

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

SUPERFICI MINIMALI

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
LUCA MIGLIORINI

Presentata da:
NICOLA SECRETI

IV Sessione
Anno Accademico 2017-2018

Dedico questa tesi alla mia famiglia!

Introduzione

Questa tesi è dedicata allo studio delle superfici minimali nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Oggi questa teoria ha una vasta gamma di applicazioni in vari settori della ricerca, quali la chimica, la biologia e l'architettura. Le origini della teoria delle superfici minimali possono essere ricondotte al 1744 con gli studi di Eulero e Lagrange. Eulero mostrò che la catenoide è una superficie minimale, e Lagrange scrisse l'equazione alle derivate parziali che deve essere soddisfatta affinché una superficie della forma $z = F(x, y)$ sia minimale. Nel 1776, Meusnier riscoprì la catenoide e mostrò che anche l'elicoide è una superficie minimale. Il mondo matematico dovette aspettare poi più di 50 anni prima che fossero scoperti nuovi esempi da Scherk. Il problema che diede spunto e importanza allo studio di queste superfici fu il cosiddetto "Problema di Plateau", cioè quello di trovare, tra tutte le superfici aventi delle curve date come bordo, quella con area minima.

Il lavoro è stato suddiviso in tre capitoli: il primo capitolo è un semplice riepilogo di elementi e risultati di base, utili per la trattazione dell'argomento. In particolare si richiamano i concetti di superficie regolare, spazio tangente, area e curvatura media (geometria differenziale); e di funzioni olomorfe, armoniche (analisi complessa).

Il secondo capitolo presenta le superfici minimali, ne spiega le principali proprietà e ne espone qualche esempio. In particolare si fa attenzione alla differenza tra superfici minimali, così come sono definite, e le superfici di area minima, quelle che risolvono il "Problema di Plateau". Tra gli esempi presentati vi sono: elicoide e catenoide (isometriche tra loro), superfici di rotazione, Enneper e Scherk.

Nel terzo ed ultimo capitolo vi è una trattazione abbastanza approfondita dei legami tra superfici minimali e le funzioni olomorfe. Si introduce quindi una struttura complessa sullo spazio tangente, si definiscono le coordinate isoterme che sono fondamentali per collegare le superfici minimali con l'analisi complessa.

Indice

1	Preliminari e notazioni	3
1.1	Superfici regolari in \mathbb{R}^3 e spazio tangente	3
1.2	Prima e seconda forma fondamentale	4
1.3	Weingarten e curvatura media	5
1.4	Variabili complesse	6
2	Superfici minimali: prime proprietà ed esempi	9
2.1	Variazione normale: superfici minimali e superfici di area minima	9
2.2	Primi esempi: Elicoide e Catenoide	11
2.2.1	Elicoide	11
2.2.2	Catenoide	12
2.2.3	Isometria tra elicoide e catenoide	13
2.3	Superfici minimali di rotazione	14
2.4	Superficie di Enneper	16
2.5	Superfici di Monge e superficie minimale di Scherk	17
3	Superfici minimali e funzioni olomorfe	19
3.1	Struttura complessa sullo spazio tangente	19
3.2	Mappa di Gauss di una superficie minimale	20
3.3	Coordinate isoterme minimali	21
3.4	Superfici minimali in \mathbb{R}^n	22
3.5	Curve minimali	26
3.6	Superfici minimali coniugate e complessificazione	27
	Bibliografia	29

Capitolo 1

Preliminari e notazioni

1.1 Superfici regolari in \mathbb{R}^3 e spazio tangente

Una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ è una sottovarietà 2-dimensionale di \mathbb{R}^3 . In particolare si considereranno nella trattazione superfici parametrizzate.

Definizione 1.1.1 (Superficie parametrizzata). *Una superficie parametrizzata si ottiene tramite un'applicazione differenziabile*

$$\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dove U è un insieme aperto di \mathbb{R}^2 . La superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ sarà $\sigma(U)$.

Fissato un punto $p \in \Sigma$, $p = \sigma(u_0, v_0)$.

Si considera la curva:

$$(-a, a) \xrightarrow{\epsilon} U \xrightarrow{\sigma} \Sigma$$

che associa a $t \in (-a, a)$ un punto di Σ dato da $(\sigma \circ \epsilon)(t) = \sigma((u_0 + t, v_0))$.

Per $t = 0$ questa curva passa per p .

Essa si scrive come:

$$(\sigma \circ \epsilon)(t) = (x(u_0 + t, v_0), y(u_0 + t, v_0), z(u_0 + t, v_0))$$

Il suo vettore velocità in $t = 0$ è dato da:

$$\sigma_u(u_0, v_0) := (\sigma \circ \epsilon)'(0) = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)(u_0, v_0), \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)(u_0, v_0), \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)(u_0, v_0) \right).$$

Analogamente si scrive:

$$\sigma_v(u_0, v_0) := \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)(u_0, v_0), \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)(u_0, v_0), \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)(u_0, v_0) \right).$$

Definizione 1.1.2 (Superficie regolare). Si dice che la superficie parametrizzata $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è regolare in $p = \sigma(u_0, v_0)$ se $\sigma_u(u_0, v_0)$ e $\sigma_v(u_0, v_0)$ sono linearmente indipendenti.

σ è regolare se lo è in ogni suo punto.

Osservazione 1.1.1. La parametrizzazione di una superficie regolare è unica a meno di diffeomorfismi che cambiano l'insieme di partenza (aperto di \mathbb{R}^2) ma non la superficie stessa. In questo senso si dice che la superficie si può riparametrizzare senza modificarla. Da ciò segue che $\text{Span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Definizione 1.1.3 (Spazio tangente). Si chiama spazio tangente di una superficie parametrizzata da $\sigma : U \rightarrow \Sigma$ nel punto $p = \sigma(u_0, v_0)$ lo spazio bidimensionale così definito:

$$T_p\Sigma := \text{Span}\{\sigma_u(u_0, v_0), \sigma_v(u_0, v_0)\} \quad (1.1)$$

Questo spazio è l'ortogonale di $\sigma_u \times \sigma_v$: $T_p\Sigma = (\sigma_u \times \sigma_v)^\perp$

Definizione 1.1.4 (Versore normale).

$$U_p := \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \quad (1.2)$$

U_p è il versore normale in p . Esso non cambia per riparametrizzazioni che conservano l'orientazione.

Osservazione 1.1.2. Una curva sulla superficie Σ con parametrizzazione σ sarà una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ che si può scrivere nella forma: $\gamma(t) = \sigma \circ \eta(t)$ dove $\eta : (a, b) \rightarrow U$ è una curva differenziabile nel piano.

Fissato $p = \sigma(u_0, v_0)$, per ogni curva sulla superficie passante per p , $\gamma : (a, b) \rightarrow \Sigma$ t.c. $\gamma(t_0) = p$ si ha $\gamma'(t_0) \in T_p\Sigma$.

Definizione 1.1.5 (Mappa di Gauss). Scelta un'orientazione della superficie Σ si definisce "Mappa di Gauss" l'applicazione

$$\begin{aligned} \Gamma : \Sigma &\rightarrow S^2 \\ p &\longmapsto U_p \end{aligned}$$

che associa a $p \in \Sigma$ il versore normale in p .

1.2 Prima e seconda forma fondamentale

Per studiare la metrica e la geometria delle superfici risulta importante introdurre i concetti di prima e seconda forma fondamentale dello spazio tangente.

Per ogni $p \in \Sigma$ fissato si considera: $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, cioè la restrizione del prodotto scalare da \mathbb{R}^3 a $T_p\Sigma$. Questa si chiama prima forma fondamentale in p ed è quindi una forma bilineare simmetrica su $T_p\Sigma$ definita positiva. Dunque, scelta una parametrizzazione $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ della superficie, si definiscono:

Definizione 1.2.1 (Coefficienti 1 f. f.).

$$E := \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle \quad F := \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \quad G := \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \quad (1.3)$$

Sono funzioni C^∞ di (u, v) . E, F, G rappresentano i coefficienti della prima forma fondamentale.

Notazione 1.2.1. La prima forma fondamentale si abbrevia con 1f.f. e si scrive: $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. Inoltre la sua matrice, rispetto alla base σ_u, σ_v si indica con: $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

Nel calcolo (non riportato) della curvatura normale di una curva passante per p su una superficie, vengono introdotti dei nuovi coefficienti. Essi sono definiti come:

Definizione 1.2.2 (Coefficienti 2 f. f.).

$$L := \langle \sigma_{u^2}, U_p \rangle \quad M := \langle \sigma_{uv}, U_p \rangle \quad N := \langle \sigma_{v^2}, U_p \rangle \quad (1.4)$$

La forma bilineare simmetrica su $T_p\Sigma$ che, rispetto alla base σ_u, σ_v , ha come matrice: $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ si chiama seconda forma fondamentale.

Notazione 1.2.2. Essa si abbrevia con 2f.f. e si indica con $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

N.B. Per definire la 2f.f. si usa U_p , il quale dipende dall'orientazione della superficie.

Definizione 1.2.3 (Area). Fissato $p \in \Sigma$. Sia $D \subset U$ una regione limitata in \mathbb{R}^2 t.c. $\sigma(D) \subset \Sigma$ sia una regione vicina al punto p fissato. L'area della regione $\sigma(D)$ è:

$$\text{Area}(\sigma(D)) = \int_D \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dudv = \int_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv \quad (1.5)$$

Osservazione 1.2.1. La scrittura $EG - F^2$ corrisponde al determinante della 1 f. f., quindi è ≥ 0 .

1.3 Weingarten e curvatura media

Segue da risultati standard di algebra lineare che esiste un endomorfismo simmetrico

$$W : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$$

t.c.

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle Wa, b \rangle \quad \forall a, b \in T_p\Sigma.$$

Tale W si chiama l'endomorfismo di Weingarten. Per il teorema spettrale W ammette una base ortonormale di autovettori (in particolare due autovalori reali λ_1, λ_2). Le curve che sono tangenti alle direzioni degli autospazi (rette) hanno qualcosa di speciale, queste infatti sono le direzioni in cui la curvatura normale è massima o minima. Se $\lambda_1 = \lambda_2$ tutte le curve passanti per p hanno la stessa curvatura normale. λ_1, λ_2 si dicono le curvature principali nel punto p . Gli autospazi W_1, W_2 si dicono le direzioni principali in p . Se $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ si dice che p è un punto planare.

Definizione 1.3.1 (Curvatura media e gaussiana).

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\text{Tr}(W)}{2} =: H \quad (1.6)$$

H è la curvatura media della superficie nel punto p .

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(W) =: K \quad (1.7)$$

K è la curvatura gaussiana della superficie nel punto p .

Osservazione 1.3.1. Si può vedere facilmente che

$$H = \frac{LG - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (1.8)$$

1.4 Variabili complesse

Nell'ultimo capitolo si utilizzeranno nozioni della teoria delle variabili complesse, che richiamiamo qua:

Si considera un insieme $A \subset \mathbb{C}$ aperto e una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{C}$

Definizione 1.4.1 (Derivata complessa). La derivata complessa di F in $z \in A$:

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = F'(z)$$

Definizione 1.4.2 (Funzione olomorfa). $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ si dice olomorfa o analitica se $F'(z)$ esiste ed è continua.

Prime proprietà:

$A \subset \mathbb{C}$ aperto; $F, G : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe:

- $F + G$ olomorfa e $(F + G)' = F' + G'$
- $a \in \mathbb{C} \Rightarrow a \cdot F$ olomorfa e $(a \cdot F)' = a \cdot F'$
- $F \cdot G$ olomorfa e $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$
- se $F(z) \neq 0 \quad \forall z \in A \Rightarrow 1/F$ olomorfa e $(1/F)' = -F'/F^2$

Siccome $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$; $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ può essere vista come $(x, y) \mapsto F(x + iy)$.

Lemma 1.4.1. *Se F olomorfa $\implies F$ di classe $C^1(A)$ in senso reale e valgono:*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F' \quad \frac{\partial F}{\partial y} = iF'$$

cioè:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

Questa è la condizione necessaria affinché F sia differenziabile in senso complesso.

Teorema 1.4.1. *$A \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ aperto, $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ funzione di classe C^1 in senso complesso, allora:*

$$F \text{ olomorfa} \iff \frac{\partial F}{\partial y} = i \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

Tale condizione può essere scritta tramite le Equazioni di Cauchy-Riemann.

Teorema 1.4.2 (Equazioni di Cauchy-Riemann). $\forall F : A \rightarrow \mathbb{C}$ della forma $F = u + iv$ con $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $u = \text{Re}(F)$, $v = \text{Im}(F)$; si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

quindi

$$i \frac{\partial F}{\partial x} = i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Da ciò si ottiene:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial x} \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (1.9)$$

Definizione 1.4.3 (Funzioni armoniche). *Funzioni reali (u e v) di classe C^2 che soddisfano le condizioni $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$ sono armoniche, cioè funzioni il cui laplaciano è nullo:*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.10)$$

Il fatto che il laplaciano di tali funzioni sia nullo è una diretta conseguenza delle equazioni di Cauchy-Riemann.

In particolare:

Definizione 1.4.4 (Funzioni armoniche coniugate). *Si dice che u e v sono armoniche coniugate perchè sono rispettivamente parte reale e parte immaginaria di una funzione olomorfa.*

Si può dimostrare che per ogni funzione reale armonica esiste sempre una funzione armonica coniugata ad essa.

Capitolo 2

Superfici minimali: prime proprietà ed esempi

2.1 Variazione normale: superfici minimali e superfici di area minima

Intuitivamente una superficie minimale può essere vista come una superficie che risolve il problema (di Plateau) di area minima; in realtà l'equivalenza tra superfici di area minima e superfici minimali non è proprio corretta. Più precisamente una superficie di area minima è sicuramente una superficie minimale, ma non viceversa.

Definizione 2.1.1 (Superficie minimale). *Una superficie Σ con curvatura media H identicamente nulla è detta una superficie minimale.*

Osservazione 2.1.1. *Si osserva che se $H = \frac{\text{Tr}(W)}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 0$ allora i due autovalori di W hanno segno opposto; ma ciò implica che*

$$K = \det(W) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \leq 0.$$

Sia $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e si scelga una regione limitata $D \subset U$. Sia $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e sia $\epsilon > 0$. Denotiamo con $U(u, v)$ un campo di vettori t.c. $U(u, v)$ sia perpendicolare a $\sigma(D)$ in $\sigma(u, v)$ per ogni $(u, v) \in D$.

Definizione 2.1.2 (Variazione normale). *Si definisce variazione normale di σ e D , determinata da h , la mappa $X : (-\epsilon, \epsilon) \times D \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da:*

$$X_t(u, v) = \sigma(u, v) + th(u, v)U(u, v) \tag{2.1}$$

per $(u, v) \in D$, $-\epsilon < t < \epsilon$.

Segue dalla definizione che X_t è una parametrizzazione per ogni t con $-\epsilon < t < \epsilon$ con ϵ abbastanza piccolo.

Siano:

$$\begin{cases} E(t) = (X_t)_u \cdot (X_t)_u, \\ F(t) = (X_t)_u \cdot (X_t)_v, \\ G(t) = (X_t)_v \cdot (X_t)_v. \end{cases}$$

$E = E(0)$, $F = F(0)$, $G = G(0)$, e l'area di $X_t(D)$ è data da:

$$A(t) = \int \int_D \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} dudv. \quad (2.2)$$

Lemma 2.1.1. *Si ha:*

$$A'(0) = -2 \int \int_D hH \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (2.3)$$

dove H denota la curvatura media di Σ .

Dimostrazione. Derivando 2.1 rispetto a u e v si ha:

$$\begin{cases} (X_t)_u = \sigma_u + th_u U + thU_u, \\ (X_t)_v = \sigma_v + th_v U + thU_v. \end{cases} \quad (2.4)$$

Dalla definizione di $E(t), F(t), G(t)$ segue:

$$\begin{aligned} E(t) &= (X_t)_u \cdot (X_t)_u \\ &= (\sigma_u + th_u U + thU_u) \cdot (\sigma_u + th_u U + thU_u) \\ &= E + 2th\sigma_u \cdot U_u + O(t^2) \\ &= E - 2thL + O(t^2). \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} F(t) &= F - 2thM + O(t^2) \\ G(t) &= G - 2thN + O(t^2). \end{aligned}$$

Per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} E(t)G(t) - F(t)^2 &= (E - 2thL + O(t^2))(G - 2thN + O(t^2)) - (F - 2thM + O(t^2))^2 \\ &= EG - F^2 - 2th(EN - 2FM + GL) + O(t^2) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2), \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} &= \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2)} \\ &= \sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2). \end{aligned}$$

Dunque, da 2.2 si ha:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \int_D (\sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2)) dudv \\ &= \int \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv - 2t \int \int_D hH \sqrt{EG - F^2} dudv + O(t^2). \end{aligned}$$

Quando si deriva rispetto a t e si valuta l'espressione in $t = 0$ si ottiene 2.1.1. \square

Teorema 2.1.1. *Sia $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset U$ limitato.*

σ è minimale su $D \iff A'(0) = 0$ per una variazione normale di σ e $D \forall h : D \rightarrow \mathbb{R}$

Dimostrazione. Se $H \equiv 0 \implies$ 2.1.1 implica che $A'(0) = 0 \forall h$ differenziabile.

Viceversa, se $A'(0) = 0 \forall h$ differenziabile per assurdo $\exists q \in D$ t.c. $H(q) \neq 0$. Scegliamo h t.c. $h(q) = H(q)$ con $h \equiv 0$ fuori da un intorno di q su cui $hH(q) \geq 0$. \implies 2.3 implica che $A'(0) = -2 \int \int_D hH \sqrt{EG - F^2} dudv \leq 0$

$\implies H(q) = 0$

\implies siccome ciò vale per ogni q arbitrario, σ è minimale. \square

Quindi una superficie minimale è un punto critico della funzione Area $A(t)$. In generale potrebbe non essere un minimo, perchè non abbiamo detto niente a proposito della derivata seconda di $A(t)$. In questo senso diciamo che sicuramente una superficie che minimizza la funzione area è una superficie minimale (per l'implicazione verso sinistra del teorema precedente); d'altro lato non possiamo affermare con certezza che una superficie minimale è una superficie di area minima.

2.2 Primi esempi: Elicoide e Catenoide

2.2.1 Elicoide

Un elicoide è la superficie generata da una retta l unita ortogonalmente ad un'asse m t.c. l si muove lungo m e ruota; entrambi i movimenti avvengono a velocità costante. Ogni punto di l non in m descrive un'elica cilindrica.

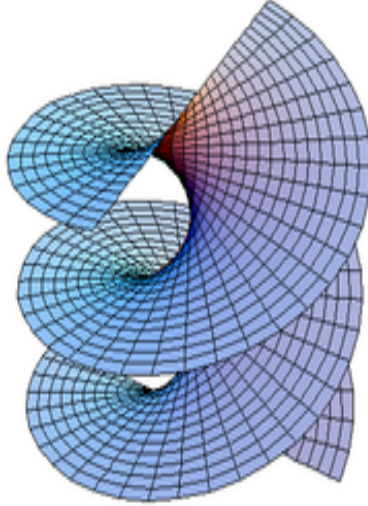


Figura 2.1: Elicoide

$$\text{elicoide}[a, b](u, v) = (av \cos u, av \sin u, bu) \quad (2.5)$$

L'elicoide è una superficie rigata cioè della forma: $\alpha(u) + v\gamma(u)$. La curva di base $\alpha(u) = (0, 0, bu)$ ha come traccia l'asse z , e la curva di direzione $\gamma(u) = a(\cos u, \sin u, 0)$ descrive una circonferenza.

2.2.2 Catenoide

La catenoide è una superficie di rotazione generata da una catenaria: $\text{catenaria}[a](t) = (a \cosh \frac{t}{a}, t)$.

$$\text{catenoide}[c](u, v) = (c \cos u \cosh \frac{v}{c}, c \sin u \cosh \frac{v}{c}, v) \quad (2.6)$$

È facile calcolare le curvatures principali della catenoide:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{c(\cosh \frac{v}{c})^2}.$$

La curvatura gaussiana è dunque:

$$K = \frac{-1}{c^2(\cosh \frac{v}{c})^4},$$

mentre la curvatura media H si annulla. Da ciò segue che la catenoide è una superficie minimale.

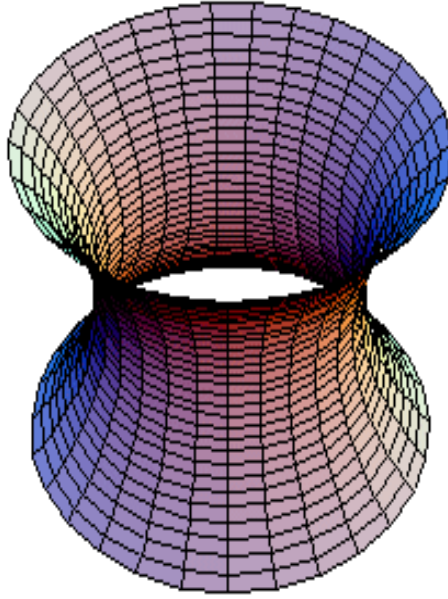


Figura 2.2: Catenoide

2.2.3 Isometria tra elicoide e catenoide

Queste due superfici costituiscono i punti iniziale e finale di una deformazione attraverso superfici minimali isometriche. Per ogni t con $0 \leq t \leq \pi/2$, si definisce:

$$z[t](u, v) = \cos t(\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u) + \sin t(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v). \quad (2.7)$$

L'esatta relazione tra questa famiglia di superfici e l'elicoide e la catenoide è provata da queste equazioni:

$$z[0](u, v) = \text{elicoide}[1, 1](u - \pi/2, \sinh v) + (0, 0, \pi/2), \quad (2.8)$$

$$z[\pi/2](u, v) = \text{catenoide}[1](u, v). \quad (2.9)$$

Inoltre elicoide e catenoide sono le uniche superfici della famiglia $z[t]$ prive di autointersezioni.

Teorema 2.2.1. *La famiglia 1-parametrica di superfici 2.7 è una deformazione da elicoide a catenoide. Inoltre ogni $z[t]$ è una superficie minimale che è localmente isometrica a $z[0]$. In particolare l'elicoide è localmente isometrico alla catenoide.*

Dimostrazione. Siano $E(t), F(t), G(t)$ i coefficienti della prima forma fondamentale di $z[t]$. Con un semplice calcolo si può mostrare che:

$$E(t) = \cosh^2 v = G(t), \quad F(t) = 0$$

In particolare, $E(t), F(t), G(t)$ sono costanti in t . Questo ci porta al risultato. \square

Osservazione 2.2.1. *Le superfici esterne delle regioni isometriche tra elicoide e catenoide includono eliche e circonferenze, con le loro rispettive parameterizzazioni:*

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= (\sinh 1 \sin u, -\sinh 1 \cos u, u), & 0 \leq u \leq 2\pi, \\ \gamma(u) &= (\cosh 1 \cos u, \cosh 1 \sin u, 1), & 0 \leq u \leq 2\pi.\end{aligned}$$

La lunghezza dell'elica è:

$$\int_0^{2\pi} |\alpha'(u)| du = 2\pi \sqrt{\sinh^2 1 + 1},$$

e quella della circonferenza è:

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(u)| du = 2\pi \cosh 1.$$

Il fatto che queste due lunghezze siano uguali conferma che l'elica viene deformata in modo isometrico in una circonferenza.

2.3 Superfici minimali di rotazione

La catenoide è l'unica superficie della famiglia $z[t]$ che è anche di rotazione. Si vedrà che il piano e la catenoide sono le uniche superfici minimali di rotazione.

Teorema 2.3.1. *Una superficie di rotazione Σ minimale è contenuta o in un piano o in una catenoide.*

Dimostrazione. Sia σ la parametrizzazione di Σ e sia $\alpha = (\varphi, \psi)$ la curva profilo. Ci sono tre casi:

Caso 1. ψ' è identicamente 0. Quindi ψ è costante, così che α è una retta orizzontale e Σ è parte di un piano perpendicolare all'asse di rotazione.

Caso 2. ψ' non è mai 0. Allora il teorema della funzione inversa ci dice ψ ha un'inversa ψ^{-1} . Si definisca:

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\psi^{-1}(t)) = (h(t), t),$$

dove $h = \varphi \circ \psi^{-1}$, e si ottiene una nuova parametrizzazione della curva:

$$y(u, v) = (h(v) \cos u, h(v) \sin u, v).$$

Si nota che y è parte di una catenoide. Le curvature principali sono:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{L}{E} = \frac{-1}{h\sqrt{h'^2+1}}, \\ \lambda_2 = \frac{N}{G} = \frac{h''}{(h'^2+1)^{3/2}}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Assumendo che $H = 0$ e 2.10, segue che h deve soddisfare l'equazione differenziale:

$$h''h = 1 + h'^2. \quad (2.11)$$

Per risolvere 2.11, si riscrive prima come:

$$\frac{2h'h''}{1+h'^2} = \frac{2h'}{h}.$$

Integrando da entrambi i lati:

$$\log(1+h'^2) = \log(h^2) - \log(c^2)$$

per qualche costante $c \neq 0$, e applicando l'esponenziale si ottiene:

$$1+h'^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2. \quad (2.12)$$

L'equazione differenziale di primo ordine 2.12 può essere scritta come:

$$\frac{h'/c}{\sqrt{(h/c)^2 - 1}} = \frac{1}{c}. \quad (2.13)$$

Entrambi i membri dell'equazione 2.13 possono essere integrate:

$$\arccos \frac{h}{c} = \frac{v}{c} + b.$$

Quindi risolvendo l'equazione 2.11 si ottiene:

$$h(v) = c \cosh\left(\frac{v}{c} + b\right),$$

così che Σ è parte di una catenoide.

Caso 3. ψ' è zero in alcuni punti, ma non zero in altri. Questo caso non può sussistere, perchè si supponga, per esempio, che $\psi'(v_0) = 0$, ma $\psi'(v) > 0$ per $v < v_0$. Dal Caso 2, il profilo della curva è una catenaria per $v < v_0$, la cui inclinazione è data da φ'/ψ' . Allora $\psi'(v_0) = 0$ implica che l'inclinazione della curva diventa infinito in v_0 . Ma questo è impossibile poichè il profilo della catenaria è il grafico della funzione \cosh , che è derivabile ovunque.

□

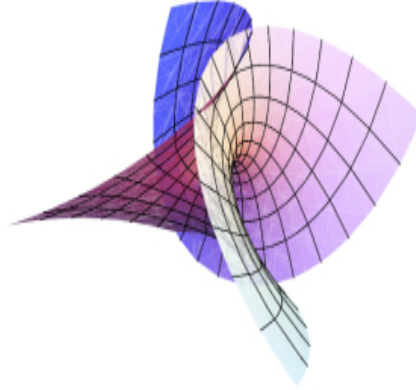


Figura 2.3: Superficie di Enneper

2.4 Superficie di Enneper

Una delle più semplici superfici minimali è quella trovata da Enneper nel 1864, definita:

$$\text{enneper}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

È facile verificare direttamente che H è identicamente 0. Prima di tutto:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= (1 - u^2 + v^2, -2uv, 2u) \\ \sigma_v &= (2uv, -1 - u^2 + v^2, -2v), \end{aligned}$$

da cui:

$$E = (1 + u^2 + v^2)^2 = G, \quad F = 0 \tag{2.14}$$

Il fatto che la curvatura media si annulli deriva da 2.14 e dalle equazioni:

$$\sigma_{uu} = -2(u, v, -1) = -\sigma_{vv}.$$

Nonostante la semplicità della sua definizione, la superficie di Enneper è complicata da studiare a causa della sua autointersezione.

2.5 Superfici di Monge e superficie minimale di Scherk

Definizione 2.5.1. Una superficie di Monge ha la parametrizzazione $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ della forma:

$$\sigma(u, v) = (u, v, h(u, v)),$$

dove U è un aperto di \mathbb{R}^2 e $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile.

Una superficie fatta così è necessariamente regolare perchè la matrice dello Jacobiano ha sempre rango 2. Essa rappresenta il grafico in tre dimensioni della funzione h .

Lemma 2.5.1. Per una superficie di Monge $(u, v) \mapsto (u, v, h(u, v))$ si ha:

$$\begin{aligned} E &= 1 + h_u^2, & F &= h_u h_v, & G &= 1 + h_v^2, \\ L &= \frac{h_{uu}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}}, & M &= \frac{h_{uv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}}, & N &= \frac{h_{vv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}}, \\ K &= \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2}, & H &= \frac{(1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv}}{2(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Quindi una superficie di Monge è minimale se e solo se:

$$(1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv} = 0. \quad (2.15)$$

Teorema 2.5.1. Se una superficie di Monge $\sigma : U \rightarrow \Sigma$ con $h(u, v) = f(u) + g(v)$ è una superficie minimale, allora o Σ è parte di un piano o esistono a, c_1, c_2, c_3, c_4 , con $a \neq 0$ t.c.

$$f(u) = -\frac{1}{a} \log(\cos(au + c_1)) + c_2, \quad (2.16)$$

$$g(v) = \frac{1}{a} \log(\cos(av + c_3)) + c_4. \quad (2.17)$$

Dimostrazione. Se $h(u, v) = f(u) + g(v)$, si ha:

$$h_{uu} = f''(u), \quad h_{uv} = 0, \quad h_{vv} = g''(v).$$

Così l'equazione 2.15 si riduce a:

$$\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = \frac{-g''(v)}{1 + g'(v)^2}. \quad (2.18)$$

Siccome u e v sono indipendenti, entrambi i membri dell'equazione 2.18 devono essere uguali a una costante. Chiamiamola a . Se $a = 0$ allora sia f che g sono lineari così che Σ è parte di un piano; altrimenti le due equazioni

$$\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = a = \frac{-g''(v)}{1 + g'(v)^2}$$

sono facilmente risolvibili integrando due volte. Il risultato è quello del teorema. \square

Dal teorema precedente si può definire la superficie minimale di Scherk:

$$\text{scherk}[a](u, v) = \left(u, v, \frac{1}{a} \log\left(\frac{\cos av}{\cos au}\right)\right).$$

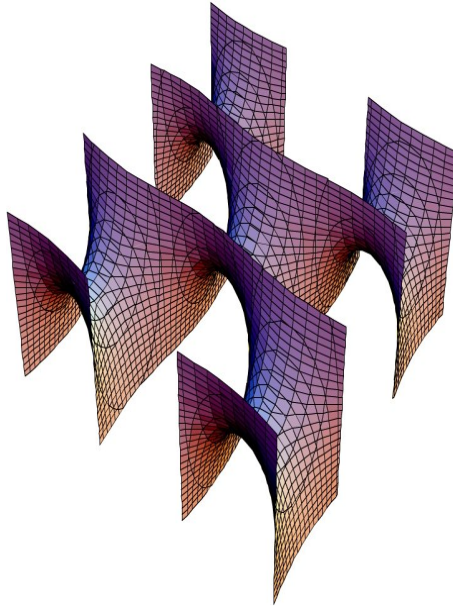


Figura 2.4: Superficie di Scherk

Capitolo 3

Superfici minimali e funzioni olomorfe

3.1 Struttura complessa sullo spazio tangente

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Cosa si deve fare per definire su V una struttura di spazio vettoriale su \mathbb{C} ?

Se $\dim(V)$ è dispari non si può fare, perchè $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Se invece $\dim(V)$ è pari: in pratica si deve definire il prodotto tra un generico $a + ib \in \mathbb{C}$ e un elemento $v \in V$.

$$(a + ib) \cdot v = av + ibv$$

Dal punto di vista reale la moltiplicazione per i è un endomorfismo su V . Sia $F \in \text{End}(V)$ e definisco: $(a + ib)v = av + F(bv)$ Allora:

$$\begin{aligned} i(iv) &= i^2v = -v = F^2(v) \\ \implies F^2(v) &= -v \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Quindi dare una struttura di spazio su \mathbb{C} ad uno spazio su \mathbb{R} equivale a scegliere un endomorfismo F t.c. $F^2 = -I$. Una direzione dell'equivalenza l'abbiamo vista, per l'altra basta controllare che tutte le proprietà di spazio vettoriale valgano.

Definizione 3.1.1 (Superficie orientabile). $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie orientabile se per ogni $p \in \Sigma$ si ha che $T_p\Sigma$ ha una struttura complessa $J_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ t.c. $p \rightarrow J_p$ è continua.

Definizione 3.1.2 (Superficie orientata). Una superficie orientata è una superficie orientabile fatta una scelta di $p \rightarrow J_p$.

Teorema 3.1.1. Una superficie è orientabile $\iff \exists$ una mappa continua $p \rightarrow U_p$ che assegna a p un versore normale a $T_p\Sigma$

Dimostrazione. Abbiamo $p \longrightarrow U_p \in (T_p\Sigma)^\perp$. Si definisce $J_p : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$ con $J_p v_p = U(p) \times v_p$. Otteniamo che $J_p v_p \in T_p\Sigma$ e che J_p è continuo. Viceversa, abbiamo $p \longrightarrow J_p$ continuo $\implies U_p = \frac{v_p \times J_p v_p}{\|v_p \times J_p v_p\|}$ con $v_p \neq 0$. $U(p) \perp v_p$ e $J_p v_p$ continuo. \square

3.2 Mappa di Gauss di una superficie minimale

Definizione 3.2.1 (Mappa conforme). *Siano Σ_1, Σ_2 superfici regolari. Una mappa $\Phi : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ è chiamata una mappa conforme se esiste una funzione differenziabile e positiva $\lambda : \Sigma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$\|\Phi(v_p)\| = \lambda(p) \|v_p\| \quad (3.1)$$

per ogni $p \in \Sigma_1$ e per ogni v_p vettore tangente a Σ_1 in p .

Siano Σ_1, Σ_2 superfici orientate e regolari in \mathbb{R}^3 (vale anche in \mathbb{R}^n). Siano J_1, J_2 le strutture complesse relative a Σ_1, Σ_2 . Una mappa $\Phi : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ è chiamata:

- Mappa complessa se: $\Phi \circ J_1 = J_2 \circ \Phi$
- Mappa anticomplessa se: $\Phi \circ J_1 = -J_2 \circ \Phi$

Lemma 3.2.1. *Sia $\Phi : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ una mappa complessa o anticomplessa t.c. applicata allo spazio tangente non è mai zero. Allora Φ è una mappa conforme.*

Teorema 3.2.1. *La mappa di Gauss di una superficie minimale orientata $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ è anticomplessa e:*

$$J_p W_p = -W_p J_p \quad \forall p \in \Sigma.$$

dove W_p è l'endomorfismo di Weingarten in p .

Dimostrazione. Sia $p \longrightarrow U_p$ la mappa di Gauss di Σ . Sia $p \in \Sigma$, e sia e_1, e_2 una base ortonormale di $T_p\Sigma$ che diagonalizza W_p . Inoltre siano λ_1, λ_2 le corrispondenti curvatures principali. Il versore U_p determina una struttura complessa J_p su $T_p\Sigma$, che soddisfa $J_p e_1 = \pm e_2$ e $J_p e_2 = \mp e_1$. Usiamo il fatto che Σ sia minimale, quindi che $\lambda_1 = -\lambda_2$, per calcolare:

$$J_p W_p e_1 = J_p \lambda_1 e_1 = \pm \lambda_1 e_2 = \mp \lambda_2 e_2 = \mp W_p e_2 = -W_p J_p e_1$$

Analogamente si ottiene: $J_p W_p e_2 = -W_p J_p e_2$. Ma sappiamo che W_p è l'opposto della mappa tangente di U in p ; ciò implica che la Mappa di Gauss è anticomplessa. \square

3.3 Coordinate isoterme minimali

Definizione 3.3.1 (Coordinate isoterme). Una parametrizzazione $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è isoterma se $\exists \lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile t.c.

$$\sigma_u \cdot \sigma_u = \sigma_v \cdot \sigma_v = \lambda^2 \quad e \quad \sigma_u \cdot \sigma_v = 0 \quad (3.2)$$

La funzione λ si chiama funzione scalare di σ .

Lemma 3.3.1. Una parametrizzazione regolare $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è isoterma \iff è conforme, se considerata come una mappa: $U \rightarrow \sigma(U)$.

Teorema 3.3.1. Sia Σ una superficie, supponiamo ds^2 la metrica (1 f. f.) su Σ . Sia $p \in \Sigma$. Allora esiste un aperto U di \mathbb{R}^2 e una parametrizzazione isoterma $\sigma : U \rightarrow \Sigma$ t.c. $p \in \sigma(U)$ e

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2).$$

Lemma 3.3.2. Sia $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regolare isoterma con funzione scalare λ e curvatura media H . Allora abbiamo:

$$\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 2\lambda^2 HU, \quad (3.3)$$

dove $U = (\sigma_u \times \sigma_v) / \|\sigma_u \times \sigma_v\|$ è il versore normale.

Dimostrazione. Siccome σ è isoterma, possiamo differenziare le equazioni 3.2 ottenendo:

$$\sigma_{uu} \cdot \sigma_u = \sigma_{uv} \cdot \sigma_v \quad e \quad \sigma_{vv} \cdot \sigma_u = -\sigma_{vu} \cdot \sigma_v.$$

Quindi,

$$(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot \sigma_u = \sigma_{uv} \cdot \sigma_v - \sigma_{vu} \cdot \sigma_v = 0.$$

Perciò $(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot \sigma_u = 0$. Segue che $\sigma_{uu} + \sigma_{vv}$ è perpendicolare a Σ , e quindi multiplo di U . Per scoprire che multiplo sia ci rifacciamo alla formula 1.8 e all'assunzione che σ sia isoterma, calcolando:

$$H = \frac{LG - 2MF + EN}{2(EG - F^2)} = \frac{L + N}{2\lambda^2} = \frac{(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot U}{2\lambda^2},$$

così otteniamo il risultato 3.3. □

Notazione 3.3.1 (Laplaciano). Denotiamo con $\Delta = \frac{\delta^2}{\delta u^2} + \frac{\delta^2}{\delta v^2}$ il Laplaciano di una funzione:

$$\Delta \sigma = \sigma_{uu} + \sigma_{vv}$$

Corollario 3.3.1. Una parametrizzazione isoterma minimale $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ soddisfa:

$$\Delta \sigma = 0$$

e le sue componenti sono funzioni armoniche.

Come diretta conseguenza del lemma 3.3 si ottiene:

Corollario 3.3.2. Una superficie regolare e isoterma $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una superficie minimale se e solo se essa è armonica.

3.4 Superfici minimali in \mathbb{R}^n

Abbiamo finora definito e parlato solo di superfici minimali in \mathbb{R}^3 . Il corollario precedente ci permette di estendere questo concetto anche a tutti gli $\mathbb{R}^n \quad \forall n$.

Definizione 3.4.1 (Superficie minimale isoterma). *Una superficie minimale isoterma $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha una parametrizzazione sia isoterma che armonica.*

Ora descriviamo un metodo per ottenere una famiglia di superfici minimali isometriche. Questa costruzione generalizza la deformazione tra elicoide e catenoide trattata nel Capitolo 2.

Definizione 3.4.2 (Superfici armoniche coniugate). *Due superfici $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dicono armoniche coniugate se, componente per componente, hanno parametrizzazioni armoniche coniugate nel senso di 1.4.4.*

Definizione 3.4.3 (Famiglia associata). *Siano $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ superfici armoniche coniugate isoterme. La famiglia associata a x e y è la famiglia 1-parametrica $z[t] : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da:*

$$z[t] = \operatorname{Re}(e^{-it}(x + iy)) = x \cos t + y \sin t \quad (3.4)$$

Lemma 3.4.1. *Siano $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ superfici armoniche coniugate isoterme. Allora la famiglia associata $t \rightarrow z[t]$ a x e y soddisfa:*

$$\begin{cases} z[t]_u = x_u \cos t - x_v \sin t, \\ z[t]_v = x_u \sin t + x_v \cos t, \\ z[t]_{uu} = x_{uu} \cos t - x_{uv} \sin t = -z[t]_{vv}, \\ z[t]_{uv} = x_{uu} \sin t + x_{uv} \cos t. \end{cases} \quad (3.5)$$

Inoltre, $z[t]$ e $z[t + \frac{\pi}{2}]$ sono armoniche coniugate per ogni t .

Dimostrazione. Le equazioni 3.5 sono conseguenza di 3.4 e delle equazioni di Cauchy-Riemann.

La seconda parte del lemma può essere provata come segue:

$$z[t]_u = \operatorname{Re}(e^{-it}(x_u + iy_u)) = \operatorname{Re}(e^{-it}(y_v - ix_v)) = \operatorname{Re}(e^{-i(t+\pi/2)}(x_v + iy_v)) = z[t + \frac{\pi}{2}]_v.$$

Analogamente, $z[t]_v = -z[t + \frac{\pi}{2}]_u$. □

Teorema 3.4.1. *Siano $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ superfici armoniche coniugate isoterme, e sia $t \mapsto z[t]$ la famiglia associata definita in 3.4. Allora $z[t]$ è una superficie minimale isoterma per ogni t , e tutte le superfici della famiglia hanno la stessa prima forma fondamentale.*

Diciamo che $z[t]$ è una deformazione isometrica da x a y .

Dimostrazione. Che $z[t]$ sia armonica segue dalla terza equazione di 3.5. Siano $E(t), F(t), G(t)$ i coefficienti della prima forma fondamentale di $z[t]$. Usiamo le prime due equazioni di 3.5. Intanto:

$$E(t) = z[t]_u \cdot z[t]_u = (x_u \cos t - x_v \sin t) \cdot (x_u \cos t - x_v \sin t).$$

Siccome $x_u \cdot x_u = x_v \cdot x_v = E$ e $x_u \cdot x_v = 0$, si ottiene $E(t) = x_u \cdot x_u = E$. Analogamente, $F(t) = 0$ e $G(t) = x_v \cdot x_v = G$ per ogni t . Da ciò segue che ogni $z[t]$ è isoterma, e ha la stessa prima forma fondamentale di x . \square

Lemma 3.4.2. *Siano $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ armoniche coniugate isoterme.*

1. *La normale unitaria $U(t)$ di $z[t]$ in $z[t](u, v)$ è parallela a U , normale unitaria di x in (u, v) .*
2. *Lo spazio tangente a $z[t]$ in $z[t](u, v)$ è parallelo allo spazio tangente a x in (u, v) .*

Dimostrazione. La prima parte segue dalla formula:

$$z[t]_u \times z[t]_v = x_u \times x_v, \quad t \in \mathbb{R}$$

questa è conseguenza di 3.5. Ovviamente, la prima parte implica la seconda. \square

Corollario 3.4.1. *Tutti i membri della famiglia associata hanno la stessa mappa di Gauss.*

A differenza dei risultati appena ottenuti, l'endomorfismo di Weingarten in generale dipende da t . Siano $L(t), M(t), N(t)$ i coefficienti della seconda forma fondamentale di $z[t]$, e sia $W(t)$ il corrispondente endomorfismo di Weingarten.

Lemma 3.4.3. *La seconda forma fondamentale di $z[t] : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è collegata a quella di x dalle formule:*

$$\begin{cases} L(t) = -N(t) & = L \cos t - M \sin t, \\ M(t) & = L \sin t + M \cos t. \end{cases} \quad (3.6)$$

Inoltre,

$$\begin{cases} W(t)z[t]_u = Wx_u, \\ W(t)z[t]_v = Wx_v. \end{cases} \quad (3.7)$$

Dimostrazione. Usiamo la terza equazione di 3.5 per calcolare

$$L(t) = z[t]_{uu} \cdot U(t) = (x_{uu} \cos t - x_{uv} \sin t) \cdot U = L \cos t - M \sin t,$$

e il resto di 3.6 segue anch'esso da 3.5. Combinando le equazioni di Weingarten per la parametrizzazione isoterma $z[t]$ e il teorema precedente con 3.5 e 3.6, si ottiene:

$$\begin{aligned}\lambda^2 W(t)z[t]_u &= L(t)z[t]_u + M(t)z[t]_v \\ &= (L \cos t - M \sin t)(x_u \cos t - x_v \sin t) + (L \sin t + M \cos t)(x_u \sin t + x_v \cos t) \\ &= Lx_u + Mx_v = Wx_u.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Analogamente, $W(t)z[t]_v = Wx_v$. \square

Ora siamo in grado di mettere giù una semplice formula per l'endomorfismo di Weingarten $W(t)$ in termini dell'endomorfismo W e la struttura complessa J della superficie minimale isoterma x .

Teorema 3.4.2. *L'endomorfismo $W(t)$ di $z[t]$ è collegato all'endomorfismo W di x dalla formula*

$$W(t) = (\cos t)W + (\sin t)W \circ J.\tag{3.9}$$

In particolare l'endomorfismo $W(\frac{\pi}{2})$ del coniugato di x è uguale alla composizione $W \circ J$.

Dimostrazione. Da 3.8 e 3.5 otteniamo

$$\begin{cases} Wx_u = W(t)x_u \cos t - W(t)x_v \sin t, \\ Wx_v = W(t)x_u \sin t + W(t)x_v \cos t. \end{cases}$$

Risolviendo per $W(t)x_u$ e $W(t)x_v$, e ponendo $x_v = Jx_u$, si ottiene

$$\begin{cases} W(t)x_u = Wx_u \cos t + WJx_u \sin t, \\ W(t)x_v = WJx_v \sin t + Wx_v \cos t. \end{cases}\tag{3.10}$$

Ovviamente, 3.10 è equivalente a 3.9 quindi il risultato è ottenuto. \square

Definizione 3.4.4 (Derivata complessa). *La derivata complessa di una parametrizzazione $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è data da*

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}(x_u - ix_v),$$

dove $z = u + iv$.

Data x , scriviamo

$$(\phi_1[x], \dots, \phi_n[x]) = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - i\frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u} - i\frac{\partial x_n}{\partial v}\right).\tag{3.11}$$

Con questa notazione, è facile verificare le seguenti identità:

$$4 \sum_{k=1}^n \phi_k[x]^2 = x_u \cdot x_u - x_v \cdot x_v - 2ix_u \cdot x_v = E - G - 2iF,\tag{3.12}$$

e

$$4 \sum_{k=1}^n |\phi_k[x]|^2 = x_u \cdot x_u + x_v \cdot x_v = E + G. \quad (3.13)$$

Il prossimo teorema mostra che una superficie minimale isoterma dà luogo a una n -upla di funzioni olomorfe t.c. la somma dei quadrati delle componenti è uguale a zero. Questa descrizione alternativa delle parametrizzazioni isoterme ci dà molte informazioni utili, perchè ci permette di usare i teoremi dell'analisi complessa.

Teorema 3.4.3. *Sia $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione. Allora*

1. x è armonica se e solo se 3.11 è olomorfa;
2. x è isoterma se e solo se $\sum_{k=1}^n \phi_k[x]^2 = 0$;
3. se x è isoterma, allora x è regolare se e solo se $\sum_{k=1}^n |\phi_k[x]|^2 \neq 0$.

Vicerversa, supponiamo U semplicemente connesso, e siano $\phi_1, \dots, \phi_n : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ funzioni olomorfe che soddisfano:

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2 = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^n |\phi_k|^2 \neq 0. \quad (3.14)$$

Allora esiste una parametrizzazione regolare minimale e isoterma $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ che soddisfa 3.11.

Dimostrazione. Il primo punto segue dal fatto che le equazioni di Cauchy-Riemann per $\partial x / \partial z$ sono $x_{uu} + x_{vv} = 0$ e $x_{uv} - x_{vu} = 0$. Poi il secondo punto è una conseguenza di 3.12, e il terzo punto segue da 3.13.

Per provare il viceversa, si suppone che le funzioni olomorfe ϕ_j soddisfano 3.14. Si ponga

$$x = (\operatorname{Re} \int \phi_1(z) dz, \dots, \operatorname{Re} \int \phi_n(z) dz).$$

La semplice connessione garantisce che gli integrali sono ben definiti e funzioni olomorfe, e le loro parti reali sono armoniche. Inoltre, 3.12 implica che x è isoterma, e 3.13 implica che x è regolare. Così x è una parametrizzazione regolare minimale isoterma. \square

Lemma 3.4.4. *Siano $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizzazioni armoniche coniugate. Allora la mappa $x + iy : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ è olomorfa, e*

$$2 \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x + iy).$$

Dimostrazione. La prima parte segue dal fatto che $x + iy$ è una n-upla di funzioni complesse in una variabile, ognuna delle quali è olomorfa.

Per la seconda parte calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(x + iy) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)(x + iy) \\ &= \frac{1}{2}(x_u - ix_v + y_v + iy_u) = x_u - ix_v = 2\frac{\partial x}{\partial z}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

□

3.5 Curve minimali

In questa sezione studiamo funzioni che hanno alcune delle proprietà delle derivate complesse di una parametrizzazione minimale isoterma.

Definizione 3.5.1 (Curva minimale). *Sia U un aperto di \mathbb{C} . Una curva minimale è una funzione olomorfa $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ tale che*

$$\Psi'(z) \cdot \Psi'(z) = 0\tag{3.16}$$

per $z \in U$. Se poi $\Psi'(z) \cdot \overline{\Psi'(z)}$ non è mai zero per $z \in U$, diciamo che Ψ è una curva minimale regolare.

Data una curva minimale $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$, le parametrizzazioni $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definite da

$$x(u, v) = \operatorname{Re}(\Psi(u + iv)) \quad e \quad y(u, v) = \operatorname{Im}(\Psi(u + iv))\tag{3.17}$$

sono armoniche coniugate isoterme. Le chiamiamo armoniche coniugate isoterme associate a Ψ . Esse determinano anche una famiglia associata $z[t] : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da:

$$z[t](u, v) = \operatorname{Re}(e^{-it}\Psi(u + iv))\tag{3.18}$$

esattamente come si è già detto.

Definizione 3.5.2 (Mappa di Gauss di una curva minimale). *La mappa di Gauss di una curva minimale Ψ è la mappa di Gauss di qualsiasi membro di una famiglia associata a Ψ .*

Lemma 3.5.1. *La curvatura Gaussiana di una curva minimale $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ è data da:*

$$K = \frac{-4(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}|^2)}{\|\Psi'\|^6}.$$

3.6 Superfici minimali coniugate e complessificazione

Sappiamo che una parametrizzazione minimale isoterma $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è la parte reale di una n -upla (ψ_1, \dots, ψ_n) di funzioni olomorfe. Come determiniamo esplicitamente (ψ_1, \dots, ψ_n) da x ? Prima ci si chiede come determinare una funzione olomorfa $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che la parte reale di F è una funzione armonica data $h : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ovviamente, F è unica a meno di una costante immaginaria.

Lemma 3.6.1. *Sia $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica dove U è un aperto di $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, e sia $z_0 = u_0 + iv_0 \in U$.*

1. *Sia $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $\operatorname{Re}(F(u + iv)) = h(u, v)$ e $\operatorname{Im}(F(z_0)) = 0$. Allora*

$$F(z) = 2h\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - h(u_0, v_0). \quad (3.19)$$

2. *Viceversa, se F è definita come in 3.19, allora $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $F(z_0) = h(u_0, v_0)$.*

Dimostrazione. Per il primo punto analizziamo il caso $z_0 = 0$. Definiamo G con $G(z) = \overline{F(\bar{z})}$. Allora G è olomorfa e possiamo esprimere h in termini di F e G :

$$h(u, v) = \frac{1}{2}(F(u + iv) + \overline{F(u + iv)}) = \frac{1}{2}(F(u + iv) + G(u - iv)).$$

Siccome h è armonica, può essere scritta come una serie di potenze di secondo grado in ogni punto $p \in U$. Ora, siccome z è una variabile complessa, possiamo calcolare

$$h\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{1}{2}(F(z) + G(0)) = \frac{1}{2}(F(z) + h(0, 0)).$$

Per il secondo punto calcoliamo

$$F_u = h_u - ih_v \quad e \quad F_v = ih_u + h_v.$$

Inoltre,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0,$$

e F soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann. □

Sia $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione isoterma minimale e scriviamo

$$x(u, v) = (h_1(u, v), \dots, h_n(u, v)).$$

Avendo fissato $(u_0, v_0) \in U$, possiamo applicare il lemma precedente a ogni componente h_j , così da ottenere una funzione olomorfa ψ_j tale che

$$h_j(u, v) = \operatorname{Re}(\psi_j(u + iv)) \quad e \quad 0 = \operatorname{Im}(\psi_j(z_0)). \quad (3.20)$$

Questo ci permette definire:

Definizione 3.6.1 (Complenessificazione). *La mappa $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ le cui componenti soddisfano 3.20 è chiamata complenessificazione di x .*

Il punto chiave è che ogni componente di x è la parte reale della corrispondente componente di Ψ . L'ambiguità di questa condizione è risolta dal richiedere che Ψ coincida con x in z_0 .

Corollario 3.6.1. *Sia $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione minimale isoterma, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ contenente $(0, 0)$. Sia $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ la complenessificazione di x tale che $\operatorname{Im}(\Psi(0)) = 0$. Allora*

$$\Psi(z) = 2x\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - x(0, 0),$$

e la armonica coniugata isoterma y di x con $y(0, 0) = 0$ è data da

$$y(u, v) = \operatorname{Im}\left(2x\left(\frac{u + iv}{2}, \frac{u + iv}{2i}\right) - x(0, 0)\right).$$

Bibliografia

- [1] Alfred Gray, Elsa Abbena, Simon Salamon, *Modern differential geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*, Third Edition, Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, New York, 2006
- [2] Andrew Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer Science and Business Media, 2001