

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL FENOMENO DI GIBBS

Tesi di Laurea in Complementi di Analisi

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Annamaria Montanari

Presentata da:
Alessio Monaldi

Sessione unica
2017-2018

Introduzione

Con l'espressione *fenomeno di Gibbs* si indica una particolare anomalia presente nella rappresentazione, attraverso i polinomi di Fourier, di una funzione con punti di discontinuità di prima specie. Si osservano, infatti, forti oscillazioni dei polinomi di Fourier vicino a tali punti di discontinuità, e queste irregolarità non sembrano normalizzarsi all'aumentare del grado del polinomio, al punto che sembra non esserci convergenza della serie alla funzione sviluppata.

Dimostreremo che l'utilizzo di un altro tipo di polinomi trigonometrici, i polinomi di Fejér invece che quelli di Fourier, eliminerà il fenomeno di Gibbs.

Il primo a notare questo fenomeno fu il matematico inglese Henry Wilbraham nel 1848 e solo dopo 50 anni, nel 1899, Josiah Willard Gibbs ne diede una descrizione precisa in un articolo per la rivista *"Nature"* (27 Aprile, 1899). Fu poi Maxime Bôcher, nel 1906, colui che diede una dettagliata spiegazione matematica di quest'anomalia, dimostrando e generalizzando alcuni dei risultati ottenuti da Gibbs e coniando anche il termine di *"fenomeno di Gibbs"*. Nonostante siano passati più di 100 anni dalla sua formalizzazione, la trattazione di questo argomento resta attuale. Infatti in alcuni processi applicativi, come ad esempio la ricostruzione o il filtraggio di segnali o immagini è fondamentale tenere sotto controllo le sovraoscillazioni dovute a tale fenomeno.

La seguente trattazione è divisa in tre capitoli.

Nel primo capitolo andremo a definire il nostro ambiente di lavoro, descri-

vendo in generale i polinomi trigonometrici e analizzando più nello specifico quelli di Fourier. Osserveremo che, tra tutti i polinomi trigonometrici, quelli di Fourier godono dell'importante proprietà di minimizzare l'errore in norma quadratica. Arriveremo a dimostrare il *Teorema di localizzazione di Riemann* e seguiranno importanti risultati riguardanti la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier.

Nel secondo capitolo analizzeremo il fenomeno di Gibbs, partendo dall'esempio dell'onda a dente di sega. Studieremo nel dettaglio il comportamento della serie di Fourier nel caso dell'onda quadra, andando a quantificare le sovraoscillazioni nei pressi di punti di discontinuità. Un altro caso preso in esame sarà quello di un'onda semi-triangolare: osserveremo come il comportamento anomalo dei polinomi di Fourier non si manifesta nell'intorno di punti in cui la funzione rappresentata non è derivabile ma continua. Utilizzando i dati trovati, dimostreremo che il fenomeno di Gibbs si presenta ogni volta che si tronca una serie di Fourier di una funzione periodica, regolare a tratti, con discontinuità di prima specie.

Nell'ultimo capitolo definiremo la convergenza secondo Cesàro e le somme di Fejér, dimostrando come queste riescano ad eliminare il fenomeno di Gibbs.

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | i |
| 1 Risultati utili dell' analisi di Fourier | 1 |
| 1.1 Cenni sui polinomi trigonometrici reali | 1 |
| 1.2 Polinomi di Fourier | 2 |
| 1.3 Serie di Fourier e risultati di convergenza | 4 |
| 2 Il fenomeno di Gibbs | 13 |
| 2.1 Due casi preliminari | 15 |
| 2.2 Analisi quantitativa del fenomeno di Gibbs | 22 |
| 3 Somme di Fejér: una soluzione al fenomeno di Gibbs | 29 |
| 3.1 Convergenza secondo Cesàro e Teorema di Fejér | 29 |
| 3.2 Eliminazione del fenomeno di Gibbs | 34 |

Capitolo 1

Risultati utili dell' analisi di Fourier

1.1 Cenni sui polinomi trigonometrici reali

Iniziamo la trattazione dando alcuni cenni riguardanti i polinomi trigonometrici in \mathbb{R} . I risultati che verranno citati sono di facile verifica e non saranno qui dimostrati.

Definizione 1.1. Chiamiamo *polinomio trigonometrico reale* ogni funzione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che possa scriversi nella seguente forma

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.1)$$

con $n \in \mathbb{N}$ e a_0, a_k, b_k costanti reali.

Se i coefficienti a_n e b_n non sono entrambi nulli, diremo che p ha grado n e indicheremo con \mathcal{T}_n l'insieme dei polinomi trigonometrici reali di grado $\leq n$. Si dimostra che, preso $p \in \mathcal{T}_n$, i coefficienti a_k e b_k sono della forma

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos kt \, dt & \forall k \geq 0 \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin kt \, dt & \forall k \geq 1 \end{cases}$$

Concludiamo dicendo che \mathcal{T}_n è uno spazio vettoriale di dimensione $2n + 1$ e che $\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ per $k = 1, \dots, n$ è una sua base ortonormale.

1.2 Polinomi di Fourier

Definizione 1.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi])$. Si chiama *polinomio di Fourier di grado n* di f il seguente polinomio trigonometrico reale:

$$\mathcal{S}_n(f, t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.2)$$

dove

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ks \, ds & \forall k \geq 0 \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ks \, ds & \forall k \geq 1 \end{cases}$$

I numeri reali a_k e b_k sono chiamati *coefficienti di Fourier* di f . Notiamo che questi coefficienti sono ben definiti, essendo $|\cos kt|, |\sin kt| \leq 1$ e $f \in L^1(]-\pi, \pi])$.

Segue ora un'importante osservazione che mostra come i polinomi di Fourier, tra tutti i polinomi trigonometrici reali di grado al più n , sono quelli che minimizzano l'errore in norma quadratica. Questo spiega il motivo per cui nella maggior parte delle applicazioni vengono usati questi polinomi per rappresentare una funzione.

Osservazione 1. Se f^2 è sommabile su $\mathcal{I} =]-\pi, \pi]$, con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $\mathcal{S}_n(f)$ è il polinomio trigonometrico dei "minimi quadrati" per f . Precisamente, $\forall p \in \mathcal{T}_n$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - p)^2 dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} (f - \mathcal{S}_n(f))^2 dt.$$

Dimostrazione. Consideriamo la norma quadratica $\|f\|_{L^2(\mathcal{I})}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} p^2(t) dt$. Indicando con u_k gli elementi della base ortonormale \mathcal{U} precedentemente definita, risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_k u_h dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq h \\ 1, & \text{se } k = h \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere un generico $p \in \mathcal{T}_n$ come

$$p = \sum_{k=0}^{2n} c_k u_k$$

dove

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} p(t) u_k dt \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, 2n$$

Il Polinomio di Fourier di f di grado n risulta essere

$$\mathcal{S}_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k u_k$$

dove

$$\hat{f}_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) u_k dt \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, 2n$$

Allora, sviluppando la norma di $(f - p)$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - p(t))^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \hat{f}_k \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt + \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \hat{f}_k)^2 - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \\ &\geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k u_k)^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \mathcal{S}_n(f, t))^2 dt \end{aligned}$$

Da cui la tesi. □

Introduciamo ora i cosiddetti nuclei di Dirichlet. Essi ci consentiranno di ottenere un'importante rappresentazione integrale dei polinomi di Fourier.

Definizione 1.3. Si chiama *nucleo di Dirichlet di grado n* , con $n \in \mathbb{N}$, il seguente polinomio trigonometrico

$$\mathcal{D}_n := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}$$

Il nucleo di Dirichlet gode di importanti proprietà:

- i) è una funzione 2π -periodica
- ii) è una funzione pari
- iii) risulta

$$\int_0^\pi \mathcal{D}_n(t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.3)$$

Sull'intervallo $]0, \pi[$, usando le formule di prostaferesi, il *nucleo* \mathcal{D}_n si può scrivere in forma chiusa nel modo seguente:

$$\mathcal{D}_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{per } 0 < t < \pi$$

Arriviamo ora ad un importante risultato che ci fornisce, come detto, una rappresentazione integrale per i polinomi di Fourier.

La dimostrazione si può trovare in [5, p.161].

Teorema 1.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f 2π -periodica e sommabile in $]-\pi, \pi[$.*

Allora

$$\mathcal{S}_n(f; t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \mathcal{D}_n(s) ds$$

1.3 Serie di Fourier e risultati di convergenza

Nota 1. Il termine $(n+1)$ -esimo della successione dei polinomi di Fourier di f si ottiene aggiungendo due termini alla sommatoria:

$$\mathcal{S}_{n+1}(f; t) = \mathcal{S}_n(f; t) + a_{n+1} \cos((n+1)t) + b_{n+1} \sin((n+1)t)$$

Si osserva quindi che questa successione ha il naturale comportamento di una serie, e segue immediatamente

Definizione 1.4. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$.*

Si chiama serie di Fourier di f la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

dove a_0, a_k, b_k , per $k \in \mathbb{N}$, sono i coefficienti di Fourier di f .

Si dice che f è *svilupicabile in serie di Fourier nel punto* $t \in \mathbb{R}$ se la sua serie di Fourier converge nel punto t ed ha somma uguale a $f(t)$. In questo caso, quindi,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.4)$$

La somma parziale n -esima della serie al secondo membro di (1.4) è il polinomio di Fourier di grado n di f . Pertanto, la funzione è svilupicabile in serie di Fourier nel punto t se, e solo se,

(i) la successione $(\mathcal{S}_n(f; t))_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n(f; t) = f(t)$.

Ora, è importante osservare che modificando f nei punti di un insieme di misura nulla (in particolare nel solo punto t) i suoi coefficienti di Fourier, e quindi la successione dei polinomi $\mathcal{S}_n(f)$, non cambiano. Può quindi accadere facilmente che si verifichi la condizione (i) senza che valga la (ii).

”Per questa ragione si preferisce studiare il problema della svilupicabilità in serie di Fourier ricercando dapprima condizioni sufficienti per la convergenza di $(\mathcal{S}_n(f; t))_{n \in \mathbb{N}}$ che consentano anche di determinare l’eventuale valore del limite λ . La funzione f sarà poi svilupicabile nel punto t se $f(t)$ coincide con λ ”. [5, p.169]

Dalla Proposizione seguente, semplice conseguenza dei risultati del precedente paragrafo (considerazioni sul nucleo di Dirichlet e scrittura in forma integrale dei polinomi di Fourier), dedurremo i criteri di convergenza della serie di Fourier.

Proposizione 1.3.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e sommabile su $]-\pi, \pi]$.*

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, le affermazioni seguenti sono equivalenti

i) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n(f; t) = \lambda;$$

ii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right)}{\sin \frac{s}{2}} ds = 0 \quad (1.5)$$

Per lo studio del limite (1.5) risulta di cruciale importanza il seguente

Lemma 1.3.2. (di Riemann-Lebesgue) Per ogni funzione sommabile

$$g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty,$$

risulta

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(s) \sin(\alpha s) ds = 0$$

e, analogamente,

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(s) \cos(\alpha s) ds = 0.$$

Possiamo ora dimostrare un teorema fondamentale per definire condizioni sufficienti per la convergenza della serie di Fourier.

Teorema 1.3.3. (di localizzazione di Riemann) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi])$. Siano poi $t, \lambda \in \mathbb{R}$. Le affermazioni seguenti sono allora equivalenti:

i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n(f; t) = \lambda;$$

ii) esiste $c \in]0, \pi[$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0. \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.3.1 basta dimostrare che sono equivalenti (1.5) e (1.6). Per ragioni di brevità, nel seguito della dimostrazione poniamo

$$m_f(t, s) := \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2}.$$

Poiché la funzione

$$s \mapsto (m_f(t, s) - \lambda) \frac{1}{\sin \frac{s}{2}}$$

è sommabile su $[c, \pi]$ qualunque sia $c \in]0, \pi[$, per il lemma di Riemann-Lebesgue la (1.5) è equivalente alla seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c (m_f(t, s) - \lambda) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{\sin \frac{s}{2}} ds. \quad (1.7)$$

D'altra parte, poiché

$$s \mapsto \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s}\right)$$

è continua e limitata su $]0, c[$, la funzione

$$s \mapsto (m_f(t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s}\right)$$

è sommabile sullo stesso intervallo, e quindi, per il lemma di Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c (m_f(t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s}\right) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = 0.$$

Ne viene che (1.7) è equivalente a (1.6). Questo prova il teorema, poiché (1.7), come già osservato, è equivalente a (1.5). \square

Definizione 1.5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale esistono finiti il limite destro $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e sinistro $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Si definisce

$$f^*(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Possiamo ora dedurre dal Teorema di localizzazione alcuni criteri espliciti di convergenza.

Teorema 1.3.4. (di Dini) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi])$. Se

i) nel punto $t \in \mathbb{R}$ esiste finito $f^*(t)$;

ii) $\exists c \in]0, \pi[$ tale che

$$s \mapsto \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)\right) \frac{1}{s} \in L^1(]0, c[)$$

allora la serie di Fourier di f è convergente puntualmente in t a $f^*(t)$.

Dimostrazione. Poiché la funzione nel punto ii) è sommabile, per il Lemma di Riemann-Lebesgue risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right)}{s} ds = 0.$$

La tesi discende dunque dal Teorema di localizzazione di Riemann. \square

Nota 2. Se f è continua in t allora $f^*(t) = f(t)$ e quindi, se la condizione di Dini è soddisfatta, f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto t .

Una semplice condizione che garantisce l'esistenza di $f^*(t)$ e la sommabilità della funzione contenuta nel punto ii) del Teorema di Dini è contenuta nel seguente Corollario

Corollario 1.3.5. (*Criterio di Hölder*) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi])$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Se esistono $\alpha \in]0, 1]$, $M, \delta > 0$ tali che

$$|f(s) - f(\tau)| \leq M|s - \tau|^\alpha \quad (1.8)$$

per ogni $s, \tau \in]t - \delta, t[$ e per ogni $s, \tau \in]t, t + \delta[$, allora la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è $f^*(t)$.

Dimostrazione. I limiti

$$f(t^+) := \lim_{s \rightarrow t^+} f(s), \quad f(t^-) := \lim_{s \rightarrow t^-} f(s)$$

esistono e sono finiti in quanto, per la (1.8), nota anche come *condizione di Hölder*, vale

$$\lim_{s, \tau \rightarrow t^+} (f(s) - f(\tau)) = \lim_{s, \tau \rightarrow t^-} (f(s) - f(\tau)) = 0$$

Esiste allora

$$f^*(t) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2}$$

e risulta

$$f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Inoltre, ancora per la condizione di Hölder

$$\begin{aligned} |f(t+s) - f(t^+)| &= \lim_{\tau \rightarrow 0^+} |f(t+s) - f(t+\tau)| \\ &\leq \lim_{\tau \rightarrow 0^+} M|s - \tau|^\alpha = Ms^\alpha \end{aligned}$$

per $0 < s < c$. Analogamente

$$|f(t-s) - f(t^-)| \leq Ms^\alpha \quad \text{per } 0 < s < c.$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{|f(t+s) + f(t-s) - 2f^*(t)|}{s} &\leq \frac{|f(t+s) - f(t^+)|}{s} + \frac{|f(t-s) - f(t^-)|}{s} \\ &\leq \frac{2M}{s^{1-\alpha}} \quad \text{per } 0 < s < c \end{aligned}$$

L'affermazione segue allora dal Teorema di Dini poiché, essendo $\alpha > 0$, la funzione

$$s \mapsto \frac{1}{s^{1-\alpha}}$$

è sommabile su $]0, c[$. □

Definizione 1.6. La funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta regolare a tratti nell'intervallo $[a, b]$ se valgono le seguenti proprietà:

i) esiste un numero finito di punti x_0, \dots, x_{n+1} con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

tali che f sia di classe \mathcal{C}^1 negli intervalli $]x_k, x_{k+1}[$ per $k = 0, \dots, n$;

ii) nei punti x_1, \dots, x_n esistono finite le derivate destra e sinistra; nel punto x_0 esiste finita la derivata destra; nel punto x_{n+1} esiste finita la derivata sinistra;

iii) nei punti x_1, \dots, x_n esistono finiti i limiti destro e sinistro, nel punto x_0 esiste finito il limite destro, nel punto x_{n+1} esiste finito il limite sinistro.

Quindi le uniche discontinuità ammesse da una funzione di questo tipo sono quelle di prima specie.

Corollario 1.3.6. (*Convergenza puntuale della serie di Fourier*)

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi])$, regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$. Allora $\forall t \in [-\pi, \pi]$ la serie di Fourier di f converge a $f^*(t)$.

Dimostrazione. Per ipotesi la funzione è regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$ quindi esistono $n + 2$ punti

$$-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = \pi$$

tali che f sia di classe \mathcal{C}^1 negli intervalli $]x_k, x_{k+1}[$ per $k = 0, \dots, n$ e nei quali valgono le proprietà della definizione precedente.

Se $t = x_k$ per un certo $k \in \{1, \dots, n\}$, sia $0 < \delta < \min\{|x_{k+1} - t|; |t - x_{k-1}|\}$. Per il teorema del valore medio di Lagrange, $\forall s, u \in]t - \delta, t[$, $\forall s, u \in]t, t + \delta[$ esiste $\sigma \in]s, u[$ tale che

$$|f(s) - f(u)| = |f'(\sigma)||s - u|$$

Poiché f è regolare a tratti, f' è limitata su $]x_{k-1}, t[\cup]t, x_{k+1}[$ quindi lo è su $]t - \delta, t[\cup]t, t + \delta[$. Ne segue che esiste $M \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$|f'(\sigma)| \leq M \quad \forall \sigma \in]t - \delta, t[\cup]t, t + \delta[$$

Di conseguenza

$$|f(s) - f(u)| = M|s - u| \quad \forall s, u \in]t - \delta, t[, \quad \forall s, u \in]t, t + \delta[$$

Se invece $t \in]x_k, x_{k+1}[$ per un certo $k \in \{0, \dots, n\}$ si procede in modo analogo scegliendo δ tale che $0 < \delta < \min\{|t - x_k|; |x_{k+1} - t|\}$. La condizione di Hölder risulta quindi verificata $\forall t \in]-\pi, \pi[$ con $\alpha = 1$. \square

È immediato osservare che, presa una funzione f nelle ipotesi del Corollario, se nei punti di discontinuità di f vale $f(t) = f^*(t)$ allora la serie di Fourier di f converge puntualmente ad $f(t)$.

Consideriamo infine il problema della convergenza uniforme della serie di Fourier.

Siccome il limite uniforme di funzioni continue è continuo, è chiaro che una condizione *necessaria* per la convergenza a f della sua serie di Fourier è che f sia continua. Proveremo ora che la continuità di f , e la sua regolarità a tratti, sono condizioni *necessarie e sufficienti* a garantire l'uniforme continuità della serie di Fourier di f ad f . Enunciamo un importante risultato, la cui dimostrazione si può trovare in [1, p.309]

Teorema 1.3.7. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi])$. Siano a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier. Allora vale*

$$\|f\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad \text{\textit{Identità di Parseval}}$$

Possiamo quindi dimostrare

Teorema 1.3.8. *(Convergenza uniforme della serie di Fourier)*

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, continua e regolare a tratti.

Allora la serie di Fourier di f converge a f uniformemente, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \mathcal{S}_n(f)\|_{\infty} = 0$$

Dimostrazione. Per il Corollario 1.3.6, $\mathcal{S}_n(f) \rightarrow f$ puntualmente per $n \rightarrow +\infty$.

La convergenza uniforme seguirà dal criterio di Weierstrass¹. Precisamente, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in \mathbb{R}^2 otteniamo

$$|a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

Pertanto basta verificare che la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ converge.

Trattandosi di un serie a termini non negativi, è sufficiente mostrare che la successione delle ridotte è limitata. Stimiamo quindi la ridotta n -esima mediante la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in \mathbb{R}^n :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k^2(a_k^2 + b_k^2)} \sqrt{\frac{1}{k^2}} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2(a_k^2 + b_k^2)} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}.$$

¹Test che garantisce la convergenza totale, quindi anche uniforme, di serie di funzioni di variabile complessa o reale

Usiamo le maggiorazioni

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2(a_k^2 + b_k^2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) = \frac{\|f'\|_2^2}{\pi}.$$

Quest'ultimo fatto è esattamente l'identità di Parseval applicata a f' .

Infatti, detti \hat{a}_k, \hat{b}_k i coefficienti di Fourier della funzione f' , integrando per parti si deduce

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = 0,$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f' \cos(kx) dx = \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = kb_k, \quad k \geq 1,$$

e in modo analogo si trova che $\hat{b}_k = -ka_k$, $k \geq 1$.

Osserviamo che, con le ipotesi che abbiamo su f , restringendoci all'intervallo $] -\pi, \pi]$, possiamo dire che f è assolutamente continua su quest'intervallo e possiamo quindi applicare l'integrazione per parti. \square

In realtà vale un risultato più generale, che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema 1.3.9. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e regolare a tratti.*

Allora la serie di Fourier di f converge ad f uniformemente su ogni intervallo chiuso $[a, b]$ su cui f è continua.

Capitolo 2

Il fenomeno di Gibbs

Consideriamo la seguente somma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots$$

la cui somma $h(x)$ è data nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ da

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x + \pi) & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -\frac{1}{2}(x - \pi) & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

una funzione 2π -periodica che presenta nei punti $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, una *discontinuità di prima specie*:

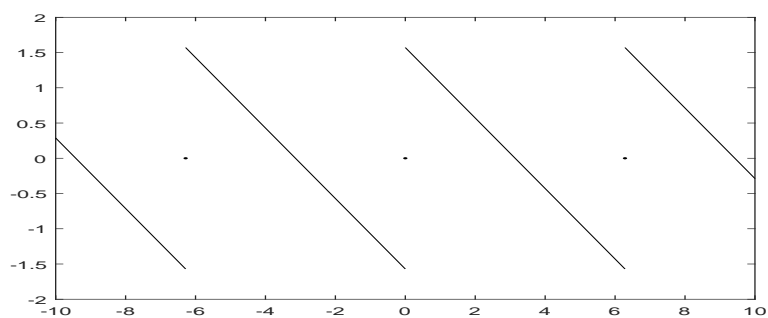


Figura 2.1: Rappresentazione onda a dente di sega

È chiaramente una funzione regolare a tratti e dispari. La serie di Fourier ad essa associata è dunque costituita da soli *seni*. Calcoliamo le costanti di Fourier:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}x \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{2n\pi} [x \cos(nx)]_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

cosicché appunto

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

È allora possibile applicare il **Corollario 1.3.6**.

Dato che $h(0) = \frac{1}{2}(h(0^+) + h(0^-))$, risulta così dimostrato che $h^*(x) = h(x)$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$, quindi per estensione $\forall x \in \mathbb{R}$

Riportiamo i grafici di $\mathcal{S}_n(h)$:

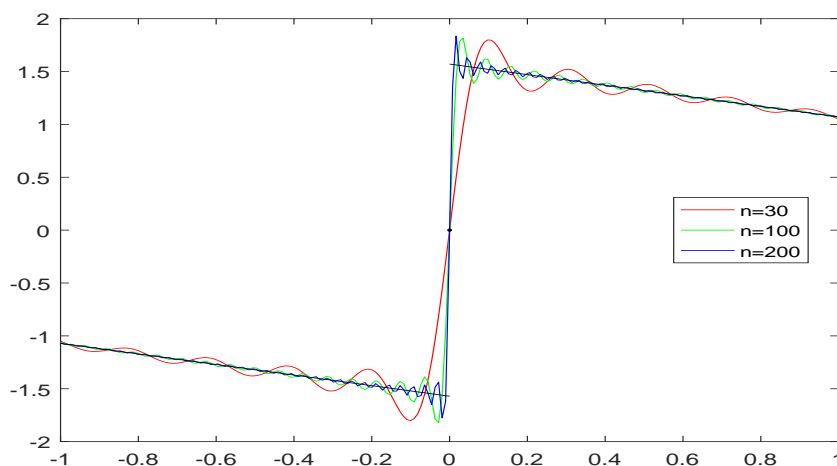


Figura 2.2: Approssimazione della funzione in un intorno di 0

Vicino ad $x = 0$ si osserva un andamento anomalo: dato che $\mathcal{S}_n(h)$ è continua, $\forall \epsilon > 0$ l'immagine $\mathcal{I}_{n,\epsilon}$ tramite $\mathcal{S}_n(h)$ dell'intervallo $[-\epsilon, \epsilon]$ è un intervallo, e ci si aspetterebbe che per $n \rightarrow +\infty$ tale intervallo tendesse a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Invece, osservando i grafici, l'impressione è che $\mathcal{I}_{n,\epsilon}$ tenda sì ad un intervallo,

ma più ampio di quello previsto.

Ciò risulta più evidente ingrandendo il grafico precedente vicino al punto $(0, \frac{\pi}{2})$:

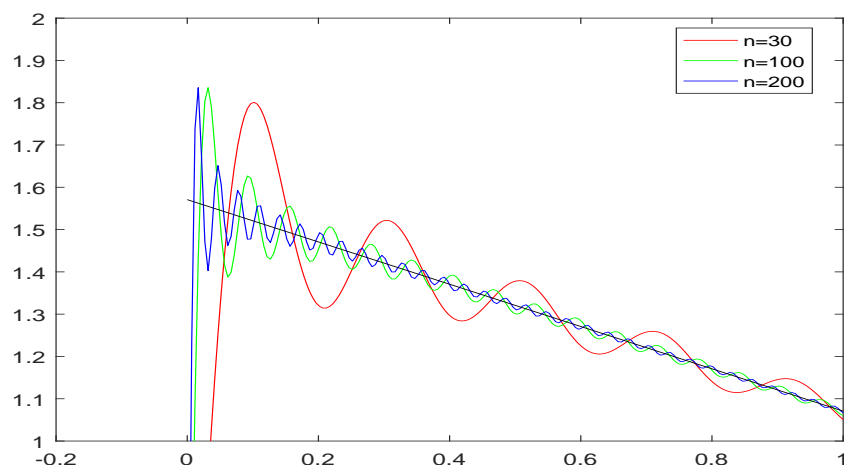


Figura 2.3: Approssimazione in un intorno di $(0, \frac{\pi}{2})$

Per capire meglio questo fenomeno, cominciamo ad esaminare due casi particolari. Daremo poi un'analisi quantitativa del caso generale.

2.1 Due casi preliminari

Vediamo dapprima due casi emblematici.

Il primo riguarda una semplice funzione periodica con discontinuità di prima specie, il cui studio, come vedremo, può essere esteso al caso generale.

Il secondo caso è quello di una funzione periodica con una discontinuità di prima specie ed un punto angoloso, e suggerisce che il comportamento "anomalo" delle ridotte della serie di Fourier si manifesti *solo* in presenza di discontinuità della funzione e non, ad esempio, della sua derivata.

1. Onda quadra: Indichiamo con q la funzione "onda quadra" definita da:

$$q(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } 2n - 1 \leq x < 2n, \\ 1 & \text{se } 2n \leq x < 2n + 1, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

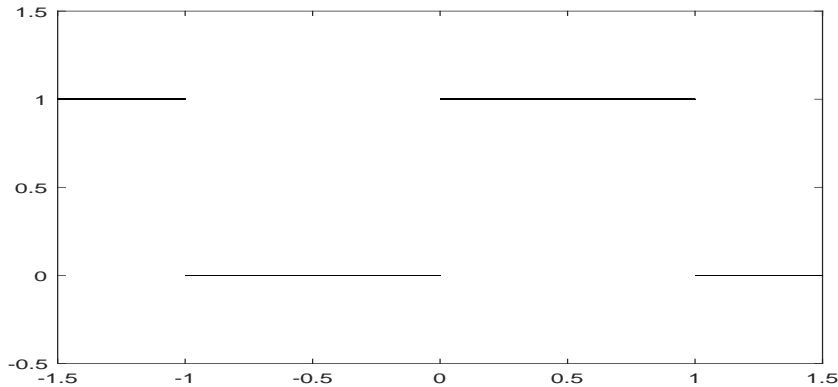


Figura 2.4: Rappresentazione onda quadra

Si osservi che per $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ si ha $q(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(x))$ dove $\text{sign}(x)$ è la funzione *segno di x*.

Osservazione 2. consideriamo il caso generale di una funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ che sia T -periodica (dove il periodo T è un qualunque numero positivo assegnato). Se g è integrabile su $(0, T)$, con un cambiamento di variabile $x \mapsto \frac{2\pi}{T}x$, con $\omega := \frac{2\pi}{T}$, si ha:

$$g(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

dove le costanti di Fourier sono date da

$$\begin{cases} a_n := \frac{s}{T} \int_0^T g(x) \cos(n\omega x) dx \\ b_n := \frac{s}{T} \int_0^T g(x) \sin(n\omega x) dx \end{cases}$$

Quindi nel nostro caso, per

$$\mathcal{S}(q; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

i coefficienti di Fourier sono

$$a_0 = \int_0^1 dx = 1; \quad \begin{cases} a_n = \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = 1 \\ b_n = \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Di conseguenza, risulta

$$\mathcal{S}(f; x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{2n-1}$$

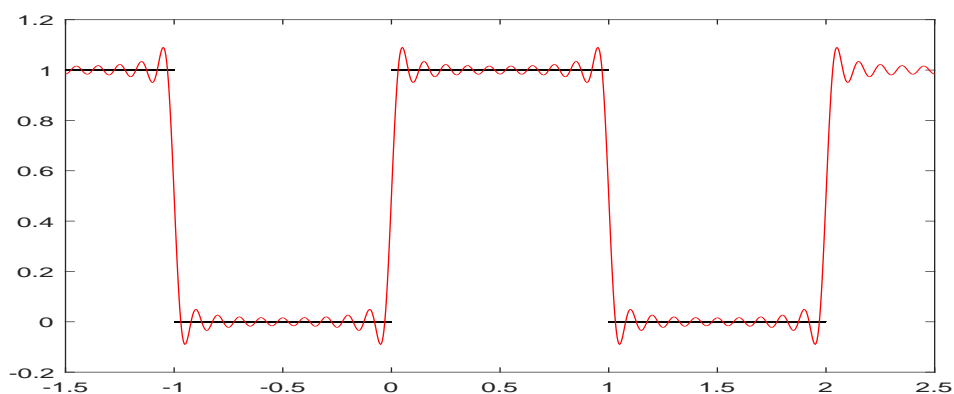


Figura 2.5: Ridotta per $n=10$

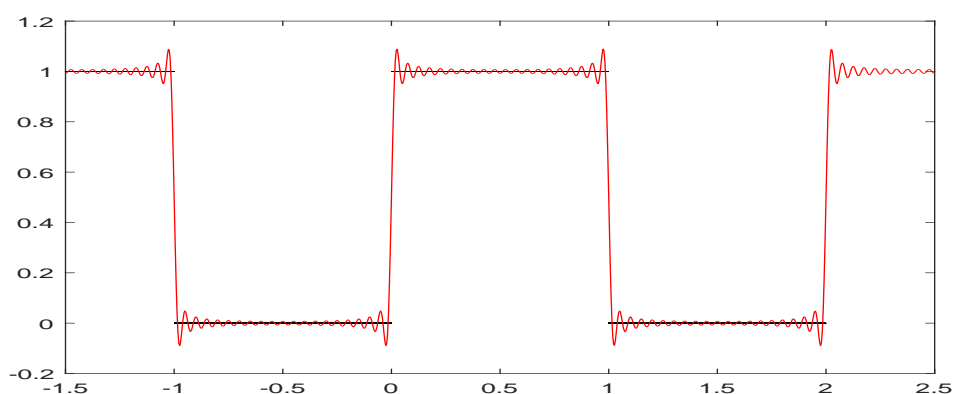
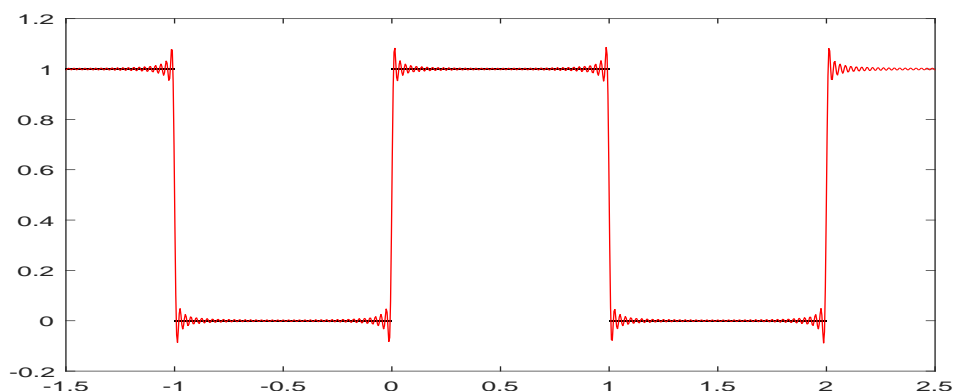


Figura 2.6: Ridotta per $n=20$

Figura 2.7: Ridotta per $n=40$

Nota 3. Si noti che:

- vale

$$\mathcal{S}_{2n}(q; x) = \mathcal{S}_{2n-1}(q; x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}$$

- per ogni n si ha

$$\mathcal{S}_n(q; k) = \frac{1}{2} \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

Esaminando i grafici delle ridotte $\mathcal{S}_n(q; x)$, si rileva che la convergenza a $q(x)$ è buona *all'interno* degli intervalli $(k, k+1)$, mentre, in prossimità dei punti $x_k = k$ di ascissa *intera*, corrispondenti ai salti di q , si presenta l'anomalia già vista in precedenza.

Precisamente, si osserva che ogni ridotta presenta vicino ad x_k un massimo assoluto, la cui ascissa tende ad x_k , ma la cui ordinata è maggiore di 1, e non sembra affatto tendere ad 1 (e neppure diminuire) anche se si aumenta l'ordine della ridotta; analogamente, sempre vicino ad x_k presenta un minimo assoluto negativo, la cui ascissa sembra tendere ad x_k , mentre l'ordinata sembra avere valore negativo sostanzialmente costante.

Si tratta del cosiddetto **fenomeno di Gibbs**, che, come vedremo, si presenta *sempre* nell'intorno di un punto di salto della funzione quando la si approssima con una ridotta della sua serie di Fourier. [6, p.19]

Mettiamo in evidenza tale fenomeno nella figura seguente, che rappresenta un ingrandimento dei grafici di $\mathcal{S}_n(q)$ in un intorno di $(0, 1)$:

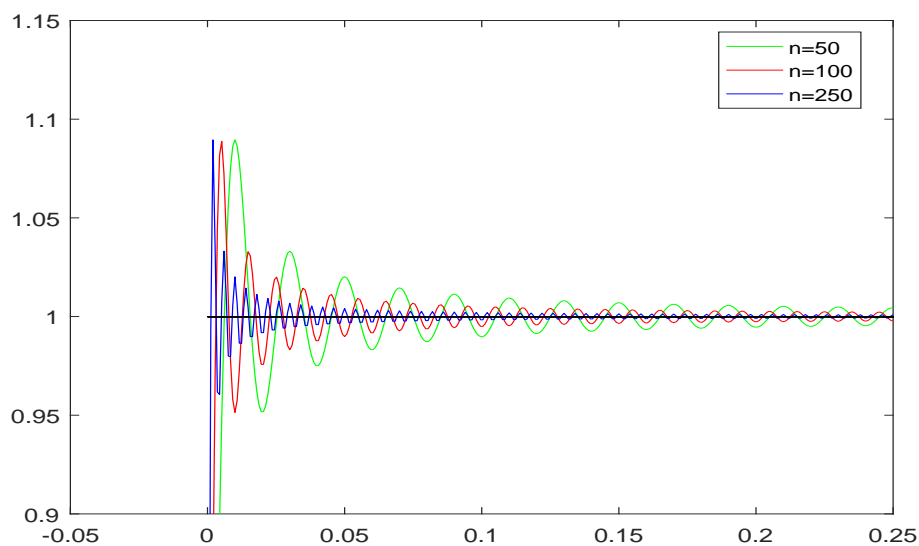


Figura 2.8: Andamento anomalo nell'intorno di $(0,1)$

2. Onda semi-triangolare: Sia t definita da

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2n - 1 \leq x < 2n, \\ x - 2n & \text{se } 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

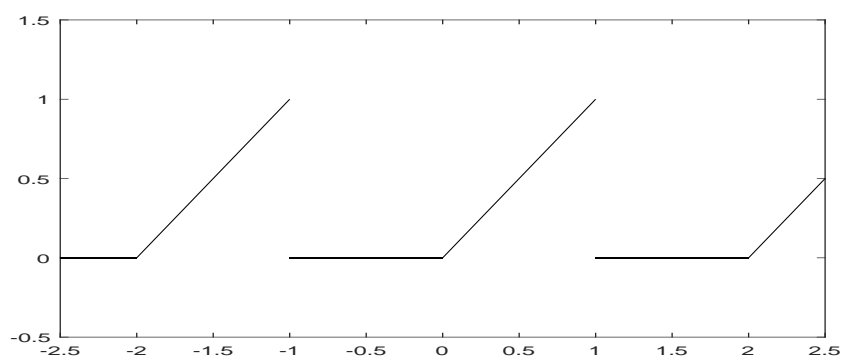


Figura 2.9: Onda semi-triangolare

Calcoliamo le costanti di Fourier di t . Si ha

$$a_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

mentre per $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} [x \sin(n\pi x)]_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi x)]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \\ b_n &= \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} [x \cos(n\pi x)]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = -\frac{(-1)^n}{n\pi}. \end{aligned}$$

La serie di Fourier di t è quindi data da

$$\mathcal{S}(t; x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\pi x)}{n}$$

Seguono i grafici delle ridotte:

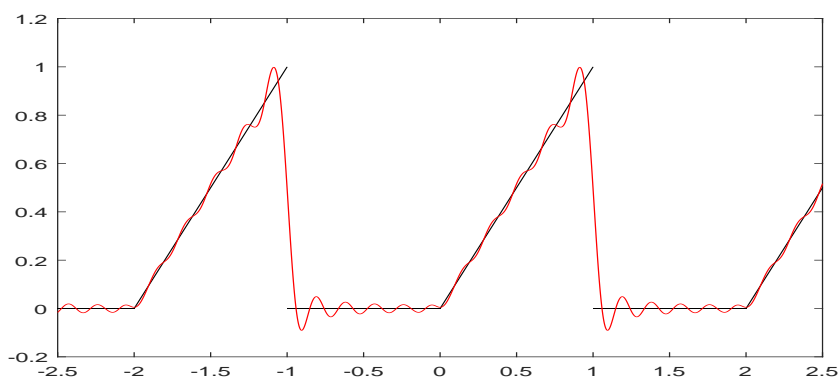
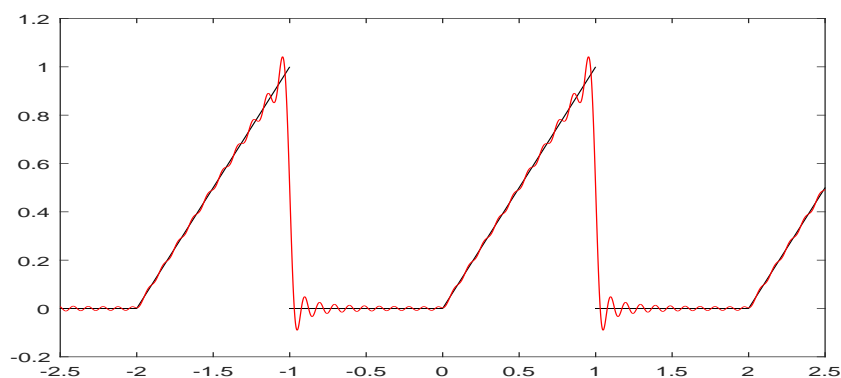
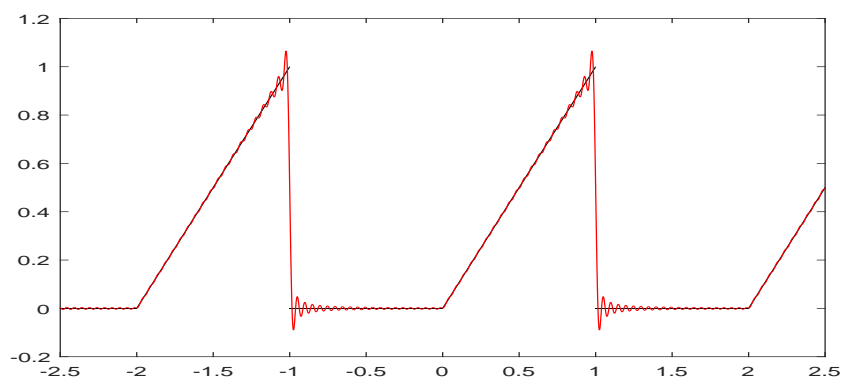


Figura 2.10: Ridotta per $n=10$

Figura 2.11: Ridotta per $n=20$ Figura 2.12: Ridotta per $n=40$

Anche in questo caso, nell'intorno dei punti $x_n = 2n - 1$ si evidenzia il fenomeno di Gibbs. Si osserva invece che l'approssimazione sembra buona nell'intorno dei punti di ascissa $x_n = 2n$, in cui la funzione f non è derivabile, ma è *continua*.

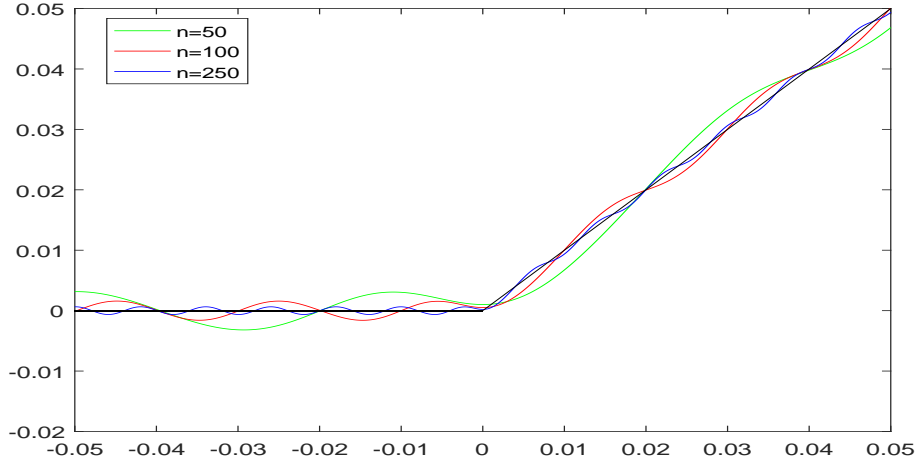


Figura 2.13: Ingrandimento dell'intorno dello 0

2.2 Analisi quantitativa del fenomeno di Gibbs

1. Il caso dell'onda quadra Si è visto che le ridotte dell'onda quadra q hanno l'espressione

$$\mathcal{S}_{2n-1}(q; x) = \mathcal{S}_{2n}(q; x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1} \quad (2.1)$$

Sono di semplice verifica le seguenti simmetrie:

- i) $\mathcal{S}_{2n}(q; -x) = 1 - \mathcal{S}_{2n}(q; x)$;
- ii) $\mathcal{S}_{2n}(q; 1-x) = \mathcal{S}_{2n}(q; x)$;

e, osservando che $\mathcal{S}_{2n}(q)$ è 2-periodica, è sufficiente studiarla ad esempio nell'intervallo $[-1, 1]$. In tale intervallo si ha:

$$\mathcal{S}_{2n}(q; x) > \frac{1}{2} \quad \text{se } x \in (0, 1); \quad \mathcal{S}_{2n}(q; x) < \frac{1}{2} \quad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Per determinare il massimo ed il minimo di $\mathcal{S}_{2n}(q)$ in $[-1, 1]$ (e quindi, per estensione, in \mathbb{R}), è utile semplificare l'espressione della sua derivata

$$\mathcal{S}'_{2n}(q; x) = 2 \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)\pi x). \quad (2.2)$$

Vediamolo attraverso il seguente

Lemma 2.2.1. Per $n = 1, 2, \dots$, e per ogni $x \notin \mathbb{Z}$, risulta

$$2 \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)\pi x) = \frac{\sin(2n\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

Dimostrazione. Usando la formula di prostaferesi $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ si ha

$$\sin(2k\pi x) - \sin(2(k-1)\pi x) = 2 \sin(\pi x) \cos((2k-1)\pi x);$$

e quindi

$$\cos((2k-1)\pi x) = \frac{\sin(2k\pi x) - \sin(2(k-1)\pi x)}{2 \sin(\pi x)}.$$

Sommando sull'indice k , i termini al secondo membro si cancellano a due a due e si ottiene

$$\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)\pi x) = \frac{\sin(2n\pi x)}{2 \sin(\pi x)},$$

da cui la tesi □

Passiamo quindi allo studio dei *massimi* e dei *minimi* di $\mathcal{S}_{2n}(q)$.

Da (2.1) e (2.2) si osserva che le ascisse degli estremi relativi di $\mathcal{S}_{2n}(q)$ nell'intervallo $(-1, 1)$, che coincidono con gli zeri di $\mathcal{S}'_{2n}(q)$, sono i punti $\pm x_h$, dove $x_h := \frac{h}{2n}$ per $h = 1, 2, \dots, 2n-1$.

Più precisamente, i punti x_h sono di

- *massimo relativo* per $h = 1, 3, \dots, 2n-1$,
- *minimo relativo* per $h = 2, 4, \dots, 2n-2$.

Infatti, si controlla facilmente che nessun punto di questa forma è un punto di flesso. Basta notare che (omettiamo i calcoli) $\mathcal{S}''_{2n}(q; \frac{2h-1}{2n}) < 0$, mentre $\mathcal{S}''_{2n}(q; \frac{h}{n}) > 0$. Per simmetria, i punti $-x_k$ e $-1+x_k$ sono di massimo relativo se k è pari, di minimo relativo se k è dispari.

Mostriamo ora che il *massimo assoluto* di $\mathcal{S}_{2n}(q)$ in $[-1, 1]$, e quindi in \mathbb{R} , è assunto nei punti $x_1^+ = \frac{1}{2n}$ e $x_{2n-1}^+ = 1 - \frac{1}{2n}$. Di conseguenza, per l'osservazione appena fatta, per simmetria il *minimo assoluto* è assunto nei punti $x_1^- = -\frac{1}{2n}$ e $x_{2n-1}^- = -1 + \frac{1}{2n}$.

Dimostrazione. Poiché

$$S_{2n}\left(q; \frac{2h+1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{2h+1}{2n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx = S_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right) + \sum_{j=1}^h \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{2j+1}{2n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx,$$

basta verificare che ciascuno degli integrali scritti nella sommatoria è negativo per $1 \leq h < \frac{n}{2}$. Facendo i calcoli

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{2j+1}{2n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx &= \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{j}{n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx + \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{2j+1}{2n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx \\ &= \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{j}{n}} \frac{\sin 2n\pi x}{\sin \pi x} dx + \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{j}{n}} \frac{\sin 2n\pi\left(y + \frac{1}{2n}\right)}{\sin \pi\left(y + \frac{1}{2n}\right)} dy \\ &= \int_{\frac{2j-1}{2n}}^{\frac{j}{n}} \left(\frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2n}\right)} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{(2j-1)\pi}^{2j\pi} \left(\frac{1}{\sin \frac{y}{2n}} - \frac{1}{\sin \frac{y+\pi}{2n}} \right) \sin y dy. \end{aligned}$$

Per $y \in ((2j-1)\pi, 2j\pi)$ si ha $\sin y < 0$. Inoltre, poiché nello stesso intervallo vale $0 < \frac{y+\pi}{2n} \leq \frac{2h+1}{2n}\pi \leq \frac{\pi}{2}$, si ha anche $\sin \frac{y}{2n} < \sin \frac{y+\pi}{2n}$. Di conseguenza, l'integrando è sempre ≤ 0 . \square

Possiamo quindi fare i seguenti calcoli:

i) il valore $\mathcal{S}_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right)$ del massimo di $\mathcal{S}_{2n}(q)$ è dato da

$$\max_x \mathcal{S}_{2n}(q; x) = \mathcal{S}_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin \frac{2k-1}{2n}\pi,$$

ii) il valore $\mathcal{S}_{2n}\left(q; -\frac{1}{2n}\right)$ del minimo di $\mathcal{S}_{2n}(q)$ è dato da

$$\min_x \mathcal{S}_{2n}(q; x) = \mathcal{S}_{2n}\left(q; -\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin \frac{2k-1}{2n}\pi.$$

Poniamo ora

$$G := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx;$$

Dimostriamo allora il seguente risultato

Teorema 2.2.2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_x \mathcal{S}_n(q; x) \right) = \frac{1}{2}(1 + G);$$

quindi vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_x \mathcal{S}_n(q; x) - \min_x \mathcal{S}_n(q; x) \right) = G.$$

Dimostrazione. Per quanto visto sopra, si ha

$$\max_x \mathcal{S}_{2n}(q; x) = \mathcal{S}_{2n}\left(q; \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\tau} \frac{\tau/(2n)}{\sin(\tau/(2n))} d\tau \right);$$

La funzione $\tau \mapsto \frac{\tau/(2n)}{\sin(\tau/(2n))}$ è minore di $\frac{\pi}{2}$ su $[0, \pi]$ perché in $[0, \frac{\pi}{2}]$ si ha $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$. Applichiamo quindi il *Teorema della convergenza dominata* e risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_x \mathcal{S}_{2n}(q; x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_x \mathcal{S}_{2n-1}(q; x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right) = \frac{1}{2}(1+G).$$

Dato che $\mathcal{S}_{2n}(q; -\frac{1}{2n}) = 1 - \mathcal{S}_{2n}(q; \frac{1}{2n})$, si ha anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \min_x \mathcal{S}_{2n}(q; x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_{2n}\left(q; -\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{G}{2}.$$

Segue la tesi □

Definizione 2.1. Il numero G si chiama **costante di Wilbraham-Gibbs**¹, un suo valore approssimato è dato da $G \sim 1.178980\dots$

Definizione 2.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo il *salto* della funzione f nel punto $a \in \mathbb{R}$

$$\Delta(a) = f(a^+) - f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Nel caso appena esaminato, si vede quindi come l'effettivo salto, uguale ad 1, della funzione q in corrispondenza dei punti di discontinuità, venga enfatizzato di quasi il 18% quando si approssima la funzione con una ridotta della sua serie di Fourier. Abbiamo anche osservato come questo fenomeno

¹N.B. Spesso con tale nome viene indicato il numero $\frac{\pi}{2}G \sim 1.851937\dots$

di sovraoscillazione non tenda a scomparire al crescere di n . Tale risultato non è relativo soltanto al caso dell'onda quadra, ma ha carattere del tutto generale

2. Caso generale Esaminiamo il comportamento delle ridotte della serie di Fourier di una generica funzione periodica e regolare a tratti, che presenta discontinuità di prima specie.

A tal proposito sarà utile un risultato riguardante, in generale, le successioni uniformemente convergenti di funzioni continue.

Lemma 2.2.3. *Sia $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in un intervallo $[a, b]$ tali che $g_n \rightrightarrows g$ uniformemente su tale intervallo.*

Sia $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $[a, b]$ tale che $c_n \rightarrow c$.

Allora la successione $(g_n(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tende a $g(c)$ per $n \rightarrow +\infty$

Dimostrazione. Per ipotesi $g_n \rightrightarrows g$ uniformemente in $[a, b]$, quindi

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n > n_\epsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

In particolare si avrà $|g_n(c) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2}$

Inoltre, g è continua in c (in quanto limite uniforme di funzioni continue) e $c_n \rightarrow c$, e ciò implica che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n'_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |g_n(c) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n > n'_\epsilon$$

Scegliendo $\hat{n} > \max\{n_\epsilon; n'_\epsilon\}$ si ha

$$|g_n(c_n) - g(c)| \leq |g_n(c_n) - g(c_n)| + |g(c_n) - g(c)| < \epsilon, \quad \forall n > \hat{n}$$

□

Diamo ora un risultato più generale

Teorema 2.2.4. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti, $2L$ -periodica, che presenta nel punto a una discontinuità di prima specie, con salto $\Delta(a)$.*

Posto $x_n := \frac{L}{2n}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_n(f; a \pm x_n) = f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{2}G; \quad (2.3)$$

Inoltre, ponendo

$$x_M = \frac{L}{2n}, \quad x_m = -\frac{L}{2n}$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{S}_n(f; a + x_M) - \mathcal{S}_n(f; a + x_m)) = \Delta(a)G \quad (2.4)$$

Dimostrazione. Ridefinendo eventualmente il valore di $f(a)$, non è limitativo supporre, come faremo, che f sia continua da destra in a ($f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$).

Poniamo poi $\hat{q}(x) := q(\frac{x-a}{L})$, e definiamo $\varphi(x) := f(x) - f^*(a) - \frac{\Delta(a)}{2}\hat{q}(x)$.

Si noti che φ è una funzione regolare a tratti, $2L$ -periodica, continua per $x = a$. Infatti:

$$\varphi(a) = f(a) - f^*(a) - \Delta(a)\hat{q}(a) = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow a^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{2f(x) - f(a^+) - f(a^-)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2}\hat{q}(x) = \frac{\Delta(a)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow a^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2f(x) - f(a^+) - f(a^-)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2}\hat{q}(x) = -\frac{\Delta(a)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2}(-1) = 0$$

Siamo quindi nelle ipotesi del *Teorema 1.3.8*. Vale quindi che

$$\mathcal{S}_n(\varphi) \rightrightarrows \varphi \text{ uniformemente}$$

Allora possiamo scrivere

$$\mathcal{S}_n(f; a \pm x_n) = \mathcal{S}_n(\varphi; a \pm x_n) + \Delta(a)\mathcal{S}_n(q; \pm x_n).$$

Per il Lemma precedente, ricordando anche i risultati visti per $\mathcal{S}_n(q)$, si deduce che risulta

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_n(f; a \pm x_n) &= \varphi(a) + f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{2}G \\ &= f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{2}G, \end{aligned}$$

da cui la (2.3).

Segue direttamente la (2.4):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{S}_n(f; a + x_M) - \mathcal{S}_n(f; a + x_m)) = f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2}G - f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2}G = \Delta(a)G.$$

□

Capitolo 3

Somme di Fejér: una soluzione al fenomeno di Gibbs

Alcuni degli aspetti meno soddisfacenti della teoria appena esposta, come ad esempio l'esistenza di funzioni continue non sviluppabili in serie di Fourier e soprattutto il verificarsi del fenomeno di Gibbs, possono essere eliminati se si adotta una definizione diversa e più generale di *convergenza* di una successione, e quindi anche di una serie.

3.1 Convergenza secondo Cesàro e Teorema di Fejér

Definizione 3.1. Sia $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione numerica, sia $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali dove $\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Diciamo che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge secondo Cesàro al numero reale s se la successione delle medie aritmetiche delle somme parziali converge ad s :

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = s \text{ dove } \sigma_n := \frac{\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n}{n}$$

Questa definizione di convergenza è più debole di quella usuale, vale infatti la seguente

Osservazione 3. Sia $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale. Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge ad $s \in \mathbb{R}$ allora la serie converge secondo Cesàro allo stesso numero reale s .

Dimostrazione. $\mathcal{S}_n \rightarrow s$, quindi

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |\mathcal{S}_n - s| < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon$$

Di conseguenza

$$|\sigma_n - s| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\mathcal{S}_k - s| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_\epsilon} |\mathcal{S}_k - s| + \sum_{k=n_\epsilon+1}^n |\mathcal{S}_k - s| \right) \leq \frac{1}{n} (c + n\epsilon)$$

con c costante reale.

$\forall \epsilon' > \epsilon \quad \exists N$ tale che $\frac{1}{N}(c + n\epsilon) \leq \epsilon'$. Quindi $|\sigma_n - s| \leq \epsilon'$.

Si conclude osservando che ϵ è arbitrario, quindi lo è anche ϵ' . \square

Non vale invece l'implicazione opposta.

Si può estendere in modo naturale la definizione di convergenza secondo Cesàro anche alle serie di funzioni, ottenendo, nel caso particolare della serie di Fourier, che vale

$$\sigma_n(f; t) = \frac{\mathcal{S}_0(f; t) + \dots + \mathcal{S}_{n-1}(f; t)}{n}$$

$\sigma_n(f; t)$ è detta n -esima somma di Fejér.

Volendo dare una rappresentazione integrale delle somme di Fejér, come fatto in precedenza per i polinomi di Fourier, introduciamo una famiglia di funzioni: i cosiddetti nuclei di Fejér.

Definizione 3.2. Sia $s \in \mathbb{R}$, definiamo nucleo di Fejér la funzione

$$\Phi_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{n \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)s\right), & \text{se } s \neq 2k\pi \\ \frac{n}{2\pi}, & \text{se } s = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Osservazione 4. Per $s \in] - \pi, \pi[$ vale la seguente uguaglianza

$$\Phi_n(s) = \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}}$$

Dimostrazione. Sviluppriamo $\Phi_n(s)$ usando le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}\Phi_n(s) &= \frac{1}{n \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right) \\ &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right) \sin \frac{s}{2} \\ &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (\cos((k-1)s) - \cos ks) \\ &= \frac{1}{2n \sin^2 \frac{s}{2}} \left(1 - \cos \frac{ns}{2} \right) \\ &= \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}}\end{aligned}$$

□

Proposizione 3.1.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(] - \pi, \pi])$. Sia $\sigma_n(f; t) = \frac{\mathcal{S}_0(f; t) + \dots + \mathcal{S}_{n-1}(f; t)}{n}$ l' n -esima somma di Fejér di f , con $\mathcal{S}_n(f; t)$ polinomio di Fourier di f di grado n nel punto $t \in] - \pi, \pi]$.*

Allora vale

$$\sigma_n(f; t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \Phi_n(s) ds$$

Dimostrazione. Ricordando che per il Teorema 1.2.1 vale

$$\mathcal{S}_n(f; t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \frac{\sin \left(\left(n + \frac{n}{2} \right) s \right)}{\sin \frac{s}{2}} ds$$

si avrà

$$\begin{aligned}\sigma_n(f; t) &= \frac{\mathcal{S}_0(f; t) + \dots + \mathcal{S}_{n-1}(f; t)}{n} \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2 \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \Phi_n(s) ds\end{aligned}$$

□

Analizziamo ora alcune importanti proprietà del nucleo di Fejér.

- i) Φ_n è pari;
- ii) Φ_n è non negativo;
- iii) vale

$$\pi = \int_0^\pi \Phi_n(s) ds \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione costante $f \equiv 1$. I coefficienti di Fourier di f sono $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. Così, $\forall n \geq 0$ vale $\mathcal{S}_n(1; t) = 1$ e quindi $\sigma_n(1; t) = 1$. Di conseguenza

$$1 = \sigma_n(1; t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi_n(s) ds$$

□

- iv) $\forall \delta > 0$ fissato, $\Phi_n(f; t)$ tende uniformemente a zero per $\delta \leq |t| \leq \pi$

Dimostrazione. Segue dalla monotonia di $\sin^2 y$ per $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$. □

Le proprietà *ii)* e *iv)* costituiscono una differenza tra i nuclei di Fejér e quelli di Dirichlet. Proprio queste differenze determinano il diverso comportamento delle relative somme σ_n e \mathcal{S}_n e garantiscono la validità del seguente risultato

Teorema 3.1.2. (*Teorema di Fejér*)

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Sia $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione delle somme di Fejér. Sia $t \in \mathbb{R}$ tale che esiste $f^*(t)$.

Allora vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; t) = f^*(t) \quad (3.2)$$

Inoltre, se f è continua in $[-\pi, \pi]$, la successione $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in $[-\pi, \pi]$

$$\sigma_n \rightrightarrows f \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbb{R}$ tale che esiste $f^*(t)$, sfruttando la (3.1) ricaviamo la seguente uguaglianza

$$\sigma(f; t) - f^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \Phi_n(s) ds$$

Definiamo ora la funzione

$$g_t(s) := \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)$$

Per costruzione vale $g_t(s) \rightarrow 0$, per $s \rightarrow 0^+$, cioè

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } |g_t(s)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall s \in]0, \delta[\quad (3.4)$$

dove δ dipende sia da t che da ϵ . Sfruttando la non negatività di Fejér otteniamo

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f; t) - f^*(t)| &\leq \int_0^\pi |g_t(s)| \Phi_n(s) ds \\ &= \int_0^\delta |g_t(s)| \Phi_n(s) ds + \int_\delta^\pi |g_t(s)| \Phi_n(s) ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Vale

$$I_1 \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^\pi \frac{\Phi_n(s)}{\pi} ds = \frac{\epsilon}{2}$$

mentre

$$I_2 \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_\delta^\pi |g_t(s)| ds \leq \frac{1}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}} I(t)$$

dove $I(t) = \int_0^\pi |g_t(s)| ds$.

Scegliendo N tale che $\frac{1}{N \pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}$ (ricordando che t è fissato e N dipende sia da ϵ che da t) segue che $\forall n > N$

$$|\sigma_n(f; t) - f^*(t)| \leq I_1 + I_2 \leq \epsilon$$

Abbiamo quindi provato la convergenza puntuale delle somme di Fejér.

Dimostriamo la seconda affermazione.

La funzione f è continua su $[-\pi, \pi]$, compatto di \mathbb{R} , quindi per il *Teorema di Heine-Cantor* è uniformemente continua su tale intervallo:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon \text{ tale che } |g_t(s)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall s \in]0, \delta_\epsilon[\text{ e } \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Con passaggi analoghi ai precedenti si ha

$$|\sigma_n(f; t) - f^*(t)| \leq \int_0^{\delta_\epsilon} |g_t(s)| \Phi_n(s) ds + \int_{\delta_\epsilon}^\pi |g_t(s)| \Phi_n(s) ds = I_3 + I_4$$

Come prima si ha

$$I_3 \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \Phi_n(s) ds = \frac{\epsilon}{2}$$

Poiché $g_t(s)$ è continua su $[-\pi, \pi]$, è limitata su tale intervallo. Inoltre $g_t(s)$ è 2π -periodica e quindi limitata su tutto \mathbb{R} : $\sup_{t,s \in \mathbb{R}} |g_t(s)| \leq M$.

Scegliendo N tale che $\frac{M}{N\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}$ (in questo caso N dipende solo da ϵ) ne segue che $\forall n > N$

$$|\sigma_n(f; t) - f^*(t)| \leq I_3 + I_4 \leq \epsilon$$

Abbiamo quindi provato la convergenza uniforme □

3.2 Eliminazione del fenomeno di Gibbs

Mostriamo come le somme di Fejér abbiano la proprietà di eliminare l'effetto Gibbs.

Osservazione 5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi])$.

Se esistono $c, C \in \mathbb{R}$ tali che $c \leq f(t) \leq C$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$, allora

$$c \leq \sigma_n(f; t) \leq C \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Dimostrazione.

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \Phi_n(s) ds.$$

Poiché $c \leq f(t) \leq C$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2c}{c} \Phi_n(s) ds \leq \sigma_n(f; t) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2C}{2} \Phi_n(s) ds$$

da cui, per la (3.1), segue la tesi. □

Proposizione 3.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti $2L$ -periodica, e sia x_0 un punto di discontinuità di prima specie per f con salto $|\Delta(x_0)|$.*

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una qualsiasi successione di numeri reali positivi tale che $x_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Allora non si presenta il fenomeno di Gibbs e vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_n(f; x_0 + x_n) - \sigma_n(f; x_0 - x_n)) \leq \Delta(x_0)$$

Dimostrazione. Usiamo le stesse notazioni del *Teorema 2.2.4*, considerando le somme di Fejér al posto di quelle di Fourier.

$$\sigma_n(f; x_0 \pm x_n) = \sigma_n(\varphi; x_0 \pm x_n) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \sigma_n(q; \pm x_n)$$

Per l'osservazione precedente: $-1 \leq q(t) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sigma(q; t) \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; x_0 + x_n) &= \varphi(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q; +x_n) \\ &\leq \frac{\Delta(x_0)}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; x_0 - x_n) &= \varphi(x_0) + \frac{\Delta(x_0)}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q; -x_n) \\ &\geq -\frac{\Delta(x_0)}{2} \end{aligned}$$

Quindi si avrà che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_n(f; x_0 + x_n) - \sigma_n(f; x_0 - x_n)) &\leq \frac{\Delta(x_0)}{2} - \left(-\frac{\Delta(x_0)}{2} \right) \\ &= \Delta(x_0) \end{aligned}$$

□

Nelle seguenti figure si evidenzia il comportamento delle somme di Fejér nel caso dell'onda quadra nell'intorno dell'origine, punto di discontinuità di prima specie già precedentemente preso in esame.

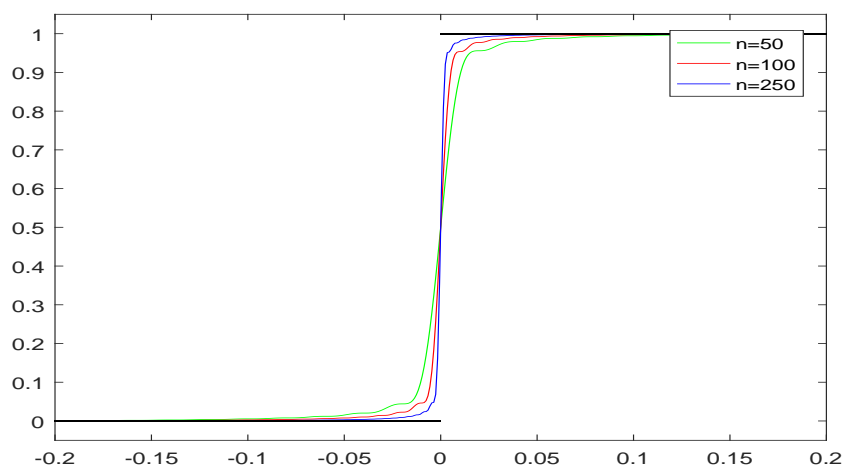


Figura 3.1: Somme di Fejér nel caso dell'onda quadra

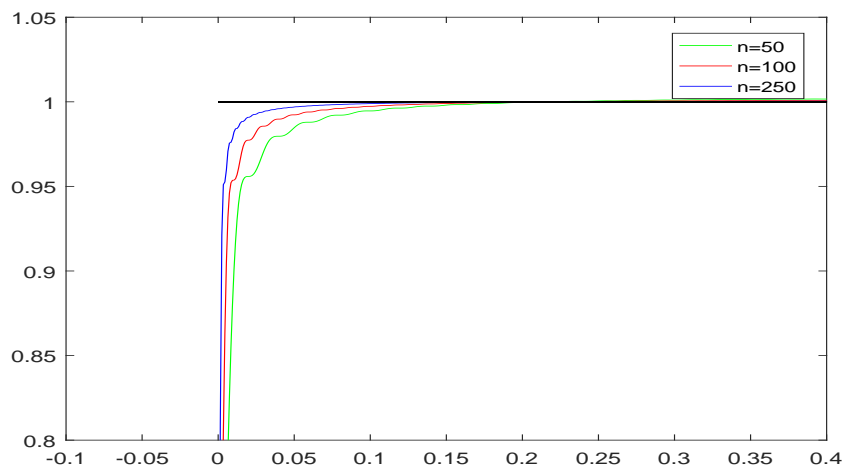


Figura 3.2: Somme di Fejér in un intorno di $(0,1)$

Riportiamo infine un confronto tra i primi 40 polinomi di Fourier e le prime 40 somme di Fejér nel caso dell'onda quadra.

Risulta evidente anche graficamente, già da questi primi termini, ciò che

abbiamo appena dimostrato: le somme di Fejér eliminano il fenomeno di Gibbs.

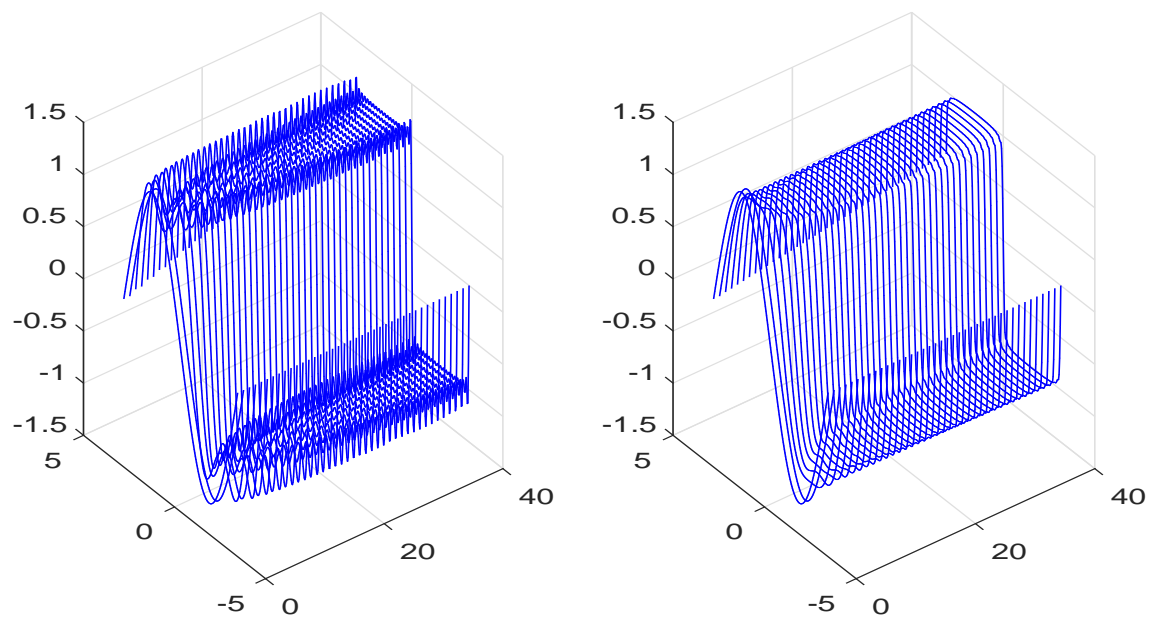


Figura 3.3: Confronto 3d nel caso dell'onda quadra

Bibliografia

- [1] Apostol, Tom Mike, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1974
- [2] Barozzi, Giulio Cesare, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli, Bologna, 2004
- [3] Carslaw, H.S. *A trigonometrical sum and the Gibbs'phenomenon in Fourier's series*, American Journal of Mathematics, Vol. 39, The Johns Hopkins University Press, Aprile 1917
- [4] Hewitt, Edwin e Hewitt, Robert E. *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier Analysis*, archive for History of Exact Sciences, Vol. 21, Springer-Verlag, 1979
- [5] Lanconelli, Ermanno, *Lezioni di analisi matematica 2*, Pitagora Editrice, Bologna, 1997
- [6] Pozzi, Gianni A. *Cenni sulle serie di Fourier*, <http://www.dimat.unipv.it/giulio/linkedmaterial/camb08/fourier-pozzi.pdf>, 2007