

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Modello Statico a Quark degli adroni leggeri

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Francesco Benfenati

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

Lo scopo di questa tesi è quello di trattare il *Modello Statico a Quark*, o Modello a Quark Costituenti (CQM), in riferimento alla composizione degli adroni leggeri. Questo modello fu proposto indipendentemente da Gell-Mann e Zweig nel 1964 per tentare di spiegare le proprietà che si osservavano degli adroni, ed è oggi il modello maggiormente utilizzato fra quelli efficaci. Come per tutti i risultati della Fisica delle Particelle, anche questo si inserisce in quel contesto di continuo confronto fra Fisica Teorica e Sperimentale che ha contraddistinto in particolare modo questa branca della Fisica. Ci limiteremo a discutere il modello originario, quello del 1964, ovvero quello che comprende solamente i tre quark più leggeri *up*, *down* e *strange*, gli unici noti all'epoca.

Per farlo partiremo nel primo capitolo da un'introduzione generale del Modello Standard e delle caratteristiche che riguardano maggiormente il modello di Gell-Mann e Zweig, seguendo talora un approccio che ricalca la storia scientifica, ovvero prendendo le mosse dalle osservazioni sperimentali, da cui sono seguite poi le deduzioni.

Nel secondo capitolo affronteremo da un punto di vista più tecnico, ma non cadendo nell'eccessivo formalismo matematico, le basi della Teoria dei Gruppi, una teoria che trova molteplici applicazioni nel Modello Standard e da cui esso non può prescindere. In particolare ci limiteremo ai soli aspetti utili ai fini della formulazione del CQM. La trattazione è, dunque, anche un esempio concreto di applicazione alla Fisica della Teoria dei Gruppi.

Nel terzo ed ultimo capitolo, infine, vedremo come il Modello Statico a Quark descrive e classifica gli stati adronici leggeri e le loro proprietà osservate in natura.

Indice

1	Il Modello Standard	2
1.1	Particelle elementari e interazioni fondamentali	2
1.2	L'interazione forte	6
1.3	Simmetrie discrete	8
1.3.1	Parità	9
1.3.2	Conservazione di carica e inversione temporale	13
1.4	Numeri quantici	14
1.4.1	Isospin	15
1.4.2	Numero Barionico	15
1.4.3	Numero Leptonico	15
1.4.4	Stranezza	16
1.4.5	Relazione di Gell-Mann-Nishijima	17
2	Teoria dei Gruppi	19
2.1	Gruppi	19
2.2	Rappresentazioni	20
2.2.1	Rappresentazioni di SU(N)	23
2.3	Tabelle di Young	25
2.4	Gruppi di Lie	29
2.4.1	Gruppo SU(2)	31
2.4.2	Gruppo SU(3)	32
2.4.3	SU(2) di Isospin	33
2.4.4	SU(3) di Sapore	36
3	Adroni leggeri	38
3.1	Barioni	38
3.1.1	Decupletto barionico $J^P = 3/2^+$	39
3.1.2	Ottetto barionico $J^P = 1/2^+$	42
3.2	Mesoni	46
3.2.1	Nonetto mesonico $J^P = 0^-$	48
3.2.2	Nonetto mesonico $J^P = 1^-$	49
3.3	Antibarioni	50
	Bibliografia	53

Capitolo 1

Il Modello Standard

1.1 Particelle elementari e interazioni fondamentali

Il *Modello Standard* (abbreviato in MS) del microcosmo è la teoria che descrive i costituenti fondamentali della materia e le interazioni a cui sono soggetti. Esso è l'esito del processo di riduzione dei fenomeni naturali conosciuti a principi elementari ed universali, un processo che ha caratterizzato la fisica in tutto il corso della sua storia. Il desiderio di schematizzazione porta inevitabilmente a chiedersi *quanti* e quali di questi “mattoni” fondamentali esistano; ebbene, se si vuole eseguire un conteggio dei costituenti ultimi dell'Universo, bisogna prima di tutto mettere in chiaro cosa si intende per essi. Generalmente consideriamo come “particelle di materia”, cioè i costituenti fondamentali della materia ordinaria,

- I *leptoni*, con spin $1/2$
- I *quark*, con spin $1/2$

e le relative antiparticelle. Leptoni e quark sono i *fermioni* (particelle con spin semintero) fondamentali e nel MS si raggruppano naturalmente in sei famiglie, composte da due leptoni o due quark (vedi Fig. 1.1); i sei quark si distinguono per il *sapore* e ciascun sapore compare in 3 *colori* diversi. Gli antifermioni sono particelle con numeri quantici di segno opposto ai fermioni corrispondenti. I fermioni, con spin $1/2$, possono assumere due diverse polarizzazioni di spin corrispondenti ai due diversi valori della terza componente di spin ($S_3 = +1/2, -1/2$). Da un punto di vista fisico si possono considerare queste come due diverse particelle elementari, rimuovendo così anche la degenerazione di spin. Se consideriamo univocamente come fermioni fondamentali, dunque, quelli distinti in ogni loro proprietà e non soggetti ad alcuna degenerazione otteniamo così

$$\left. \begin{aligned} 6 (\text{quark}) \times 3 (\text{colori}) \times 2 (\text{polarizzazioni di spin}) &= 36 \\ 6 (\text{leptoni}) \times 2 (\text{polarizzazioni di spin}) &= 12 \end{aligned} \right\} 48 \text{ fermioni.}$$

Considerando che per ciascuno di questi fermioni esiste la corrispondente antiparticella arriviamo al numero di

$$48 \text{ fermioni} + 48 \text{ antifermioni} = 96 \text{ particelle fermioniche fondamentali.}$$

Questi fermioni e antifermioni sono poi raggruppati nel Modello Standard nei multipletti che racchiudono le simmetrie dei vari numeri quantici e che sintetizzano l'enorme varietà di particelle elementari.

Anche per quanto riguarda le interazioni il problema che ha sempre interessato la fisica è stato quello di determinare quali siano le forze fondamentali che agiscono in natura, e se esse possano o meno essere riconducibili a manifestazioni diverse di un'unica forza. Le interazioni comunemente ritenute fondamentali sono quattro: gravitazionale, debole, elettromagnetica e forte. L'interazione gravitazionale è di intensità enormemente inferiore alle altre, e alle energie attualmente disponibili negli acceleratori non opera nessun ruolo nelle interazioni nucleari e subnucleari ed è perciò trascurabile in una loro trattazione teorica. L'interazione elettromagnetica e quella debole appaiono unificate nell'interazione unificata *elettrodebole* già alle energie raggiungibili con gli attuali acceleratori. Questa interazione elettrodebole è descritta dalla teoria del Modello Standard Elettrodebole, ed insieme alla Cromodinamica Quantistica (QCD) che descrive l'interazione forte, formano il cosiddetto Modello Standard. Le forze fondamentali che agiscono a livello subatomico (elettromagnetica, debole e forte) sono viste nel MS come dovute a particelle e sono quindi descritte da particelle di forza, che insieme alle particelle di materia fermioniche costituiscono il set di particelle elementari del Modello Standard. Nel MS i campi di forze sono quantizzati ed i loro mediatori sono *bosoni* (particelle con spin intero) fondamentali con spin 1: il fotone γ mediatore della forza elettromagnetica, i bosoni W^+, W^-, Z^0 mediatori della forza debole, e, infine, gli 8 gluoni mediatori della forza forte. In particolare, il fotone e i gluoni sono considerati avere massa nulla. A questi bosoni mediatori si è aggiunta il *bosone scalare di Higgs* (teorizzato nel 1964 e rilevato per la prima volta nel 2012 con LHC al CERN) con spin 0, responsabile della massa delle particelle elementari del MS attraverso un processo di rottura spontanea della simmetria, che avviene come conseguenza dell'esistenza di un doppietto complesso di campi scalari. Le particelle massive acquistano la loro massa tramite l'interazione con questo campo scalare. In particolare, tre dei quattro gradi di libertà del campo scalare sono "assorbiti" e danno massa ai bosoni W^+, W^-, Z^0 , mentre l'ultimo grado di libertà dà origine ad un nuovo bosone, il bosone di Higgs. Quest'ultimo può decadere in una coppia fermione-antifermione e dare origine alla loro massa. Se consideriamo come forze fondamentali quelle mediate da bosoni mediatori, possiamo considerare dunque anche la presenza di una quinta interazione fondamentale: l'interazione di Higgs. Analogamente a quanto detto per i fermioni, anche i bosoni, in quanto dotati di spin, possono presentarsi in diverse polarizzazioni. In particolare una particella con spin 1 può assumere tre diverse polarizzazioni ($S_3 = +1, 0, -1$). Tuttavia, particelle di massa nulla possono assumere soltanto due di queste polarizzazioni, e più in generale si parla di *elicità* h piuttosto che di spin, intendendo con questo lo spin misurato lungo la direzione della quantità di moto: $h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$. Infatti per particelle senza massa non si può scegliere il sistema di riferimento a riposo: esse viaggiano sempre alla velocità della luce, e scegliendo come asse di quantizzazione dello spin la direzione del moto della particella, si può mostrare che solo le elicità $h = \pm 1$ possono essere presenti.

Così il conteggio dei bosoni porta al risultato

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ fotone} \times 2 \\ 3 (W^+, W^-, Z^0) \times 3 \\ 8 \text{ gluoni} \times 2 \\ 1 \text{ Higgs} \end{array} \right\} 28 \text{ bosoni fondamentali.}$$

In totale possiamo contare quindi

$$\left. \begin{array}{l} 96 \text{ fermioni fondamentali} \\ 28 \text{ bosoni fondamentali} \end{array} \right\} 124 \text{ particelle elementari.}$$

Queste sono illustrate schematicamente e raggruppate in Fig. 1.1, dove possiamo distinguere le famiglie di quark e leptoni. Il tentativo di integrare l'interazione gravitazionale nel Modello Standard prevede inoltre l'esistenza del mediatore di forza chiamato *gravitone*, con spin 2 e massa nulla (due polarizzazioni) ma del quale l'esistenza tuttora non è supportata da dati sperimentali, nonostante siano state osservate recentemente le *onde gravitazionali* delle quali i gravitoni sarebbero i quanti mediatori. La loro scoperta porterebbe dunque il numero di particelle elementari a 126.

Una caratteristica peculiare di quark e gluoni è che non sono mai stati osservati come particelle libere, ma sono confinati dalla forza forte all'interno degli *adroni* (dal greco *adros*, "pesante"). Gli adroni sono classificabili in

1. *mesoni*, composti da una coppia quark-antiquark, quindi con spin intero e dunque bosoni;
2. *barioni*, composti da tre quark, quindi con spin semintero e perciò fermioni;
3. *antibarioni*, composti da tre antiquark e quindi fermioni anch'essi.

Il protone è un barione composto dai quark (u, u, d) mentre il neutrone è un barione composto dai quark (u, d, d). I leptoni invece (dal greco *leptos*, "leggero") sono soggetti solamente alle interazioni elettromagnetica e debole e non risentono dell'interazione forte. *Allo stato attuale delle nostre conoscenze* le particelle stabili sono: il fotone γ , un neutrino (presumibilmente quello di massa minore, ma il fenomeno dell'oscillazione del neutrino non è ancora compreso a fondo) e il suo antineutrino, l'elettrone e^- , il positrone e^+ , il protone p e l'antiprotone p^- . Il neutrone infatti non è stabile e al di fuori del nucleo decade nel processo

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1.1)$$

con una vita media di 15 minuti. È ancora senza spiegazione il fatto che le particelle elementari siano così tante e che la materia ordinaria stabile sia costituita invece soltanto da protoni, elettroni e neutroni. Bisogna ricordare inoltre che la composizione dell'Universo attualmente prevista comprende soltanto il 4% di materia ordinaria, mentre il 21% è composto da materia oscura e il 75% dall'energia oscura; il Modello Standard descrive quindi soltanto il 4% della composizione dell'Universo e rimane tuttora ignoto cosa descriva la restante parte.

Infine, facciamo un accenno alla teoria dell'unificazione delle forze fondamentali. Si ritiene che ad energie molto elevate l'interazione elettrodebole e quella forte si unificano

Standard Model of Elementary Particles

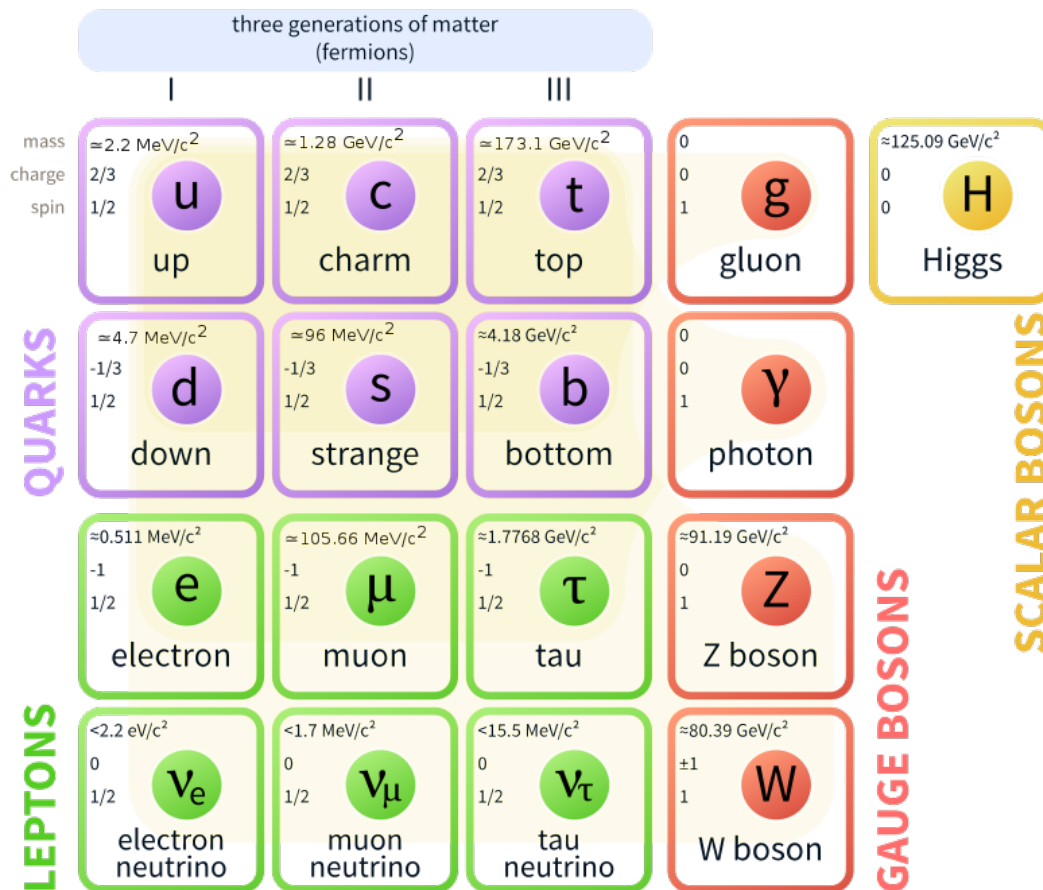


Figura 1.1: Schema del Modello Standard delle particelle fondamentali. In viola e in verde sono raggruppate, in verticale e a due a due, le famiglie di quark dai diversi sapori e quelle leptoniche. Questo schema, pur avendo il pregio dell'immediatezza della semplificazione, non tiene però conto delle degenerazioni di colore dei quark e dei gluoni, di carica elettrica dei bosoni W e di spin dei fermioni e bosoni. Infine non sono rappresentate le rispettive antiparticelle fermioniche.

Unification of Fundamental Forces

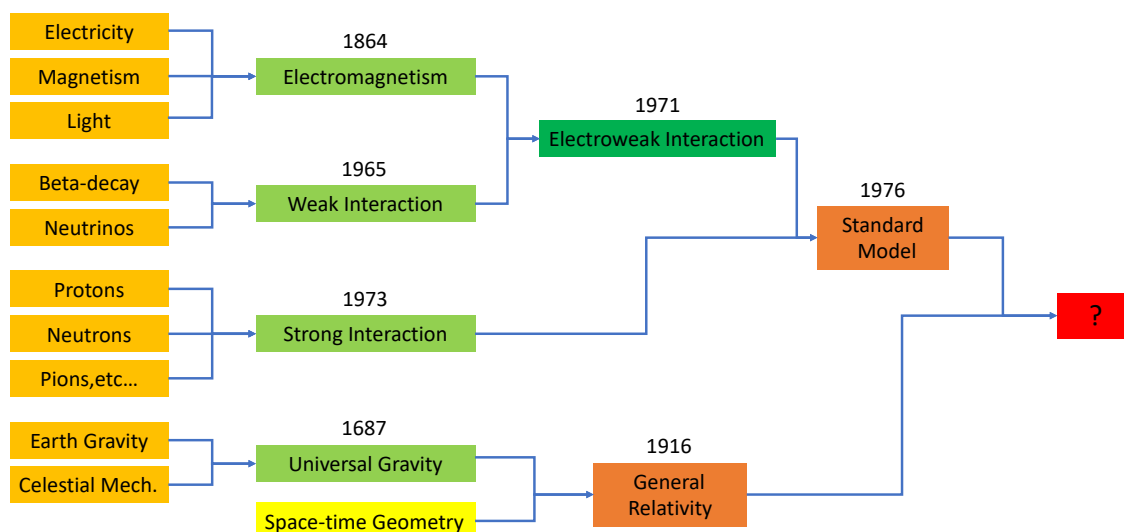


Figura 1.2: Processo di unificazione delle interazioni nella storia della fisica. L’ultima casella potrebbe essere occupata dall’ipotetica “Interazione di Grande Unificazione”.

nella cosiddetta “Interazione di Grande Unificazione” e che ad energie ancora più elevate anche l’interazione gravitazionale sia compresa in questa. Il processo di unificazione delle forze fondamentali è riassunto nello schema in Fig. 1.2.

1.2 L’interazione forte

I quark sono confinati all’interno degli adroni dall’interazione forte ed essendo questa una loro peculiarità è utile un accenno alle caratteristiche fondamentali di questa interazione. Questa avviene solo fra quark e gluoni fra loro, o meglio nell’interazione diretta fra quark per formare adroni, fra gluoni oppure nel processo d’urto fra due quark (vedi Fig. 1.3). La forza che si esercita fra due nucleoni diventa quindi in quest’ottica una forza “residua” dell’interazione fra i quark costituenti in modo analogo a quanto avviene per la forza elettromagnetica che lega atomi diversi, che altro non è che il “residuo” dell’interazione fondamentale che avviene fra protoni e elettroni per formare gli atomi. La teoria che descrive l’interazione forte in analogia con l’elettrodinamica quantistica (QED) è la cromodinamica quantistica (QCD). La carica, o sorgente, dell’interazione forte è la cosiddetta carica di colore, presente in tre tipi (colori) diversi: rosso (r), blu (b) e giallo (g) (*green* in inglese) per i quark, e i rispettivi anticolori antirosso (\bar{r}), antiblu (\bar{b}) e antigiallo (\bar{g}) per gli antiquark. L’interazione forte è mediata da 8 gluoni di massa nulla, ciascuno dei quali porta una carica e un’anticarica di colore nelle combinazioni seguenti:

$$r\bar{b}, \quad b\bar{g}, \quad g\bar{r}, \quad b\bar{r}, \quad g\bar{b}, \quad r\bar{g}, \quad \frac{(r\bar{r} - b\bar{b})}{\sqrt{2}}, \quad \frac{(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})}{\sqrt{3}} . \quad (1.2)$$

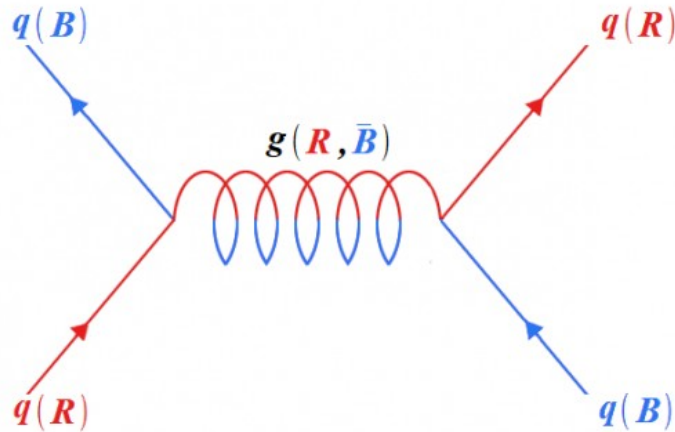


Figura 1.3: Interazione fra due quark tramite scambio di un gluone. Il sapore q dei quark non viene modificato dall'interazione.

L'interazione forte varia il colore dei quark ma non ne cambia il sapore, che è modificato solo dall'interazione debole. Quindi l'intensità dell'interazione forte è la stessa per tutti i sapori dei quark. Tuttavia, la probabilità dei processi, a parità di intensità dell'interazione, dipende dalla massa della particella coinvolta; la diversità di massa dei sapori si traduce in una diversità di probabilità dei processi cui prendono parte. Un caso particolare è la prossimità di massa dei quark u e d per i quali l'identità dell'intensità di interazione si manifesta come quasi identità dei rispettivi processi. Per questo motivo, come vedremo, si utilizza la simmetria di isospin $SU(2)_{isospin}$ delle interazioni forti, un gruppo di trasformazioni per il quale l'interazione forte è approssimativamente invariante. Similmente a quanto accade per gli atomi, sistemi di carica elettrica complessiva nulla, si ritiene che gli stati composti di quark, gli adroni, possano esistere soltanto con carica di colore totale nulla e che i quark possano esistere solamente in questi stati. In realtà l'analogia fra atomi e adroni non è perfetta, in quanto esistono atomi ionizzati, mentre gli adroni esisterebbero esclusivamente in stati di colore nullo: non esistono cioè "ioni di colore" liberi. Stati di colore nullo possono essere dati da quark-antiquark dello stesso colore-anticolore (mesoni) e da tre quark (o antiquark) di tre colori diversi (barioni e antibarioni). È questo un postulato che trova riscontro in tutte le osservazioni sperimentale fatte finora. Non si è mai avuta evidenza finora di quark isolati.

La caratteristica dei gluoni di avere carica di colore rende molto diversa la fenomenologia di questa interazione rispetto all'interazione elettromagnetica dove i fotoni non hanno carica elettrica. I gluoni possono interagire fra loro e dare luogo a vertici a tre o quattro gluoni come in Fig. 1.4. Per quantificare l'intensità dell'interazione forte possiamo valutare la sua costante di accoppiamento α_F , un parametro adimensionale esprimibile in termini di costanti universali, e confrontarlo con la costante di accoppiamento dell'interazione elettromagnetica $\alpha_{EM} = 1/137.1$ pari alla costante di struttura fine e ottenuta in altro modo di cui non tratteremo. Possiamo fare questo confronto tramite una stima delle vite medie di due decadimenti dovuti alle due diverse interazioni e che coinvolgono particelle di masse simili. Gli adroni che decadono per interazione forte hanno vite medie τ_F dell'ordine di 10^{-23} s, mentre le particelle che decadono per interazione elettromagnetica hanno vita media τ_{EM} dell'ordine di 10^{-19} s. Quindi

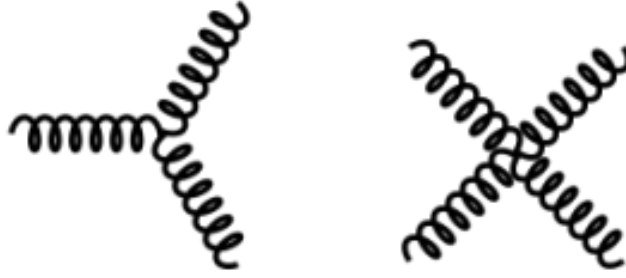


Figura 1.4: Diagrammi di interazione fra gluoni a tre e quattro vertici, caratteristici dell'interazione forte.

$$\frac{\alpha_F}{\alpha_{EM}} \simeq \left(\frac{\tau_{EM}}{\tau_F} \right)^{1/2} \simeq \left(\frac{10^{-19}}{10^{-23}} \right)^{1/2} \simeq 100 \quad (1.3)$$

da cui

$$\alpha_F \simeq 1. \quad (1.4)$$

Questo ha una grossa implicazione: viene a mancare la validità della teoria perturbativa e ciò rende impossibile il calcolo di processi a basse energie, ovvero a grandi distanze, nel cosiddetto *regime di confinamento*. Tuttavia, si può dimostrare che ad alte energie, ossia a piccole distanze, il valore di α_F cala drasticamente fino ad assumere un valore di $\alpha_F \simeq 0.1$. In questo *regime asintotico* sono possibili calcoli perturbativi. Il potenziale quasi statico fra due quark entro un adrone può essere parametrizzato nella forma

$$V_S = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_F}{r} + Kr. \quad (1.5)$$

Il termine Coulombiano domina alle piccole distanze, nel regime asintotico, senza però divergere per $r \rightarrow 0$ perché α_F non è costante ma, come detto, diminuisce al diminuire della distanza. Così gli adroni hanno un raggio finito, corrispondente a una posizione di equilibrio. Il secondo termine dà luogo a una forza di tipo elastico, è responsabile del confinamento dei quark entro gli adroni e spiegherebbe l'impossibilità di avere quark isolati. L'aumento della distanza di due quark porta infatti ad un aumento di questo termine di forza e a un certo punto l'energia ceduta al campo di forza diventa sufficiente a produrre una nuova coppia quark-antiquark, che è una situazione di energia minore rispetto allo stato con una sola coppia di quark a distanza elevata. L'energia impiegata per distanziare i quark viene perciò dissipata nella creazione di nuovi adroni.

1.3 Simmetrie discrete

In questa sezione introdurremo le più importanti trasformazioni *discrete* nella Fisica delle Particelle. Queste trasformazioni, a differenza di quelle *continue*, non sono ottenibili iterando trasformazioni infinitesime. Come sappiamo dal Teorema di Noether l'invarianza di una teoria sotto una determinata trasformazione porta alla conservazione di una determinata quantità. In Fisica delle Particelle queste quantità sono chiamate *numeri quantici* e le rispettive leggi di conservazione sono *additive* se la trasformazione in

questione è continua, e *moltiplicativa* se è discreta. Vedremo in questa sezione qualche esempio.

1.3.1 Parità

La trasformazione di parità, o inversione delle coordinate spaziali, è una trasformazione discreta che permette di passare da un sistema di riferimento destrorso a uno sinistrorso e viceversa:

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z) \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Questa trasformazione è generata dall'operatore di parità, che indichiamo con il simbolo \hat{P} , che agisce sulle coordinate spaziali come

$$\hat{P}\mathbf{r} = -\mathbf{r}. \quad (1.7)$$

Diverse quantità si comportano in diversi modi sotto l'azione dell'operatore di parità: i vettori, come \mathbf{r} e \mathbf{p} (posizione e quantità di moto), si trasformano come abbiamo detto

$$\hat{P}\mathbf{r} = -\mathbf{r} \quad (1.8a)$$

$$\hat{P}\mathbf{p} = -\mathbf{p} \quad (1.8b)$$

mentre gli scalari, quali il modulo di vettori come \mathbf{r} , \mathbf{p} , come è intuibile sono invarianti sotto la trasformazione di parità

$$\hat{P}r = \hat{P}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2} = [(-\mathbf{r}) \cdot (-\mathbf{r})]^{1/2} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2} = r \quad (1.9a)$$

$$\hat{P}p = \hat{P}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^{1/2} = [(-\mathbf{p}) \cdot (-\mathbf{p})]^{1/2} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^{1/2} = p. \quad (1.9b)$$

Esistono tuttavia quantità vettoriali e scalari che non si trasformano come i vettori e scalari standard: gli *pseudovettori* e gli *pseudoscalari*. Sono pseudovettori i vettori dati dal prodotto vettoriale di altri vettori: per esempio il momento angolare orbitale \mathbf{L} si trasforma come

$$\hat{P}\mathbf{L} = \hat{P}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = [(-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p})] = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L} \quad (1.10)$$

che è l'esatto opposto di come si trasformano i vettori standard.

Gli pseudoscalari analogamente si trasformano in modo opposto rispetto agli scalari: per esempio il volume di un parallelepipedo si trasforma così

$$\hat{P}(a \cdot (b \times c)) = (-a) \cdot [(-b) \times (-c)] = -a \cdot (b \times c). \quad (1.11)$$

Una proprietà della trasformazione di parità è che due trasformazioni consecutive lasciano inalterato il sistema di riferimento

$$\hat{P}^2\mathbf{r} = \hat{P}\hat{P}\mathbf{r} = \hat{P}(-\mathbf{r}) = \mathbf{r}. \quad (1.12)$$

In meccanica quantistica questo si traduce nell'invarianza della funzione d'onda sotto una doppia trasformazione di parità

$$\hat{P}^2|\psi\rangle = +1|\psi\rangle \quad (1.13)$$

per cui gli autovalori della parità sono $P = \pm 1$. Per una teoria invariante sotto parità, cioè della quale la hamiltoniana \hat{H} è invariante sotto l'azione di \hat{P} e dove quindi vale

$$[\hat{H}, \hat{P}] = 0 \quad (1.14)$$

la parità è conservata in ogni processo fisico. Per esempio, ogni potenziale a simmetria sferica gode della proprietà $\hat{H}(-\mathbf{r}) = \hat{H}(\mathbf{r}) = \hat{H}(r)$. In questo caso vale la (1.14) e gli autostati del sistema sono gli stessi di \hat{P} e hanno quindi parità definita con autovalori $P = \pm 1$. Un esempio familiare è quello dell'atomo di idrogeno, i cui stati sono dati dalla funzione d'onda (trascurando lo spin)

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = \chi_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.15)$$

dove le funzioni angolari $Y_l^m(\theta, \phi)$ sono le note *armoniche sferiche* e n, l, m sono i numeri quantici *principale, orbitale* e *azimutale*:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (1.16)$$

dove $P_l^m(\cos \theta)$ sono i *polinomi di Legendre*.

In coordinate sferiche l'inversione spaziale $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ è equivalente alla trasformazione $\theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \pi + \phi$. L'applicazione dell'operatore di parità alle funzioni $P_l^m(\cos \theta)$ e $e^{im\phi}$ dà

$$\hat{P}e^{im\phi} = e^{im(\phi+\pi)} = e^{im\phi} e^{im\pi} = (-1)^m e^{im\phi} \quad (1.17a)$$

$$\hat{P}P_l^m(\cos \theta) = (-1)^{l+m} P_l^m(\cos \theta). \quad (1.17b)$$

Quindi

$$\hat{P}Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi). \quad (1.18)$$

La parità delle armoniche sferiche (1.16) è quindi $(-1)^l$; gli stati con $l = 0, 2, \dots$ hanno parità $P = +1$ mentre quelli con $l = 1, 3, \dots$ hanno parità $P = -1$.

In generale una funzione d'onda che descrive una particella in meccanica quantistica può avere inoltre una parità intrinseca η_ψ indipendente dalle proprietà spaziali. La funzione complessiva si trasformerà come segue sotto l'azione della parità

$$\hat{P}\psi_{nlm}(r) = \eta_\psi (-1)^l \psi_{nlm}(r). \quad (1.19)$$

Come conseguenza della (1.13) la parità intrinseca soddisfa la condizione

$$\eta_\psi^2 = 1. \quad (1.20)$$

Possiamo quindi definire una parità totale di uno stato quantistico come

$$\eta_{tot} = \eta_\psi (-1)^l. \quad (1.21)$$

Inoltre, la conservazione della parità, quando presente, dà luogo a una legge di tipo moltiplicativo; ovvero, se un sistema è descritto da una funzione d'onda composta $\psi = \psi_1 \psi_2$ allora

$$\hat{P}\psi = \hat{P}(\psi_1 \psi_2) = \hat{P}_1 \psi_1 \hat{P}_2 \psi_2 \quad (1.22)$$

per cui si ha

$$P = P_1 P_2 . \quad (1.23)$$

Da un'analisi dettagliata delle teorie quantistiche relativistiche sappiamo che i bosoni hanno la stessa parità intrinseca delle loro antiparticelle, mentre i fermioni e le loro antiparticelle hanno parità intrinseche opposte. Sappiamo inoltre che la parità è conservata da tutte le interazioni tranne quella debole. Quando la parità è una simmetria, le parità intrinseche di differenti particelle possono essere determinate analizzando diversi decadimenti o processi di produzione.

Tuttavia, non è possibile determinare una parità assoluta di un qualsiasi sistema poiché, partendo da una certa condizione di partenza, si possono sempre cambiare le parità di tutti gli stati senza osservare una conseguenza fisica. È necessario quindi stabilire per convenzione la parità di particelle diverse sotto certi aspetti (differenti cariche elettriche o numeri quantici). Per convenzione si sceglie la parità intrinseca di protone, neutrone e del barione Λ come $+1$.

Le parità delle altre particelle sono quindi ottenute a partire da queste attraverso gli esperimenti. Vediamone un esempio.

Parità del mesone π^-

Il mesone π^- è formato dai quark e antiquark ($\bar{u}d$). Vedremo meglio la sua struttura nel Cap. 3. La parità intrinseca del mesone π^- è stata dedotta a partire dall'osservazione sperimentale dell'assorbimento nucleare, dovuto all'interazione forte, di π^- di bassa energia da parte del deuterio d , che porta alla seguente reazione di cattura:

$$\pi^- + d \rightarrow nn . \quad (1.24)$$

Consideriamo gli stati iniziale e finale separatamente e applichiamo poi le leggi di conservazione che conosciamo.

Nello stato iniziale il nucleo del deuterio ha spin $S_d = 1$ e il π^- ha spin 0. Il momento angolare orbitale fra i due è nullo: $L_{\pi^-d} = 0$. Il momento angolare totale dello stato iniziale è quindi

$$|J_i| = |S_{\pi^-} + S_d + L_{\pi^-d}| = 1 . \quad (1.25)$$

Nello stato finale il momento angolare deve essere uguale a quello iniziale per la conservazione del momento angolare:

$$|J_f| = |S_{nn} + L_{nn}| = 1 \quad (1.26)$$

dove L_{nn} è il momento angolare orbitale dei due neutroni e S_{nn} è lo spin totale (per semplicità li chiameremo d'ora in poi l ed S).

La funzione d'onda che descrive il sistema di due neutroni può essere scritta fattorizzata come prodotto di una funzione d'onda spaziale e una di spin indipendenti

$$\psi_{tot} = \alpha(spazio) \cdot \beta(spin) . \quad (1.27)$$

La (1.27) deve essere antisimmetrica per lo scambio delle due particelle in quanto i due neutroni sono fermioni identici e deve valere il Principio di esclusione di Pauli. La parte

spaziale $\alpha(\text{spazio})$ è descritta dalle armoniche sferiche (1.16) e scambiare i due neutroni equivale a fare la trasformazione $\theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \pi + \phi$ per cui come abbiamo già visto

$$Y_l^m(\theta, \phi) \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.28)$$

quindi $(-1)^l$ dà la simmetria della parte spaziale per lo scambio di particelle. La funzione di spin totale $\beta(\text{spin})$ è composta dalle funzioni di spin delle due particelle

$$\beta(1) = |\uparrow\rangle \circ |\downarrow\rangle \quad (1.29a)$$

$$\beta(2) = |\uparrow\rangle \circ |\downarrow\rangle \quad (1.29b)$$

a seconda che abbiano i valori $S_i = 1/2, S_{iz} = \pm 1/2$ con $i = 1, 2$. Le combinazioni di queste due funzioni di spin portano agli stati di tripletto simmetrici $S = 1, S_z = 0, \pm 1$

$$\beta(1, 1) = |\uparrow\uparrow\rangle \quad \beta(1, 0) = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad \beta(1, -1) = |\downarrow\downarrow\rangle \quad (1.30)$$

e allo stato di singoletto antisimmetrico $S = 0, S_z = 0$

$$\beta(0, 0) = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.31)$$

La simmetria della funzione $\beta(\text{spin})$ è quindi $(-1)^{S+1}$. La simmetria della funzione d'onda totale è perciò $(-1)^{S+1} + (-1)^l = (-1)^{l+S+1}$ e tale quantità deve essere pari a -1 per il principio di esclusione di Pauli:

$$\psi_{tot} \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} (-1)^{l+S+1} \psi_{tot} = -\psi_{tot}. \quad (1.32)$$

Quindi si deve avere $l + S + 1$ dispari da cui $l + S =$ pari.

In conclusione, lo stato finale deve avere:

- $l + S =$ pari ;
- $|J_f| = 1$.

Le possibili combinazioni che possono portare a quest'ultimo valore sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 0 \\ S = 1 \\ l + S = \text{dispari} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1 \\ S = 0 \\ l + S = \text{dispari} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1 \\ S = 1 \\ l + S = \text{pari} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 2 \\ S = 1 \\ l + S = \text{dispari} \end{array} \right\} .$$

Tra queste solo la combinazione $l = 1, S = 1$ ha $l + S =$ pari ed è in tale configurazione che si trovano i due neutroni. In notazione spettroscopica si dice che sono in uno stato $^{2S+1}L_J = {}^3P_1$. Essendo la parità un numero quantico moltiplicativo la parità dello stato finale è

$$P(2n) = P(n)P(n)(-1)^{l=1} = -1 \quad (1.33)$$

perché la parità del neutrone è assunta convenzionalmente pari a $+1$. Poiché la parità è conservata nell'interazione forte (e nessuna indicazione sperimentale finora lo contraddice) si deduce dunque che la parità dello stato iniziale dev'essere

$$P(\pi^- d) = P(nn) = -1. \quad (1.34)$$

Poiché

$$P(\pi^- d) = P(\pi^-)P(d)(-1)^{l=0} \quad (1.35)$$

e

$$P(d) = P(p)P(n)(-1)^0 \quad (1.36)$$

con $P(p) = P(n) = +1$, allora dev'essere

$$P(\pi^- d) = P(\pi^-) = -1 \quad (1.37)$$

ovvero il mesone π^- ha parità negativa.

Si può dimostrare che $P(\pi^-) = P(\pi^+) = P(\pi^0) = -1$. I fermioni e i bosoni possono essere catalogati in base alla loro spin-parità J^P : i fermioni hanno J semintero e i bosoni hanno J intero. I bosoni con $J^P = 0^+$ sono chiamati *scalari*, quelli con $J^P = 0^-$ *pseudoscalari*, quelli con $J^P = 1^-$ *vettoriali* e quelli con $J^P = 1^+$ *pseudovettoriali*. I mesoni π hanno spin-parità $J^P = 0^-$ e sono un esempio di bosoni pseudoscalari.

Violazione della parità nell'interazione debole

Abbiamo detto nel Par. 1.3.1 che la conservazione della parità risulta violata dall'interazione debole; mostriamone un breve e semplice esempio. Sappiamo che il neutrino elettronico ν_e ha spin $S = 1/2$ e perciò potrebbe assumere due stati diversi di polarizzazione con $S_z = \pm 1/2$. Tuttavia, sperimentalmente si osservano solamente neutrini nello stato con $S_z = -1/2$ ovvero con spin antiparallelo alla quantità di moto \mathbf{p} : si dice che il neutrino è *sinistrorso*; analogamente si osserva che l'antineutrino elettronico $\bar{\nu}_e$ assume unicamente lo spin $S_z = +1/2$ ovvero parallelo alla quantità di moto: si dice che l'antineutrino è *destrorso*. Applicando la parità al neutrino ν_e la quantità di moto si trasforma come in (1.8b) mentre lo spin rimane invariato; si ottiene quindi un neutrino destrorso che non è mai stato osservato e non è concepito nel Modello Standard. L'applicazione della parità a un neutrino sinistrorso porta ad uno stato che non esiste, ed essendo il neutrino soggetto alla sola interazione debole se ne deduce che quest'ultima non è invariante sotto trasformazioni di parità.

1.3.2 Conservazione di carica e inversione temporale

Riassumiamo brevemente le altre due trasformazioni discrete importanti in Fisica delle Particelle: la coniugazione di carica C e l'inversione temporale T . La trasformazione di coniugazione di carica consiste nello scambio di carica, di qualunque tipo essa sia, e momento magnetico di una particella. La teoria dell'elettromagnetismo classico è invariante sotto questa trasformazione, come si può notare dall'invarianza delle equazioni di Maxwell per il cambio di segno di carica e densità di corrente o di campo elettrico e magnetico. Nella meccanica quantistica relativistica la trasformazione C si manifesta nel passaggio da particella ad antiparticella, e si osserva che sia l'interazione forte che quella elettromagnetica sono invarianti per scambio di cariche, mentre ciò non è più vero per l'interazione debole.

La trasformazione di inversione temporale T consiste invece nell'inversione dell'asse temporale $t \rightarrow -t$, e sappiamo dalla meccanica classica che l'equazione di Newton del moto è invariante per questa trasformazione. Invarianti sono anche le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo, mentre per sistemi macroscopici la termodinamica definisce

Simmetrie	Int. Gravitazionale	Int. Debole	Int. Elettromagnetica	Int. Forte
CPT	Rispettata	Rispettata	Rispettata	Rispettata
CP	Rispettata	Violata	Rispettata	Rispettata
T	Rispettata	Violata	Rispettata	Rispettata
C	Rispettata	Violata	Rispettata	Rispettata
P	Rispettata	Violata	Rispettata	Rispettata

Tabella 1.1: Comportamento delle interazioni fondamentali rispetto alle simmetrie discrete.

un unico senso dell'asse temporale, cioè quello diretto verso l'aumento di entropia. Tuttavia, ciò non è considerato decisivo in quanto l'irreversibilità delle leggi termodinamiche è una proprietà che si origina come effetto d'insieme del sistema e che non trova riscontro nelle leggi fondamentali che governano la dinamica dei costituenti elementari. Oggi sappiamo che le interazioni gravitazionale, elettromagnetica e forte rispettano la simmetria T mentre l'interazione debole la viola. Un importante teorema della teoria quantistica dei campi afferma che tutte le interazioni descritte da teorie di campo invarianti per trasformazioni di Lorentz sono invarianti sotto la combinazione di trasformazioni C, P, T in quest'ordine, ovvero la CPT è una simmetria esatta. Ciò indica che tutte le interazioni ad oggi note sono descrivibili tramite teorie di questo tipo. Altre fondamentali conseguenze dell'invarianza CPT sono il fatto che particelle e relative antiparticelle hanno stesse masse e tempi di vita, ma numeri quantici interni opposti. Questo teorema è consistente con tutte le osservazioni sperimentali fatte finora.

Infine, consideriamo le trasformazioni CP . Dato che la CPT è sempre soddisfatta, l'esistenza di una simmetria (violazione) per CP indica una simmetria (violazione) per T . Sappiamo oggi che solo alcuni processi deboli violano la simmetria CP , per i quali di conseguenza è violata anche la simmetria T . Le simmetrie rispettate e violate dalle interazioni fondamentali sono riassunte in Tab. 1.1.

1.4 Numeri quantici

Dalla Fisica Classica sappiamo che un processo fisico può avvenire se è cinematicamente ammesso e se non viola alcuna legge di conservazione riconosciuta tale. Ad esempio, un processo che violi la conservazione dell'energia (trascuriamo i quanti virtuali ammessi dalla meccanica quantistica) o della carica elettrica non avverrà mai. Spesso queste leggi di conservazione sono dedotte proprio dall'esperienza: osservazioni sperimentali hanno portato alla definizione di certe quantità conservate e centinaia di anni di verifiche ne hanno consolidato la validità.

Allo stesso modo, agli albori della Fisica delle Particelle, quando si sono iniziati a studiare i processi subatomici si è cercato di dedurre dalle osservazioni quelle quantità conservate e quelle leggi di conservazione che erano presenti ma ignote in mancanza di una comprensione teorica delle forze in gioco. Queste quantità conservate, proprie delle particelle, sono chiamate numeri quantici, e le leggi di conservazione sono diverse per ciascuna delle interazioni fondamentali. Uno dei primi e più evidenti risultati osservati nelle reazioni fra particelle elementari fu che il numero di fermioni si conserva sempre,

in ogni interazione: associando un *numero fermionico* ai fermioni e un numero di segno opposto agli antifermioni, in ogni interazione la somma di questo numero si conservava.

1.4.1 Isospin

L'*isospin forte* è un numero quantico la cui introduzione è stata necessaria per spiegare l'evidente equivalenza fra decadimenti e processi che coinvolgono i quark u e d . La notevole prossimità delle loro masse, come abbiamo accennato nel Par. 1.2, implica infatti che questi due sapori possono essere per certi aspetti unificati come diversi stati di un'unica particella. Si associa ai quark u e d una carica interna in uno spazio astratto detto di *Isospin*, in analogia col formalismo dello spin di un elettrone, benché quest'ultimo abbia un significato fisico e non sia semplicemente una "coincidenza". Si prendono come numeri quantici gli autovalori degli operatori di isospin $I = 1/2$, $I_3 = \pm 1/2$ e per convenzione si associa $I_3 = +1/2$ al quark u e $I_3 = -1/2$ al quark d . Questi due quark si distinguono quindi, in approssimazione di masse identiche, per il valore di I_3 . Per ora ci basti sapere questo; discuteremo meglio di questo numero quantico nel Par. 2.4.3.

1.4.2 Numero Barionico

Dall'assenza di processi cinematicamente ammessi si può spesso dedurre la presenza di possibili leggi di conservazione. Per esempio, il decadimento

$$p \rightarrow e^+ + \pi^0 \quad (1.38)$$

è cinematicamente ammesso in quanto la massa del protone è molto maggiore della somma delle masse di positrone e pione e anche la carica elettrica è conservata: ci aspetteremmo perciò di osservare questo decadimento.

Tuttavia, sperimentalmente non è mai stato osservato un processo di decadimento del protone. Ciò suggerisce la presenza di una legge di conservazione. Se ipotizziamo semplicemente che i barioni come il protone portino un numero quantico additivo conservato, chiamato *numero barionico*, pari a $B = 1$, che gli antibarioni di conseguenza abbiano un $B = -1$ mentre il fotone, i leptoni e i mesoni un $B = 0$ allora, essendo il protone il barione più leggero, esso non decade, compatibilmente con ciò che si osserva. Sappiamo che i barioni sono costituiti da tre quark, per cui è naturale attribuire ai quark numero barionico $B = 1/3$ e agli antiquark $B = -1/3$. Le osservazioni sperimentali mostrano che il numero barionico è conservato da tutte le interazioni.

1.4.3 Numero Leptonico

Analogamente diverse osservazioni sperimentali hanno portato all'introduzione di un numero quantico additivo per i leptoni. Per esempio, il processo

$$e^- + e^- \rightarrow \pi^- + \pi^- \quad (1.39)$$

è cinematicamente ammesso e conserva la carica elettrica, ma non si osserva. Ipotizzando che i leptoni portino un *numero leptonico* conservato pari a $L = 1$ ($L = -1$ per gli

Leptoni	L_e	L_μ	L_τ	L
e^-	1	0	0	1
ν_e	1	0	0	1
μ^-	0	1	0	1
ν_μ	0	1	0	1
τ^-	0	0	1	1
ν_τ	0	0	1	1

Tabella 1.2: Numeri leptonici dei leptoni.

antileptoni) mentre il fotone e gli adroni abbiano $L = 0$, la conservazione di questo numero spiega l'assenza del processo (1.39). Inoltre, l'assenza dei processi

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma \quad (1.40a)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + e^+ + e^- \quad (1.40b)$$

indica che devono esservi diversi tipi di numeri leptonici. Ce n'è infatti uno per ogni famiglia leptonica, il numero elettronico L_e , il numero muonico L_μ , e il numero tauonico L_τ . Il numero leptonico di ogni particella può essere espresso come somma di questi numeri:

$$L \equiv L_e + L_\mu + L_\tau. \quad (1.41)$$

Questo è in accordo con il decadimento osservato del muone

$$\begin{aligned} \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu & (1.42) \\ (L_\mu = 1) &\rightarrow (L_e = 1) + (L_e = -1) + (L_\mu = 1) \\ (L = 1) &\rightarrow (L = 1). \end{aligned}$$

I numeri leptonici sono riassunti in Tab. 1.2.

1.4.4 Stranezza

La *stranezza* (*strangeness*) è un ulteriore numero quantico additivo introdotto per spiegare il comportamento delle cosiddette particelle “strane”. Queste sono particelle che quando furono scoperte risultavano avere un comportamento strano: erano prodotte in abbondanza, il che faceva ritenere fossero prodotte tramite interazione forte, ma avevano tempi di vita media pari a 10^{-10} s e non di 10^{-23} s come ci si aspettava da decadimenti dovuti all'interazione forte: le particelle strane decadevano debolmente. Erano inoltre prodotte sempre in coppia. Questi problemi portarono a ipotizzare la conservazione di un nuovo numero quantico associato a queste particelle. La lunga vita media di queste particelle permise uno studio accurato usando la camera a bolle a idrogeno, nella quale si misuravano percorsi di volo dell'ordine dei centimetri. Un esempio di decadimento osservato nella camera a bolle è il seguente

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0. \quad (1.43)$$

quarks	I, I_3	S	C	T	B	B	Q
u	$1/2, +1/2$	0	0	0	0	1/3	+2/3
d	$1/2, -1/2$	0	0	0	0	1/3	-1/3
c	0	0	1	0	0	1/3	+2/3
s	0	-1	0	0	0	1/3	-1/3
t	0	0	0	1	0	1/3	+2/3
b	0	0	0	0	-1	1/3	-1/3

Tabella 1.3: Numeri quantici di sapore, numero barionico (B) e carica elettrica (Q) dei quark. Gli antiquark hanno numeri quantici e cariche opposti.

Il mesone K^0 e il barione Λ^0 dopo aver percorso un tragitto dell'ordine del centimetro decadono debolmente nei modi seguenti

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (1.44a)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p. \quad (1.44b)$$

Per risolvere i problemi si è definito un numero quantico intero chiamato *stranezza* che si conserva nelle interazioni forti ma non si conserva in quelle deboli.

Nel Modello Statico a Quark la stranezza degli adroni è spiegata grazie alla presenza del quark strange s come costituente: si attribuisce stranezza $S = -1$ al quark s ($S = +1$ all'antiquark \bar{s}) e quindi i gli adroni costituiti da un quark s avranno $S = -1$ (per esempio il $\Lambda^0 = sdu$), quelli costituiti da due quark s avranno $S = -2$ ($\Xi^- = ssd$) e con tre quark strani si ha invece $S = -3$ ($\Omega^- = sss$). Verifichiamo come la stranezza sia conservata nel decadimento forte (1.43):

$$\pi^-(S = 0) + p(S = 0) \rightarrow K^0(S = +1) + \Lambda^0(S = -1). \quad (1.45)$$

La stranezza totale è quindi conservata. Nei due decadimenti deboli (1.44) ciò non è più vero:

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- & (1.46) \\ (S = +1) &\rightarrow (S = 0) + (S = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &\rightarrow \pi^- + p & (1.47) \\ (S = -1) &\rightarrow (S = 0) + (S = 0). \end{aligned}$$

Occupandoci solamente degli adroni costituiti dai quark u, d, s non trattiamo gli altri numeri quantici riguardanti i quark c, t, b (C charm, T topness, B bottomness): anch'essi conservati dalle interazioni elettromagnetica e forte ma non dall'interazione debole, sono indicati in Tab. 1.3.

1.4.5 Relazione di Gell-Mann-Nishijima

Consideriamo i numeri quantici introdotti I, B, S : questi numeri quantici non sono disconnessi fra loro, ma sono legati alla carica elettrica Q in un adrone da una semplice

relazione chiamata *relazione di Gell-Mann-Nishijima*:

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2}. \quad (1.48)$$

Definendo *ipercarica forte* (da non confondere con l'*ipercarica debole*, che non trattiamo) la quantità

$$\Upsilon = B + S \quad (1.49)$$

la (1.48) diventa semplicemente

$$Q = I_3 + \frac{\Upsilon}{2}. \quad (1.50)$$

Quando vennero in seguito scoperti i quark c, t, b la relazione venne estesa agli altri numeri quantici e l'ipercarica divenne la somma del numero barionico e di tutti i numeri quantici associati ai sapori

$$\Upsilon = B + S + C + T + B \quad (1.51)$$

mantenendo la validità della (1.50).

Capitolo 2

Teoria dei Gruppi

Abbiamo accennato nel Par. 1.4.1 all'introduzione del numero quantico di Isospin. Esso nasce come abbiamo detto dall'osservazione di una particolare simmetria che si verifica, in questo caso in modo approssimato, fra le masse dei quark u e d . Allo stesso modo, ad esempio, l'attribuzione dello stato di colore ai quark porta con sé una simmetria, questa volta esatta. Possiamo dire che, in generale, le simmetrie costituiscono la parte cruciale della formulazione e sistematizzazione del MS. Il linguaggio matematico appropriato per discutere di simmetrie è la Teoria dei Gruppi, che ora trattiamo brevemente.

2.1 Gruppi

Definizione. Sia $G = \{g\}$ un insieme tale che $G \neq \emptyset$. G si definisce un **gruppo** se

1. Esiste una legge di composizione \cdot : se $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$;
2. Esiste l'elemento neutro $e \in G$ t.c. $\forall g \in G$ vale $g \cdot e = e \cdot g = g$;
3. $\forall g \in G \exists g^{-1}$ t.c. $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$;
4. Vale $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ la proprietà associativa $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$.

Definizione. Un gruppo G è detto **abeliano** se $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$.

I gruppi i cui elementi dipendono invece in modo continuo da alcuni parametri sono detti **Gruppi di Lie**. Un esempio di gruppo di Lie è il gruppo $SO(2)$ delle rotazioni nello spazio bidimensionale euclideo, i cui elementi dipendono in modo continuo da un angolo $\theta \in [0, 2\pi]$. Per il nostro scopo ci limiteremo a trattare il gruppo $SU(N)$ delle matrici unitarie $N \times N$ con determinante = 1, e in particolare $SU(2)$, $SU(3)$.

Definizione. Siano G, G' gruppi.

Un'applicazione $\phi : G \rightarrow G'$ è un **omomorfismo** fra gruppi se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2) \quad g_1, g_2 \in G$;
2. $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1} \quad g \in G$;
3. $\phi(e) = e'$.

Si denota con $Hom(G, G')$ l'insieme di tutti gli omomorfismi di gruppo di G in G' . Un omomorfismo fra gruppi preserva quindi le operazioni e l'elemento neutro del gruppo di partenza.

2.2 Rappresentazioni

Una *rappresentazione* di un gruppo G è una “realizzazione” delle relazioni moltiplicative del gruppo G in un corrispondente gruppo di operatori lineari (matrici quadrate) che agiscono su uno spazio vettoriale V la cui dimensione è detta dimensione della rappresentazione.

Definizione. Sia G un gruppo e V uno spazio vettoriale di campo K . Assumiamo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $0 < \dim V < \infty$. Una rappresentazione di dimensione $\dim R = \dim V$ di G in V è un qualsiasi omomorfismo $R \in Hom(G, GL(V))$.

In generale una rappresentazione può agire anche su uno spazio vettoriale di dimensione infinita, come nel caso del momento angolare sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Proposizione. Un'applicazione

$$R : G \rightarrow GL(V) \quad (2.1)$$

è una rappresentazione di G se e solo se

$$R(g_1 \cdot g_2) = R(g_1)R(g_2) \quad g_1, g_2 \in G. \quad (2.2)$$

Proposizione. Se R è una rappresentazione di G allora, essendo R un omomorfismo, si ha

$$R(g_1 \cdot g_2) = R(g_1)R(g_2) \quad g_1, g_2 \in G \quad (2.3)$$

$$R(g^{-1}) = (R(g))^{-1} \quad g \in G \quad (2.4)$$

$$R(e) = 1. \quad (2.5)$$

Alcuni gruppi, tra i quali come abbiamo visto $SU(N)$, sono definiti a partire da matrici. Queste matrici definiscono direttamente la cosiddetta rappresentazione *definite* o *fondamentale* e agiscono sui vettori elementi v di uno spazio vettoriale V di dimensione N come operatori lineari. Denotiamo con v^a le componenti di un vettore dello spazio V . La matrice $R(g)$ che rappresenta la trasformazione associata all'elemento g del gruppo G , trasforma il vettore v nel modo seguente:

$$v^a \xrightarrow{g \in G} v'^a = [R(g)]^a_b v^b \quad (2.6)$$

dove gli elementi della matrice $[R(g)]^a_b$ sono indicati con l'indice di riga a come primo indice convenzionalmente posto in alto, e l'indice di colonna b come secondo indice posto convenzionalmente in basso. È qui utilizzata la notazione di Einstein nella quale gli indici ripetuti più di una volta sono sommati su tutti i loro possibili valori e inoltre nella somma un indice è in alto e uno in basso, a meno che tali indici siano equivalenti, caso in cui possono essere posti entrambi in alto o in basso. Vediamo allora cosa si intende per equivalenza di rappresentazioni.

Definizione. Siano R_1, R_2 due rappresentazioni di G sugli spazi vettoriali V_1, V_2 . R_1, R_2 sono dette **equivalenti** se esiste un isomorfismo $A \in Iso(V_1, V_2)$ t.c.

$$AR_1(g)A^{-1} = R_2(g) \quad \forall g \in G. \quad (2.7)$$

Due rappresentazioni si dicono equivalenti quindi se sono collegate da trasformazioni di similitudine. Se R_1, R_2 sono equivalenti si scrive $R_1 \simeq R_2$ e si può dimostrare che \simeq è effettivamente una relazione di equivalenza nell'insieme delle rappresentazioni del gruppo G . Sostanzialmente quindi la trasformazione di similitudine descrive un cambio di base nello spazio vettoriale V_1 o V_2 . Due rappresentazioni equivalenti identificano quindi lo stesso operatore lineare espresso in basi diverse.

Definizione. Sia V_1 un sottospazio dello spazio lineare vettoriale V . Il sottospazio V_1 è un **sottospazio invariante** rispetto ad un operatore lineare R se e solo se

$$Rv_1 \in V_1 \quad \forall v_1 \in V_1. \quad (2.8)$$

È evidente che V stesso e l'insieme vuoto \emptyset sono sottospazi invarianti triviali.

Definizione. Una rappresentazione R del gruppo G che agisce sullo spazio vettoriale V è detta **riducibile** se esiste in V almeno un sottospazio invariante V_1 , non triviale, rispetto a tutti gli operatori $R(g)$, con $g \in G$. Altrimenti la rappresentazione è detta **irriducibile**.

In termini di matrici, una rappresentazione è quindi riducibile se è equivalente ad una rappresentazione le cui matrici sono diagonali a blocchi: ad esempio $R(g)$ è riducibile se vale:

$$\tilde{R}(g) = AR(g)A^{-1} = \begin{pmatrix} R_1(g) & 0 & \dots \\ 0 & R_2(g) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \forall g \in G \quad (2.9)$$

per una matrice A opportuna. Lo spazio vettoriale V su cui agisce la rappresentazione riducibile $R(g)$ si decompone così come somma diretta degli spazi vettoriali su cui agiscono le rappresentazioni $R_1(g), R_2(g), \dots$, cioè $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$ e $R(g)$ è riducibile come

$$R(g) = R_1(g) \oplus R_2(g) \oplus \dots \quad (2.10)$$

Una rappresentazione è invece irriducibile se non può essere decomposta come visto.

Definizione. Una rappresentazione R del gruppo G sullo spazio V è detta **unitaria** se tutti gli operatori $R(g)$, con $g \in G$ sono operatori unitari:

$$R^\dagger(g) = R^{-1}(g) = R(g^{-1}) \quad \forall g \in G. \quad (2.11)$$

Nella classificazione delle rappresentazioni di un gruppo è utile considerare le rappresentazioni irriducibili equivalenti, poiché da esse seguono tutte le altre. I vettori che si trasformano in modo identico a v^a si denotano per convenzione con gli indici in alto, e sono vettori che appartengono a spazi vettoriali equivalenti a V e sui quali agisce la rappresentazione definita $R(g)$. Tutti i vettori del tipo v^a si trasformano nello stesso modo sotto l'azione del gruppo G .

Partendo da questa rappresentazione fondamentale ne possiamo ottenere altre tre:

1. la rappresentazione complesso coniugata $[R(g)]^*$ che agisce sullo spazio complesso coniugato V^* ;
2. la rappresentazione inverso-trasposta $[R(g)]^{-1T}$ che agisce sullo spazio duale \tilde{V} ;
3. la rappresentazione inverso-hermitiano coniugata $[R(g)]^{-1\dagger}$ che agisce sullo spazio duale complesso coniugato \tilde{V}^* .

I vettori su cui agiscono si trasformano sotto l'azione del gruppo e sono indicizzati come segue:

$$v^{\dot{a}} \xrightarrow{g \in G} v'^{\dot{a}} = [R(g)^*]_{\dot{b}}^{\dot{a}} v^{\dot{b}} \quad (2.12)$$

$$v_a \xrightarrow{g \in G} v'_a = [R(g)^{-1T}]_a^b v_b \quad (2.13)$$

$$v_{\dot{a}} \xrightarrow{g \in G} v'_{\dot{a}} = [R(g)^{-1\dagger}]_{\dot{a}}^{\dot{b}} v_{\dot{b}} . \quad (2.14)$$

Alcune di queste quattro rappresentazioni ($R(g), R(g)^*, R(g)^{-1T}, R(g)^{-1\dagger}$) possono essere in certi casi equivalenti fra loro: in $SU(N)$ dove la rappresentazione fondamentale è unitaria si ha che $R(g)^{-1} = R(g)^\dagger$ e $R(g)^{-1\dagger} = R(g)$ e di conseguenza i vettori $v_{\dot{a}}$ si trasformano come i v^a e i vettori $v^{\dot{a}}$ come i v_a : $v_{\dot{a}} \sim v^a$ e $v^{\dot{a}} \sim v_a$. Se prendiamo ora prodotti tensoriali degli spazi $V, V^*, \tilde{V}, \tilde{V}^*$ otteniamo spazi vettoriali i cui elementi, chiamati tensori, si trasformano sotto le corrispondenti combinazioni delle rappresentazioni viste, in base alla loro struttura indiciale. Ad esempio, un tensore elemento di $V \otimes \tilde{V} \otimes V^* \otimes \tilde{V}^*$ ha la struttura indiciale $T^a_b \dot{c}_{\dot{d}}$ e si trasforma come

$$T^a_b \dot{c}_{\dot{d}} \xrightarrow{g \in G} T'^a_b \dot{c}'_{\dot{d}} = [R(g)^a_e [R(g)^{-1T}]_b^f [R(g)^*]_{\dot{c}}^{\dot{g}} [R(g)^{-1\dagger}]_{\dot{d}}^{\dot{h}} T^e_f \dot{g}_{\dot{h}} . \quad (2.15)$$

Si ottengono così altre rappresentazioni tipicamente riducibili. Un modo per decomporre una di queste rappresentazioni in rappresentazioni irriducibili è studiare la relativa decomposizione del tensore su cui agisce; quando possibile, una decomposizione semplice è la separazione in parte simmetrica e antisimmetrica. Un tensore T^{ab} può essere in questo modo scomposto in parte simmetrica $S^{ab} = S^{ba}$ e parte antisimmetrica $A^{ab} = -A^{ba}$:

$$T^{ab} = \frac{1}{2}(T^{ab} + T^{ba}) + \frac{1}{2}(T^{ab} - T^{ba}) = S^{ab} + A^{ab} . \quad (2.16)$$

La rappresentazione $R_T(g)$ che trasforma T^{ab} è riducibile quindi alle rappresentazioni $R_S(g), R_A(g)$, che agiscono rispettivamente sulla parte simmetrica e su quella antisimmetrica. In formule

$$R_T(g) = R_S(g) \oplus R_A(g) . \quad (2.17)$$

A loro volta $R_S(g), R_A(g)$ potrebbero essere ridotte ulteriormente, come nel caso in cui si possa prendere un prodotto scalare invariante sotto trasformazioni del gruppo: in $SO(N)$ ne è un esempio la traccia della parte simmetrica. È comodo scrivere le decomposizioni di rappresentazioni indicandone la loro dimensione.

2.2.1 Rappresentazioni di SU(N)

Vediamo ora in particolare il gruppo SU(N). Partendo dalla rappresentazione fondamentale N che agisce sui vettori v^a ne otteniamo subito un'altra, la complesso coniugata \bar{N} che agisce sui vettori $v^{\dot{a}} \sim v_a$. Considerando il prodotto tensoriale

$$N \otimes N = \frac{N(N+1)}{2} \oplus \frac{N(N-1)}{2} \quad (2.18)$$

che corrisponde alla separazione del tensore (2.16) nelle sue parti simmetrica e antisimmetrica di dimensioni rispettivamente $\frac{N(N+1)}{2}$ e $\frac{N(N-1)}{2}$ otteniamo altre due rappresentazioni. Ancora, considerando invece il prodotto

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus N^2 - 1 \quad (2.19)$$

che corrisponde alla separazione del tensore

$$T^a_b = \frac{1}{N} \delta^a_b T^a_a + (T^a_b - \frac{1}{N} \delta^a_b T^a_a) \quad (2.20)$$

nella sua parte di traccia e senza traccia si ottengono altre due rappresentazioni, la cosiddetta rappresentazione aggiunta ($N^2 - 1$) e quella banale (lo scalare).

Rappresentazioni di SU(2)

Nel caso di SU(2) si ha per $N = 2$ dalle (2.18), (2.19)

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{2} \otimes \bar{\mathbf{2}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}. \quad (2.21b)$$

Ciò è consistente col fatto che la rappresentazione $\bar{\mathbf{2}}$ è equivalente alla $\mathbf{2}$ e infatti i vettori v^a e v_a si trasformano allo stesso modo a meno di un cambio di base: essendo ϵ_{ab} ($\epsilon_{12} = 1, \epsilon_{21} = -1, \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$) un tensore invariante per SU(2), se definiamo un vettore

$$v_a = \epsilon_{ab} v^a \quad (2.22)$$

allora questo vettore si trasformerà come

$$v'_a = \epsilon'_{ab} v'^a = \epsilon_{ab} v'^a. \quad (2.23)$$

Dalla meccanica quantistica sappiamo che SU(2) descrive il momento angolare di spin. Equivalentemente si può usare dunque il numero quantico di spin S per indicare queste rappresentazioni (di dimensioni $2S+1$). La rappresentazione di singoletto (corrispondente a $S = 0$) è banale: lo stato di base è $|0, 0\rangle$ e si ha $\hat{S}_z |0, 0\rangle = \hat{S}_+ |0, 0\rangle = \hat{S}_- |0, 0\rangle = 0$ dove gli \hat{S}_i sono gli operatori di spin noti dalla meccanica quantistica. La prima rappresentazione non banale invece (corrispondente a $S = 1/2$) è la cosiddetta rappresentazione fondamentale, bidimensionale, con stati di base $|S = 1/2, S_3 = \pm 1/2\rangle$ (S_z è la terza componente dello spin):

$$|1/2, +1/2\rangle \equiv |\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.24a)$$

$$|1/2, -1/2\rangle \equiv |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24b)$$

Su questi stati agiscono gli operatori \hat{S}_\pm, \hat{S}_z , che in questa rappresentazione hanno la forma

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

nella base sferica o equivalentemente

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

in quella cartesiana, nella quale $\hat{S}_i (i = x, y, z) \equiv \frac{\hat{\sigma}_i (i=1,2,3)}{2}$ dove le $\hat{\sigma}_i$ corrispondono alle matrici di Pauli. Per $S = 1$ invece la rappresentazione ha dimensione 3 e ha stati di base

$$|1, 1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1, 0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1, -1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

e gli operatori \hat{S}_\pm, \hat{S}_z agiscono su questi stati come matrici

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

o equivalentemente

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Questa è la cosiddetta rappresentazione aggiunta. La (2.21a) nella trattazione di $SU(2)_{spin}$ di spin per una particella fermionica di spin $S = 1/2$ può essere reinterpretata come

$$[1/2] \otimes [1/2] = [0] \oplus [1] \quad (2.30)$$

che indica come combinando due fermioni di spin $1/2$, come noto dalla meccanica quantistica, si ottiene uno stato $|S, S_z\rangle$ di spin totale $S = 0$ (un singoletto, la **1**)

$$|0, 0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.31)$$

e tre stati con spin totale $S = 1$ (un tripletto, la **3**):

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \quad |1, 0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle. \quad (2.32)$$

Rappresentazioni di SU(3)

Nel caso di SU(3) la (2.19) diventa

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}. \quad (2.33)$$

Vedremo come questa simmetria trova applicazione nel Modello Statico a Quark dei mesoni leggeri, formati da coppie di quark-antiquark $q\bar{q}$ di sapore up, down e strange. In questo caso esiste infatti una simmetria approssimata (a causa della differenza di massa fra quark strange e up/down) chiamata $SU(3)_{\text{sapore}}$ che suggerisce l'esistenza di ottetti di mesoni dalle caratteristiche simili. Un'altra simmetria utilizzata nella QCD (questa volta esatta) è la $SU(3)_{\text{colore}}$: in questo caso la relazione ci dice che combinando tre colori di un quark con tre colori di un antiquark è possibile ottenere uno stato senza colore (lo scalare) e permette quindi la neutralità di colore dei mesoni. Analogamente la relazione (vedi Eq. (2.38))

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \quad (2.34)$$

trova applicazione nel modello statico a quark dei barioni (qqq) suggerendo esistenze di ottetti e decupletti di barioni. Anche in questo caso la presenza della $\mathbf{1}$ permette nella $SU(3)_{\text{colore}}$ la neutralità di colore per i barioni.

2.3 Tabelle di Young

Le tabelle di Young rappresentano un'utile tecnica alternativa per determinare le dimensioni delle rappresentazioni di $SU(N)$. Senza enunciare dimostrazioni riassumiamo ora le regole generali per applicare questa tecnica e le applichiamo ai semplici casi utili ai nostri fini, ossia $SU(2)$ e $SU(3)$. La rappresentazione fondamentale N di $SU(N)$ di dimensione N è indicata come un singolo box \square e la rappresentazione coniugata \bar{N} da una colonna di $N-1$ box. Per $N = 2$ risulta così che sia la rappresentazione fondamentale $\mathbf{2}$ che quella coniugata $\bar{\mathbf{2}}$ sono indicate come un singolo box: ciò non sorprende, vista la loro equivalenza. Diverso è il caso di $SU(3)$, dove la $\bar{\mathbf{3}}$ è rappresentata da una colonna di due box. (vedi Fig. 2.1). Si ha poi che una riga di box è totalmente simmetrica sotto scambio di particelle che compongono quel particolare multipletto, mentre una colonna è totalmente antisimmetrica. In $SU(N)$ si può avere un massimo di N box in una colonna e una singola colonna con N box in $SU(N)$ indica un singoletto: per esempio, una colonna di due box in $SU(2)_{\text{spin}}$ o $SU(2)_{\text{isospin}}$ indica lo stato di singoletto di spin-0 o di isospin-0, e una colonna di tre box in $SU(3)_{\text{sapore}}$ indica lo stato completamente antisimmetrico di singoletto di sapore. Il prodotto diretto di due o più rappresentazioni e la sua decomposizione in una somma diretta di altre rappresentazioni è facilmente eseguibile in questa notazione. La regola da seguire è che si possono comporre i box in ogni modo possibile purché si creino tabelle di box con concavità rivolte verso il basso e verso destra: per esempio moltiplicando due rappresentazioni fondamentali si ottiene la decomposizione in Fig. 2.2.

La dimensione di una rappresentazione ottenuta è data dal rapporto fra due numeri. Per trovare questi numeri, lavorando in $SU(N)$, si procede nel seguente modo: prima di tutto si indicizzano i box della tabella assegnandogli un numero; si parte dall'angolo superiore sinistro della tabella e si inserisce il numero N lungo la diagonale della tabella,

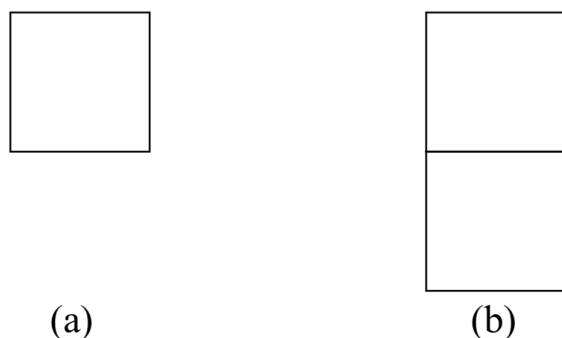


Figura 2.1: Rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$ di $SU(3)$ (a) e coniugata $\bar{\mathbf{3}}$ (b).

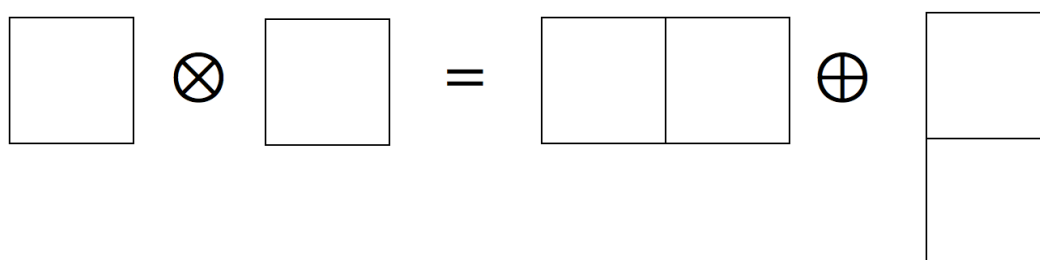


Figura 2.2: Prodotto di due rappresentazioni fondamentali..

poi si inserisce il numero $N + 1$ nel box successivo a destra e lungo la sua diagonale e così via, mentre si inserisce il numero $N - 1$ nel box sottostante a quello nell'angolo superiore a sinistra e lo stesso nei box lungo la sua diagonale e così via. La struttura risultante sarà quella di Fig. 2.3.

Il numeratore del rapporto che dà la dimensione della rappresentazione è dato dal prodotto di tutti questi numeri. Per il denominatore si procede invece nel seguente modo: si traccia una linea che entri nella tabella dal lato destro di ogni riga e per ogni riga si termina questa linea in tutti i modi possibili, ovvero incontrando tutti i box possibili e uscendo dalla tabella verso il basso, nella colonna che si sta considerando. Si conteggia poi il numero di box incontrato da ciascuna linea e il denominatore è dato dal prodotto di

N	$N + 1$	$N + 2$	$N + 3$
$N - 1$	N		
$N - 2$			

Figura 2.3: Indicizzazione della tabella di Young per determinare la dimensione di una rappresentazione.

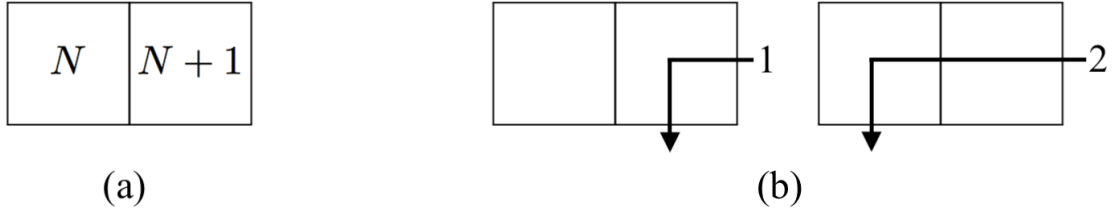


Figura 2.4: Regola per il calcolo della dimensione della rappresentazione: il numeratore (a) è dato dal numero $N(N + 1)$, il denominatore (b) dal numero 1×2 .

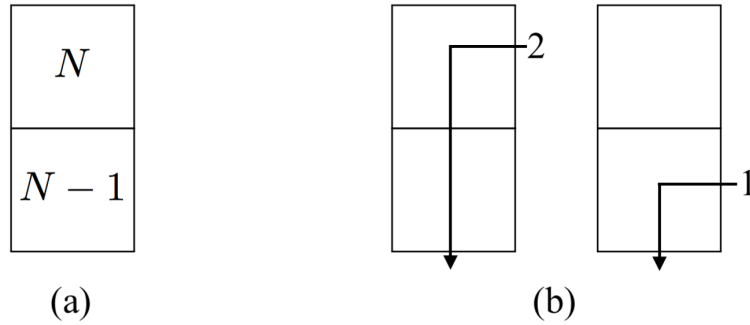


Figura 2.5: Regola per il calcolo della dimensione della rappresentazione: il numeratore (a) è dato dal numero $N(N - 1)$, il denominatore (b) dal numero 1×2 .

questi numeri. Questa regola è illustrata in Fig. 2.4 per una riga di due box e in Fig. 2.5 per una colonna di due box.

Consideriamo per esempio due box in riga in $SU(N)$ come in Fig. 2.2 e calcoliamo la dimensione della tabella. Secondo le regole enunciate il numeratore è $N(N + 1)$ e il denominatore 2, da cui si ha che la dimensione della rappresentazione è $N(N + 1)/2$. Per due box in colonna in $SU(N)$ si trova invece un numeratore pari a $N(N - 1)$ e un denominatore pari a 2, da cui si ottiene una dimensione pari a $N(N - 1)/2$. Per $SU(2)$ queste due dimensioni sono **3** e **1** rispettivamente mentre per $SU(3)$ sono **6** e **3**: si è trovato quindi che

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \quad SU(2) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}} \quad SU(3). \quad (2.36)$$

Abbiamo ritrovato le (2.21a), (2.33). Prendiamo ora il prodotto diretto di tre rappresentazioni fondamentali. Procediamo così: partendo dai due risultati ottenuti sopra con due box in riga e due box in colonna di Fig. 2.2 aggiungiamo un terzo box in tutti i modi possibili che diano tabelle con concavità rivolte verso il basso e verso destra. Il risultato è raffigurato in Fig. 2.6.

Utilizzando le regole già viste troviamo che le dimensioni delle tabelle sono rispettivamente $N(N + 1)(N + 2)/6$ e $N(N + 1)(N - 1)/3$ per le tabelle in alto a sinistra e in alto a destra di Fig. 2.6 e $N(N - 1)(N - 2)/6$ e $N(N + 1)(N - 1)/3$ per le tabelle in basso a sinistra e in basso a destra sempre in Fig. 2.6. Per $SU(2)$ la tabella con tre box in colonna non è ammessa perché supera il massimo numero di box in colonna ammessi,

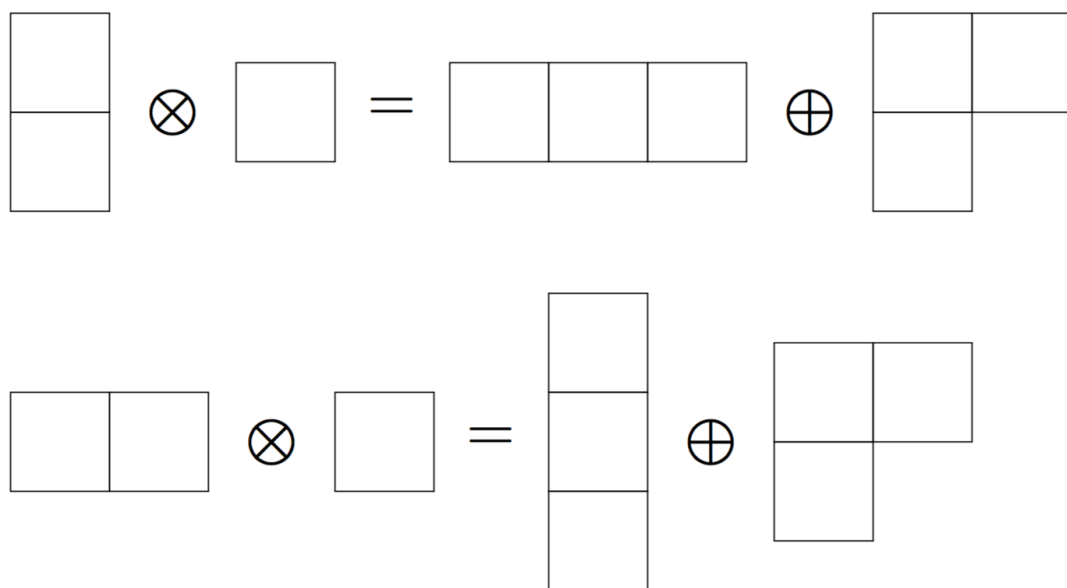


Figura 2.6: Prodotto diretto di tre rappresentazioni fondamentali. I primi termini dei due prodotti raffigurati sono i risultati del prodotto fra due rappresentazioni fondamentali, vedi Fig. 2.2.

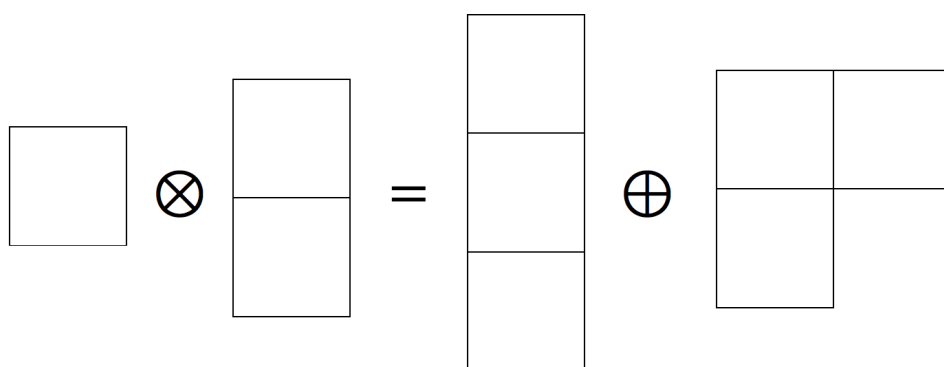


Figura 2.7: Prodotto diretto di rappresentazione fondamentale e coniugata in $SU(3)$.

mentre lo è per $SU(3)$. Arriviamo quindi ai risultati

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M,S} \oplus \mathbf{2}_{M,A} \quad SU(2) \quad (2.37)$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M,S} \oplus \mathbf{8}_{M,A} \oplus \mathbf{1}_A \quad SU(3) \quad (2.38)$$

cioè a un quartetto e due doppietti per $SU(2)$ e un decupletto, due ottetti e un singoletto per $SU(3)$.

La tabella con tre box nella stessa riga è completamente simmetrica (la $\mathbf{10}$ per $SU(3)$ e la $\mathbf{4}$ per $SU(2)$), quella con tre box in colonna è completamente antisimmetrica (la $\mathbf{1}$ per $SU(3)$), mentre le altre tabelle con sia colonne che righe sono a simmetria mista, cioè simmetrica per particelle nella prima riga o antisimmetrica per particelle nella prima colonna ma senza una simmetria definita fra box in alto a destra e in basso a sinistra. Quest'ultimo risultato verrà utilizzato nella costruzione di barioni costituiti da quark u, d, s ($SU(3)_{sapore}$) ed è inoltre alla base della neutralità di colore dovuta a $SU(3)_{colore}$.

Consideriamo ora il prodotto diretto di una rappresentazione fondamentale N con la rappresentazione coniugata \bar{N} , cioè una colonna di $N-1$ box; nel caso di $SU(2)$ abbiamo detto che ciò si riduce a un prodotto di due singoli box come in Fig. 2.2. Nel caso di $SU(3)$ invece si ottiene una rappresentazione di dimensione $\mathbf{1}$ una di dimensione $\mathbf{8}$:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (2.39)$$

ovvero un singoletto e un ottetto a simmetria mista. Abbiamo ritrovato l'equazione (2.33). Questa decomposizione verrà usata nella discussione in seguito della struttura di mesoni leggeri costituiti da quark-antiquark u, d, s .

Infine, poniamoci in $SU(3)$ e poniamo $\square \sim \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array}$, denotando con un box barrato la rappresentazione coniugata di $SU(3)$.

Così facendo possiamo eseguire con le regole introdotte il prodotto $\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ e ottenere un diagramma analogo a quello in Fig. 2.6 ma con i box barrati. Otteniamo così il risultato

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \bar{\mathbf{1}} \oplus \bar{\mathbf{8}} \oplus \bar{\mathbf{8}} \oplus \bar{\mathbf{10}} \quad (2.40)$$

che si riduce all'espressione

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \bar{\mathbf{10}} \quad (2.41)$$

in quanto la $\bar{\mathbf{8}}, \bar{\mathbf{1}}$ sono reali e dunque $\bar{\mathbf{8}} = \mathbf{8}, \bar{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$. L'eq. (2.41) verrà tornerà utile quando discuteremo dell'esistenza degli antibarioni.

2.4 Gruppi di Lie

I gruppi di Lie giocano un ruolo importante nella Teoria dei Gruppi per due motivi: essi rappresentano una classe molto ampia di gruppi, fra i quali diversi gruppi continui che hanno ruoli fondamentali in branche della Fisica e della Matematica; in secondo luogo essi soddisfano una serie di condizioni stringenti che permettono di applicare al loro studio i metodi della teoria delle equazioni differenziali. Per i nostri scopi ci limiteremo a fornire le definizioni e i risultati fondamentali, restringendoci a quelli utili per la trattazione seguente.

Definizione. Sia G un gruppo *continuo*, cioè un gruppo i cui elementi formano uno spazio topologico. Consideriamo un qualsiasi intorno U dell'elemento identità e del gruppo. Si assume che per mezzo di n parametri reali $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ si possano definire tutti gli elementi dell'intorno U in modo tale che:

1. esiste una corrispondenza continua 1 – 1 fra tutti i diversi elementi $g \in U$ e tutte le differenti n -uple dei parametri reali $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$;
2. supponendo che $g_1, g_2, g = g_1 g_2 \in U$ e

$$g_1 = g_1(\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n); \quad g_2 = g_2(\theta''_1, \theta''_2, \dots, \theta''_n); \quad g = g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

con

$$\theta_i = \theta_i(\theta'_1, \dots, \theta'_n, \theta''_1, \dots, \theta''_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

allora le funzioni θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sono *funzioni analitiche* dei parametri θ'_j, θ''_k ($j, k = 1, 2, \dots, n$). Il gruppo di Lie è detto allora di dimensione n .

Di solito i parametri del gruppo vengono scelti in modo tale che per $\theta_i = 0$ si ha l'identità $e = 1$. Consideriamo ora soltanto le rappresentazioni $\hat{R}(g)$ (usiamo qui la notazione operatoriale invece di quella matriciale) di un gruppo di Lie G i cui operatori lineari sono funzioni analitiche dei parametri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

Definizione. La derivata dell'operatore $\hat{R}(g)$ rispetto al parametro θ_i , valutata in $g = e$, ovvero per $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = 0$, e moltiplicata per l'unità immaginaria, è chiamata il **generatore** \hat{T}_i della rappresentazione $\hat{R}(g)$ corrispondente al parametro θ_i :

$$i \frac{\partial \hat{R}(g)}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta_i=0} \equiv \hat{T}_i. \quad (2.42)$$

Perciò, ogni rappresentazione $\hat{R}(g)$ ha n generatori, ovvero lo stesso numero della dimensione del gruppo di Lie. Quando $\theta_i \ll 1$ i generatori generano trasformazioni infinitesime, iterando le quali si ottengono le trasformazioni finite del gruppo. Studiando le relazioni di commutazione che legano i \hat{T}_i si ottiene *l'algebra di Lie* del gruppo data da

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i f_{ijk} \hat{T}_k. \quad (2.43)$$

Le *costanti di struttura* f_{ijk} caratterizzano quasi completamente il gruppo e sono indipendenti dalla scelta della rappresentazione: i generatori di qualsiasi rappresentazione dello stesso gruppo di Lie soddisfano le relazioni (2.43) con le medesime costanti di struttura. Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema. Sia \hat{T}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) una base di generatori dell'algebra di Lie \mathcal{G} di un gruppo di Lie G . Allora, per qualsiasi intorno $U \subset G$ dell'elemento identità $e \in G$, esiste un set di coordinate canoniche θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in U e un numero positivo $\delta > 0$ tale che

$$\hat{R}(g) \equiv \hat{R}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = e^{i \sum_i \theta_i \hat{T}_i} \quad g \in U \subset G, |\theta_i| < \delta \quad (2.44)$$

dove θ_i sono i parametri del gruppo scelti in modo tale che per $\theta_i = 0$ si ha l'identità $e = 1$.

Un generico elemento $g(\theta)$ di un gruppo di Lie G si può quindi parametrizzare come in (2.44). $SU(N)$, la cui dimensione è $n = N^2 - 1$, rappresenta un esempio di gruppo di Lie la cui importanza risiede nel fatto che le sue matrici unitarie a determinante unitario descrivono trasformazioni fra $|e_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N\rangle$ stati di base ortonormali preservando l'ortonormalità:

$$\langle \hat{U}e_\alpha | \hat{U}e_\beta \rangle = \langle e_\alpha | \hat{U}^\dagger \hat{U}e_\beta \rangle = \langle e_\alpha | e_\beta \rangle = \delta_{ab}. \quad (2.45)$$

Vediamo ora nello specifico i gruppi $SU(2)$, $SU(3)$.

2.4.1 Gruppo $SU(2)$

Come già accennato in precedenza il gruppo $SU(2)$ è il gruppo di dimensione $n = N^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ delle matrici unitarie 2×2 con determinante unitario:

$$SU(2) = \{\hat{U}(\vec{\theta}) \text{ matrici complesse } 2 \times 2 | \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}, \det \hat{U} = 1\} \quad (2.46)$$

con $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ dove i θ_i sono i parametri del gruppo. Le matrici $\hat{U}(\vec{\theta})$ possono essere scritte come

$$\hat{U}(\vec{\theta}) = e^{i\hat{T}(\vec{\theta})} = 1 + i\hat{T}(\vec{\theta}) - \frac{1}{2}\hat{T}(\vec{\theta})^2 + \dots \quad (2.47)$$

Poiché si deve avere

$$\hat{U}^\dagger(\vec{\theta}) = \hat{U}^{-1}(\vec{\theta}) \implies e^{-i\hat{T}^\dagger(\vec{\theta})} = e^{-i\hat{T}(\vec{\theta})} \quad (2.48)$$

ne risulta che le matrici $\hat{T}(\vec{\theta})$ devono essere hermitiane. Inoltre, la loro traccia deve essere nulla in quanto dalla formula di Jacobi si ha che

$$\det \hat{U}(\vec{\theta}) = e^{\text{Tr} \ln \hat{U}(\vec{\theta})} \quad (2.49)$$

per cui la richiesta $\det \hat{U}(\vec{\theta}) = 1$ implica

$$\det \hat{U}(\vec{\theta}) = e^{\text{Tr} \ln \hat{U}(\vec{\theta})} = e^{i\text{Tr} \hat{T}(\vec{\theta})} = 1 \implies \text{Tr} \hat{T}(\vec{\theta}) = 0. \quad (2.50)$$

Una base di matrici 2×2 che gode di queste caratteristiche è data dalle cosiddette matrici di Pauli

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

In generale una qualsiasi matrice \hat{T} è quindi esprimibile come combinazione lineare delle (2.51):

$$\hat{T}(\vec{\theta}) = \sum_i \theta_i \frac{\hat{\sigma}_i}{2} \equiv \sum_i \theta_i \hat{T}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.52)$$

dove la normalizzazione è scelta tale che

$$\text{Tr} \hat{T}_i \hat{T}_j = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (2.53)$$

Le matrici così definite \hat{T}_i sono i generatori del gruppo e soddisfano alla seguente algebra di Lie di $SU(2)$ data dai commutatori dei suoi generatori:

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{T}_k \quad (2.54)$$

dove ϵ_{ijk} sono le costanti di struttura del gruppo e sono le componenti del tensore completamente antisimmetrico

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \quad \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{231} = -1. \quad (2.55)$$

Una qualsiasi trasformazione finita è ottenuta a partire da trasformazioni infinitesime nel modo seguente:

$$\hat{U}(\vec{\theta}) = e^{i\hat{T}(\vec{\theta})} = e^{i\sum_i \theta_i \frac{\hat{\sigma}_i}{2}}. \quad (2.56)$$

Poniamoci ora in $SU(2)_{spin}$ così da utilizzare la notazione familiare dalla meccanica quantistica. I generatori \hat{T}_i sono le matrici (2.25) già incontrate, denotando gli indici x, y, z in questo caso con 1, 2, 3. In $SU(2)_{spin}$ e in generale in $SU(2)$ c'è un unico operatore di Casimir, ovvero un operatore che commuta con tutti i generatori, ed è l'operatore

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2 \quad (2.57)$$

per cui vale

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_i] = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.58)$$

Possiamo definire gli operatori di innalzamento e abbassamento

$$\hat{S}_{\pm} = \hat{S}_1 \pm i\hat{S}_2. \quad (2.59)$$

Denotando come è familiare in meccanica quantistica con $|s, m\rangle$ gli autostati comuni di \hat{S}^2, \hat{S}_3 valgono le seguenti formule

$$\hat{S}^2 |s, m\rangle = s(s+1) |s, m\rangle \quad (2.60a)$$

$$\hat{S}_3 |s, m\rangle = m |s, m\rangle \quad (2.60b)$$

$$\hat{S}_{\pm} |s, m\rangle = [s(s+1) - m(m \pm 1)]^{1/2} |s, m \pm 1\rangle. \quad (2.60c)$$

2.4.2 Gruppo SU(3)

Nel caso di $SU(3)$ di dimensione $n = N^2 - 1 = 8$ nella rappresentazione fondamentale si hanno 8 generatori infinitesimi \hat{T}_i dati dalle matrici di Gell-Mann $\hat{\lambda}_i$ che formano una base di matrici 3×3 hermitiane e a traccia nulla:

$$\hat{T}_i = \frac{\hat{\lambda}_i}{2} \quad i = 1, \dots, 8 \quad (2.61)$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\lambda}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\hat{\lambda}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La normalizzazione è anche qui tale che

$$\text{Tr } \hat{T}_i \hat{T}_j = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (2.63)$$

Un elemento arbitrario di SU(3) è quindi descritto nella rappresentazione fondamentale da matrici 3×3 nella forma

$$\hat{U}(\vec{\theta}) = e^{i \sum_i \theta_i \frac{\hat{\lambda}_i}{2}} \quad (2.64)$$

dove θ_i sono gli 8 parametri del gruppo.

I generatori soddisfano la seguente algebra di Lie:

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i f_{ijk} \hat{T}_k \quad (2.65)$$

con f_{ijk} costanti di struttura che valgono

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{147} &= f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

2.4.3 SU(2) di Isospin

Le masse di protone $m_p = 938.27$ MeV e neutrone $m_n = 939.57$ MeV sono molto simili. A causa di questa vicinanza protone e neutrone si possono considerare come due stati di un'unica particella, il nucleone N . In analogia con un sistema di spin $S = 1/2$ e terza componente $S_3 = \pm 1/2$ si può assegnare un nuovo numero quantico al nucleone, ovvero l'isospin $I = 1/2$. Per convenzione si assegna al protone la terza componente di isospin $I_3 = +1/2$ e al neutrone la terza componente $I_3 = -1/2$. I due stati di base del nucleone sono quindi scritti come $|I = 1/2, I_3 = \pm 1/2\rangle$:

$$|1/2, +1/2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |p\rangle \quad \textit{protone} \quad (2.67a)$$

$$|1/2, -1/2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |n\rangle \quad \textit{neutrone}. \quad (2.67b)$$

Sappiamo poi che il protone è composto dai quark (uud) e il neutrone dai quark (udd), per cui questa simmetria (approssimata) è data in realtà dalla simmetria fra quark up e down considerati anch'essi in approssimazione come due stati della stessa particella a causa della loro vicinanza di massa. Nello spazio vettoriale a due dimensioni consideriamo, in modo analogo a quanto fatto per protone e neutrone, come vettori di base $u = |up\rangle$ e $d = |down\rangle$:

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.68a)$$

$$|d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.68b)$$

In questo spazio ci sono $2^2 - 1 = 3$ generatori che indichiamo con \hat{G}_i che possiamo scegliere come multipli delle matrici di Pauli (2.51):

$$\hat{G}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

analoghi ai generatori nello spazio dello spin (2.25). I generatori \hat{G}_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[\hat{G}_i, \hat{G}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{G}_k. \quad (2.70)$$

I generatori $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3$ costituiscono la rappresentazione fondamentale di SU(2) in due dimensioni, cioè del gruppo di rotazioni di isospin 1/2. Esiste un generatore diagonale \hat{G}_3 che rappresenta una componente dell'isospin oltre all'operatore modulo quadro dell'isospin che è proporzionale all'identità:

$$\hat{G}^2 = \sum_i \hat{G}_i^2 = \frac{3}{4}\hat{1}. \quad (2.71)$$

$|u\rangle$ e $|d\rangle$ sono autostati di \hat{G}_3 con autovalori 1/2 e -1/2 rispettivamente e di \hat{G}^2 con autovalore 3/4. In tre dimensioni SU(2) è il gruppo di rotazioni di isospin 1. Le tre matrici 3×3 che soddisfano le relazioni di commutazione sono:

$$\hat{G}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

che sono proprio le (2.29) per lo spin. Esiste un generatore diagonale \hat{G}_3 oltre all'operatore modulo quadro dell'isospin che è proporzionale all'identità:

$$\hat{G}^2 = \sum_i \hat{G}_i^2 = 2\hat{1}. \quad (2.73)$$

Gli autostati si ottengono con le note regole di somma di momenti angolari in meccanica quantistica combinando due stati di isospin 1/2 utilizzando quindi i coefficienti di Clebsch-Gordan; si ottengono i seguenti quattro autostati:

- Un tripletto di isospin 1 simmetrico rispetto allo scambio $u \longleftrightarrow d$

$$|1, 1\rangle = |uu\rangle \quad |1, 0\rangle = \frac{|ud\rangle + |du\rangle}{\sqrt{2}} \quad |1, -1\rangle = |dd\rangle; \quad (2.74)$$

- Un singoletto di isospin 0, antisimmetrico per lo scambio $u \longleftrightarrow d$

$$|0, 0\rangle = \frac{|ud\rangle - |du\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.75)$$

Questa è la decomposizione (2.21a) già vista di SU(2).

$(2I + 1)$ è quindi la degenerazione del multipletto di isospin, ovvero il numero di autostati dell'hamiltoniana degeneri in energia e massa. Come per lo spin, anche per l'isospin si possono costruire gli operatori di innalzamento e abbassamento:

$$\hat{I}_{\pm} |I, I_3\rangle \equiv (\hat{G}_1 \pm i\hat{G}_2) |I, I_3\rangle = [I(I + 1) - I_3(I_3 \pm 1)]^{1/2} |I, I_3 \pm 1\rangle \quad (2.76)$$

Questi operatori torneranno utili per muoversi lungo il sottospazio di isospin nei multipletti barionici. L'isospin è chiamato anche spin isotopico *forte* (diverso dall'isospin debole) per sottolineare come per questo sia un numero quantico conservato dall'interazione forte, mentre non lo è dall'interazione debole. Questo riflette il fatto che l'interazione forte è indipendente dal sapore dei quark, ovvero è invariante per trasformazioni di isospin e per essa p e n , con masse praticamente uguali, o meglio u e d , sono approssimativamente due stati degeneri della stessa particella. L'interazione debole come sappiamo invece non conserva il sapore dei quark e di conseguenza nemmeno l'isospin.

Per concludere, discutiamo brevemente le antiparticelle \bar{u}, \bar{d} . Il vettore

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

si trasforma sotto trasformazioni del tipo (2.56) che definiscono la rappresentazione fondamentale $\mathbf{2}$ mentre il vettore

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

si trasforma sotto trasformazioni

$$\hat{U}^*(\vec{\theta}) = e^{-i\hat{T}(\vec{\theta})} = e^{-i\sum_i \theta_i \frac{\hat{\sigma}_i^*}{2}} \quad (2.79)$$

che definiscono la rappresentazione coniugata $\bar{\mathbf{2}}$. Abbiamo però visto che queste due rappresentazioni sono equivalenti, ossia possiamo trovare una matrice $\hat{\epsilon}$ tale che

$$\hat{\epsilon}\hat{U}^*(\vec{\theta})\hat{\epsilon}^{-1} = \hat{U}(\vec{\theta}). \quad (2.80)$$

Espandendo in serie gli esponenziali $e^{\pm i\sum_i \theta_i \frac{\hat{\sigma}_i^*}{2}}$ si arriva alla relazione

$$\hat{\epsilon}(-\hat{\sigma}_i^*)\hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\sigma}_i. \quad (2.81)$$

Il vettore (2.78) nella sua rappresentazione coniugata ha quindi come generatori $\tau_i = -\hat{\sigma}_i^*$:

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Possiamo trovare esplicitamente la matrice $\hat{\epsilon}$ del cambio di base: è il tensore antisimmetrico 2×2

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

A questo punto per poter utilizzare gli stessi identici generatori della rappresentazione fondamentale anche per le antiparticelle dobbiamo prendere come stato di base non più il vettore (2.78) bensì

$$\hat{\epsilon} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

2.4.4 SU(3) di Sapore

La simmetria $SU(3)_{\text{sapore}}$ è impiegata nel modello statico a quark degli adroni leggeri costituiti da combinazioni lineari degli stati-quark u, d, s . Nello spazio vettoriale a tre dimensioni scegliamo come vettori di base

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |s\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Ci sono $3^2 - 1 = 8$ generatori \hat{G}_i che possiamo prendere come multipli delle matrici di Gell-Mann (2.62):

$$\hat{G}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

$$\hat{G}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{G}_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G}_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ci sono 2 generatori diagonali \hat{G}_3, \hat{G}_8 oltre all'operatore modulo quadro proporzionale all'identità

$$\hat{G}^2 = \sum_i \hat{G}_i^2 = \frac{4}{3} \hat{\mathbf{1}}. \quad (2.87)$$

Gli stati di base (2.85) sono autostati di \hat{G}_3, \hat{G}_8 con autovalori

$$\hat{G}_3 |u\rangle = \frac{1}{2} |u\rangle \quad \hat{G}_3 |d\rangle = -\frac{1}{2} |d\rangle \quad \hat{G}_3 |s\rangle = 0 \quad (2.88a)$$

$$\hat{G}_8 |u\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} |u\rangle \quad \hat{G}_8 |d\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} |d\rangle \quad \hat{G}_8 |s\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} |s\rangle. \quad (2.88b)$$

Le quantità conservate sono rappresentate da operatori diagonali. Dalla (2.88a), per esempio, notiamo che \hat{G}_3 restituisce come autovalore la terza componente dell'isospin: \hat{G}_3 rappresenta dunque in questo spazio l'operatore *terza componente di Isospin*. Analogamente l'operatore *stranezza* \hat{S}

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

conserva la stranezza:

$$\hat{S} |u\rangle = 0 \quad \hat{S} |d\rangle = 0 \quad \hat{S} |s\rangle = -|s\rangle. \quad (2.90)$$

Ci sono poi gli operatori *numero barionico* \hat{B} , *carica elettrica* \hat{Q} e *ipercarica* \hat{Y} :

$$\hat{B} = \sum_i \hat{G}_i^2 - \hat{\mathbf{1}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

$$\hat{Q} = \frac{\hat{Y}}{3} + \hat{G}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

$$\hat{Y} = \hat{B} + \hat{S} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

È utile inoltre definire degli operatori di innalzamento e abbassamento come per il momento angolare:

- *operatore di I-spin*

$$\hat{I}_\pm = \hat{G}_1 \pm i\hat{G}_2 \quad (2.94)$$

che abbiamo già visto, il quale agisce sugli stati di base (2.85) come

$$\hat{I}_+ |u\rangle = 0 \quad \hat{I}_+ |d\rangle = |u\rangle \quad \hat{I}_+ |s\rangle = 0 \quad (2.95a)$$

$$\hat{I}_- |u\rangle = |d\rangle \quad \hat{I}_- |d\rangle = 0 \quad \hat{I}_- |s\rangle = 0; \quad (2.95b)$$

- *operatore di V-spin*

$$\hat{V}_\pm = \hat{G}_4 \pm i\hat{G}_5 \quad (2.96)$$

che agisce sugli stati di base (2.85) come

$$\hat{V}_+ |u\rangle = 0 \quad \hat{V}_+ |d\rangle = 0 \quad \hat{V}_+ |s\rangle = |u\rangle \quad (2.97a)$$

$$\hat{V}_- |u\rangle = s \quad \hat{V}_- |d\rangle = 0 \quad \hat{V}_- |s\rangle = 0; \quad (2.97b)$$

- *operatore di U-spin*

$$\hat{U}_\pm = \hat{G}_6 \pm i\hat{G}_7 \quad (2.98)$$

che agisce sugli stati di base (2.85) come

$$\hat{U}_+ |u\rangle = 0 \quad \hat{U}_+ |d\rangle = 0 \quad \hat{U}_+ |s\rangle = |d\rangle \quad (2.99a)$$

$$\hat{U}_- |u\rangle = 0 \quad \hat{U}_- |d\rangle = |s\rangle \quad \hat{U}_- |s\rangle = 0. \quad (2.99b)$$

Sugli stati barionici composti da tre quark u, d, s possiamo fare agire questi operatori separatamente ai tre quark e in successione:

$$\hat{I}_\pm = \sum_i \hat{I}_\pm(i) \quad (2.100a)$$

$$\hat{V}_\pm = \sum_i \hat{V}_\pm(i) \quad (2.100b)$$

$$\hat{U}_\pm = \sum_i \hat{U}_\pm(i). \quad (2.100c)$$

Questi operatori ci permetteranno di aumentare o abbassare gli autovalori lungo l'asse di simmetria I_3 e i due assi inclinati a 120° e quindi di spostarci da un barione all'altro nei diagrammi di ottetto e decupletto barionici.

Capitolo 3

Adroni leggeri

Si è detto nei Cap.1,2 che nel Modello Statico a Quark i quark si raggruppano per formare stati composti con colore nullo come i barioni, formati da tre quark, e i mesoni, formati da un quark ed un antiquark. Vediamo ora la classificazione degli adroni leggeri, cioè prendendo in considerazione solamente i quark up, down e strange in modo tale da sfruttare la simmetria approssimata $SU(3)_{\text{sapore}}$. Se $SU(3)_{\text{sapore}}$ fosse esatta, i barioni e i mesoni leggeri dovrebbero avere all'incirca la stessa massa fra loro, a meno di differenze dovute all'interazione elettromagnetica. La rottura spontanea di $SU(3)_{\text{sapore}}$ invece comporta differenze di massa non indifferenti fra i diversi adroni, come vedremo.

3.1 Barioni

Se consideriamo lo spin, nei barioni i quark possono avere o tutti gli spin allineati (cosa che indichiamo con $(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle)$) oppure un quark può avere lo spin discorde rispetto a quello degli altri due ($|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$). Nel primo caso i barioni hanno spin-parità $J^P = 3/2^+$ e formano un decupletto, nel secondo hanno $J^P = 1/2^+$ e formano un ottetto. Consideriamo la funzione d'onda totale di un barione:

$$\psi = \psi(\text{spazio})\psi(\text{spin})\psi(\text{sapore})\psi(\text{colore}). \quad (3.1)$$

Questa deve essere antisimmetrica per il $|\Delta^{++}\rangle = |uuu\rangle$ per il Principio di Pauli perché è uno stato formato da tre fermioni indistinguibili. Si può dimostrare che questa antisimmetria deve valere analogamente per gli altri barioni. Si assume che la funzione spaziale $\psi(\text{spazio})$ sia simmetrica, cosa che corrisponde ad avere i quark con momenti angolari orbitali nulli $l = l' = 0$. Assumiamo anche ai fini della trattazione che la $\psi(\text{colore})$ sia antisimmetrica. Allora per garantire la antisimmetria totale si deve avere $\psi(\text{spin})\psi(\text{sapore})$ simmetrica. La combinazione simmetrica può essere trovata guardando la decomposizione delle rappresentazioni di $SU(2)_{\text{spin}}$ e $SU(3)_{\text{sapore}}$ (2.37), (2.38) e che qui riscriviamo per comodità

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M,S} \oplus \mathbf{2}_{M,A} \quad SU(2) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M,S} \oplus \mathbf{8}_{M,A} \oplus \mathbf{1}_A \quad SU(3). \quad (3.3)$$

La combinazione cercata si ottiene in termini di $(SU(2)_{\text{spin}}, SU(3)_{\text{sapore}})$ con le rappresentazioni $(\mathbf{10}, \mathbf{4})$ e $(\mathbf{8}, \mathbf{2})$ ovvero un decupletto di sapore con multipletto di spin di

dimensione 4 e un ottetto di sapore con doppietto di spin: sono i due gruppi introdotti $J^P = 3/2^+$ e $J^P = 1/2^+$. Iniziamo a trattare il gruppo $J^P = 3/2^+$ poiché è il caso più semplice, non dovendo lavorare con rappresentazioni a simmetria mista come in $J^P = 1/2^+$. Storicamente è stato il fatto che le proprietà dei barioni fossero in accordo con questo modello che portò all'introduzione di un nuovo grado di libertà interna dei quark detto *colore* e all'antisimmetria della sua funzione. Analizziamo nello specifico queste famiglie.

3.1.1 Decupletto barionico $J^P = 3/2^+$

Vediamo innanzitutto lo spin e la parità del decupletto. Gli spin dei tre quark sono allineati $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ e supponiamo, come detto, che abbiano $l = l' = 0$. Perciò la terza componente del momento angolare totale vale

$$\begin{aligned} m_J &= m_L + m_{S_1} + m_{S_2} + m_{S_3} \\ &= 0 + 1/2 + 1/2 + 1/2 \\ &= 3/2 \rightarrow J = 3/2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Essendo poi la parità intrinseca dei quark (+) la parità totale del sistema è

$$\begin{aligned} P &= (-1)^l (-1)^{l'} P_{q_1} P_{q_2} P_{q_3} \\ &= (+) \end{aligned} \quad (3.5)$$

per cui

$$J^P = 3/2^+. \quad (3.6)$$

I barioni del decupletto si possono disporre in un diagramma a forma di triangolo rovesciato con assi I_3 (terza componente dell'isospin) e S (stranezza) come raffigurato in Fig. 3.1. Lo stato di spin è comune a tutti i barioni ed è, come detto, $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$. Vediamo come ottenere gli stati dei barioni del decupletto. Gli stati $|uuu\rangle, |ddd\rangle, |sss\rangle$ sono già simmetrici nel sapore per scambio di quark e dunque vanno bene così. Gli stati $|uud\rangle, |ddu\rangle, |uss\rangle, \dots$ devono invece essere simmetrizzati, così come lo stato $|uds\rangle$. Possiamo trovare gli stati simmetrici a partire da un barione e muovendoci nel diagramma 3.1 utilizzando gli operatori (2.100) e normalizzando.

Partiamo per esempio dal barione $\Delta^{++} = |uuu\rangle$ di carica elettrica +1. Applicando l'operatore (2.100a) di abbassamento di isospin che agisce sui tre quark separatamente ci spostiamo verso sinistra nel diagramma 3.1 e otteniamo

$$\begin{aligned} |\Delta^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{I}_- |\Delta^{++}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{I}_- |uuu\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|duu\rangle + |udu\rangle + |uud\rangle). \end{aligned} \quad (3.7a)$$

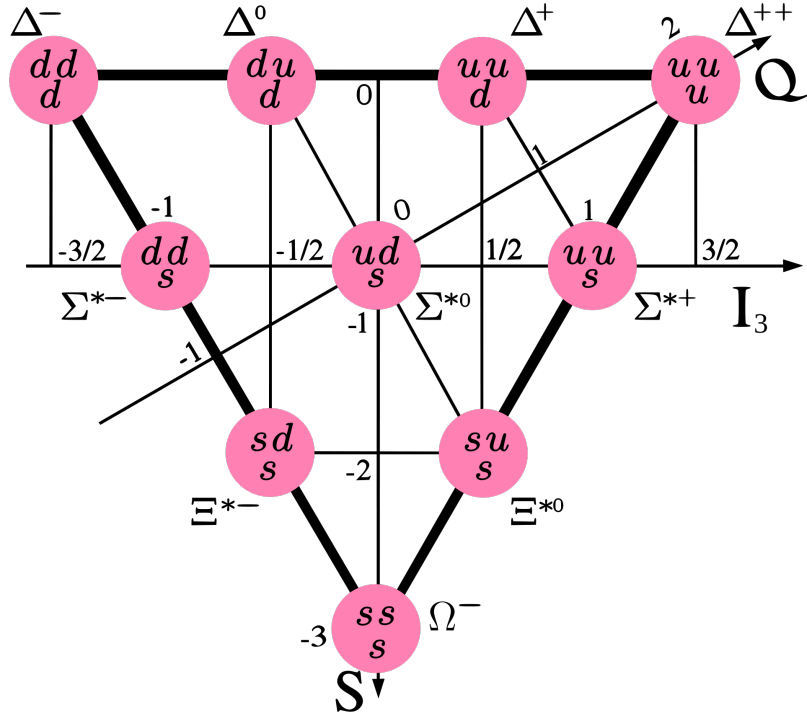


Figura 3.1: Diagramma in termini di quark costituenti del decupletto barionico $J^P = 3/2^+$. La stranezza aumenta in modulo verso il vertice inferiore del triangolo, l'isospin I_3 verso destra e la carica elettrica Q nella direzione diagonale indicata.

Continuando a muoverci lungo l'asse I_3 troviamo i barioni

$$\begin{aligned}
 |\Delta^0\rangle &= \frac{1}{2} \hat{I}_- |\Delta^+\rangle \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \hat{I}_- (|duu\rangle + |udu\rangle + |uud\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle)
 \end{aligned} \tag{3.7b}$$

$$\begin{aligned}
 |\Delta^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{I}_- |\Delta^0\rangle \\
 &= \frac{1}{3} \hat{I}_- (|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle) \\
 &= |ddd\rangle .
 \end{aligned} \tag{3.7c}$$

Applicando l'operatore (2.100b) ci muoviamo invece verso il basso e a sinistra, e si trovano i barioni

$$\begin{aligned}
|\Sigma^{*+}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{V}_-|\Delta^{++}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{V}_-|uuu\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(|suu\rangle + |usu\rangle + |uus\rangle)
\end{aligned} \tag{3.7d}$$

$$\begin{aligned}
|\Xi^{*0}\rangle &= \frac{1}{2}\hat{V}_-|\Sigma^{*+}\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{V}_-(|suu\rangle + |usu\rangle + |uus\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(|ssu\rangle + |sus\rangle + |uss\rangle)
\end{aligned} \tag{3.7e}$$

$$\begin{aligned}
|\Omega^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{V}_-|\Xi^{*0}\rangle \\
&= \frac{1}{3}\hat{V}_-(|ssu\rangle + |sus\rangle + |uss\rangle) \\
&= |sss\rangle .
\end{aligned} \tag{3.7f}$$

Applicando l'operatore (2.100c) ci muoviamo verso il basso e a destra, e si trovano i barioni

$$\begin{aligned}
|\Sigma^{*-}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{U}_-|\Delta^-\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{U}_-|ddd\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(|sdd\rangle + |dsd\rangle + |dds\rangle)
\end{aligned} \tag{3.7g}$$

$$\begin{aligned}
|\Xi^{*-}\rangle &= \frac{1}{2}\hat{U}_-|\Sigma^{*-}\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{U}_-(|sdd\rangle + |dsd\rangle + |dds\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(|ssd\rangle + |sds\rangle + |dss\rangle) .
\end{aligned} \tag{3.7h}$$

L'ultimo barione mancante è

$$\begin{aligned}
|\Sigma^{*0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I}_- |\Sigma^{*+}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{I}_- (|suu\rangle + |usu\rangle + |uus\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} (|uds\rangle + |usd\rangle + |dus\rangle + |dsu\rangle + |sud\rangle + |sdu\rangle).
\end{aligned} \tag{3.7i}$$

Questi barioni sono raggruppati in multipletti di isospin (si indica tra parentesi la massa media del multipletto in MeV):

- Quadrupletto di $I = 3/2 \longrightarrow \Delta(1232)$ con sottostati $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$;
- Tripletto di $I = 1 \longrightarrow \Sigma^*(1385)$ con $S = -1$ e sottostati $\Sigma^{*+}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*-}$;
- Doppietto di $I = 1/2 \longrightarrow \Xi^*(1530)$ con $S = -2$ e sottostati Ξ^{*0}, Ξ^{*-} ;
- Singoletto di $I = 0 \longrightarrow \Omega^-(1672)$.

Se calcoliamo la differenza di massa fra multipletti successivi troviamo differenze pari a

$$m_{\Sigma^*} - m_{\Delta} \simeq 152 \text{ MeV} \tag{3.8a}$$

$$m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} \simeq 149 \text{ MeV} \tag{3.8b}$$

$$m_{\Omega^-} - m_{\Xi^*} \simeq 139 \text{ MeV}. \tag{3.8c}$$

Questa differenza media di 147 MeV, quasi costante, e l'aumento di massa scendendo verso la direzione negativa della stranezza fecero dedurre una differenza di massa del quark costituente s rispetto ai u, d pari circa al valore di suddetta differenza, e permisero a Gell-Mann di predire l'esistenza dell' Ω^- e la massa (e dalla sua posizione nel diagramma anche gli altri numeri quantici) che avrebbe dovuto avere prima della sua effettiva scoperta. Anche le masse nei multipletti di isospin dovrebbero essere uguali, ma si trovano differenze compatibili con la diversa interazione elettromagnetica che agisce sui quark u e d in modo distinto.

3.1.2 Ottetto barionico $J^P = 1/2^+$

Lo spin di uno dei quark è in questo caso discorde a quello degli altri due, $|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$, e si assume sempre che abbiano momenti angolari orbitali nulli $l = l' = 0$. Perciò la terza componente del momento angolare totale vale

$$\begin{aligned}
m_J &= m_L + m_{S_1} + m_{S_2} + m_{S_3} \\
&= 0 + 1/2 - 1/2 + 1/2 \\
&= 1/2 \rightarrow J = 1/2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

La parità totale del sistema è la stessa che per il decupletto, ovvero (+) (vedi Eq. (3.5)). Perciò per l'ottetto si ha

$$J^P = 1/2^+. \tag{3.10}$$

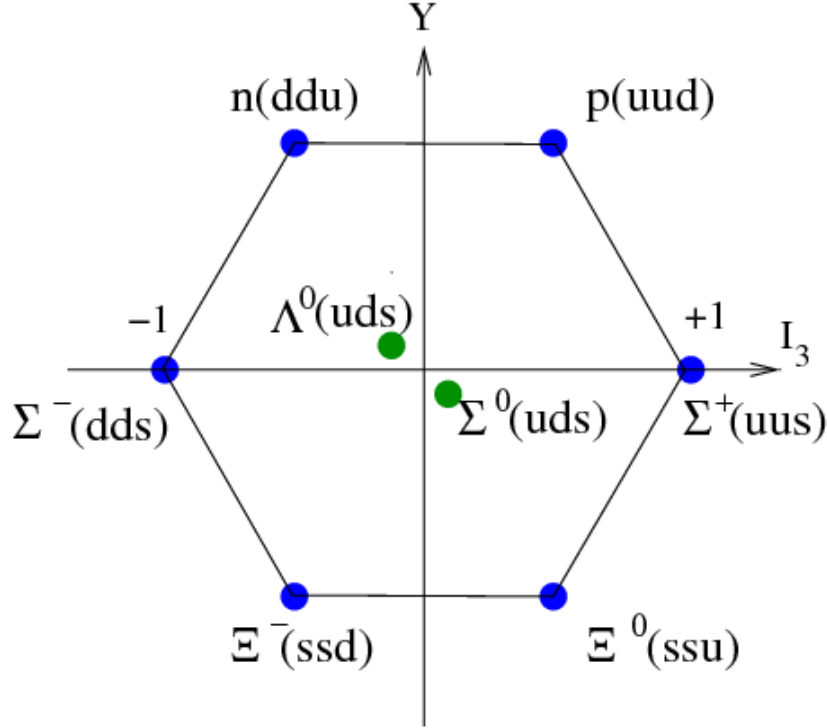


Figura 3.2: Diagramma dell'ottetto barionico $J^P = 1/2^+$. Sull'asse delle ordinate è riportato il valore dell'ipercarica Y : il neutrone e il protone hanno $Y = 1$, Λ^0 e il tripletto dei Σ hanno $Y = 0$ e gli Ξ hanno $Y = -1$; da questi valori si deduce il valore del numero barionico e di stranezza dei quark u, d, s .

Anche i barioni dell'ottetto possono essere disposti in un diagramma, in questo caso un esagono, con assi I_3 e Y come rappresentato in Fig. 3.2. Su questo diagramma come nel decupletto possiamo spostarci da un barione all'altro agendo con gli operatori (2.100). Per trovare gli stati dei barioni dell'ottetto si tratta quindi di trovarne in qualche modo uno da cui partire e gli altri si ricaveranno facilmente con i suddetti operatori. Fatte queste premesse, possiamo trovare un altro modo per ottenere una combinazione $\psi(\text{spin})\psi(\text{sapore})$ antisimmetrica ed è combinando le rappresentazioni a simmetria mista delle decomposizioni dei due spazi. Gli stati di $\mathbf{2}_{M,A}$ di spin con terza componente $+1/2$ sono

$$\psi_{+1/2}^{M[12]} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \quad (3.11a)$$

$$\psi_{+1/2}^{M[23]} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle) \quad (3.11b)$$

$$\psi_{+1/2}^{M[13]} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \quad (3.11c)$$

dove le parentesi nell'apice della funzione indicano per quale scambio di particelle si ha l'antisimmetria.

Analogamente si costruiscono gli stati di antisimmetria mista di sapore: prendiamo

per cominciare due quark up e uno down, ovvero il protone p

$$\phi_{+1/2}^{M[12]} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|udu\rangle - |duu\rangle) \quad (3.12a)$$

$$\phi_{+1/2}^{M[23]} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|uud\rangle - |udu\rangle) \quad (3.12b)$$

$$\phi_{+1/2}^{M[13]} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|uud\rangle - |duu\rangle). \quad (3.12c)$$

Dobbiamo ora combinare queste funzioni per ottenere uno stato globalmente simmetrico sotto scambio simultaneo di sapore e spin di due qualsiasi quark:

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \phi_{+1/2}^{M[12]} \psi_{+1/2}^{M[12]} + \phi_{+1/2}^{M[23]} \psi_{+1/2}^{M[23]} + \phi_{+1/2}^{M[13]} \psi_{+1/2}^{M[13]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}} (2|u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle + 2|u_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle + 2|d_{\downarrow}u_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle \\ &\quad - |u_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle \\ &\quad - |u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle). \end{aligned} \quad (3.13a)$$

A questo punto, come abbiamo fatto già per il decupletto barionico, possiamo muoverci lungo gli assi dell'ottetto con gli operatori \hat{I}_- , \hat{U}_- , \hat{V}_- e trovare gli stati degli altri barioni: applicandoli allo stato del protone troviamo

$$\begin{aligned} |n \uparrow\rangle &= \hat{I}_- |p \uparrow\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}} (2|d_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle + 2|d_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle + 2|u_{\downarrow}d_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle \\ &\quad - |d_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle \\ &\quad - |d_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle) \end{aligned} \quad (3.13b)$$

$$\begin{aligned} |\Sigma^+ \uparrow\rangle &= \hat{U}_- |p \uparrow\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}} (2|u_{\uparrow}u_{\uparrow}s_{\downarrow}\rangle + 2|u_{\uparrow}s_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle + 2|s_{\downarrow}u_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle \\ &\quad - |u_{\uparrow}u_{\downarrow}s_{\uparrow}\rangle - |u_{\uparrow}s_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle - |s_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle \\ &\quad - |u_{\downarrow}u_{\uparrow}s_{\uparrow}\rangle - |u_{\downarrow}s_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle - |s_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle) \end{aligned} \quad (3.13c)$$

mentre applicandoli ai nuovi barioni trovati otteniamo

$$\begin{aligned}
|\Sigma^0 \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I}_- |\Sigma^+ \uparrow\rangle \\
&= \frac{1}{6} [2(|u_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle + |d_\uparrow u_\uparrow s_\downarrow\rangle) + 2(|u_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle + |d_\uparrow s_\downarrow u_\uparrow\rangle) \\
&\quad + 2(|s_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle + |s_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle) \\
&\quad - (|u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle + |d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle) - (|u_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle + |d_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle) \\
&\quad - (|u_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle + |d_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle) - (|u_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle + |d_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle) \\
&\quad - (|s_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle + |s_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle) - (|s_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle + |s_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle)]
\end{aligned} \tag{3.13d}$$

$$\begin{aligned}
|\Sigma^- \uparrow\rangle &= \hat{V}_- |n \uparrow\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{18}} (2 |d_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle + 2 |d_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle + 2 |s_\downarrow d_\uparrow d_\uparrow\rangle \\
&\quad - |d_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle - |d_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle - |s_\uparrow d_\uparrow d_\downarrow\rangle \\
&\quad - |d_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle - |d_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle - |s_\uparrow d_\downarrow d_\uparrow\rangle)
\end{aligned} \tag{3.13e}$$

e infine

$$\begin{aligned}
|\Xi^- \uparrow\rangle &= \hat{U}_- |\Sigma^- \uparrow\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{18}} (-2 |s_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle - 2 |s_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle + 2 |d_\downarrow s_\uparrow s_\uparrow\rangle \\
&\quad + |s_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle + |s_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle + |d_\uparrow s_\uparrow s_\downarrow\rangle \\
&\quad + |s_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle + |s_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle + |d_\uparrow s_\downarrow s_\uparrow\rangle)
\end{aligned} \tag{3.13f}$$

$$\begin{aligned}
|\Xi^0 \uparrow\rangle &= \hat{V}_- |\Sigma^+ \uparrow\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{18}} (-2 |s_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle - 2 |s_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle + 2 |u_\downarrow s_\uparrow s_\uparrow\rangle \\
&\quad + |s_\uparrow s_\downarrow u_\uparrow\rangle + |s_\uparrow u_\uparrow s_\downarrow\rangle + |u_\uparrow s_\uparrow s_\downarrow\rangle \\
&\quad + |s_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle + |s_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle + |u_\uparrow s_\downarrow s_\uparrow\rangle).
\end{aligned} \tag{3.13g}$$

Riassumendo, l'ottetto è composto da

- Un doppietto di isospin $I = 1/2 \rightarrow p, n$;
- Un tripletto di isospin $I = 1 \rightarrow \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$ simmetrico per scambio di u, d ;
- Un doppietto di isospin $I = 1/2 \rightarrow \Xi^+, \Xi^0$;
- Un singoletto di isospin $I = 0 \rightarrow \Lambda^0$ antisimmetrico per scambio di u, d .

L'ultimo barione mancante, il Λ^0 costituito dai quark u, d, s , non si può ottenere dall'operatore di abbassamento di isospin perché il tripletto di isospin con $I = 1$ è già completo

con $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$. Si può però costruire in modo analogo a quanto fatto per il protone partendo dagli stati di antisimmetria mista di sapore con u, d, s :

$$\tilde{\phi}_{+1/2}^{M[12]} = \frac{1}{\sqrt{12}} [2(|uds\rangle - |dus\rangle) + (|usd\rangle - |dsu\rangle) - (|sud\rangle - |sdu\rangle)] \quad (3.14a)$$

$$\tilde{\phi}_{+1/2}^{M[23]} = \frac{1}{\sqrt{12}} [2(|sud\rangle - |sdu\rangle) + (|usd\rangle - |dsu\rangle) - (|uds\rangle - |dus\rangle)] \quad (3.14b)$$

$$\tilde{\phi}_{+1/2}^{M[13]} = \frac{1}{\sqrt{12}} [2(|usd\rangle - |dsu\rangle) + (|uds\rangle - |dus\rangle) - (|sud\rangle - |sdu\rangle)] \quad (3.14c)$$

e combinandoli con gli stati di spin (3.11) per costruire

$$\begin{aligned} |\Lambda^0 \uparrow\rangle &= \tilde{\phi}_{+1/2}^{M[12]} \psi_{+1/2}^{M[12]} + \tilde{\phi}_{+1/2}^{M[23]} \psi_{+1/2}^{M[23]} + \tilde{\phi}_{+1/2}^{M[13]} \psi_{+1/2}^{M[13]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{12}} [(|u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle - |d_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle) - (|u_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle - |d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle) \\ &\quad + (|u_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle - |d_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle) - (|u_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle - |d_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle) \\ &\quad + (|s_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle - |s_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle) - (|s_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle - |s_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle)] . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Notiamo come l'antisimmetria per scambio di quark u, d sia in accordo col fatto che si tratta di un singoletto di isospin. Per quanto riguarda le masse dei barioni, non sono qui presenti le regolarità trovate nel decupletto: si trovano infatti le seguenti differenze di massa fra multipletti:

$$m_{\Lambda^0} - m_n \simeq 177 \text{ MeV} \quad (3.16a)$$

$$m_\Xi - m_{(\Lambda^0)} \simeq 203 \text{ MeV} \quad (3.16b)$$

$$m_\Sigma - m_{\Lambda^0} \simeq 77 \text{ MeV} . \quad (3.16c)$$

Una cosa che salta subito all'occhio è che la massa degli adroni, in particolare quella degli adroni costituiti da u, d e senza quark s che ha una massa notevolmente maggiore rispetto ai primi due, è molto maggiore della somma delle masse dei singoli quark costituenti. È il caso, per esempio, dei nucleoni con massa $m_n \approx m_p \approx 940 \text{ MeV}$ mentre sappiamo che $m_u \approx m_d \approx 5 \text{ MeV}$. Questo perché la massa degli adroni è prevalentemente energia del campo di colore che non distingue fra i diversi sapori. Soprattutto per gli adroni non strani ciò si traduce nei multipletti di isospin con caratteristiche e masse simili. Le differenze di massa in questi casi sono date come detto in precedenza dalla rottura di $SU(2)_{isospin}$ da parte dell'interazione elettromagnetica che diversifica quindi le masse degli adroni nei multipletti: alcuni esempi sono indicati in Tab. 3.1.

3.2 Mesoni

I mesoni possono avere i quark con spin concorde ($|\uparrow\uparrow\rangle$) o discorde ($|\uparrow\downarrow\rangle$): nel primo caso hanno $J^P = 1^-$ e nel secondo $J^P = 0^-$, e in entrambi i casi formano un nonetto composto da un ottetto e un singoletto, raffigurabili in diagrammi dalla forma esagonale (Fig. 3.3, 3.5). I mesoni leggeri sono formati da un quark e un antiquark di sapori u, d, s . In $SU(3)_{sapore}$ ciò si traduce nell'Eq. (2.33) che qui riportiamo:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (3.17)$$

Adroni	Δm (MeV)	\bar{m} (Mev)	$\Delta m/\bar{m}$
$n - p$	1.293	938.9	$1.4 \cdot 10^{-3}$
$\Sigma^- - \Sigma^+$	8.07	1193.4	$6.8 \cdot 10^{-3}$
$\Sigma^- - \Sigma^0$	4.88	1195.0	$4.1 \cdot 10^{-3}$
$K^0 - K^+$	4.00	495.7	$8.1 \cdot 10^{-3}$
$\pi^+ - \pi^0$	4.59	137.3	$3.3 \cdot 10^{-2}$

Tabella 3.1: Masse medie di alcuni multipletti di isospin, differenze di massa e differenze relative fra gli adroni che ne fanno parte.

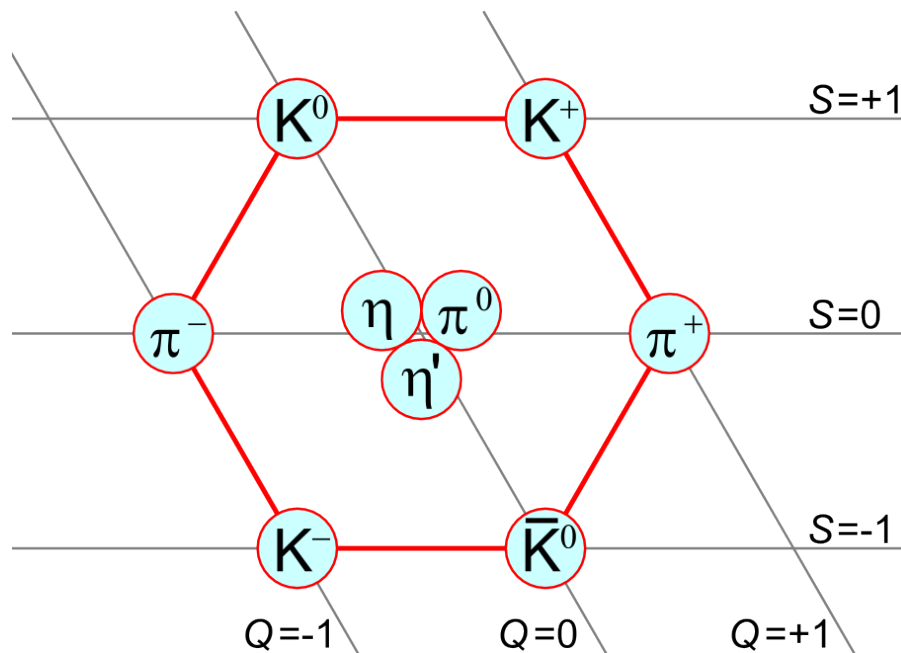


Figura 3.3: Diagramma del nonetto mesonico $J^P = 0^-$. La stranezza aumenta in modulo verso la direzione verticale, l'isospin I_3 verso destra e la carica elettrica Q nella direzione diagonale indicata.

e per $SU(2)_{spin}$ invece nella (2.21b) che riportiamo:

$$\mathbf{2} \otimes \bar{\mathbf{2}} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} \quad (3.18)$$

da cui le due famiglie di mesoni pseudoscalari $J^P = 0^-$ di spin opposti (spin-0), e quindi a energia minima, e mesoni vettoriali $J^P = 1^-$ di spin paralleli (spin-1). In entrambi i casi la parità è negativa in quanto si assume che abbiano momento angolare orbitale nullo $l = 0$ e inoltre la parità di quark e antiquark è opposta per cui si ottiene che la parità totale del sistema è

$$P = (-1)^l P_q P_{\bar{q}} = (-). \quad (3.19)$$

La trattazione degli stati mesonici è più semplice di quella dei barioni in quanto, essendo quark e antiquark distinguibili, non devono rispettare il Principio di Pauli e non dobbiamo quindi preoccuparci della simmetria della funzione totale.

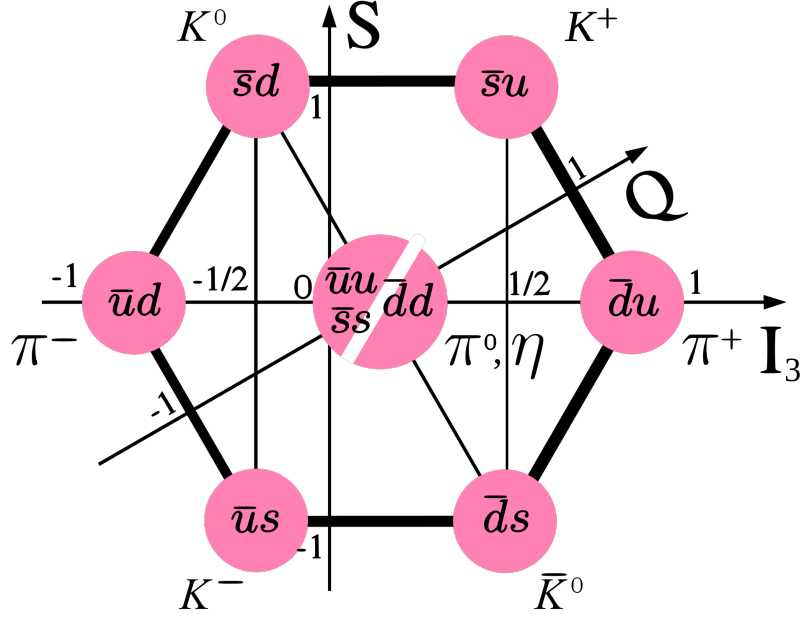


Figura 3.4: Composizione in termini di quark del nonetto mesonico $J^P = 0^-$. Gli assi cartesiani sono gli stessi di Fig. 3.3.

3.2.1 Nonetto mesonico $J^P = 0^-$

Vediamo il nonetto pseudoscalare. La corrispondenza fra i mesoni pseudoscalari ai vertici del diagramma in Fig. 3.3 e gli stati $q\bar{q}$ è immediata:

$$|K^+\rangle = |u\bar{s}\rangle \quad (3.20a)$$

$$|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle \quad (3.20b)$$

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle \quad (3.20c)$$

$$|K^-\rangle = |s\bar{u}\rangle \quad (3.20d)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = |s\bar{d}\rangle \quad (3.20e)$$

$$|\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle \quad (3.20f)$$

ed è riportata in Fig. 3.4.

Per quanto riguarda i mesoni al centro del diagramma si hanno tre possibili combinazioni. Indicando gli stati con $|\mathbf{f}; I, I_3\rangle$ dove \mathbf{f} indica l'appartenenza al singoletto o

all'ottetto di sapore si hanno i seguenti stati:

$$|\mathbf{1}; 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \equiv |\eta_1\rangle \quad (3.21a)$$

$$|\mathbf{8}; 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \equiv |\pi^0\rangle \quad (3.21b)$$

$$|\mathbf{8}; 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \equiv |\eta_8\rangle . \quad (3.21c)$$

Il π^0 va a completare il tripletto di isospin $I = 1$ assieme ai π^+ e π^- , appartiene perciò all'ottetto e non contiene $|s\bar{s}\rangle$ che ha isospin nullo; ricordando che per gli antiquark il vettore di base che si trasforma sotto rotazioni di isospin con le stesse matrici dei quark è il doppietto (2.84), lo stato (3.21b) è ottenuto come noto dalla meccanica quantistica usando i coefficienti di Clebsch-Gordan. Il mesone η_1 è lo stato di singoletto $SU(3)_{\text{sapore}}$ ed è anche singoletto di isospin.

Infine, il mesone η_8 , che è lo stato di singoletto di isospin dell'ottetto di sapore, è ottenuto imponendo l'ortogonalità con gli altri due stati. I mesoni η_1, η_8 non sono però osservati direttamente. Gli stati osservati η, η' sono combinazioni lineari di questi ultimi ottenute con un particolare angolo di mescolamento θ :

$$\begin{cases} \eta = \eta_1 \cos \theta + \eta_8 \sin \theta \\ \eta' = \eta_1 \sin \theta - \eta_8 \cos \theta \end{cases} . \quad (3.22)$$

In questo caso si osserva un angolo di mescolamento circa pari a $\theta \approx 11^\circ$. Il meccanismo di mescolamento del sapore necessita di una trattazione approfondita che può essere svolta solo nel contesto della QCD ed emerge da un effetto di continue transizioni tra coppie $q\bar{q}$ ($u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$) indotte dall'interazione forte.

3.2.2 Nonetto mesonico $J^P = 1^-$

I mesoni di questo nonetto (Fig. 3.5) hanno spin paralleli (sono perciò nel primo stato eccitato) e sono composti dalle stesse combinazioni $q\bar{q}$ viste per il nonetto $J^P = 1^-$. L'ottetto include

- I doppietti di isospin $I = 1/2 \longrightarrow K^{*+}, K^{*0}$ e K^{*-}, \bar{K}^{*0} ;
- Il tripletto con $I = 1 \longrightarrow \rho^+, \rho^0, \rho^-$;
- Il singoletto con $I = 0 \longrightarrow \phi_8$.

Vi è poi il singoletto $I = 0$ del nonetto ϕ_1 .

Il fenomeno del mescolamento fra gli stati ϕ_1, ϕ_8 è qui più pronunciato con un angolo di mescolamento pari a $\theta \approx 35^\circ$. Dagli stati

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \quad (3.23a)$$

$$\phi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \quad (3.23b)$$

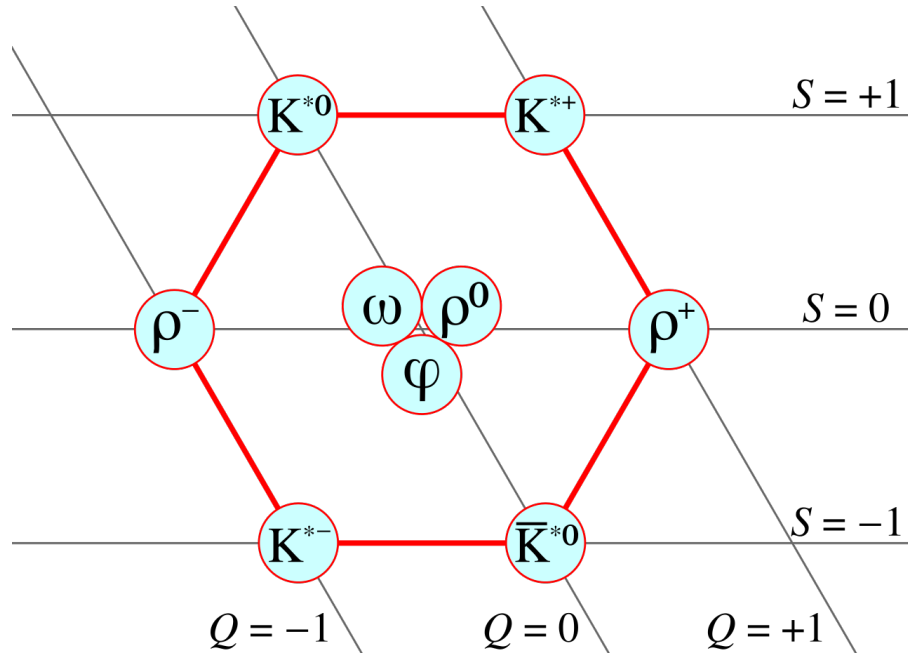


Figura 3.5: Diagramma del nonetto mesonico $J^P = 1^-$. La stranezza aumenta in modulo verso la direzione verticale, l'isospin I_3 verso destra e la carica elettrica Q nella direzione diagonale indicata.

e dal loro mescolamento

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 \sin \theta - \phi_8 \cos \theta \\ \omega = \phi_1 \cos \theta + \phi_8 \sin \theta \end{cases} \quad (3.24)$$

con quell'angolo di mescolamento si ottiene $\cos \theta \approx \sqrt{2/3}$ e quindi

$$\begin{cases} \phi \simeq |s\bar{s}\rangle \\ \omega \simeq (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (3.25)$$

Si dice che ω e ϕ sono prossime al mescolamento perfetto intendendo con ciò la perfetta separazione della componente $|s\bar{s}\rangle$ da quella $(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)$. Si può sostanzialmente ritenere ϕ formato dai soli quark $s\bar{s}$ mentre la ω non contiene quark s il che spiega la massa molto maggiore di ϕ rispetto a quelle di ω e ρ^0 ($m_\phi = 1020$ MeV, $m_\omega = 782$ MeV, $m_\rho = 770$ MeV) e i decadimenti prevalentemente osservati

$$\phi \rightarrow K^+ + K^- \quad (3.26a)$$

$$\phi \rightarrow K^0 + \bar{K}^0 \quad (3.26b)$$

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (3.26c)$$

della ϕ in particelle strane e della ω in pioni.

3.3 Antibarioni

La teoria di Dirac prevede l'esistenza di stati legati di tre antiquark, corrispondenti agli stati barionici del Par. 3.1 ma con cariche interne (ovvero numero fermionico, carica

elettrica, stranezza e momento magnetico) opposte, e chiamati *antibarioni*, e la teoria sembrava supportata dall'esistenza degli antileptoni. Segrè Dal punto di vista della teoria dei gruppi l'esistenza degli antibarioni leggeri corrisponde alla relazione (2.41):

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \bar{\mathbf{10}} \quad (3.27)$$

che mostra come all'ottetto e al decupletto barionici possano effettivamente corrispondere un ottetto e un decupletto di antibarioni. Per verificare la predizione di Dirac fu costruito nel 1955 un acceleratore di protoni che potesse raggiungere la soglia di produzione di antibarioni. Un antiprotone può essere prodotto in interazioni di protoni su nuclei con le reazioni

$$p + p \rightarrow \bar{p} + p + p + p \quad (3.28a)$$

$$p + n \rightarrow \bar{p} + p + p + n \quad (3.28b)$$

che conservano il numero barionico e la carica elettrica, se l'energia cinetica del fascio è sufficientemente alta. La produzione dell'antiprotone è segnalata dalla presenza nello stato finale di una particella di carica negativa e massa pari a quella del protone. Furono svolti esperimenti e infine nel 1956 Chamberlain, Segrè e i loro collaboratori scoprirono l'antiprotone. Una volta scoperto il metodo per produrre un fascio secondario di antiprotoni, questo può essere utilizzato per produrre altri antibarioni in reazioni di annichilazione

$$p + \bar{p} \rightarrow \text{barione} + \text{antibarione} . \quad (3.29)$$

Nel 1957 Cork, Lamberston e Piccioni scoprirono in questo modo l'antineutrone. Il $\bar{\Lambda}^0$, per esempio, è stato osservato nell'annichilazione di antiprotoni in camera a bolle a idrogeno liquido

$$\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + \Lambda^0 . \quad (3.30)$$

Si osserva la traccia dell'antiprotone fino al punto in cui avviene l'interazione e più avanti le tracce dei prodotti di decadimento

$$\bar{\Lambda}^0 \rightarrow \bar{p} + \pi^+ \quad (3.31a)$$

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- . \quad (3.31b)$$

Con questo metodo sono stati scoperti anche gli altri antibarioni $\bar{\Sigma}, \bar{\Xi}, \dots$: per ogni barione è stato osservato il corrispondente antibarione. Gli antibarioni hanno numero barionico negativo $B = -1$, e decadono negli stati coniugati di carica dei corrispondenti barioni: ad esempio, l'antineutrone decade in

$$\bar{n} \rightarrow \bar{p} + e^+ + \nu_e . \quad (3.32)$$

Conclusioni

Siamo partiti da un'introduzione generale, seppur inevitabilmente incompleta, del Modello Standard per arrivare alla descrizione matematica degli adroni leggeri. Ripercorrendo i passi compiuti, notiamo come il *leitmotiv* della trattazione (come lo è, del resto, del Modello Standard) sia stata la ricerca e lo studio di simmetrie, fondamentali per la classificazione e la schematizzazione degli adroni e in generale delle particelle in natura; in questo, come in tanti altri aspetti, risiede la potenza della teoria dei gruppi. Molti passi avanti sono stati compiuti da quando fu formulato il Modello Statico a Quark, a partire dalla scoperta negli ultimi decenni del '900 dei nuovi quark c, b, t , e ciò che all'epoca si poteva soltanto ipotizzare, come avvenne per l' Ω^- , è oggi studiato e compreso a fondo. Per quanto ciò che si è detto non sia che un assaggio della vastità e della complessità delle teorie matematiche che stanno alla base del Modello, esso è sufficiente per rendersi conto di quali sforzi teorici abbiano compiuto le menti dei fisici e dei matematici che ci hanno lasciato questo edificio in eredità. E non da meno, anzi, sono stati gli sforzi sperimentali intrapresi, che hanno permesso a ciò che poteva restare un artificio astratto in una dimensione ipotetica di assumere un fondamento scientifico, sottoposto a verifiche e esperimenti. Riprendendo le parole di Giovanni di Salisbury, discepolo di Bernard de Chartres (morto nel 1124 d.C.):

«Diceva Bernard de Chartres che noi siamo come nani sulle spalle di giganti, così che possiamo vedere più cose di loro e più lontane, non certo per l'acume della vista o l'altezza del nostro corpo, ma perché siamo sollevati e portati in alto dalla statura dei giganti.»

Abbiamo visto come nel Modello Standard vi siano ancora innumerevoli domande a cui impiegheremo anni per dare una risposta; tuttavia, i nostri antenati ci hanno lasciato un tesoro di inestimabile valore: le fondamenta di quell'edificio che è il sapere scientifico e su cui possiamo porre pietra dopo pietra, generazione dopo generazione, adempiendo alla missione, forse impossibile, ma proprio per questo la più nobile e degna di essere tentata, che eleva l'Uomo al di sopra della sua condizione terrena: la ricerca della Verità.

Bibliografia

- [1] Bastianelli F. *Fisica Nucleare e Subnucleare-Teoria dei Gruppi*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna (2017)
- [2] Bettini A., *Introduction to Elementary Particle Physics*, New York NY, Cambridge University Press (2008)
- [3] Braibant S., Giacomelli G., Spurio M., *Particelle e interazioni fondamentali*, 2a edizione, s.l., Springer (2012)
- [4] Ceradini F., *Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare*, Dipartimento di Fisica “Edoardo Amaldi”, Università Roma Tre (2003)
- [5] Cottingham W.N., Greenwood D.A. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, 2nd edition, New York NY, Cambridge University Press (2007)
- [6] De Angelis A., Pimenta M. J. M. *Introduction to Particle and Astroparticle Physics*, s.l., Springer (2015)
- [7] Das A., Ferbel T., *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, s.l., John Wiley & Sons, Inc. (2003)
- [8] Donnelly T.W., Formaggio J.A., Holstein B.R., Milner R.G., Surrow B., *Foundations of nuclear and particle physics*, New York NY, Cambridge University Press (2017)
- [9] Semprini Cesari N., *Fisica Nucleare e Subnucleare*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna (2017)
- [10] Soldati R., *Introduction to Quantum Field Theory: A primer for a Basic Education*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna (2018)
- [11] Zucchini R., *Group Theory for Physics*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna (2017)