ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

ANALISI DEI MODELLI DI REAZIONE DIFFUSIONE

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Tiziano Todeschi

IV Sessione
Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è dare una presentazione chiara di come diversi fenomeni presenti nelle scienze naturali possano essere modellizzati dai modelli matematici che si basano sull'equazione di reazione-diffusione. Tale equazione verrà studiata nei diversi casi in cui si presenterà sotto forma di problema di Cauchy, al variare del dominio (su tutto $\mathbb{R}$ o su aperti limitati).
Nel primo capitolo studieremo come un fenomeno diffusivo reale può essere modellizzato da un'equazione alle derivate parziali, e in particolare, tramite l'utilizzo della legge di Fick per il flusso, ricaveremo l'equazione di reazione diffusione. Inoltre vedremo come l'ipotesi di omogeneità della diffusione può influenzare la bontà del modello matematico.
Nel secondo capitolo studieremo l'equazione di reazione diffusione sul tutta la retta reale. Nella prima parte tratteremo il caso in cui il termine di reazione è lineare, ed esibiremo una soluzione al problema di Cauchy non omogeneo combinando le soluzioni del problema omogeneo con dato iniziale fissato e del problema non omogeneo ma con dato iniziale nullo. Dopodichè, sfruttando la soluzione del problema lineare, useremo un metodo di punto fisso per dimostrare l'esistenza ed unicità locale della soluzione del problema non lineare. In particolare, costruiremo una contrazione in un opportuno spazio di Banach per sfruttare il teorema delle contrazioni, e poi verificheremo che la soluzione di cui abbiamo dimostrato l'esistenza sia non negativa e quindi compatibile con il modello matematico.
Nel terzo capitolo studieremo l'equazione sugli insiemi limitati di $\mathbb{R}$. Nella prima parte ci concentreremo sull'equazione di reazione diffusione con ter-

mine di reazione lineare a coefficiente costante con condizioni al contorno di Dirichlet, ed esibiremo una soluzione usando il metodo della separazione delle variabili. Questo metodo è in realtà un caso particolare del più generale metodo di Galerkin, che sfrutteremo per costruire una soluzione del problema di Cauchy con diffusione non omogenea ma lineare. Nella seconda parte ci occuperemo del caso non lineare del problema a diffusione non omogenea: useremo un altro metodo di punto fisso, in particolare costruiremo un operatore compatto in uno spazio di Banach opportuno, cosicchè da poter sfruttare il teorema di punto fisso di Schauder per dimostrare l'esistenza di una soluzione.

Capitolo 1

Dal mondo reale all'equazione di reazione-diffusione

1.1 Prime ipotesi del modello matematico

I modelli matematici che si propongono di descrivere l'evoluzione di quantità dipendenti dal tempo, come la popolazione di una specie animale o la concentrazione di una sostanza chimica, devono tenere conto anche delle disomogeneità spaziali, cioè oltre alla inevitabile dipendenza dalla variabile temporale t, deve essere presa in considerazione anche quella rispetto ad una variabile spaziale x. In base al contesto, x può essere un elemento di $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Per esempio, in un modello per la concentrazione di persone in una strada affollata, è possibile considerare (con buona approssimazione) la posizione x unidimensionale; in biologia cellulare, spesso $x \in \mathbb{R}^2$; più generalmente x è un vettore tridimensionale. Il risultato è che la funzione incognita u che rappresenta l'evoluzione dello stato del sistema, è funzione della coppia (t, x), e dunque anzichè lavorare con equazioni differenziali ordinarie, è necessario utilizzare equazioni alle derivate parziali.
Per semplicità, in questa tesi studieremo unicamente il caso unidimensionale, dato che il meccanismo diffusivo è essenzialmente identico nella controparte multidimensionale, a cui si possono facilmente estendere le proprietà e i ri-

sultati che vedremo in questa trattazione.
Come prima cosa, deriviamo le equazioni di riferimento del problema che andremo ad analizzare. Per studiare l'evoluzione di una quantità misurabile occorre innanzitutto partire da una **legge di conservazione** per la quantità in considerazione. Se u è la densità di tale quantità,si assume che il tasso di cambiamento della quantità sia dato dalla somma di un termine di produzione locale(termine di reazione) e di un termine di trasporto, cioè

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega} u dx = \int_{\omega} f dx - \int_{\partial\omega} J \cdot n d\sigma \tag{1.1}$$

dove ω è una regione di riferimento dello spazio occupato dalla quantità sotto osservazione, n è la normale uscente dalla frontiera $\partial\omega$, f rappresenta il termine di reazione di u per unità di volume, e J è il flusso di u. Grazie al teorema della divergenza, assumendo il flusso J sufficientemente regolare, si ottiene

$$\int_{\partial\omega} J \cdot n d\sigma = \int_{\omega} div(J) dx$$

Inserenda questa espressione in (1.1) e supponendo che l'identità valga in ogni dominio ω, si ottiene la forma (localizzata) della legge di conservazione

$$\partial_t u = f - div(J)$$

che in una dimensione diventa

$$\partial_t u = f - J_x \tag{1.2}$$

A questo punto dobbiamo esplicitare le espressioni per f e J.
Nel caso in cui non si tenga conto degli effetti di trasporto, cioè il flusso sia nullo, allora $J = 0$. In questo caso, (1.2) diventa una equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{du}{dt} = f$$

Risulta naturale quindi supporre che f sia della forma $f = f(u)$, cioè che il termine di produzione dipenda dallo stato del sistema (e non esplicitamente né dal tempo né dallo spazio).

1.2 Legge di Fick e derivazione dell'equazione

Per quel che riguarda il flusso J possono essere fatte diverse scelte in base alla necessità di descrivere meccanismi differenti. La descrizione più semplice del flusso e quella che adotteremo in questa tesi è data dalla legge di Fick: *il flusso è proporzionale alla derivata (spaziale) dell'incognita e diretto nel verso di minore densità*,in formule:

$$J(t, x) = -D(x)u_x(t, x)$$

La quantità $D(x) \geq 0$, è detta **coefficiente di diffusione**, e normalmente non è costante in quanto l'ambiente in cui studiamo la quantità u non è omogeneo. Il principio alla base della legge di Fick è che se u ha derivata non nulla in qualche regione (cioè la quantità u è piu densa in una regione che in un altra), allora si genera un flusso che va dalla regione ad altà densità a quella a bassa densità. Il meccanismo dunque previene l"affollamento": la quantità migra da regioni più popolose (u più grande) a regioni meno popolose(u più piccola). Più è grande il coefficiente di diffusione D e più lo spostamento sarà rapido.
Sostituendo l'espressione del flusso data dalla legge di Fick, si ottiene l'equazione di reazione diffusione:

$$\partial_t u(t, x) = (D(x)u_x(t, x))_x + f(u(t, x)) \tag{1.3}$$

Nel momento in cui andremo ad analizzare il problema su tutta la retta reale, stiamo modellizzando una densità in una situazione in cui il dominio è molto vasto e perciò le condizioni ai bordi sono trascurabili in quanto molto lontani. Nell'analisi sugli aperti limitati di $\mathbb{R}$, ci proponiamo di modellizzare densità definite in un dominio unidimensionale, ma non eccessivamente grande, in cui risultano quindi significative le condizioni ai bordi.
Un esempio classico è la ricerca di un soluzione che rappresenti l'evoluzione temporale della temperatura in una sbarra sottile in cui è data la temperatura iniziale e sono fissate quelle ai bordi.

1.2.1 Coefficiente di diffusione costante

Se la regione in cui avviene la diffusione è sufficientemente omogenea, possiamo supporre $D(x) \equiv D$, e si ottiene

$$\partial_t u(t,x) = D u_{xx}(t,x) + f(u(t,x)) \tag{1.4}$$

Un esempio reale in cui può essere fatta questa scelta per il coefficiente di diffusione è il caso di una modellizzazione della temperatura in un materiale omogeneo come una sbarra di ferro, oppure in dinamica delle popolazioni quando il dominio rappresenta un ambiente in cui non ci sono luoghi più o meno sfavorevoli per la sopravvivenza degli individui. Notiamo che se il termine di reazione f è nullo, allora l'equazione si riduce all'equazione del calore

$$\partial_t u(t,x) = D u_{xx}(t,x)$$

1.2.2 Coefficiente di diffusione variabile

Nel caso in cui consideriamo il coefficiente di diffusione $D(x)$ costante ($\equiv D$) otteniamo una soluzione $u(t,x)$ dell'equazione (1.4) che però non è adatta a modellizzare l'evoluzione di una densità nel mondo reale.
Supponiamo infatti che la funzione u, soluzione di (1.4), modelli la densità di alcune formiche in un dominio grande a una dimensione, che può essere ad esempio un corridoio stretto ed molto lungo. Supponiamo che un gruppo di formiche sia inizialmente concentrato in una piccola piastrella T. Questo è rappresentato dal fatto che u_0 è a supporto compatto in T. Consideriamo ora un qualsiasi punto x_0 arbitrariamente lontano dalla piastrella T e un qualsiasi momento t_0 arbitrariamente vicino a 0.
Una diretta valutazione della funzione (che troveremo nel secondo capitolo) mostra che $u(t_0, x_0) > 0$, che significa che le formiche si sono spostate così velocemente che alcune di loro sono riuscite a raggiungere x_0 in un tempo arbitrariamente piccolo. Questo mostra come le formiche di questo modello possono viaggiare con velocità arbitraria, e quindi in un certo senso, infinita.

Poichè questo fenomeno non è realistico, nel corso del terzo capitolo studieremo l'equazione

$$\partial_t u(t,x) = (D(x)u_x(t,x))_x$$

che è sostanzialmente uguale a (1.3) senza termine di reazione. Di fatto, ci concentreremo sul meccanismo diffusivo dato che è quello coinvolto dalla scelta di utilizzare un coefficiente di diffusione D costante o variabile.

Capitolo 2

Analisi sulla retta reale

2.1 Strumenti

Definizione 2.1 (Mollificatore)**.** Un *mollificatore* è una funzione a supporto compatto $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che soddisfi queste proprietà:

- $supp(\varphi) \subseteq \overline{B(0,1)}$
- $\varphi \geq 0$
- $\|\varphi\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$

Esempio 2.1. Un esempio di funzione $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ che soddisfi tutte le condizioni della definizione (2.1) è la seguente, detta *mollificatore canonico*:

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \cdot \frac{1}{x^2-1} & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Dove C è la costante tale che $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$

Osservazione 1. Sia φ un mollificatore. Definiamo la famiglia di funzioni φ_ϵ, per $\epsilon > 0$,in questo modo:

$$\varphi(x) := \epsilon^{-1}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), x \in \mathbb{R}$$

Allora φ_ϵ definisce una famiglia di mollificatori tale che $supp(\varphi) \subset \overline{B(0,\epsilon)}$

Sia φ_ϵ una famiglia di mollificatori e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora definiamo la sua mollificata:

$$f_\epsilon(x) := (\varphi_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(x-y)f(y)dy \tag{2.2}$$

Teorema 2.1.1.

1. *Se* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$

2. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0^+} f$ *in media* L^p

Definizione 2.2 (Contrazione)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico. Si definisce contrazione una funzione $f : X \to X$ tale che esiste una costante reale $0 < c < 1$ che soddisfa la seguente condizione

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Teorema 2.1.2 (del punto fisso di Banach-Caccioppoli)**.** *Sia* (X, d) *uno spazio metrico completo. Sia* $T : X \to T$ *una contrazione su* X*. Allora la mappa* T *ammette uno e un solo punto fisso, cioè*

$$\exists! x^* \in X \quad x^* = T(x^*)$$

Teorema 2.1.3 (Disuguaglianza di Young)**.** *Sia* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R})$ *con*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \qquad 1 \leq p, q, r \leq \infty$$

Allora vale

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Lemma 2.1.4 (di Gronwall)**.** *Sia* $g \in C^1(\mathbb{R})$*.*
Supponiamo

$$\exists\, A, B \in \mathbb{R} \text{ tali che } g(t) \leq A + B \int_{t_0}^{t} g(s)ds \text{ con } t \geq t_0$$

Allora

$$g(t) \leq Ae^{B(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

2.2 Problema lineare

Il problema che ci poniamo in questa sezione è la risoluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) = f(t,x) & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(t,x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.3}$$

con $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e $f \in C_1^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.
L'obiettivo è ottenere una formula di rappresentazione per la soluzione in relazione a una funzione G chiamata soluzione fondamentale che ora introdurremo.

Definizione 2.3 (Soluzione fondamentale)**.** La funzione

$$G(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}, t < 0) \end{cases} \tag{2.4}$$

è chiamata soluzione fondamentale del calore. Tale funzione risolve l'equazione alle derivate parziali

$$u_t = Du_{xx}$$

denominata equazione del calore.

Notiamo che G ha un punto di singolarità in (0,0).
La scelta della costante $\frac{1}{\sqrt{4D\pi}}$ è giustificata dal seguente lemma.

Lemma 2.2.1 (Integrale della soluzione fondamentale)**.** *Per ogni $t > 0$ fissato,*

$$\int_{\mathbb{R}} G(t,x)dx = 1$$

Dimostrazione. Calcolando otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} G(t,x)dx = & \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(4D\pi t)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \\ = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili $z = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ e il fatto che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ $\square$

Il risultato che risolve il problema lineare (2.3) è il seguente teorema, che dimostreremo nelle prossime sezioni:

Teorema 2.2.2 (Soluzione del problema lineare). *La funzione*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y)f(y,s)dyds \tag{2.6}$$

è soluzione del problema di Cauchy lineare non omogeneo

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) = f(t,x) & \textit{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(t,x) = u_0(x) & \textit{su } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases} \tag{2.7}$$

con dato iniziale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *e* $f \in C_1^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.

2.2.1 Problema omogeneo

Siamo interessati a trovare una soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(t,x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases} \tag{2.8}$$

con $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
Notiamo che la funzione $(t,x) \mapsto G(t,x)$ risolve l'equazione del calore lontano dalla singolarità in $(0,0)$, e allo stesso modo anche $(t,x) \mapsto G(t, x-y)$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato. Di conseguenza ci aspettiamo che la convoluzione sia anch'essa soluzione.

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)u_0(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{(4D\pi t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} u_0(y)dy \quad (x\in\mathbb{R}, t>0) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Teorema 2.2.3 (Soluzione del problema di Cauchy). *Sia* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *e* u *definita in* (2.9). *Allora*

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$,

2. $u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$,

3. $lim_{t\to 0}u(t,x) = u_0(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. 1. Per prima cosa mostriamo che $u(t,x)$ è infinitamente differenziabile rispetto a x, per fare ciò sfruttiamo il teorema della convergenza dominata. Fissato $t > 0$, $G(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$ e dunque la funzione $x \longmapsto G(t,x-y)u_0(y)$ è $C^\infty(\mathbb{R}) \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
Consideriamo il comportamento per x all'infinito della derivata α-esima con $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{\partial^\alpha G(t,x)}{\partial^\alpha x}\right| \sim \left|e^{-x^2}x^\alpha(\lambda + o(1))\right| \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left|\frac{\partial^\alpha G(t,x)}{\partial^\alpha x}\right| = \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\partial^\alpha G(t,x)}{\partial^\alpha x}\right| = 0$$

per qualche λ, e dato che $|\frac{\partial^\alpha G(t,x)}{\partial^\alpha x}|$è continua su $\mathbb{R}$, ogni derivata rispetto a x di $G(t,x)$ è limitata in $\mathbb{R}$.
Otteniamo,

$$\left|\frac{\partial^\alpha G(t,x-y)}{\partial^\alpha x}u_0(y)\right| < C\,|u_0(y)|$$

e poichè per ipotesi $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ siamo nelle ipotesi del teorema della convergenza dominata, e possiamo concludere che $u(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Allo stesso modo dimostriamo che $u(\cdot,x) \in C_t^\infty((0,+\infty))$:
$\forall \delta > 0$, fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione $t \longmapsto G(t,x-y)u_0(y)$ è $C^\infty([\delta,+\infty)) \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Consideriamo il comportamento per t all'infinito della derivata α-esima con $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{\partial^\alpha G(t,x)}{\partial^\alpha t}\right| \sim \left|e^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\alpha+1}(\mu + o(1))\right)\right| \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\left|\frac{\partial^\alpha G(t,x)}{\partial^\alpha t}\right| = 0$$

per qualche μ, e come nel caso precedente, la continuità implica anche la limitatezza di $\frac{\partial^\alpha G(t,x)}{\partial^\alpha t}$in $[\delta,+\infty)$.
Dunque,

$$\left|\frac{\partial^\alpha G(t,x-y)}{\partial^\alpha t}u_0(y)\right| < C\,|u_0(y)|$$

e quindi fissato $x \in \mathbb{R},\ u(\cdot,x) \in C^\infty([\delta,+\infty))\ \forall\delta > 0$.
Abbiamo perciò dimostrato che $u(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$; questo

fatto giustifica il passaggio della derivata e del limite sotto il segno di integrale nei prossimi passaggi.

2. Dato che G risolve il problema del calore,

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} [(G_t - DG_{xx})(t, x-y)]u_0(y)dy \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0). \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Innanzitutto dimostriamo che $lim_{t\to 0}u(t,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nel caso $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Come in (2.5) usiamo il cambio di variabile e otteniamo:

$$\begin{aligned} lim_{t\to 0}u(t,x) &= lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} G(t, x-y)u_0(y)dx \\ &= lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(4D\pi t)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} u_0(y)dx \\ &= lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} u_0(x - \sqrt{4D\pi t}z)dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} (lim_{t\to 0} u_0(x - \sqrt{4D\pi t}z))dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} u_0(x)dz = u_0(x). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Abbiamo portato il limite per $t \to 0$ sotto il segno di integrale grazie al teorema della convergenza dominata, infatti $|e^{-z^2}u_0(x - \sqrt{4D\pi t}z)| < \|u_0\|_{L^\infty} e^{-z^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

Per il caso più generale in cui $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ sfrutteremo i mollificatori e in particolare il teorema 2.1.1.

Dato che $u_0 \in L^1(\mathbb{R}), u_{0,\epsilon} \in C^\infty(\mathbb{R})$ e dunque siamo nel caso gia verificato in (2.11):

$$\begin{gathered} \forall \eta > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che se } t < \delta \text{ allora} \\ | u_{0,\epsilon}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} u_{0,\epsilon}(x - \sqrt{4t}z)dz | < \eta \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{2.12}$$

Mostriamo che

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} u_{0,\epsilon}(x - \sqrt{4D\pi t}z)dz \xrightarrow{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} u_0(x - \sqrt{4D\pi t}z)dz \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}u_{0,\epsilon}(x-\sqrt{4D\pi tz})dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}u_0(x-\sqrt{4D\pi tz})dz\right| \\
=&\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}(u_{0,\epsilon}(x-\sqrt{4D\pi tz}) - u_0(x-\sqrt{4D\pi tz}))dz\right| \\
\leq&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}|u_{0,\epsilon}(x-\sqrt{4D\pi tz}) - u_0(x-\sqrt{4D\pi tz})|dz \\
<&\int_{\mathbb{R}} |u_{0,\epsilon}(x-\sqrt{4D\pi tz}) - u_0(x-\sqrt{4D\pi tz})|dz \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

dove abbiamo sfruttato la continuità in media L^1 di $u_{0,\epsilon}(x-\sqrt{4D\pi tz})$
Ora, passando al limite per $\epsilon \to 0^+$ in (2.12) otteniamo

$$\begin{gathered}
\forall\eta>0\ \exists\delta>0 \text{ tale che se } t<\delta \text{ allora} \\
\mid u_0(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}u_0(x-\sqrt{4D\pi tz})dz \mid < \eta \quad \forall x\in\mathbb{R}
\end{gathered} \tag{2.14}$$

che è proprio la tesi.

□

2.2.2 Problema non omogeneo

Ora poniamo la nostra attenzione sul problema al dato iniziale *non omogeneo*:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) = f(t,x) & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(t,x) = 0 & \text{su } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases} \tag{2.15}$$

con $f \in C_1^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.
Come possiamo ricavare una soluzione? Se richiamiamo lo stesso ragionamento in (2.9), notiamo che la funzione $(t,x)\mapsto G(t-s,x-y)$ è una soluzione del problema del calore (con fissati $y\in\mathbb{R}, 0<s<t$).
Fissato s, la funzione

$$u = u(t,x;s) = \int_R G(t-s,x-y)f(y,s)dy \tag{2.16}$$

risolve

$$\begin{cases} u_t(t,x;s) - Du_{xx}(t,x;s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(s,\infty) \\ u(t,x;s) = f(x,s) & \text{su } \mathbb{R}\times\{t=s\} \end{cases} \tag{2.17}$$

che è un problema al dato iniziale nella forma vista in (2.8), con il tempo iniziale $t = 0$ sostituito da $t = s$, e u_0 sostituita da $f(\cdot, s)$. Quindi $u(\cdot, s)$ non è soluzione di (2.15).

Teorema 2.2.4 (Principio di Duhamel)**.** *Consideriamo il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Au(t,x) = f(t,x) & \textit{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(t,x) = 0 & \textit{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.18}$$

dove A è un operatore differenziale rispetto alla variabile spaziale x.
Questo problema differenziale è riconducibile a un problema omogeneo dello stesso tipo. A questo scopo consideriamo, $\forall s \in [0, t)$ il problema di Cauchy con dato iniziale al tempo $t = s$, cioè

$$\begin{cases} w_t(t,x) - Aw(t,x) = 0 & \textit{in } \mathbb{R} \times (s, \infty) \\ w(t,x) = f(x,s) & \textit{su } \mathbb{R} \times \{t = s\} \end{cases} \tag{2.19}$$

Se indichiamo con $w(t,x,s)$ la soluzione $w(t,x)$ di questo problema,allora la funzione

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x,s)ds$$

risolve il problema di Cauchy (2.18)

Sfruttiamo quindi il principio di Duhamel e costruiamo una soluzione per (2.15) a partire da $u(t, x; s)$ definita in (2.16). La soluzione quindi sarà nella forma

$$u(t,x) = \int_0^t u(t,x;s)ds \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

Riscrivendo, otteniamo:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) f(y,s) dyds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4D\pi(t-s))} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4D(t-s)}} f(y,s) dyds, \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Il seguente teorema conferma che questa funzione è effettivamente soluzione del problema.

Teorema 2.2.5 (Soluzione del problema non omogeneo). *Sia* $f \in C_1^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$*, cioè derivabile due volte rispetto a* x *e una volta rispetto a* t*,e a supporto compatto. Sia* u *definita da* (2.20).
Allora

1. $u \in C_1^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

2. $u_t(t, x) - Du_{xx}(t, x) = f(t, x) \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$

3. $\lim_{t \to 0} u(t, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. 1. Dato che G ha una singolarità in $(0, 0)$, non possiamo derivare direttamente sotto il segno di integrale. Allora per prima cosa cambiamo variabile ottenendo

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(s, y) f(x - y, t - s) dy ds$$

Poichè $f \in C_1^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, è a supporto compatto e $G = G(s, y)$ è C^∞ vicino a $s = t > 0$, usiamo la regola di Liebniz e otteniamo:

$$u_t(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(s, y) f_t(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}} G(t, y) f(x - y, 0) dy$$

Nella variabile spaziale invece otteniamo:

$$u_{xx}(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(s, y) f_{xx}(x - y, t - s) dy ds$$

Perciò u_t, u_{xx}, e quindi anche u e u_x, appartengono a $C(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

2. Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(s,y)[(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x-y,t-s)]dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} G(t,y)f(x-y,0)dy \\
&= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} G(s,y)[(-\frac{\partial}{\partial s} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x-y,t-s)]dyds \\
&\quad + \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}} G(s,y)[(-\frac{\partial}{\partial s} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2})f(x-y,t-s)]dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} G(t,y)f(x-y,0)dy \\
&=: I_\epsilon + J_\epsilon + K
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Sfruttiamo il lemma (2.2.1) e otteniamo:

$$
|J_\epsilon| \leq (\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}} G(s,y)dyds \leq \epsilon C
$$

Integrando per parti otteniamo inoltre:

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon &= \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}} [(-\frac{\partial}{\partial s} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2})G(s,y)]f(x-y,t-s)dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} G(\epsilon,y)f(x-y,t-\epsilon)dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} G(t,y)f(x-y,0)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} G(\epsilon,y)f(x-y,t-\epsilon)dy - K
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

dove il primo termine si annulla perchè G risolve l'equazione del calore. Combinando (2.21) e (2.22), otteniamo

$$
\begin{aligned}
u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} G(\epsilon,y)f(x-y,t-\epsilon)dy \\
&= f(t,x) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Dove il limite si ottiene come nella dimostrazione del teorema (2.2.3).

3. Fissato $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) f(y,s) dyds \\ &\le \|f\|_{L^\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dyds \\ &= \|f\|_{L^\infty} \int_0^t ds = t\|f\|_{L^\infty} \end{aligned} \tag{2.24}$$

   Dunque otteniamo

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le t\|f\|_{L^\infty} \to 0 \quad \text{per } t \to 0.$$

□

2.2.3 Problema generale

Prova del teorema 2.2.2. Supponiamo che u_1 sia soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(t,x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.25}$$

con $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
Quindi, dal teorema 2.2.3, u_1 si rappresenta nella forma:

$$u_1 = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-y) u_0(y) dy.$$

Supponiamo ora che u_2 sia soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) = f(t,x) \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) & \\ u(t,x) = 0 & \text{su } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.26}$$

con $f \in C_1^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.
Quindi, dal teorema 2.2.5, u_2 si rappresenta nella forma:

$$u_2 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) f(y,s) dyds.$$

Allora sommando queste due espressioni si ottiene immediatamente che la funzione

$$u = u_1 + u_2 = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y)f(y,s)dyds$$

è soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Du_{xx}(t,x) = f(t,x) & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(t,x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases} \tag{2.27}$$

con dato iniziale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e $f \in C_1^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$. $\square$

2.3 Problema non lineare

L'obiettivo che ci poniamo in questa sezione è dimostrare l'esistenza di una soluzione, se pur locale, dell'equazione di reazione diffusione non lineare

$$u_t = Du_{xx} + f(u) \tag{2.28}$$

per una generica funzione $f \in C^1([0, +\infty])$ tale che $f(0) = 0$, con $D > 0$ coefficiente di diffusione.
La presenza di un termine non lineare rende molto difficile trovare una soluzione esplicita per questa equazione con assegnato dato iniziale.
Sfruttiamo i risultati presentati nella precedente sezione e grazie al teorema 2.2.2 sappiamo risolvere il caso più semplice in cui il termine non omogeneo è lineare.
A questo punto vogliamo sostituire la funzione $f(t, x)$ in (2.6) con $f(u)$ ottenendo così

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y)f(u(s,y))dyds \tag{2.29}$$

Osservazione 2. L'espressione (2.29) presenta una formulazione meno forte del problema (2.28). Comunque se $u(t, x)$ soddisfa (2.29) allora $u(t, x)$ è soluzione dell'equazione (2.28) con condizione iniziale $u_0(x)$, cioè del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + f(u) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.30}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
u_t(t,x) =&\partial_t \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)u_0(y)dy \\
&+\partial_t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s,x-y)f(u(s,y))dyds \\
=& \int_{\mathbb{R}} \partial_t G(t,x-y)u_0(y)dy + \int_{\mathbb{R}} G(0,x-y)f(u(t,s))dy \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_t G(t-s,x-y)f(u(s,y))dyds \\
=& \int_{\mathbb{R}} D\partial_{xx} G(t,x-y)u_0(y)dy \\
&+f(u(t,x)) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} D\partial_{xx} G(t-s,x-y)f(u(s,y))dyds \\
=&D\partial_{xx} \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)u_0(y)dy \\
&+D\partial_{xx} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s,x-y)f(u(s,y))dyds + f(u(t,x)) \\
=&Du_{xx}(t,x) + f(u(t,x))
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Inoltre vale anche il viceversa, cioè se $u(t,x)$ è soluzione di (2.30) allora ammette una rappresentazione del tipo (2.29).

Dunque per risolvere il problema di cauchy dobbiamo risolvere (2.29).

2.3.1 Esistenza della soluzione mediante metodo di punto fisso

Una soluzione dell'equazione (2.29) può essere vista come un punto fisso di un particolare operatore in un opportuno spazio di Banach. Vogliamo quindi costruire uno spazio di Banach e una contrazione per sfruttare il teorema di Banach-Caccioppoli.
Per T fissato definiamo:

$$\|u\|_T := \sup_{0\le t\le T} \left[\|u(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right]$$

$$X_T := \{u : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \|u\|_T < \infty\}$$

Teorema 2.3.1. *$(X_T, \|u\|_T)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia u_n una successione di Cauchy in X_T, allora $\forall\epsilon\ \exists N(\epsilon)$ tale che

$$\|u_m - u_n\|_T < \epsilon \quad m,n > N(\epsilon)$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}[\|(u_m-u_n)(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|(u_m-u_n)(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}] < \epsilon \quad m,n > N(\epsilon)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|(u_m-u_n)(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} < \epsilon \quad t\in[0,T]\ m,n > N(\epsilon) \\ \|(u_m-u_n)(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \epsilon \quad t\in[0,T]\ m,n > N(\epsilon) \end{aligned} \tag{2.32}$$

Allora dato che u_n è una successione di Cauchy in $L^1\cap L^\infty$, u_n converge a u in $L^1\cap L^\infty$.
Passando al limite otteniamo:

$$\sup_{0\le t\le T}[\|(u-u_n)(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|(u-u_n)(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}] < \epsilon \quad m,n > N(\epsilon)$$

Che è equivalente a $\|u_n - u\|_T < \epsilon \quad m,n > N(\epsilon)$,perciò le successioni di Cauchy in X_T sono convergenti, dunque è completo. □

Poichè un insieme chiuso in un Banach è anch'esso uno spazio di Banach, abbiamo che

$$X_{T,R} := \{u : [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}; \|u\|_T \le R)\}$$

è uno spazio di Banach.
L'operatore di cui vogliamo dimostrare l'esistenza di un punto fisso è dato da

$$A[u(t,x)] = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} G(t-s,x-y)f(u(s,y))dyds$$

Per prima cosa dimostriamo che l'operatore A è ben posto, cioè è un operatore da $X_{T,R}$ in se stesso. Poniamo $M := \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, ricordiamo che vale, $\forall t$ fissato, $\|G(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ per il lemma (2.2.1) e sfruttiamo la

disuguaglianza di Young 2.1.3.
Prendendo $u(t,x) \in X_{T,R}$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|Au(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|G(t,\cdot) * u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} + \int_0^t \|G(t-s,\cdot) * f(u(s,\cdot))\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \\
&\leq \|G(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} + \int_0^t \|G(t-s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f(u(s,\cdot))\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \\
&\leq M + \int_0^t \|f(u(s,\cdot))\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \\
&\leq M + \int_0^t \|f'(\bar{u}(s,\cdot))u(s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \\
&\leq M + \int_0^t \|f'\|_{L^\infty([0,R])} \|u(s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} ds
\end{aligned} \tag{2.33}$$

in cui abbiamo sfruttato la disuguaglianza di Young con $p, q, r = 1$ e il teorema del valor medio, infatti $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(0) = 0$ $\exists \bar{u}(s,y) \in [0,R]$ tale che

$$f'(\bar{u}(s,y)) = \frac{f(u(s,y)) - f(0)}{u(s,y) - 0} = \frac{f(u(s,y))}{u(s,y)} \Rightarrow f(u(s,y)) = f'(\bar{u}(s,y))u(s,y).$$

Con lo stesso procedimento,usando la disuguaglianza di Young con $r, p = \infty$ e $q = 1$ otteniamo

$$\|Au(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq M + \int_0^t \|f'\|_{L^\infty([0,R])} \|u(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Combinando le due disuguaglianze,

$$\begin{aligned}
\|Au(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + &\|Au(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq 2M + \int_0^t \|f'\|_{L^\infty([0,R])} (\|u(s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) ds
\end{aligned} \tag{2.34}$$

e dunque otteniamo:

$$\begin{aligned}
\|Au(t,x)\|_T &= \sup_{0 \leq t \leq T} [\|Au(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|Au(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}] \\
&\leq 2M + 2T\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} R.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Quindi scegliendo $T > 0$ abbastanza piccolo e R abbastanza grande da soddisfare

$$2M + 2T\|f'\|_L{}^{\infty}(\mathbb{R})R \leq R \Longleftrightarrow T \leq \frac{R-2M}{2T\|f'\|_L^{\infty}(\mathbb{R})R} \tag{2.36}$$

l'operatore A risulta definito da $X_{T,R}$ in se stesso. Il passo successivo è mostrare che per un'altra scelta opportuna di T e R l'operatore A è una contrazione. Presi $u_1, u_2 \in X_{T,R}$ allora

$$\begin{aligned}
&\|Au_1(t,\cdot) - Au_2(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\quad = \left\| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s,x-y) f(u_1(s,y)) dsdy - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s,x-y) f(u_2(s,y)) dsdy \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\quad = \left\| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s,x-y)(f(u_1(s,y)) - f(u_2(s,y))) dsdy \right\|_{L^1(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Sfruttiamo di nuovo il teorema del valor medio:

$$\exists \bar{u}(s,y) \in [0,R] \quad \frac{f(u_1(s,y)) - f(u_2(s,y))}{u_1(s,y) - u_2(s,y)} = f(\bar{u}(s,y))$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s,x-y) f'(\bar{u}(s,y))(u_1(s,y) - u_2(s,y)) dsdy \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \int_0^t \|G(t-s,\cdot) * (u_1(s,y) - u_2(s,y))\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f'\|_{L^\infty([0,R])} ds \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty([0,R])} \int_0^t \|u_1(s,\cdot) - u_2(s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty([0,R])} T \sup_{0\leq t\leq T} \|u_1(s,\cdot) - u_2(s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Con lo stesso procedimento otteniamo:

$$\|Au_1(t,\cdot) - Au_2(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f'\|_{L^\infty([0,R])} T \sup_{0\leq t\leq T} \|u_1(s,\cdot) - u_2(s,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

e otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
\|Au_1 - Au_2\|_T &\leq \|f'\|_{L^\infty([0,R])} T (\sup_{0\leq t\leq T} \left[\|u(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right]) \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty([0,R])} T \|u_1 - u_2\|_T.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Imponendo la condizione

$$\|f'\|_{L^\infty([0,R])}T < 1 \Longleftrightarrow T < \frac{1}{\|f'\|_{L^\infty([0,R])}} \tag{2.40}$$

A è una contrazione.
Siamo perciò nelle ipotesi del teorema delle contrazioni 2.1.2, che ci permette di affermare che esiste un'unica $u \in X_{T,R}$ tale che

$$u(t,x) = A[u(t,x)] = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s,x-y)f(u(s,y))dyds$$

Abbiamo dunque dimostrato che, scelti T ed R opportunamente da soddisfare le condizioni (2.36) e (2.40), esiste una unica soluzione del problema (2.28) con dato iniziale u_0. Questa soluzione non è però globale, essendo definita solo fino al tempo T.

Il seguente esempio mostra come non è possibile in generale trovare una soluzione globale nel tempo al problema di Cauchy con equazione di reazione-diffusione.

Esempio 2.2. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + u^2(t,x) & \text{in } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.41}$$

Assumiamo che lo stato iniziale sia omogeneo, cioè $u_0(x) = \bar{u}$. Allora possiamo trovare una soluzione indipendente dalla variabile spaziale x.
Risolviamo l'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} U'(t) = U^2(t) & t > 0 \\ U(0) = \bar{u} \end{cases} \tag{2.42}$$

$$\frac{U'(t)}{U^2(t)} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{U'(s)}{U^2(s)} ds = t \Rightarrow \left[-\frac{1}{U(s)}\right]_0^t = t \Rightarrow -\frac{1}{U(t)} + \frac{1}{\bar{u}} = t$$
$$\Rightarrow U(t) = \frac{\bar{u}}{1-\bar{u}t}$$

Quindi la soluzione $u(t,x) = U(t) = \frac{\bar{u}}{1-\bar{u}t}$ risolve il problema al dato iniziale. Ma si nota immediatamente che per $t \to \frac{1}{\bar{u}}$ la funzione esplode. In generale quindi non possiamo aspettarci esistenza globale a tutti i tempi della soluzione.

2.3.2 Positività della soluzione

Per essere una soluzione accettabile dell'equazione di reazione-diffusione dobbiamo però assicurarci che $\forall t$ fissato $u(t,x)$ rappresenti una densità, cioè deve essere una funzione non negativa.
Definiamo per una generica funzione f la sua parte negativa:

$$f_- = \max\{0, -f\}$$

e costruiamo una sua approssimazione attraverso la seguente funzione:

$$\eta_n(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2n} - \xi & \text{se } \xi \leq -\frac{1}{n} \\ n\frac{\xi^2}{2} & \text{se } -\frac{1}{n} \leq \xi \leq 0 \\ 0 & \text{se } \xi \geq 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

Una seplice verica mostra che $\eta_n(\xi) \to u_-$ per $n \to +\infty$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Inoltre η_n è non crescente, dato che è composta dalla retta decrescente $-\frac{1}{2n} - \xi$, la porzione di parabola $n\frac{\xi^2}{2}$ con ξ minore di zero quindi decrescente, e la funzione constante 0 con ξ maggiore di zero. Dato che la derivata prima è crescente (costante nel primo e ultimo caso, una retta crescente nell'intervallo $[-\frac{1}{n}, 0]$), η_n è anche convessa. Consideriamo

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \eta_n(u(t,x))dx = \int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)u_t dx = \int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)(Du_{xx} + f(u))dx.$$

Il primo passaggio è giustificato dal teorema della convergenza dominata di Lebegue, infatti $\eta_n(u(t,x)) < u(t,x)$ $\forall n$ e ovviamente $u(t,x)$ è sommabile su $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)(Du_{xx}+f(u))dx &= D\int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)u_{xx}dx + \int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)f(u)dx \\ &= -D\int_{\mathbb{R}} \partial_x(\eta_n'(u))u_x dx + \int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)f(u)dx \\ &= -D\int_{\mathbb{R}} \eta_n''(u)(u_x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)f(u)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)f(u)dx.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo usato l'integrazione per parti, infatti mostriamo che il termine $\eta_n'(u)u_x$ converge a 0 per $x \to \infty$.
Fissato $t > 0$, possiamo passare il limite e la derivata sotto il segno di integrale dato che abbiamo dimostrato che $u(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} u_x(t,x) &= \lim_{x\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}} G_x(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_x(t-s,x-y)f(u(s,y))dyds\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{x\to 0} G_x(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \lim_{x\to 0} G_x(t-s,x-y)f(u(s,y))dyds\end{aligned}$$

e poichè

$$G_x(t,x-y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\left(-2\frac{(x-y)}{4t}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad x \to 0$$

$$G_x(t-s,x-y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}\left(-2\frac{(x-y)}{4(t-s)}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad x \to 0$$

allora

$$\lim_{x\to 0} u_x(t,x) \to 0$$

Ora, dato che u è limitata su $[0,T]$ e $f(0)=0$, usiamo nuovamente il teorema del valor medio:

$$\exists \bar{u}\ 0 < \bar{u} < u < +\infty \quad \frac{|f(u)-f(0)|}{|u-0|} = |f'(\bar{u})| \leq \|f'\|_{L^\infty([0,R])} \Rightarrow \exists C\ |f(u)| \leq C|u|$$

per ogni $t \in [0,T]$. Allora

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \eta_n(u)dx \leq \left|\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \eta_n(u)dx\right| \\ &\leq \left|\int_{\mathbb{R}} \eta_n'(u)f(u)dx\right| \leq C\int_{\mathbb{R}} |\eta_n'(u)||u|dx = C\int_{u\leq 0} |\eta_n'(u)|u_- dx\end{aligned} \tag{2.45}$$

perchè in $u \geq 0$ si ha $\eta_n'(u) = 0$. Integriamo su $[0,t]$ $0 \leq t \leq T$, usando la regola di Liebniz per la derivazione di una funzione integrale, e otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_n(u(t,x))dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta_n(u_0(x))dx + C \int_0^t \int_{u\leq 0} |\eta_n(u(t,x))|(u(t,x))_- dx$$

A questo punto passiamo al limite per $n \to \infty$ per ottenere

$$\int_{\mathbb{R}} (u(t,x))_- dx \leq \int_{\mathbb{R}} (u_0(x))_- dx + C \int_0^t \int_{u\leq 0} (u(t,x))_- dx$$

dove abbiamo usato $|\eta_n'(u)| \to 1$ per $n \to \infty$. Ottenuta questa disuguaglianza, possiamo supporre che u_0 sia non negativa in quanto il dato iniziale rappresenta una densità, e perciò $(u_0)_- = 0$. Allora risulta:

$$\int_{\mathbb{R}} (u(t,x))_- dx \leq C \int_0^t \int_{u\leq 0} (u(t,x))_- dx$$

Dal lemma di Gronwall 2.1.4 otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} (u(t,x))_- dx \leq 0 \text{ per } t \geq 0$$

e il fatto che u_- sia una funzione non negativa implica $(u(t,x))_- = 0$ su $[0,T] \times \mathbb{R}$, cioè $u(t,x)$ è una funzione non negativa su $[0,T] \times \mathbb{R}$.
Dunque la soluzione di cui abbiamo dimostrato l'esistenza nella precedente sezione è non negativa e perciò plausibile con il modello fisico.

Capitolo 3

Analisi sugli aperti limitati

3.1 Problema lineare a coefficienti costanti

3.1.1 Equazione con reazione lineare: metodo della separazione delle variabili

Consideriamo il seguente problema di Cauchy con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = Du_{xx}(t,x) + au(t,x) & t \in \mathbb{R}^+ \quad x \in (0,L) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,L) \end{cases} \tag{3.1}$$

dove $a \in \mathbb{R}$, $D > 0$ è il coefficiente di diffusività, mentre $u_0(x) \in C^0\left[0,L\right]$. Per risolvere (3.1), sfruttiamo il metodo della separazione delle variabili, quindi supponiamo che la soluzione del problema sia della forma $u(t,x) = f(x)g(x)$. Andando a sostituire si ottiene:

$$Df''(x)g(t) + af(x)g(t) = f(x)g'(t), \qquad D\frac{f''}{f} + a = \frac{g'}{g} = D\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Perciò andiamo risolvere le due equazioni differenziali ordinarie

$$f''(x) = \left(\lambda - \frac{a}{D}\right) f(x), \qquad f(0) = f(L) = 0$$
$$g'(t) = D\lambda g(t)$$

Se $\left(\lambda - \frac{a}{D}\right) = 0$ allora a causa delle condizioni al contorno l'unica soluzione è la soluzione nulla, infatti:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = ax + b \begin{cases} f(0) = b = 0 \\ f(L) = aL = 0 \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Mentre invece se $\left(\lambda - \frac{a}{D}\right) > 0$ otteniamo:

$$f''(x) = \omega^2 f(x) \qquad \text{con } \omega^2 = \left(\lambda - \frac{a}{D}\right)$$

La soluzione è della forma $f(x) = ce^{\omega x}$, ma imponendo le condizioni al contorno si ottiene $f = 0$. Dunque l'unico caso che ammette soluzioni non banali è $\left(\lambda - \frac{a}{D}\right) < 0$. Poniamo $\left(\lambda - \frac{a}{D}\right) = -\omega^2$ e l'equazione che dobbiamo studiare diventa $f''(x) = -D\omega^2 f(x)$, la cui soluzione è data da:

$$f(x) = Asin(\omega x) + Bcos(\omega x)$$

La condizione al contorno $f(0) = 0$ implica $B = 0$, e la condizione $f(L) = 0$ implica $\omega L = k\pi$.
Perciò abbiamo una sequenza di valori $\lambda_k = \frac{a}{D} - \left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ corrispondenti a una sequenza di soluzioni:

$$f_k(x) = A_k sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

L'equazione per g allora diventa:

$$g'(t) = D\left[\frac{a}{D} - \left(\frac{k\pi}{L}^2\right)\right] g(t)$$

le cui soluzioni sono date da:

$$g_k(t) = C_k e^{D\left[\frac{a}{D} - \left(\frac{k\pi}{L}^2\right)\right]t}$$

A questo punto, per ogni intero k, la funzione $f_k g_k$ è soluzione e perciò ogni loro combinazione lineare è soluzione.
Rappresentiamo allora l'unica soluzione $u(t,x)$ tramite la seguente espressione in serie:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{D\left[\frac{a}{D} - \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right]t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \tag{3.2}$$

Ora sfruttiamo la condizione del dato iniziale, infatti poniamo $u(x,0) = u_0(x)$, ottenendo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = u_0(x)$$

Dato che la funzione $u(x,0)$ ha dominio in $[0,L]$ possiamo considerarla una funzione dispari, dunque lo sviluppo in serie di Fourier è formato solo da funzioni seno, perciò dal precedente risultato risulta che i coefficienti A_k sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0.
In realtà il metodo di separazione delle variabili è solo un caso particolare del più generale metodo di Galerkin che vedremo nella prossima sezione.

3.1.2 Equazione con diffusione lineare: metodo di Galerkin

Consideriamo dunque il seguente problema con condizioni di Dirichlet con dato iniziale:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = ((D(t,x)u_x(t,x)))_x & x \in (0,L), t \in [0,T] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & t \in [0,T] \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,L) \end{cases} \tag{3.3}$$

con $D \in L^\infty([0,T]\times(0,L))$ e il dato iniziale $u_0 \in L^2((0,R))$. Siamo interessati a cercare una notazione appropriata per una soluzione debole del problema (3.3). Definiamo quindi la forma bilineare dipendete dal tempo:

$$B[u,v;t] := \int_0^L D(t,\cdot)u_x v_x dx \tag{3.4}$$

per $u, v \in H_0^1((0,L))$ e per quasi ogni tempo $0 \le t \le T$.
$H_0^1((0,L))$ indica lo spazio di Sobolev $W^{1,2}((0,L))$ a supporto compatto.
Per comprendere meglio la seguente definizione di soluzione debole, supponiamo temporaneamente che $u = u(t,x)$ sia di fatto una soluzione liscia del nostro problema parabolico (3.3), e cambiamo punto di vista, cioè associamo alla funzione u la mappa

$$u : [0,T] \to H_0^1((0,L))$$

definita da

$$[u(t)](x) := u(t,x) \quad (x \in (0,L), 0 \leq t \leq T).$$

In altre parole, vogliamo considerare u non come una funzione di t e x insieme, ma piuttosto una mappa u di t nello spazio $H_0^1((0,L))$ di funzioni di x. Fissiamo ora una funzione test $v \in H_0^1((0,L))$, e moltiplichiamo l'equazione alle derivate parziali $u_t(t,x) = ((D(t,x)u_x(t,x)))_x$ per v tramite il prodotto scalare di $L^2((0,L))$ e troviamo

$$\int_0^L u_t v dx = \int_0^L (Du_x)_x v dx.$$

Dato che v è a supporto compatto in $(0,L)$, $[(Du_x)v]_0^L = 0$ e integrando per parti, otteniamo

$$\int_0^L u_t v dx = -\int_0^L Du_x v_x dx$$

e dunque

$$(u', v) + B[u, v; t] = 0$$

per ogni $0 \leq t \leq T$, con $(\ ,\ )$ che denota il prodotto scalare di $L^2((0,L))$.

Definizione 3.1 (Soluzione debole)**.** Diciamo che una funzione

$$u \in L^2([0,T]; H_0^1((0,L)))$$

è soluzione debole del problema parabolico al contorno con dato iniziale (3.3) se:

- $(u', v) + B[u, v; t] = 0$

per ogni $v \in H_0^1((0,L))$ e per quasi ogni tempo $0 \leq t \leq T$, e

- $u(0) = u_0$

Ora per trovare una soluzione debole del problema (3.3) cercheremo di costruire una successione di soluzioni ad approssimazioni finito-dimensionali del problema stesso per poi passare al limite. Questa procedura è chiamata *metodo di Galerkin*.

Più precisamente, assumiamo che le funzioni $w_k = w_k(x) \quad (k = 1, ...)$ siano liscie, che

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ sia una base ortonormale di } L^2((0, L))$$

e che

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ sia una base ortogonale di } H_0^1((0, L))$$

. Fissiamo un intero positivo m. Vogliamo cercare una funzione $u_m : [0, T] \to H_0^1((0, L))$ nella forma

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \tag{3.5}$$

dove vorremmo scegliere i coefficienti $d_m^k(t) \quad (0 \leq t \leq T, k = 1, ..., m)$ tali che

$$d_m^k(0) = (u_0, w_k) \quad (k = 1, ..., m) \tag{3.6}$$

e

$$(u'_m, w_k) + B[u_m, w_k; t] = 0 \quad (0 \leq t \leq T, k = 1, ..., m). \tag{3.7}$$

Dunque cerchiamo una funzione u_m nella forma (3.5) che soddisfi la proiezione (3.7) del problema (3.3) nel sottospazio finito dimensionale generato da $\{w_k\}_{k=1}^{m}$.

Teorema 3.1.1 (Costruzione delle soluzioni approssimate)**.** *Per ogni intero* $m = 1, 2, ...$ *esiste un'unica funzione* u_m *nella forma* (3.5) *che soddisfa* (3.6) *e* (3.7)*.*

Dimostrazione. Assumendo che u_m sia nella forma (3.5), allora dato che $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una base ortonormale di $L^2((0, L))$, otteniamo:

$$(u'_m(t), w_k) = (\sum_{j=1}^{m} {d_m^j}'(t) w_j, w_k) = {d_m^k}'(t)$$

Inoltre,

$$B[u_m, w_k; t] = B[(\sum_{j=1}^{m} d_m^j(t) w_j), w_k; t] = \sum_{j=1}^{m} d_m^j(t) B[w_j, w_k; t]$$

Poniamo $e^{k,j}(t) := B[w_j, w_k; t]$ $(k, j = 1, ..., m)$. Allora la condizione (3.7) diventa un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie:

$$d_m^k{}'(t) + \sum_{j=1}^{m} d_m^j(t) e^{k,j}(t) = 0 \quad (k = 1, ...m), \tag{3.8}$$

soggetto alle condizioni iniziali (3.6).
In accordo con la teoria standart per le equazioni differenziali ordinarie, esiste un'unica soluzione assolutamente continua $d_m(t) = (d_m^1(t), ..., d_m^m(t))$ che soddisfa (3.6) e (3.8) per quasi ogni tempo $0 \leq t \leq T$. E perciò, u_m definita da (3.5) risolve (3.7) per quasi ogni tempo $0 \leq t \leq T$. $\square$

Abbiamo così costruito una successione di funzioni che sono soluzione del problema approssimato, passando al limite per $m \to +\infty$ la successione converge alla soluzione del problema iniziale (3.3).
E' chiaro come ci sia uno stretto legame tra il metodo delle separazioni delle variabili e il metodo di Galerkin: nel primo caso abbiamo scelto una base specifica, cioè la base di Fourier formata da funzioni trigonometriche, mentre nel secondo caso abbiamo usato una generica base per $L^2((0, L))$. Inoltre l'idea di fondo rimane quella di separare le due variabili x e t: infatti le $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ sono funzioni di x e in (3.5) cerchiamo proprio una soluzione che sia combinazione lineare di $w_k(x)$ e $d^k(t)$.

3.1.3 Grandezza critica

Ritorniamo ora al problema visto nella sezione 3.1.1 per dare un'interpretazione fisica del risultato ottenuto.
Dalla formula (3.2) è facile notare che se $a < 0$ allora la soluzione $u = 0$, che è un punto di equilibrio, è asintoticamente stabile, poichè tutti i termini della serie convergono a zero con velocità esponenziale per $t \to +\infty$. Cosa succede invece quando $a > 0$? Cerchiamo una condizione sufficiente per la stabilità asintotica della soluzione zero. Imponiamo

$$D\left[\frac{a}{D} - \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right] < 0$$

Nel caso in cui $k = 1$:

$$\frac{a}{D} < \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow L^2 < \frac{D}{a}\pi^2 \Rightarrow L < \sqrt{\frac{D}{a}}\pi$$

La quantità $\sqrt{\frac{D}{a}}\pi$ è chiamata *Grandezza critica*, cerchiamo ora di dare una interpretazione della condizione

$$L < \sqrt{\frac{D}{a}}\pi \tag{3.9}$$

Quando l'intervallo non è abbastanza grande, gli individui (la cui densità è descritta dalla funzione u) raggiungono la frontiera troppo presto e sono soggetti alle condizioni al contorno ostili (le quali "uccidono" la concentrazione) molto più che al termine di reazione. Ovviamente un'altra possibile interpretazione può essere data considerando la grandezza di a e D. Più precisamente , quanto il rapporto $\frac{D}{a}$ è abbastanza grande, la diffusione è l'effetto dominante e contrasta l'effetto della reazione, portando la concentrazione degli individui al punto di equilibrio $u = 0$.

Nel caso in cui la condizione (3.9) non sia soddisfatta, il comportamento di $u(t, x)$ dipende dal dato iniziale u_0, e in particolare dai coefficienti A_k come si nota dalla formula di rappresentazione (3.2).

Possiamo però ottenere condizioni sufficienti per la stabilità asintotica della soluzione nulla meno forti. Infatti il dato iniziale u_0 potrebbe avere un certo numero di coefficienti di Fourier nulli, per esempio i primi $m > 1$ coefficienti, $A_1 = \cdots = A_m = 0$. In questo caso la condizione sufficiente per la stabilità asintotica è data da

$$L < (m+1)\sqrt{\frac{D}{a}}\pi \tag{3.10}$$

dato che il primo fattore esponenziale che appare in (3.2) sarebbe $e^{\left(\frac{a}{D} - \frac{((m+1)\pi)^2}{L^2}\right)t}$.

Difatti, la condizione (3.10) è meno forte di (3.9), e perciò la *Grandezza critica* è più grande: gli individui hanno bisogno di un termine di reazione molto maggiore per crescere esponenzialmente.

L'interpretazione di ciò è data in termini della serie di Fourier di u_0

$$u_0(x) = \sum_{k \leq 0} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Maggiore è l'ordine m, maggiore è il valore assoluto della derivata di u_0, e quindi il termine di diffusione diventa sempre più dominante (ricordiamo la legge di Fick!). Perciò, anche con un intervallo più grande, gli individui sono soggetti a una diffusione così grande che continuiamo a non vedere la crescita causata dalla reazione quando t diventa grande.

3.2 Problema a diffusione non lineare

In questa sezione sfrutteremo i seguenti teoremi

Teorema 3.2.1 (Lemma di Aubin-Lions)**.** *Sia T un numero positivo e Ω una aperto limitato di $\mathbb{R}$.*
Allora, l'insieme

$$\{\rho : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R};\ \rho \in L^2([0,T]; H^1(\Omega))\, e\, \rho_t \in L^2([0,T]; H^{-1}(\Omega))\}$$

è relativamente compatto in $L^2([0,T] \times \Omega)$.

Teorema 3.2.2 (Teorema di punto fisso di Schauder)**.** *Ogni operatore compatto definito da un dominio chiuso, limitato e convesso di uno spazio di Banach in se stesso ha almeno un punto fisso.*

Ci spostiamo ora al problema al contorno di Neumann con dato iniziale non lineare, cioè la dipendenza del coefficiente di diffusione non dipende più esplicitamente da (t,x), ma dipende invece dalla densità u, cioè dal dato incognito:

$$\begin{cases} u_t = ((D(u)u_x))_x & x \in (0,L), t \leq 0 \\ u(t,0)_x = u(t,L)_x = 0 & t \leq 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,L) \end{cases} \tag{3.11}$$

con $0 < d \leq D(u) \leq \bar{D}$, e $u_0 \geq r > 0$.
Per mostrare che esiste una soluzione a questo problema di Cauchy, utilizzeremo la stessa strategia adottata nel secondo capitolo nella sezione 2.3.1 per

l'equazione di reazione-diffusione non lineare sulla retta: costruiremo un operatore definito in un certo spazio funzionale, e dopodichè tramite un teorema di punto fisso mostreremo che la successione di funzioni ottenuta con questo metodo iterativo converge a un punto fisso che rappresenterà la soluzione al nostro problema.

Fissiamo $T \geq 0$. Data $\bar{u} \in L^2([0,T] \times (0,L))$, consideriamo il problema semi-lineare:

$$\begin{cases} u_t = ((D(\bar{u})u_x))_x & x \in (0,L), t \leq 0 \\ u(t,0)_x = u(t,L)_x = 0 & t \leq 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,L) \end{cases} \tag{3.12}$$

Questo è proprio il caso del problema considerato nella precedente sezione, dunque una soluzione di questo problema esiste, e siamo in grado di costruirla mediante il metodo di Galerkin.

Definiamo quindi A come l'operatore che ad ogni $\bar{u}$ associa la soluzione del relativo problema (3.12), quindi $A[\bar{u}] = u$. Il prossimo passo è cercare di restringerci a un insieme in cui possiamo applicare un teorema di punto fisso.

Moltiplichiamo l'equazione in (3.12) per u,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2(t,x) = u_t(t,x)u(t,x) = (D(\bar{u}(t,x))u_x)_x u$$

integriamo entrambi i membri su $(0,L)$ e integriamo per parti, sfruttando le condizioni al contorno di Neumann,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2(t,x)dx &= \int_0^L (D(\bar{u}(t,x))u_x)_x u dx \\ = [(D(\bar{u}(t,x))u_x)u]_0^L - &\int_0^L (D(\bar{u}(t,x))|u_x|^2 dx \leq -d\int_0^L |u_x|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Integrando su t otteniamo:

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_0^L u^2(s,x)dxds = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(t,x)dx - \frac{1}{2}\int_0^L u^2(0,x)dx \leq -d\int_0^t\int_0^L |u_x|^2 dxds$$

e perciò otteniamo:

$$\frac{1}{2}\int_0^L u^2(t,x)dx + d\int_0^t\int_0^L |u_x|^2 dxds \leq \frac{1}{2}\int_0^L u_0^2(x)dx. \tag{3.14}$$

Il risultato ottenuto ci permette di stimare u in $L^2([0,T];H^1((0,L)))$. In particolare otteniamo:

$$\int_0^T \int_0^L u^2(t,x)dxdt \leq T\|u_0\|^2_{L^2((0,L))}$$

A questo punto, assumendo

$$\|\bar{u}\|_{L^2([0,T]\times(0,L))} \leq M$$

e scegliendo

$$M \geq \sqrt{T}\|u_0\|_{L^2((0,L))}$$

otteniamo che la mappa A è ben definita dall'insieme

$$B_M = \{u \in L^2([0,T]\times(0,L)); \int_0^T \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2((0,L))}dt \leq M\}$$

in se stesso.

Una volta definito il dominio dell'operatore A, grazie al teorema 3.2.1 otteniamo che la mappa A definita in B_M e che manda $\bar{\rho}$ in ρ è precompatta. Questo significa che siamo nelle ipotesi del Teorema 3.2.2 di Schauder, infatti B_M è un sottospazio chiuso, limitato e convesso di uno spazio di Banach. Dunque il teorema di punto fisso di Schauder implica che esiste almeno un elemento $u \in L^2([0,T]\times(0,L))$ tale che $Au = u$, cioè una soluzione classica al problema (3.11).

Bibliografia

[1] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, A.M.S., Graduate Studies in Mathematics, 1998.

[2] M. Di Francesco, Dispense del corso Mathematical Biology: *Time-space population models: PDEs in biology*, 2018.

[3] C. Mascia & E. Montefusco, Dispense del corso Modelli Analitici per le Applicazioni: *Equazioni di Reazione-Diffusione*, 2011.