col suo piano tangente in P, ma allora per la proposizione precedente non possono essercene più di 3. □

Data una retta $r \subseteq S$ siamo ora pronti a individuare i piani passanti per r che incontrano S in ulteriori due rette.

Definizione 2.2.3 (Piani tritangenti)**.** Un piano che sega su S tre rette è detto tritangente.

Osservazione 2.2.4. Nel caso generale, le tre rette che un piano tritangente sega sulla superficie sono a due a due incidenti in tre punti distinti e, dunque, il piano che le contiene è tangente a S in ciascuno di questi tre punti, per via di 2.2.2. Questo spiega la denominazione "piano tritangente". Nel caso che invece le tre rette appartengano al fascio passante per P, possiamo dire solo che il piano che le contiene è tangente a S in P, ma, per tutte le rette $r \subseteq T_P(S) \cap S$ passanti per P, vale $I(S, r, P) = 3$(vedi dimostrazione di 2.1.3).

Arriviamo ora alla proposizione fondamentale per studiare la disposizione e il numero di queste rette.

Proposizione 2.2.5. *Sia $r \subseteq S$ una retta. Allora per r passano cinque piani tritangenti distinti π_i. Ciascun π_i interseca S in tre rette, una delle quali sarà r, mentre chiameremo le restanti due a_i e b_i. Abbiamo allora che se $i \neq j$, $(a_i \cup b_i) \cap (a_j \cup b_j) = \emptyset$. In altre parole, se due rette diverse da r stanno su piani tritangenti diversi, sono sghembe.*

Dimostrazione. Se π sta nel fascio di centro r, $\pi \cap S$ è formato da r e da una conica. Nel caso che la conica singolare, troviamo un piano tritangente. Dobbiamo provare pertanto che ciò accade esattamente in 5 casi. In coordinate opportune, r avrà equazioni $\{x_2 = x_3 = 0\}$. Allora il fascio per r sarà $\lambda x_2 - \mu x_3 = 0, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Posso scrivere l'equazione di S nella forma seguente:

$$S \,:\, f = 0$$

con:

$$f = Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_2^2 + Dx_0 + Ex_1 + F \tag{2.21}$$

con $A, B, C \in \mathbb{C}[x_2, x_3]_1$, $D, E \in \mathbb{C}[x_2, x_3]_2$, $F \in \mathbb{C}[x_2, x_3]_3$. Scelto un piano π del fascio, relativo a λ, μ fissati, su di esso possiamo fissare coordinate omogenee $[\rho, \sigma, \tau]_\pi$ in modo che il punto di coordinate $[\rho, \sigma, \tau]_\pi$ sia $[\rho, \sigma, \mu\tau, \lambda\tau]$. Allora, sostituendo in 2.21, troviamo che nel riferimento definito su π, la cubica piana $S \cap \pi$ ha equazione $g = 0$, dove:

$$\begin{aligned} g =& A(\mu,\lambda)\rho^2\tau + B(\mu,\lambda)\rho\sigma\tau + C(\mu,\lambda)\sigma^2\tau + D(\mu,\lambda)\rho\tau^2 + E(\mu,\lambda)\tau^2 \\ &+ F(\mu,\lambda)\tau^3 = \\ &\tau(A(\mu,\lambda)\rho^2 + B(\mu,\lambda)\rho\sigma + C(\mu,\lambda)\sigma^2 + D(\mu,\lambda)\rho\tau + E(\mu,\lambda)\tau \\ &+ F(\mu,\lambda)\tau^2) \end{aligned}$$

Come ci aspettavamo, questa cubica è riducibile e contiene la retta $\tau = 0$, che è proprio r. Dobbiamo dunque vedere quando la conica residua, di equazione

$$A(\mu,\lambda)\rho^2 + B(\mu,\lambda)\rho\sigma + C(\mu,\lambda)\sigma^2 + D(\mu,\lambda)\rho\tau + E(\mu,\lambda)\tau + F(\mu,\lambda)\tau^2) = 0$$

è degenere. Ciò capita se e solo se si annulla il suo discriminante $\Delta(\lambda, \mu)$, dove :

$$\Delta(\mu,\lambda) = det \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(4ACF + BDE - AE^2 - B^2F - CD^2) \tag{2.22}$$

Si vede che Δ è un polinomio omogeneo in λ, μ di quinto grado, per cui ha 5 radici contate con molteplicità su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dobbiamo provare che non ha

radici doppie. Supponiamo per assurdo che ne abbia una. A meno di una proiettività di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, posso supporre che il piano π corrispondente a questa radice sia $\{x_2 = 0\}$, ovvero che la radice sia[1,0]. Dobbiamo mostrare che Δ non è divisibile per μ^2. Abbiamo due casi:
a) π sega su S tre rette r, a, b incidenti a due a due in punti distinti
b) π sega su S tre rette r, a, b di un fascio.
Trattiamo prima a). Prendendo coordinate appropriate, le rette avranno equazioni:

$$r : \{x_3 = x_2 = 0\} \quad a : \{x_0 = x_2 = 0\} \quad b : \{x_1 = x_2 = 0\} \tag{2.23}$$

S avrà allora equazione $x_0x_1x_3 + x_2h(x_0, ...x_3) = 0$. In riferimento alla scrittura 2.21, ciò significa che $x_2|A, C, D, E, F$ e inoltre $B = x_3 + ax_2$, con $a \in \mathbb{C}$. Allora, pensando la 2.22 come identità in x_2, x_3 anziché in λ, μ, si ha

$$\Delta(x_2, x_3) \equiv -B^2F \equiv -(x_3^2 + a^2x_2^2 + 2ax_2x_3)F \equiv -x_3^2F \quad (mod\, x_2^2)$$

D'altra parte, $a \cap b = P = [0, 0, 0, 1] \in S$. Abbiamo che:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_0} = 2Ax_0 + Bx_1 + D \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = Bx_0 + 2Cx_1 + E\\
&\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial A}{\partial x_2}x_0^2 + \frac{\partial B}{\partial x_2}x_0x_1 + \frac{\partial C}{\partial x_2}x_1^2 + \frac{\partial D}{\partial x_2}x_0 + \frac{\partial A}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial A}{\partial x_3}x_0^2 + \frac{\partial B}{\partial x_3}x_0x_1 + \frac{\partial C}{\partial x_3}x_1^2\frac{\partial D}{\partial x_2}x_0 + \frac{\partial E}{\partial x_3}x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

Le derivate rispetto a x_0, x_1 si annullano in P poiché $x_2|D, E$. Scrivendo $F = x_2\tilde{F}$, abbiamo che $\frac{\partial F}{\partial x_3} = x_2\,\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_3}$, per cui anche la derivata rispetto a x_3 si annulla. Visto che P non è singolare, la derivata rispetto a x_2 non può annullarsi. Ma $\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_2\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2} + \tilde{F}$, per cui $\tilde{F}$ deve contenere x_3^2, cioé F deve contenere $x_2x_3^2$. Ne segue che x_2^2 non divide F, per cui μ^2 non divide $\Delta(\lambda, \mu)$.
Passiamo ora a b) Prendendo coordinate opportune troviamo:

$$r : \{x_3 = x_2 = 0\} \quad a : \{x_0 = x_2 = 0\} \quad b : \{x_2 = x_0 + x_3 = 0\} \tag{2.24}$$

S avrà allora equazione $x_0(x_0 + x_3)x_3 + x_2g(x_0, ...x_3) = 0$. Rispetto alla forma 2.21, ciò significa che $x_2|B, C, E, F$ e inoltre $A = x_3 + ax_2$, con $a \in \mathbb{C}$ e $D = x_3^2 + lx_2$, con $l \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_3]_1$. Allora

$$\Delta(x_2, x_3) \equiv -CD^2 \equiv -(x_3^4 + l^2x_2^2 + 2lx_2x_3^2)C \equiv -x_3^4C \quad (mod\, x_2^2)$$

Abbiamo che $r \cap a \cap b = Q = [0, 1, 0, 0] \in S$. Guardando le derivate fatte in precedenza, si vede che le derivate rispetto a x_0, x_1 si annullano in Q, perché

A,B,C,D,E valgono zero. In Q, le derivate rispetto x_2, x_3 saranno uguali, rispettivamente, a $\frac{\partial C}{\partial x_2} + \frac{\partial E}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial C}{\partial x_3} + \frac{\partial E}{\partial x_3}$; $\frac{\partial E}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial E}{\partial x_3}$, essendo lineari in x_2, x_3, sono nulli in Q. C è lineare in x_2, x_3 e divisibile per x_2, dunque è nella forma cx_2, $c \in \mathbb{C}$. Ma allora $\frac{\partial C}{\partial x_3} = 0$ e dunque dev'essere $c = \frac{\partial C}{\partial x_2} \neq 0$. Ne segue che $\Delta \equiv -cx_2x_3^2 \pmod{x_2^2}$. Pertanto μ^2 non divide $\Delta(\lambda, \mu)$. □

Dunque, fino ad ora abbiamo trovato che una retta sulla superficie è incidente ad altre 10 rette che giacciono anch'esse sulla superficie. Rimane da mostrare che, se $s, t \neq r$ giacciono su piani tritangenti diversi, sono sghembe. Supponiamo che $s \cap t \neq \emptyset$. Se $s \cap r \neq t \cap r$, allora, chiamato $A = s \cap t$, s, r e t stanno tutte sul piano $L(r, A)$. Se, invece, $s \cap r = t \cap r$, s, r e t si incontrano tutte in un punto comune B. Per 2.2.2, le tre rette devono essere complanari.

2.3 Individuazione di tutte le rette

Definizione 2.3.1. Se $r_1, ...r_k, s$ sono rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, s di dice trasversale a $r_1, ..., r_k$ se è incidente a ciascuna di esse.

Lemma 2.3.2. *Quattro rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ a due a due sghembe hanno o una o due o infinite trasversali. Non sono possibili altri casi.*

Dimostrazione. Siano r_1, r_2, r_3, r_4 le quattro rette. Sicuramente esiste una quadrica Q contenente r_1, r_2, r_3. Infatti, posso prendere tre punti su ciascuna di queste tre rette in modo da ottenere in tutto nove punti distinti. Imponendo a una quadrica di passare per questi nove punti, si assegnano sui suoi dieci coefficienti al più nove condizioni lineari indipendenti, da cui segue che c'è almeno una quadrica, che, passando per i nove punti dati, ha tre punti in comune con ciascuna delle r_1, r_2, r_3, per cui le contiene.Inoltre, queste tre rette, essendo sghembe a due a due, appartengono alla stessa schiera di generatrici di Q. Ogni trasversale di r_1, r_2, r_3 ha in comune con Q tre punti, per cui è contenuta in Q. Viceversa, dato un punto della quadrica, per esso passa un'unica trasversale di r_1, r_2, r_3.Ora considero r_4: se è contenuta in Q, appartiene alla stessa schiera delle prime tre, per cui le quattro rette avranno le infinite generatrici dell'altra schiera come trasversali. Se r_4 sega su Q due punti distinti, per ciascuno di essi passa una trasversale di r_1, r_2, r_3. Queste due rette saranno le uniche trasversali di r_1, r_2, r_3, r_4. Non possono essercene altre perché tutte le trasversali di r_1, r_2, r_3 stanno su Q. Se, infine, r_4 è tangente a Q, per l'unico punto di contatto passerà una una sola trasverale a r_1, r_2, r_3 □

Per ora abbiamo provato che ogni retta della superficie incontra altre dieci rette che giacciono anch'esse sulla superficie e si distibuiscono a coppie su cinque piani tritangenti. Se prendo due rette che stanno su piani tritangenti distinti, esse sono sghembe. Siano dunque s, t due di queste rette sghembe fra loro. Siano $\pi_1, ...\pi_5$ i cinque piani tritangenti per s, a_i, b_i le rette incidenti s, denominate in modo tale che $a_i, b_i \subseteq \pi_i$. Ogni retta di S sghemba con s incontrà ciascuno dei π_i in un punto che appartiene alla superficie e che sta perciò o su a_i o su b_i. Osserviamo che tale punto non può essere l'intersezione di a_i e b_i, per 2.2.2. In particolare, ogni retta della superficie che non sta su uno dei π_i è incidente a a_1 o a b_1. Dunque, per trovare tutte le rette di S basta considerare i piani tritangenti passanti per a_1 e per b_1. Uno di essi(l'unico comune a a_1 e b_1) sarà π_1, mentre i restanti 8 (quattro per a_1 e quattro per b_1) conterranno $2 \cdot 8 = 16$ rette oltre a a_1 e b_1, tutte distinte perché se una retta fosse contenuta in un piano tritangente passante per sia per a_1, sia per b_1, essa dovendo incontrare a_1 e b_1 in due punti distinti, apparterrebbe al piano π_1 e sarebbe perciò r. In totale troviamo $1 + 10 + 8 + 8 = 27$ rette tutte distinte. Abbiamo percio ottenuto il risultato seguente.

Teorema 2.3.3. *Su ogni superficie cubica non singolare esistono ventisette rette distinte.*

Per comprenderne meglio la configurazione, dimostriamo ora che ciascuna delle rette sghembe con r è individuata in modo unico quando si sa quali delle a_i e delle b_i incontra. Scegliendo in modo opportuno i nomi, posso supporre che t intersechi tutte le a_i e nessuna delle b_i. Ora abbiamo bisogno di un risultato generale sulle rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Avremo il risultato seguente:

Proposizione 2.3.4. *Se n è una retta di S distinta da s,t,dalle a_i, dalle b_i e dalle c_i, allora incontra **esattamente tre** delle a_i. Viceversa, comunque presi tre elementi distinti i, j, k di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, esiste su S un'unica retta trasversale a a_i, a_j, a_k, che noi denoteremo con l_{ijk}.*

Dimostrazione. Per ogni i, come detto prima, n incontra esattamente una fra a_i e b_i. Osserviamo che c_i incontra a_i (con cui è complanare) e nessun'altra $a_j, j \neq i$ (poiché giace su un altro piano tritangente passante per t), per cui c_i incontra tutte le b_j con $j \neq i$. Inoltre, quattro rette della superficie hanno una o due trasversali: se, infatti,ne avessero infinite, ciascuna di esse, avendo quattro punti distinti in comune con S, le apparterrebbe, ma abbiamo visto che su S ci sono solo 27 rette. Supponiamo che n incontri almeno quattro delle a_i. Esse hanno come uniche trasversali s e t; ma, allora, n deve coincidere con s o con t. Se, invece, n incontrasse due o meno fra le a_i, allora sarebbe incidente ad almeno tre fra le b_i. Se intersecasse quattro delle b_i, sarebbe s

o una c_k (infatti, prese quattro fra le b_i, esse hanno come uniche trasversali s e una sola delle c_k); se n intersecasse tre fra leb_i e una fra le a_j, si vede similmente che dovrebbe essere una delle c_k o s. Viceversa, per 2.3.2, scelti tre indici distinti i, j, k, esiste su S al più una retta, oltre a r incidente a_i, a_j, a_k, perché in caso contrario, troveremmo su S quattro rette sghembe con almeno tre trasevrsali. Le possibili scelte di indici sono 10, ma so che oltre a s, t, $a_1, ...a_5$, $b_1, ...b_5$, $c_1, ...c_5$, su S ci sono altre 10 rette, per cui per ogni terna esiste una e una sola retta trasversale a a_i, a_j, a_k. $\square$

Capitolo 3

Equazione di Cayley-Salmon

In questo paragrafo, utilizzando i risultati del capitolo 2, e, in particolare, l'esistenza su S di 27 rette e la loro configurazione, vedremo che la cubica liscia è una varietà determinantale, in quanto la sua equazione può essere scritta nella forma $detA(x_0, ..., x_3) = 0$, dove $A(x_0, ..., x_3)$ è una matrice di forme lineari 3x3. Diamo in primo luogo la definizione seguente.

Definizione 3.0.1. Sia S una superficie cubica qualunque. Un triedro di Steiner è una terna $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ di piani tritangenti che si incontrano in un punto non appartenente alla superficie. Una coppia di triedri coniugati è una coppia di triedri di Steiner $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ e $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ tali che, per ogni i e j,$r_{ij} = \pi_i \cap \rho_j$ è una retta che giace sulla superficie. La coppia di triedri si indicherà con la tabella:

$$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}$$

Osserviamo che, su ogni superficie non singolare, esistono dei triedri coniugati. In particolare, prese due rette sghembe s ed t, e denominate le restanti 25 come nel capitolo precedente, vedo che

$$\begin{matrix} s & a_1 & b_1 \\ a_2 & t & c_2 \\ b_2 & c_1 & l_{345} \end{matrix}$$

è una coppia di triedri coniugati. E' chiaro che le prime due righe e le prime due colonne generano dei piani tritangenti. Per la terza riga, abbiamo, come sempre, che c_1 incontra s, a_2 o b_2. Ma c_1 non incontra s e neppure a_2, in quanto a_2 e c_1 sono su piani tritangenti distinti passanti per t; pertanto, c_1 e b_2 sono incidenti e generano un piano contente una terza retta, la quale non può incontrare né a_1, né a_2, per cui è l_{345}. Similmente, si vede che c_2 e b_1 sono incidenti e il piano da esse generato ha l_{345} come intersezione residua con S.

Proposizione 3.0.2 (Equazione di Cayley-Salmon)**.** *Consideriamo una superficie cubica irriducibile S. Supponiamo che esistano $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2$ forme lineari omogenee in $x_0, ...x_3$ tali che $\{u_0 = 0\}; \{u_1 = 0\}; \{u_2 = 0\}$ e $\{v_0 = 0\}; \{v_1 = 0\}; \{v_2 = 0\}$ formino una coppia di triedri coniugati. Allora S ammette un'equazione della forma:*

$$u_0u_1u_2 + \kappa v_0v_1v_2 = 0 \qquad \kappa \in \mathbb{C}^* \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Supponiamo che S abbia equazione $\{f = 0\}$. Allora la restrizione di f al piano $\{u_0 = 0\}$ sarà l'equazione complessiva delle tre rette che $\{u_0 = 0\}$ sega su S, cioé $\{u_0 = v_0 = 0\}; \{u_0 = v_1 = 0\}; \{u_0 = v_2 = 0\}$, per cui f sarà della forma $av_0v_1v_2 + u_0g(x_0, ...x_3), a \in \mathbb{C}$. Ma $a \neq 0$, perché altrimenti S sarebbe riducibile. Restringendo f a $\{v_0 = 0\}$, si vede che esso è della forma $av_0v_1v_2 + bu_0u_1u_2, a, b \in \mathbb{C}^*$. □

Proposizione 3.0.3 (Una cubica non singolare è una varietà determinantale)**.** *Se S non è singolare, la sua equazione si piò scrivere nella forma:*

$$det \begin{pmatrix} 0 & u_0 & v_0 \\ v_1 & 0 & u_1 \\ u_2 & v_2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Se S è non singolare, ha coppie di triedri coniugati per quanto visto, e, nelle notazioni di , a meno di sostituire le forme lineari v_0, v_1, v_3 con dei loro multipli, la 3.1 si può scrivere come $u_0u_1u_2 + v_0v_1v_2 = 0$ □

D'ora in poi quest'ultima matrice verrà indicata con:

$$A = A(x_0, ..., x_3)$$

Osservazione 3.0.4. Dal fatto che su una cubica non singolare esiste sempre almeno una coppia di triedri coniugati segue che essa ammette un'equazione di Salmon-Cayley; si può però dimostrare che esistono molte cubiche che, pur essendo singolari, possiedono un'equazione di questo tipo.

Osservazione 3.0.5 (La cubica di Fermat). Nel caso della superficie cubica non singolare di equazione

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0, \tag{3.3}$$

nota come cubica di Fermat, è facile trovare trre diverse equazioni di Salmon-Cayley tramite una manipolazione algebrica, il che permette anche di individuare esplicitamente tutte le rette sulle sulla superficie. Infatti, se poniamo $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, l'equazione 3.3 si scrive come:

$$(x_0 + x_1)(x_0 + \rho x_1)(x_0 + \rho^2 x_1) = -(x_2 + x_3)(x_2 + \rho x_3)(x_2 + \rho^2 x_1).$$

Da questo si vede che le nove rette di equazione $\{x_0+\rho^k x_1 = 0\} \cap \{x_2+\rho^n x_3 = 0\}$, $k, n = 0, 1, 2$ sono tutte contenute nella superficie. D'altra parte, la 3.3 si può scomporre anche come:

$$(x_0 + x_2)(x_0 + \rho x_2)(x_0 + \rho^2 x_2) = -(x_1 + x_3)(x_1 + \rho x_3)(x_1 + \rho^2 x_3),$$

il che ci permette di individuare le nove rette, tutte distinte dalle precedenti, $\{x_0 + \rho^k x_2 = 0\} \cap \{x_1 + \rho^n x_3 = 0\}$, $k, n = 0, 1, 2$. Infine, abbiamo anche l'equazione di Cayley-Salmon:

$$(x_0 + x_3)(x_0 + \rho x_3)(x_0 + \rho^2 x_3) = -(x_1 + x_2)(x_1 + \rho x_2)(x_1 + \rho^2 x_2),$$

dalla quale si ricavano le 9 rette $\{x_0 + \rho^k x_3 = 0\} \cap \{x_1 + \rho^n x_2 = 0\}$, $k, n = 0, 1, 2$. Abbiamo dunque trovato tutte le rette di S.
Osserviamo, infine, che, fissato k, il piano $\{x_0 + \rho^k x_1 = 0\}$, esso sega su S tre rette $\{x_0 + \rho^k x_1 = 0\} \cap \{x_2 + \rho^n x_3 = 0\}$, $n = 0, 1, 2$, passanti per il punto $[-\rho^k, 1, 0, 0]$. Ragionando in modo simile sugli altri piani tritangenti, vediamo che si ottengono altri punti per cui passano tre rette di S, e, precisamente, quelli della forma $[0, 0, -\rho^k, 1]$, $[-\rho^k, 0, 1, 0]$, $[0, -\rho^k, 0, 1]$,$[-\rho^k, 0, 0, 1]$, $[0, -\rho^k, 1, 0]$. In totale, dunque, vi sono diciotto punti tali che il piano tangente a S passante per essi intersechi la superficie in tre rette di un fascio, cioè in una cubica con punto triplo. Per la proposizione 2.1.3, in tali punti la quadrica $Q(f, P)$ dev'essere riducibile. Infatti, se $P = [y_0, ...y_3]$, la quadrica $Q(f, P)$ ha equazione $y_0 x_0^2 + y_1 x_1^2 + y_2 x_2^2 + y_3 x_3^2 = 0$. E' immediato vedere che, per tutti i punti sopre indicati, essa si spezza in una coppia di piani, giacché due delle coordinate $[y_0, ...y_3]$ sono nulle.

Capitolo 4

Rappresentazione piana della superficie cubica

In questo capitolo S sarà sempre una superficie cubica non singolare. Assumiamo tutte le notazioni del capitolo precedente e, in particolare, della proposizione 3.0.3.
Quindi, una coppia di triedri coniugati sarà data da

$$\{u_0 = 0\}; \{u_1 = 0\}; \{u_2 = 0\} \mathrm{e} \{v_0 = 0\}; \{v_1 = 0\}; \{v_2 = 0\}$$

e la tabella di rette associate sarà denotata con:

$$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}$$

Proposizione 4.0.1. *Si ha:*

$$P = [x_0, ..., x_3] \in S \Longleftrightarrow detA(x_0, ..., x_3) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \exists[\kappa, \lambda, \mu] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) tale\ che \begin{pmatrix} 0 & u_0 & v_0 \\ v_1 & 0 & u_1 \\ u_2 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Inoltre, assegnato $P \in S$, il punto $[\kappa, \lambda, \mu]$ che soddisfa il sistema precedente è unico.

Dimostrazione. Per la 3.0.3, $P = [x_0, x_1, x_2, x_3] \in S$ se e solo se $detA(x_0, ..., x_3) = 0$. Che l'esistenza di soluzioni equivalga a $detA(x_0, ..., x_3) = 0$ è un fatto elementare di algebra lineare. Per dimostrare che tale soluzione è unica a meno di un coefficiente di proporzionalità ricordiamo che per il teorema di Rouché-Capelli, lo spazio delle soluzioni di 4.1 ha dimensione $3 - rg(A)$, dove $rg(A)$

indica il rango della matrice A. Se dunque proviamo che $rg(A) = 2$, abbiamo finito. Guardando le forma di A, appare evidente che il suo rango sarà minore di 2 se e solo se due righe sono nulle; ma se, ad esempio, per qualche $[x_0, ...x_3]$ le ultime due righe si annullassero, i piani di equazione $\{u_1 = 0\}$, $\{v_1 = 0\}$, $\{u_2 = 0\}$ $\{v_2 = 0\}$ avrebbero un punto in comune, per cui le rette r_{22} e r_{33} sarebbero complanari. Ma r_{23} e r_{32} incontrano sia r_{22}, sia r_{33}, per cui apparterrebberro al piano che esse generano. E' impossibile che quattro rette distinte appartenenti a S giacciano sullo stesso piano. □

Possiamo dunque definire un'applicazione

$$\alpha : S \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

che associa a ogni punto di S l'unico punto del piano proiettivo per cui vale 4.1. Per ora, non sappiamo se essa sia iniettiva o suriettiva. Provando a costruirne l'inversa, vedremo che α è suriettiva, ma, se viene definita su tutta S, non è iniettiva, in quanto contrae 6 rette della superficie in punti del piano.

Teorema 4.0.2. *Esistono dei polinomi omogenei $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[\kappa, \lambda, \mu]_3$ e un sottoinsieme finito $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tali che:*
a) l'applicazione

$$\begin{aligned} \beta : \quad \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - X \quad &\longrightarrow S \\ [\kappa, \lambda, \mu] \quad &\longrightarrow [f_0(\kappa, \lambda, \mu), f_1(\kappa, \lambda, \mu), f_2(\kappa, \lambda, \mu), f_3(\kappa, \lambda, \mu)] \end{aligned} \tag{4.2}$$

è ben definita.
b)

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)|_{Im\beta} &= id|_{Im\beta} \\ \alpha \circ \beta &= id|_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})-X} \end{aligned} \tag{4.3}$$

In altre parole, β e $\alpha|_{Im\beta}$ sono l'una l'inversa dell'altra. Diremo anche che α fornisce una ***rappresentazione piana*** *di S e che β è una* ***parametrizzazione razionale*** *di S.*

Dimostrazione. Il sistema 4.1 può essere riscritto raccogliendo in ciascuna equazione i fattori x_0, x_1, x_2, x_3. Ad esempio, l'equazione

$$(\sum_{i=0}^{3} e_i x_i)\kappa + (\sum_{i=0}^{3} f_i x_i)\lambda + (\sum_{i=0}^{3} g_i x_i)\mu = 0 \tag{4.4}$$

diventerà:

$$(e_0\kappa+f_0\lambda+g_0\mu)x_0+(e_1\kappa+f_1\lambda+g_1\mu)x_1+(e_2\kappa+f_2\lambda+g_2\mu)x_2+(e_3\kappa+f_3\lambda+g_3\mu)x_3 = 0. \tag{4.5}$$

Il sistema 4.1 si scriverà allora:

$$B(\kappa, \lambda, \mu)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.6}$$

dove B è una matrice 3 per 4 i cui coefficienti sono polinomi lineari omogenei in κ, λ, μ. Dato un punto $P = [x_0, x_1, x_2, x_3] \in S$, $\alpha(P) = [\kappa, \lambda, \mu]$ soddisfa le condizioni 4.1 e, dunque, anche le 4.6. Ma è noto dall'algebra lineare che, se B ha rango 3, le soluzioni di un sistema del tipo 4.6 sono proporzionali ai minori 3 per 3 di B (che non possono essere tutti nulli), presi con segni alterni. Pertanto, sotto l'ipotesi che il rango di B sia 3, $x_i = (-1)^i g_i(\kappa, \lambda, \mu)$, dove g_i, essendo prodotto di tre fattori lineari e omogenei, è un polinomio omogeneo di terzo grado. A questo punto, è evidente che, ponendo $f_i = (-1)^i g_i$ e $X = \{[\kappa, \lambda, \mu] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) t.c. rg(B(\kappa, \lambda, \mu)) < 3\}$, la funzione β è ben definita su $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - X$, poiché le sue componenti non si annullano mai contemporaneamente e, inoltre, per ogni $[\kappa, \lambda, \mu]$, $\beta(\kappa, \lambda, \mu)$ soddisfa il sistema 4.6 e dunque anche 4.1, cioé fornisce le coordinate di un punto di S.
D'altra parte, per ogni $[\kappa, \lambda, \mu] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - X$, $[\kappa, \lambda, \mu] = \alpha(\beta[\kappa, \lambda, \mu])$, da cui si deduce che $\alpha \circ \beta = id|_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})-X}$. Viceversa, se $[x_0, x_1, x_2, x_3] \in Im\beta \subseteq S$, $[\kappa, \lambda, \mu] = \alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - X$ è l'unico punto del piano proiettivo che soddisfa 4.1, e, dunque, anche 4.6. Pertanto $[x_0, x_1, x_2, x_3] = \beta(\kappa, \lambda, \mu)$ e $\beta \circ \alpha|_{Im\beta} = id|_{Im\beta}$.
Rimane da provare che X è finito. Osserviamo che se $[\kappa, \lambda, \mu] \in X$, necessariamente $rgB = 2$ e il sistema 4.6 individua una retta, ciascun punto della quale, verificando 4.1,appartiene a S e viene mandato da αin $[\kappa, \lambda, \mu]$. Inoltre, punti distinti in X corrispondono a rette distinte (e addirittura *disgiunte*) su S: infatti, se P fosse un punto comune alle due rette, entrambe corrisponderebbero allo stesso punto del piano $\alpha(P)$ e dovrebbero coincidere con la retta $\alpha^{-1}(\alpha(P))$. Dunque, se X fosse infinito, su S vi sarebbero infinite rette distinte, ma ciò è falso. □

Nella dimostrazione precedente, in realtà, abbiamo determinato anche il comportamento dei punti appartenenti a X.

Teorema 4.0.3. *Nelle notazioni del teorema precedente, se $P \in X$, $\alpha^{-1}(P)$ è una retta che giace su S. Se $P_1 \neq P_2$, , $P_1, P_2 \in X$, allora $\alpha^{-1}(P_1)$ e $\alpha^{-1}(P_2)$ sono sghembe.*

Osservazione 4.0.4. Se la superficie S, pur essendo singolare, ammette un'equazione di Salmon-Cayley o un'altra equazione matriciale del tipo

$$detA(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

, dove gli elementi di A sono polinomi lineari omogenei nelle variabili x_0, x_1, x_2, x_3, per i punti di S valgono comunque le condizioni 4.1 e 4.6; in particolare, i minori 3 per 3 della matrice B definiscono anche in questo caso una parametrizzazione razionale di S, che diremo associata all'equazione $detA = 0$. Invece, l'applicazione α in generale non sarà ben definita su *tutta* S, perché in alcuni punti A potrebbe avere rango minore di 2.

Torniamo a considerare S non singolare. Alcune delle rette di S vengono, dunque, rappresentate sul piano da punti; ci chiediamo, in generale, quale sia l'immagine delle rette della superficie nella rappresentazione piana. In primo luogo, introduciamo la nozione di sezione piana di S.

Definizione 4.0.5. Se $\pi \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è un piano, la curva $S \cap \pi$ si dice una sezione piana di S.

Ricordiamo che abbiamo scritto le soluzioni di 4.6 come $x_i = f_i(\kappa, \lambda, \mu)$, dove f_i è un polinomio omogeneo di terzo grado.

Proposizione 4.0.6. *Le sezioni piane di S vengono rappresentate sul piano dalle curve del sistema lineare G generato da* $\{f_0 = 0\}$, $\{f_1 = 0\}$, $\{f_2 = 0\}$, $\{f_3 = 0\}$, *cioé da curve del tipo* $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0\, \lambda_i \in \mathbb{C}, (\lambda_0, ..., \lambda_3) \neq (0, 0, 0, 0)$. *I punti di X sono tutti e soli i punti base del sistema G. Infine, due generiche curve di questo sistema si intersecano in tre punti oltre ai punti base.*

Dimostrazione. Consideriamo il piano di equazione $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Se il punto $P = [x_0, x_1, x_2, x_3]$ appartiene alla relativa sezione piana e $[\kappa, \lambda, \mu] = \alpha(P) \notin \alpha^{-1}(X)$, $\beta(\alpha(P)) = P$, per cui $a_0f_0(\kappa, \lambda, \mu) + a_1f_1(\kappa, \lambda, \mu) + a_2f_2(\kappa, \lambda, \mu) + a_3f_3(\kappa, \lambda, \mu) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Ricordiamo che $X = \{[\kappa, \lambda, \mu] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) | rg(B(\kappa, \lambda, \mu)) < 3\}$ e , poiché, a meno del segno, i minori di ordine 3 di B sono proprio $f_0, ..., f_3$, si ha che X è il luogo base del sistema lineare G. Pertanto, se $P \in \alpha^{-1}(C)$, $\alpha(P)$ appartiene a X, cioé è un punto base del sistema G e, dunque, P viene rapppresentato comunque da un punto della cubica piana $a_0f_0(\kappa, \lambda, \mu) + a_1f_1(\kappa, \lambda, \mu) + a_2f_2(\kappa, \lambda, \mu) + a_3f_3(\kappa, \lambda, \mu) = 0$. Le intersezioni di due generiche sezione piane sono allora in corrispondenza biunivoca con le intersezioni di due curve di G al di fuori dei punti base, ma due piani intersecano S nei punti che la superficie ha in comune con la retta individuata dai due piani su cui giacciono tali sezioni. Tali punti sono in genere 3. Osserviamo che le immagini di due sezioni si incontrano sempre nei punti base di G, ma questo significa solamente che entrambe incontrano la corrispondente retta di S, in punti che saranno in generale distinti. □

Definizione 4.0.7. I punti base del sistema G si dicono **punti eccezionali** della rappresentazione piana.

Osservazione 4.0.8. Osserviamo che due cubiche piane che non abbiano una componente comune si intersecano in nove punti contati con molteplicità (teorema di Bézout), per cui la somma della molteplicità d'intersezione di due curve di G nei punti base sarà 6; ciò non significa che i punti base siano esattamente 6, poiché qualche molteplicità potrebbe essere maggiore di 1. In questa sezione, però, stidieremo il caso generale, in cui i punti base sono 6 e si trovano in posizione generale (cioé non ve ne sono tre allineati, né sei appartenenti a una conica). Nella sezione conclusiva, vedremo che se, ad esempio, tre punti base sono allineati, la superficie S dev'essere singolare.

Quello che ci proponiamo di fare ora è ritrovare con un altro metodo le 27 rette, supponendo di avere una rappresentazione piana della superficie cubica non singolare S, con i sei punti eccezionali in posizione generale.

Teorema 4.0.9. *Nelle notazioni precedenti e assumendo che i sei punti eccezionali siano in posizione generale, le rette di S sono in totale 27 e si possono suddividere come segue:*

- *6 rette, a due a due sghembe, che chiameremo* $a_1, ...a_6$*, corrispondono ai 6 punti eccezionali* $P_1, ...P_6$*;*
- $15 = \binom{6}{2}$ *rette,che chiameremo* c_{ik}*,* $i, k = 1, ...6$*,* $i \neq k$*, corrispondono a rette* $r_{ij} = L(P_i, P_j)$ *passanti per due dei punti eccezionali;*
- $6 = \binom{6}{5}$ *rette, che chiameremo* b_i*,* $i = 1, ...6$*, corrispondono a coniche* C_i *che passano per tutti i punti eccezionali tranne* P_i*. Le rette* b_i*,* $i = 1, ...6$ *sono a due a due sghembe.*

Osservazione 4.0.10. La denominazione qui usata per le rette è stata introdotta da Schläfli e non è legata a quella adottata nel capitolo 2.

Dimostrazione. Che sei rette corrispondano ai sei punti base deriva dal teorema 4.0.3. Consideriamo ora la retta $r_{ij} = L(P_i, P_j)$. Se prendiamo due punti su r_{ij}, distinti fra loro e diversi da quelli base, osserviamo che le curve del sistema lineare G passanti per questi due punti formano un sistema lineare H con r_{ij} come curva base, avendo noi imposto che le cubiche di H incontrino la retta in 4 punti distinti. La dimensione di H sarà 1: infatti, le sue curve si spezzano nella retta r_{ij} e in una conica passante per i 4 punti base residui, ma le coniche per quattro punti in posizione generale formano un fascio. Il sistema H rappresenta dunque in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$un fascio di sezioni piane. Le infinite immagini distinte dei punti di r_{ij} tramite β appartengono a

tutte le sezioni piane del fascio, per cui la retta che è sostegno al fascio di sezioni piane ha infinte intersezioni con S, per cui è contenuta in S. Ogni suo punto, essendo comune a tutte le sezioni piane, verrà mandato da α nella curva base del sistema H, cioé in r_{ij}. Similmente, presi su una conica C_i due punti distinti fra loro e diversi da quelli base di G, vediamo che il sistema H, che si ottiene imponendo alle curve di G il passaggio per questi due punti ulteriori, ha dimensione 1 e C_i come curva base. Come prima, si vede allora che C_i corrisponde a una retta su S.
Osserviamo che una retta di S, essendo comune a un fascio di sezioni iperpiane, deve corrispondere o a un punto base di G o alla curva base di un fascio contenuto in G, ma una tale curva base non può che essere una retta o una conica. Se è una retta, deve passare per due punti base, giacché le curve di fascio si spezzerebbero altrimenti nella retta base e in coniche vincolate a passare per cinque o sei dei punti base, che sono in posizione generale; pertanto, H avrebbe dimensione 0, cioé non sarebbe un fascio. Nel caso della conica si ragiona analogamente. □

Definizione 4.0.11 (Bissestuple)**.** Un gruppo di sei rette a due a due sghembe si dice sestupla; date due sestuple $r_1, ..., r_j$ e $s_1, ...s_j$, si dice che esse formano una bissestupla se e solo se, per ogni i, j, $r_i \cap s_i \neq \emptyset$ se e solo se $i \neq j$. Tale bissestupla si indicherà con:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{pmatrix}$$

Introduciamo ora una notazione sintetica per indicare le relazioni d'incidenza fra due rette nello spazio L_i e L_j: scriveremo $L_i \bullet L_j = 0$ se $L_i \cap L_j$ è vuoto, $L_i \bullet L_j = 1$ altrimenti.

Lemma 4.0.12. *Per le rette giacenti su S valgono le relazioni seguenti:*
$a_i \bullet b_j = 1$, *se* $i \neq j$, $a_i \bullet b_i = 0$
$c_{ij} \bullet c_{ik} = 0$, $c_{ij} \bullet c_{lk} = 1$ *i,l,j,k distinti*
$b_i \bullet c_{ik} = 1$, $b_i \bullet c_{lk} = 0$ *i,l,j,k distinti*
$a_i \bullet c_{ik} = 1$, $a_i \bullet c_{lk} = 0\ i \neq l$

Dimostrazione. Una retta di S incontra la retta a_j se e solo se la curva corrispondente nella rappresentazione piana passa per il punto P_j e da ciò si deducono le prime due relazioni. Se due rette di S sono rappresentate sul piano da rette o da coniche, esse si incontrano se e solo se le rette e le coniche corrispondenti nel piano si intersecano al di fuori dei punti eccezionali. Da ciò derivano le relazioni restanti. □

Osservazione 4.0.13. Le rette $a_1, ..., a_6, b_1, ..., b_6$ formano la bissestupla

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

Se $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & k & l & m & n & p \end{pmatrix}$ è una permutazione, ragionando sulle relazioni d'incidenza fra i punti P_i, le rette r_{ij} e le coniche C_i, si ottengono le bissestuple seguenti:

- $$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_{kl} & c_{km} & c_{kn} & c_{kp} \\ a_k & b_k & c_{il} & c_{im} & c_{in} & c_{ip} \end{pmatrix}$$

  Una bissestupla di questo tipo è univocamente individuata dalla scelta non ordinata dei due indici i e k, per cui ve ne sono in totale $\binom{6}{2} = 15$.

- $$\begin{pmatrix} a_i & a_k & a_l & c_{mn} & c_{mp} & c_{np} \\ c_{kl} & c_{il} & c_{ik} & b_p & b_n & b_m \end{pmatrix}$$

  Una bissestupla così costituita è individuata in modo unico dalla scelta non ordinata dei tre indici i,k ed l, per cui ve ne sono in totale $\binom{6}{3} = 20$.

Queste 36 bissestuple furono trovate da Schläfli.

Bibliografia

[Cayley1849] A. Cayley, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, The Cambridge and Dublin mathematical journal, 1849

[Dolgachev2004] I.Dolgachev, *Luigi Cremona and cubic surfaces*, https://arxiv.org/abs/math/0408283, 2004

[Reid1988] M.Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988

[Sernesi2000] E. Sernesi, *Geometria 1, seconda edizione*, Bollati Boringhieri, 2000

[SempleRoth1949] J.G Semple, L.Roth, *Introduction to algebraic geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1949