

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Studio di un Buco Nero di Reissner-Nordström

Relatore: Prof.  
Alexandre Kamenchtchik

Presentata da:  
Lorenzo Copparoni

Anno Accademico 2017/2018



## Sommario

Scopo di questo lavoro è offrire una prospettiva sulla soluzione delle equazioni di Einstein per sorgenti a simmetria sferica, statiche, ed aventi carica elettrica non nulla in uno spazio tempo asintoticamente piatto, trovata indipendentemente da Hans Reissner e Gunnar Nördstrom. Nella prima parte si fa una rapida introduzione degli oggetti matematici e fisici necessari quali equazioni di Maxwell e tensore Energia Impulso. Nella seconda si ricava la metrica e, tramite essa, si offre una descrizione dello spazio tempo soffermandosi sugli orizzonti e sulle perturbazioni. Nel terzo capitolo infine si tratta la radiazione di Hawking che offre una interessante prospettiva sull'evoluzione e sul destino di un Buco Nero carico.



# Indice

<b>1</b>	<b>Formalismi e Spaziotempo Generale</b>	5
1.1	Geometria Riemanniana	6
1.2	Tensore Energia-Impulso	8
1.3	Spazio tempo	12
1.4	Elettromagnetismo	14
<b>2</b>	<b>Metrica di Reissner-Nordström</b>	17
2.1	Derivazione della Metrica	17
2.2	Geodesiche	20
2.3	Orizzonti degli Eventi	25
2.4	Estrazione di Energia	27
2.5	Struttura Interna	27
2.6	Perturbazioni	29
2.7	Stabilità Classica degli Orizzonti degli Eventi	35
<b>3</b>	<b>Fenomeni Quantistici in un Buco Nero di Reissner Nordström</b>	39
3.1	Radiazione di Hawking	39
3.2	Monopolo Magnetico	47
	<b>Bibliografia</b>	51



# Introduzione

Si studia in questa tesi la soluzione delle equazioni di Einstein per uno spazio tempo asintoticamente piatto, a simmetria sferica, statico e con una sorgente di massa  $M$  con carica elettrica  $Q$  ottenuta per la prima volta da Hans Reissner e Gunnar Nordström nel 1916 e 1918 rispettivamente. L'importanza della metrica è sia storica, essendo infatti uno dei primi modelli sviluppati tramite la Relatività Generale, sia, ovviamente, fisica. Lo studio di questa infatti, sebbene possa sembrare un mero esercizio teorico data l'assenza di sorgenti gravitazionali la cui carica elettrica porti effetti significativi. Tuttavia le proprietà di quest'ultima offrono una prospettiva più profonda sulla natura dello spazio tempo ed introducono fenomeni che vengono replicati in oggetti più vicini ad una descrizione realistica della fisica come ad esempio un buco nero di Kerr che, non sferico ma simmetrico rispetto ad un asse, è più in accordo con le osservazioni astrofisiche rispetto alla metrica di Schwarzschild.

Nel primo capitolo si sono introdotti gli strumenti necessari ad una trattazione dignitosa della Relatività Generale tramite una rapida introduzione alla Geometria Riemanniana per poi trattare gli oggetti fisici necessari, quali tensore Energia Impulso, una rapida spiegazione delle equazioni di Einstein e dell'elettromagnetismo su uno spazio tempo Generale. Nel secondo invece si è ricavata la formula della metrica e si sono trattate le geodesiche, nel caso  $M^2 > Q^2$  che corrisponde ad un buco nero, per avere una comprensione della natura dello spazio tempo e della coppia di orizzonti. Si sono poi trattati rapidamente il comportamento di una particella carica e la metrica interna concludendo il capitolo con un'analisi perturbativa. Nel terzo capitolo infine si è trattata la radiazione di Hawking e, conseguentemente, l'evoluzione temporale di un buco nero di Reissner-Nordström prestando particolare attenzione ai casi di buco nero supermassivo o avente carica Magnetica (nell'ipotesi di esistenza di monopoli magnetici).





# Capitolo 1

## Formalismi e Spaziotempo Generale

Prima di andare a trattare lo studio di un buco nero carico risulta comodo e necessario andare a introdurre le vari strumenti teorici che verranno più volte utilizzati nella tesi e farne un rapido studio per poter più facilmente risolvere i vari quesiti che insorgono naturalmente. Si vuole inoltre spiegare e giustificare formalismi e notazioni che verranno utilizzati in tutta la tesi per evitare possibili confusioni.

Dovendo trattare di Relatività Generale la scelta del formalismo tensoriale è ovvia e necessaria, in linea con la tradizione si è scelto di indicare tensori di dimensione 4 indicando i loro indici con lettere greche; questi potranno indicare i valori 0, 1, 2, 3 dove lo 0 sarà la componente che, applicando una trasformazione di Lorentz, si comporta come  $ct$  in un quadrivettore posizione. È stata posta come segnatura della metrica  $(+, -, -, -)$ ; seguendo questa linea la ripetizione di indici indicherà la somma:

$$x^\nu x_\nu = x^\nu g_{\mu\nu} x^\mu = \sum_{i=0}^3 x^i g_{ii} x^i$$

mentre la presenza di una virgola indicherà una derivata parziale:

$$x^\mu_{,\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}$$

Si è scelto inoltre, per motivi di comodità, di utilizzare il sistema di unità geometrizzate ponendo le costanti  $G = c = 1$  che pertanto saranno omessi dalle formule. In questo sistema le grandezze di Lunghezza, tempo, massa e carica sono tutte espresse come lunghezze. Similmente anche la costante di Coulomb dell'interazione elettromagnetica è stata posta pari ad 1. Per motivi di completezza si scrivono qui sotto i fattori di conversione moltiplicativi per le unità di misura del sistema internazionale.

Grandezza	Fattore moltiplicativo
Tempo	$c$
Massa	$Gc^{-2}$
Energia	$Gc^{-4}$
Carica Elettrica	$G^{0.5}c^{-2}(4\pi\epsilon_0)^{-0.5}$

## 1.1 Geometria Riemanniana

Con l'introduzione della Relatività Generale di Einstein la geometria Euclidea non è più uno strumento adatto ad offrire una descrizione completa dello spazio tempo. La definizione di gravitazione, come azione su di una varietà differenziale curva, richiede una maggiore generalità e la possibilità di includere il caso noto come situazione particolare. Ci si affida perciò alla Geometria differenziale e, in particolare, alla Geometria Riemanniana.

### Connessione e Metrica

Dovendo creare gli strumenti per studiare delle varietà differenziali, uno dei primi problemi in cui ci si imbatte è l'assenza di un metodo per confrontare due vettori, bisogna perciò introdurre i concetti di derivata covariante e, conseguentemente, trasporto parallelo. Parlare di derivazione potrebbe sembrare un controsenso dato quanto affermato prima riguardo l'assenza di un metodo per confrontare due vettori: tuttavia viene in aiuto la proprietà delle varietà Riemanniane di essere localmente piatte e ci si limita dunque a considerare variazioni infinitesime. Data una curva  $C$ , parametrizzata da una variabile  $\lambda$ , si calcola la derivata di un vettore  $V$  in un punto  $P = C(\lambda_0)$  come <sup>1</sup> :

$$\nabla_{\mathbf{U}}V = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_{\lambda_0+\epsilon}^*(\lambda_0) - \mathbf{V}_{\lambda_0}(\lambda_0)}{\epsilon}$$

dove  $\mathbf{V}_{\lambda_0+\epsilon}^*$  indica il vettore in  $\lambda_0 + \epsilon$  trasportato lungo la curva mantenendone intatto modulo e direzione, processo che prende appunto il nome di *trasporto parallelo*. Introducendo un sistema di coordinate  $\mathbf{e}_i$  si vede che è possibile ottenere una formula per la derivazione rispetto ad una coordinata:

$$\nabla_i V^k = V^k_{;i} = V^k_{,i} + \Gamma^k_{il} V^l$$

dove  $\Gamma^k_{il}$  si dice simbolo di Christoffel.

Il simbolo di Christoffel viene anche detto connessione, tramite quest'ultimo è possibile determinare completamente la struttura di una varietà differenziale nell'intorno di un punto e, dalla formula di derivazione si può ottenere:

$$\nabla_i \mathbf{e}_j = \Gamma^k_{ji} \mathbf{e}_k \tag{1.1}$$

---

<sup>1</sup>Nella presente sezione vengono utilizzate lettere dell'alfabeto latino per i vari indici piuttosto che lettere greche come nel resto del documento. Si è scelto ciò per mantenere il formalismo fisico che vede gli indici con lettere greche come legati ad uno spazio 4 dimensionale localmente simile ad uno spazio di Minkovski, mentre le lettere latine non hanno tale connotazione ed assumono quindi un carattere più generale

si nota che quest'ultimo a dispetto delle apparenze non è un tensore di forma (1, 2), andando ad operare una trasformazione gli indici  $i, k$  si comportano come fossero di un tensore, mentre  $j$  ha un comportamento anomalo.

Nelle considerazioni fatte fin'ora riguardo la derivata e la connessione non sono state spese parole sulla metrica, in effetti da un punto di vista matematico questa non è affatto essenziale per descrivere la connessione o la curvatura di una varietà differenziale. La sua introduzione tuttavia consente una comprensione più profonda e completa della materia e, soprattutto, costruire un sistema fisico senza di essa risulta quasi impossibile. Per il principio di Levi-Civita in una varietà Riemanniana, ovvero una varietà differenziale sulla quale è definita una metrica, si ha una connessione:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{li,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \quad (1.2)$$

che è l'unica possibile connessione simmetrica negli indici  $i, j$ . Questa simmetria consente l'utilizzo di varie proprietà utili nella descrizione della curvatura.

## Curvatura

La definizione di curvatura intrinseca di una varietà differenziale si ottiene da un semplice processo: trasportare parallelamente un vettore lungo una curva chiusa. In una varietà piatta non ci sarà alcuna differenza fra il vettore trasportato e quello iniziale, in altri casi invece ciò non è garantito. Un classico esempio può essere quello della superficie di una sfera immersa in  $\mathbb{R}^3$ , trasportando un vettore lungo un triangolo avente tutti e tre gli angoli retti questo si troverà spostato rispetto al vettore di partenza.

Da un punto di vista più quantitativo l'intensità della curvatura sarà determinata appunto dalla differenza fra il vettore trasportato lungo la curva e quello iniziale. Si introduce quindi un operatore differenziale:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = [\nabla_{\mathbf{U}}, \nabla_{\mathbf{V}}] - \nabla_{[\mathbf{U}, \mathbf{V}]} \quad (1.3)$$

che, applicato ad un vettore  $Z$ , fornisce la sua variazione a seguito del trasporto prima lungo i vettori  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  poi lungo il commutatore di questi due, ed infine di nuovo tramite questi ma con direzione opposta; la presenza del commutatore è necessaria dato che, in uno spazio tempo non piatto, una coppia di vettori non ha necessariamente commutatore nullo. Utilizzando questo operatore, però, ci si lega alla coppia di vettori utilizzati per descrivere la curva e quello trasportato. Essendo però la curvatura una grandezza intrinseca della varietà, che non dovrà dipendere dal vettore trasportato o dal percorso chiuso utilizzato, possiamo introdurre un tensore che, moltiplicato per i tre vettori utilizzati, dia lo stesso risultato che l'operatore  $\mathbf{R}$ . Risulta abbastanza ovvio che il tensore che cerchiamo sarà di tipo (1, 3) e quindi si può subito dedurre:

$$\delta Z^a = R_{bcd}^a U^b V^c Z^d$$

Volendo calcolare le componenti del tensore si considerano i vettori come spostamenti infinitesimi, si può applicare così la proprietà di varietà localmente piatta. In queste condizioni il commutatore di due vettori è sempre nullo e quindi il termine  $\nabla_{[\mathbf{U}, \mathbf{V}]}$  si può trascurare. Avendo imposto che il tensore  $R$  non dipenda dal

percorso della curva, né tanto meno dal vettore trasportato, è possibile scegliere i due vettori  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  come più comodo e, pertanto, si decide di considerarli come vettori aventi la stessa direzione di un vettore della base [2]. Espandendo le derivate covarianti si scrive la (1.3) come:

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{db,c}^a - \Gamma_{cb,d}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e \quad (1.4)$$

che, in presenza di una metrica, sarà determinato da una combinazione delle derivate seconde della metrica. Dalle definizioni si possono dedurre quattro proprietà del tensore che, per comodità, scriviamo con l'indice abbassato:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{abdc} & R_{abcd} &= -R_{bacd} \\ R_{abcd} &= R_{cdab} & R_{abcd} + R_{acdb} + R_{abd c} &= 0 \end{aligned}$$

e, in più in presenza di connessione simmetrica, quindi sempre nel caso di varietà Riemanniana, vale l'uguaglianza di Bianchi:

$$R_{abcd;e} + R_{becd;a} + R_{eacd;b}$$

Date queste si può ridurre il numero di componenti indipendenti da  $n^4$  (dove  $n$  è la dimensione della varietà) a  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ .

Date le varie proprietà di simmetria è possibile ridurre il tensore di Riemann ad uno di grado minore tramite una semplice contrazione degli indici, si ottiene così dal tensore di curvatura:

$$R_{bad}^a = R_{bd}$$

dove il tensore di ordine 2 è simmetrico e si dice Tensore di Ricci. Nella Relatività Generale viene utilizzato prevalentemente quest'ultimo visto anche che l'uguaglianza di Bianchi si può ricondurre a:

$$\left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right)^{;\mu} = 0 \quad (1.5)$$

## 1.2 Tensore Energia-Impulso

Dato un sistema la cui azione è della forma:

$$S = \int \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{,\mu}) \sqrt{-g} dV dt = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{,\mu}) \sqrt{-g} d^4x \quad (1.6)$$

dove  $\mathcal{L}$  è una funzione delle grandezze  $\mathbf{q}$ , che determinano lo stato del sistema, e delle sue derivate rispetto alle coordinate  $x^\mu$  mentre il termine  $g$  sarà il determinante della metrica definita sulla varietà, si possono andare a ricavare l'impulso definito del campo. Si studia prima il caso di spazio tempo piatto, per cui  $\sqrt{-g}$  sarà uguale ad 1, si nota inoltre che l'integrale di volume di  $\mathcal{L}$  sarà la lagrangiana del sistema (infatti questo termine è generalmente detto densità di Lagrangiana).

## Spazio-Tempo Piatto

Supponiamo per semplicità che  $\mathbf{q}$  sia uno scalare e, applicando il principio di Minima Azione, si ha:

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right) d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \right] d^4x = 0\end{aligned}$$

Applicando ora il teorema di Gauss si vede che il secondo termine nell'integrale si annulla integrando su tutto lo spazio, e si trovano in questo modo le equazioni di Eulero Lagrange che minimizzano il funzionale:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \quad (1.7)$$

Ora si va a cercare una grandezza che si conservi lungo una generica coordinata  $x_\mu$ , dato:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \frac{\partial q_{,\mu}}{\partial x^\mu}$$

applicando la (1.7) e sostituendo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}$$

si ottiene:

$$\delta_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} \right) q_{,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} \frac{\partial q_{,\mu}}{\partial q_{,\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} \right) \quad (1.8)$$

Si nota che introducendo il tensore <sup>2</sup> :

$$T_\mu^\nu = q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \quad (1.9)$$

e, sostituendolo nella (1.8), si ottiene:

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \quad (1.10)$$

È importante ora andare a studiare la natura fisica del tensore  $T_\mu^\nu$ . È noto che l'annullarsi della divergenza quadridimensionale di un tensore implica che l'integrale di quest'ultimo su di un'ipersuperficie, che racchiude in se tutto lo spazio tridimensionale, si conservi. Da ciò si ottiene l'espressione del 4-impulso del sistema come

---

<sup>2</sup>Nel caso in cui la densità di Lagrangiana sia definita da più grandezze  $q^{(l)}$  è abbastanza evidente che la (1.9) diventa

$$T_\mu^\nu = \sum_l q_{,\mu}^{(l)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}^{(l)}} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}$$

integrale del tensore sull'iperpiano ( $x^\mu = \text{const}$ ) moltiplicato per  $c^{-1}$ ; si vede in particolare che, data la componente  $p^0$ :

$$cp^0 = \int T^{00} dV$$

la componente  $T^{00}$  risulta essere la densità di energia del sistema.

Ora il tensore  $T_\mu^\nu$  chiamato *Tensore di Energia-Impulso*, risulta definito a meno del gradiente in  $\alpha$  di un tensore  $\phi^{\mu\nu\alpha}$  antisimmetrico negli indici  $\nu, \alpha$ ; si dimostra facilmente che questo non influisce sulla definizione del 4-impulso. Al fine di avere una definizione univoca si impone la conservazione del 4-tensore momento angolare definito come:

$$M^{\mu\nu} = \int (x^\mu dP^\nu - x^\nu dP^\mu) = \frac{1}{c} \int (x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\alpha\mu}) dS_\alpha$$

dove  $dS_\alpha$  è l'integrale di ipersuperficie sull'iperpiano  $x^\alpha = \text{const}$ , come già detto questa relazione può esprimersi anche come l'annullarsi della divergenza rispetto all'indice  $\alpha$  dalla quale ricaviamo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\alpha\mu}) = \delta_\alpha^\mu T^{\nu\alpha} - \delta_\alpha^\nu T^{\mu\alpha} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0$$

che risulta equivalente alla condizione di simmetria per il tensore.

## Caso Generale

Si riprende ora la (1.6) e si studia il caso generale per una metrica  $g_{\mu\nu}$ . Si definisce anzitutto un nuovo set di coordinate  $x'^\mu$  tali che  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$  (con  $\xi^\mu \ll 1$ ) e, a seguito di questa trasformazione, le componenti della metrica si possono approssimare come:

$$g'^{\mu\nu}(x^\alpha) \approx g^{\mu\nu}(x^\alpha) + g^{\mu\beta} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}$$

espandendo poi il termine di destra in serie di Taylor al primo ordine si ricava

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$$

dove

$$\delta g^{\mu\nu} = \xi^{\mu;\nu} - \xi^{\nu;\mu}$$

Dopo aver ricavato le componenti covarianti si va a calcolare la variazione del funzionale azione come è stato fatto per il caso di spazio tempo piatto. Si nota che le componenti legate alla variazione di  $q$  si annullano per le equazioni del moto del sistema fisico ed è quindi possibile considerare unicamente i termini legati alle variazioni della metrica. Si arriva quindi a:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \delta g_{,\alpha}^{\mu\nu} \right] d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned}$$

Si definisce il tensore di tipo (0,2):

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \quad (1.11)$$

è abbastanza semplice vedere che quest'ultimo è simmetrico [8], per tale motivo riscrivendo  $\delta S$  esplicitando la dipendenza di  $\delta g$  da  $\xi$  si ottiene:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int T_{\mu\nu} \xi^{\mu;\nu} \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{c} \int \left[ (T^\nu_\mu \xi^\mu)_{;\nu} - T_{\mu;\nu} \xi^\mu \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (1.12)$$

la prima parte può essere trasformata in un'integrale di ipersuperficie che si annulla poiché  $\xi^\mu$  è nullo sulle frontiere di integrazione. Imponendo  $\delta S$  nullo e poiché le variazioni delle coordinate sono arbitrarie si ottiene:

$$T_{\mu;\nu}^\nu = 0 \quad (1.13)$$

Confrontando quest'ultima con la (1.10) si nota che il tensore  $T_{\mu\nu}$  è identificabile come il tensore energia impulso.

## Materia come Fluido

L'equazione (1.11) offre una rappresentazione completa del tensore energia impulso evidenziandone la simmetria e indicandone facilmente la forma nota la natura dei campi che si considerano; è comodo tuttavia fare un passo indietro e partire dalla descrizione fisica delle componenti piuttosto che dal funzionale azione.

Considerato un sistema come fluido caratterizzato da grandezze macroscopiche (come densità, pressione, entropia, etc. . .) piuttosto che come insieme di particelle ognuna avente la sua velocità. Si è visto che  $T^{\mu\nu}$  si può interpretare come il flusso del 4-impulso  $p^\mu$  sulla superficie  $x^\nu = \text{const}$  e, come visto prima, alla componente  $T^{00}$  si attribuisce così il significato di densità di energia del sistema. Le altre componenti diagonali, invece, assumono il ruolo di pressione esercitata dal fluido sulla suddetta superficie, mentre le componenti non diagonali sono termini di torsione dovuti alla viscosità. Si considerano due casi: quello della polvere, un'insieme di particelle in quiete l'una rispetto all'altra, e quello di un fluido perfetto. Nel primo caso la pressione esercitata dalle particelle sarà esprimibile tramite la densità di energia  $\rho$ , calcolata nel sistema di riferimento in cui il fluido è in quiete, per cui il tensore assumerà la forma:

$$T_{\text{polvere}}^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$$

dove  $U^\mu$  è la velocità del fluido. Preso invece il caso di un fluido perfetto si può rappresentare il tutto unicamente tramite la densità di energia e la pressione  $p$  (entrambe calcolate nel sistema di riferimento in cui il fluido è a riposo). Intuitivamente la pressione dovrebbe essere rappresentata da un tensore tridimensionale, tuttavia a causa dell'isotropia dello spazio la pressione, sempre nell'ipotesi che il fluido sia in quiete, è uguale in tutte le direzioni.

Per dare una spiegazione sufficientemente dettagliata è necessario unire i due casi arrivando alla definizione del tensore energia impulso:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (1.14)$$

### 1.3 Spazio tempo

Nello studio di Buchi neri nella relatività Generale ci si aspettano soluzioni statiche e sferiche (nel caso della metrica di *Schwarzschild* e *Reinssner-Nordström*) o statiche e a simmetria assiale (nel caso della metrica di *Kerr* e *Kerr-Newmann*). Risulta comodo cercare, prima di studiare casi specifici, strutture generali dello spazio tempo, andando a definirne la metrica, per le suddette simmetrie.

#### Equazioni di Einstein

Definendo la gravitazione come azione dovuta ad una varietà differenziale curva, è necessario completare la teoria andando a determinare in quale modo le sorgenti vadano a modificare la metrica. È bene partire dai ben noti risultati della teoria Newtoniana ed in particolare dall'equazione di Poisson per un potenziale gravitazionale  $\phi$ :

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{1.15}$$

dove  $\rho$  sarà la densità di massa in un punto dello spazio. Nell'espandere questa formula alla relatività Generale ci si imbatte in una problematica: la componente  $\rho$  tiene conto solo della massa di una eventuale sorgente e, anche considerando quest'ultima come densità di energia, ciò sarebbe valido solo per un osservatore che si trova in un sistema di riferimento inerziale in quiete rispetto alla sorgente. Per ovviare ciò si utilizza l'intero tensore  $T_{\mu\nu}$  come generatore del campo gravitazionale e, volendo generalizzare la (1.15), ci si aspetta un'equazione della forma [17]:

$$O(\mathbf{g}) = k\mathbf{T}$$

dove  $O$  è un operatore differenziale al secondo ordine che produce come risultato un tensore di tipo (2,0). Dallo studio della geometria differenziale si ottiene come candidato  $R_{\mu\nu} + aRg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$  e, applicando inoltre la condizione di annullamento del gradiente del tensore energia impulso, si vede che  $a = -\frac{1}{2}$ . Imponendo il risultato Newtoniano nell'approssimazione di campo debole si ottiene la costante  $k$ . Si arriva pertanto ad un sistema di 10 equazioni differenziali indipendenti espresse dall'equazione:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \tag{1.16}$$

Il termine  $\Lambda$  assume un'importanza incredibilmente alta nella descrizione dell'universo e prende il nome di *costante cosmologica*. Inizialmente Einstein non aveva considerato la presenza di questo termine nel descrivere la teoria della relatività Generale, questo termine tuttavia porta ad una inevitabile conclusione che era completamente contraria alle teorie del tempo e alla filosofia personale dello scienziato [10]. Risultava infatti che l'universo non poteva considerarsi statico ma doveva essere necessariamente in espansione e, in particolare, in un certo punto del passato questa espansione deve aver avuto inizio con un processo, ormai famoso, che prende il nome di *Big Bang*. L'introduzione di questo termine serve appunto a correggere l'espansione dell'universo. È ormai noto che effettivamente l'universo è in espansione; il termine  $\Lambda$  tuttavia resta uno degli argomenti di studio della cosmologia che utilizzano quest'ultimo come una costante atta a descrivere la densità della



materia nell'universo e quindi la sua struttura. Nella seguente tesi ci si limita a considerare un universo asintoticamente piatto piuttosto che addentrarsi nelle più moderne teorie di Universo di DeSitter o anti-Desitter e si pone pertanto la costante cosmologica come nulla utilizzando perciò le equazioni di Einstein originali:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.17)$$

o, equivalentemente,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) \quad (1.18)$$

## Soluzione per spazio Tempo

Risolvere le equazioni di Einstein è un processo piuttosto complesso e laborioso specialmente se si immaginano situazioni 'esoteriche', per questo motivo in genere si cercano soluzioni generali per eventuali simmetrie dello spazio tempo, andando poi a trovare una soluzione specifica in base alle informazioni sulla sorgente che si ottengono dal Tensore Energia Impulso. Si considera anzitutto il caso più semplice ovvero quello di una sorgente sferica e stazionaria. Risulta intuitivo definire le coordinate  $x_0, x_2, x_3$  come  $t, \theta, \varphi$  e la coordinata  $x_1$  come  $r$  dove:

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

dove  $A$  sarà la superficie di una sfera  $S(2)$ . Risulta intuitivo che in uno spazio Euclideo quest'ultimo equivalga alla distanza fra la superficie della sfera ed il centro. Tuttavia nella geometria Reimanniana ciò non è scontato, per cui, per semplicità, ci si riferisce a questo termine come componente radiale della metrica. Considerata la presenza di tre vettori di Killing, che si deducono dalla simmetria sferica e dalla staticità, si deduce come soluzione generale:

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(\sin^2(\theta)d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (1.19)$$

Si considera ora il caso di spazio simmetrico rispetto ad un asse; come nel caso della sorgente sferica la presenza di un vettore di Killing temporale ed un altro legato all'angolo azimuthale rispetto l'asse di rotazione rende logico definire le coordinate  $x_0$  come coordinata temporale  $t$  e la coordinata  $x_1$  come  $\varphi$ . Date queste proprietà si vede che i coefficienti della metrica saranno funzioni solo delle due coordinate rimanenti  $x_2, x_3$  e che, a seguito di una trasformazione di parità per le coordinate  $t, \varphi$ , si ottiene:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtd\varphi + g_{11}d\varphi + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2$$

È possibile ora considerare i coefficienti legati alle coordinate  $x_2, x_3$  a parte come metrica di uno spazio  $\mathbb{R}^2$  e quindi ridefinirli come coordinate ortogonali fra loro ottenendo:

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_2}(dx^2)^2 + e^{2\mu_3}(dx^3)^2 \quad (1.20)$$

dove  $\nu, \psi, \mu_2, \mu_3$  e  $\omega$  sono funzioni di  $x_2, x_3$ . Considerato ciò si nota che questa struttura equivale ad una sorgente rotante.

## 1.4 Elettromagnetismo

La teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell sono state uno dei primi segni della necessità di una teoria relativistica che andasse a correggere errori e limiti della fisica classica. Ci si accorge però che anche le suddette equazioni necessitano di una rielaborazione per poter essere utilizzate nella nuova fisica, le grandezze tridimensionali di campo elettrico e magnetico non sono adatte al mondo di 4-vettori che è inevitabile nella relatività ristretta. Si fa qui una rapida descrizione della teoria elettromagnetica relativistica dato che essa risulterà ovviamente utile in seguito.

### Tensore Elettromagnetico

Si prendono anzitutto il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e quello magnetico  $\mathbf{B}$ , entrambi nella fisica classica sono descritti da un vettore tridimensionale indicante l'intensità nelle tre componenti delle coordinate. Visto che questi elementi da soli sono sufficienti a descrivere il comportamento di un'onda luminosa, se ne deduce che non è ideale ridefinirli come due 4-vettori aventi un nuovo elemento temporale che era per qualche motivo celato nella descrizione classica del fenomeno, quanto inserirli in un nuovo oggetto adatto ad uno spazio 4-dimensionale che mantenga lo stesso numero di gradi di libertà. Da una rapida osservazione appare necessario un oggetto avente 6 elementi indipendenti che trova subito un candidato in un tensore di ordine 2 antisimmetrico. Si definisce allora il tensore elettromagnetico  $F_{\mu\nu}$  che, nel sistema di riferimento dove  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono stati misurati, è:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

quest'ultimo si trasforma facilmente secondo le trasformate di Lorentz. Ora ottenuto questo risulta ovvio voler riscrivere le equazioni di Maxwell differenziali utilizzando il tensore piuttosto che i campi. Per fare ciò introduciamo un nuovo 4-vettore che descriva la presenza di cariche elettriche  $J^\nu = (\rho, \mathbf{J})$ . Si può quindi riscrivere il gradiente di  $\mathbf{E}$  ed il rotore di  $\mathbf{B}$  in un'unica equazione come:

$$F_{,\nu}^{\mu\nu} = -J^\mu \quad (1.22)$$

mentre il gradiente del campo magnetico ed il rotore del campo elettrico si possono scrivere come:

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0 \quad (1.23)$$

È noto che uno scalare sarà invariante per trasformazioni di Lorentz, pertanto si deduce facilmente che la grandezza:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2)$$

sarà una costante.

È stata fatta l'assunzione di avere 6 componenti indipendenti per descrivere il campo elettromagnetico, tuttavia per le varie proprietà del campo, quali la perpendicolarità dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , si possono ridurre le componenti indipendenti da 6

a 4 piuttosto facilmente. Per fare ciò si torna momentaneamente alle equazioni di Maxwell in fisica classica e si va a ridefinire i campi elettrici e magnetici tramite due nuovi oggetti: il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  ed il potenziale scalare  $\phi$ . Possiamo riscrivere il campo magnetico partendo da una semplice considerazione: la divergenza di un rotore è sempre nulla. Considerato anche il fatto che il campo elettrico può ottenersi come gradiente del potenziale si scrive:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Avendo ora solo componenti indipendenti possiamo descrivere il campo elettromagnetico unicamente tramite un 4-vettore  $A^\nu = (\phi, \mathbf{A})^3$  dal quale si può facilmente ricavare il tensore elettromagnetico:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

## Spazio Tempo Curvo

Fin'ora si è considerato uno spazio tempo piatto in accordo con la relatività ristretta, è necessario tuttavia ampliare i concetti trattati per fare in modo che essi siano validi anche nel campo della Relatività Generale. Ciò è assai meno laborioso di quanto non possa sembrare, per il principio di equivalenza se una legge fisica è valida nella relatività ristretta, per passare alla sua equivalente generale, è sufficiente sostituire le derivate parziali con derivate covarianti. Dato ora il 4-potenziale, dal quale si ricostruisce l'elettrodinamica in Relatività Generale, si va a calcolare il tensore elettromagnetico come:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} + A_\lambda (\Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

si nota che la relazione fra tensore elettromagnetico e quadripotenziale resta invariata nel passaggio da spazio tempo piatto ad uno curvo. Infatti poichè supponiamo di essere su di una varietà Riemanniana cosa che, in campo fisico, è sempre vera, possiamo imporre la connessione di Levi-Civita e pertanto ottenere una torsione nulla.

Continuando questo è possibile generalizzare le equazioni di Maxwell:

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = -J^\mu \qquad F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\mu\lambda;\nu} + F_{\lambda\nu;\mu} = 0$$

in questo caso non si notano particolari proprietà o possibili semplificazioni che derivano dal passaggio ad uno spazio tempo curvo se non la conservazione della carica elettrica, che in relatività ristretta si deduce facilmente dalla (1.22), resta valida.

Si può fare un'ultima considerazione riguardo l'elettromagnetismo: essendo quest'ultimo un campo deve avere una qualche influenza sulla struttura della varietà

---

<sup>3</sup>In realtà è possibile ridurre ulteriormente il numero di componenti indipendenti a due, tuttavia volendo qui fare una rapida esposizione della materia creando un formalismo adatto alla relatività ristretta ci si limita a descrivere il 4-vettore  $A^\nu$  dato che, pur limitando i gradi di libertà non si riesce a creare un nuovo oggetto che funzioni meglio di quest'ultimo.

e, in particolare, sul tensore energia impulso. In presenza di un campo elettromagnetico infatti non si può ovviamente fare l'assunzione di vuoto, si introduce perciò la densità di Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.24)$$

che, inserita nell'equazione (1.11) dà come risultato il tensore energia impulso di un campo elettromagnetico:

$$T_{\mu\nu}^{\text{EM}} = \frac{1}{4\pi} \left( -F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) \quad (1.25)$$

# Capitolo 2

## Metrica di Reissner-Nordström

La descrizione di qualsiasi sorgente stazionaria richiede 3 grandezze: la massa  $M$ , carica elettrica  $Q$ , e momento angolare intrinseco  $J$ . Questa considerazione si riacava quasi naturalmente da tre teoremi;

- Un buco nero stazionario deve avere orizzonte a topologia sferica e può avere momento angolare nullo o essere simmetrico rispetto ad un asse;
- Il campo esterno di un buco nero statico con orizzonte sferico è determinato unicamente dalla sua massa  $M$  e carica  $Q$ ;
- Tutti i buchi neri di carica nulla, stazionari e a simmetria assiale con orizzonte a topologia sferica si dividono in famiglie disgiunte non deformabili. In ogni famiglia il campo esterno è determinato dalla massa  $M$  e dal momento angolare  $J$ ;

Si ottengono quindi 4 possibili soluzioni: *Schwarzschild*, *Reissner-Nordström*, *Kerr* e *Kerr-Newmann*.

Si presenta ora il caso più semplice fra quelli con carica non nulla: una sorgente sferica elettricamente carica che viene descritta dalla metrica di Reissner-Nordström; ora un oggetto carico tanto massivo da creare un campo gravitazionale non trascurabile e, in particolare, tanto denso da formare un buco nero sembra quasi paradossale. Tuttavia nulla sembra indicare che quest'ultimo sia completamente impossibile ma soprattutto, anche se per ora appare solo un'interessante esercizio teorico, dallo studio di questi oggetti si deducono molte interessanti proprietà dello spazio-tempo.

### 2.1 Derivazione della Metrica

Avendo uno spazio tempo a simmetria sferica e asintoticamente piatto, si definisce quest'ultimo come varietà differenziale definita dal prodotto cartesiano  $U(2) \times S(2)$ ; le coordinate  $x^3$  e  $x^4$  saranno le componenti di  $S(2)$  le indicheremo come  $(\theta, \varphi)$ . Su  $U(2)$  si possono definire  $(u, v)$  tali che  $u = \text{const}$  o  $v = \text{const}$  siano traiettorie di tipo luce da cui ottenere una metrica generica:

$$ds^2 = -4f dudv + e^{2\mu_3} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (2.1)$$

dove sia  $f$  che  $\mu_3$  sono funzioni di  $u$  e  $v$ . Ora è possibile dimostrare che quest'ultima si deriva dalla formulazione generale (1.20) ponendo:

$$u = \frac{1}{2}(ct + x^2) \qquad v = \frac{1}{2}(ct - x^2)$$

Nel caso ci sia unicamente una sorgente massiva e priva di carica il tensore energia impulso risulta essere nullo al di fuori di essa e, perciò, tramite la (1.17) si vede che anche il tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$  risulta nullo, tuttavia la presenza di un campo elettromagnetico rende tale considerazione non valida. Bisogna allora definire il tensore di Ricci:

$$R_{\mu\nu} = -2 \left( \eta^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\iota\kappa} F^{\iota\kappa} \right) \quad (2.2)$$

dove  $F_{\mu\nu}$  sono le componenti del tensore elettromagnetico determinate tramite le equazioni di Maxwell e  $\eta$  è la metrica di Minkowski del sistema ortonormale di coordinate.

## Soluzioni delle equazioni di Maxwell

Data la simmetria sferica dello spazio tempo risulta ovvio che le componenti assiali ( $F_{01}$ ,  $F_{12}$ ,  $F_{13}$ ) sono nulle, e si ottengono le componenti radiali tramite le equazioni differenziali (scrivendo per semplicità la funzione  $f$  come  $e^{2\mu_2}$ ):

$$\begin{aligned} (e^{2\mu_3} F_{02})_{,2} + e^{\mu_3+\mu_2} F_{03} \cot \theta &= 0 \\ (e^{2\mu_3} F_{02})_{,0} + e^{\mu_3+\mu_2} F_{23} \cot \theta &= 0 \\ (e^{\mu_3+\mu_2} F_{23})_{,2} - (e^{\mu_3+\mu_2} F_{03})_{,0} &= 0 \\ (e^{\mu_3+\mu_2} F_{23})_{,0} - (e^{\mu_3+\mu_2} F_{03})_{,2} &= 0 \end{aligned}$$

Visto che le componenti del tensore  $F$  non possono dipendere dall'angolo  $\theta$  risulta che  $F_{03}$  e  $F_{23}$  sono nulle, da cui:

$$(e^{2\mu_3} F_{02})_{,2} = (e^{2\mu_3} F_{02})_{,0} = 0$$

Si ottiene quindi che l'unica componente indipendente del tensore elettromagnetico non nulla sarà  $F_{02}$  che si ottiene essere:

$$F_{02} = -Qe^{\mu_3}$$

dove  $Q$  è una costante che è possibile interpretare come la carica della sorgente.

## Soluzioni delle Equazioni di Einstein

Inserendo i valori del tensore elettromagnetico trovati sopra nella (2.2) si vede che i valori indipendenti non nulli del tensore di Ricci sono:

$$R_{00} = R_{11} = -R_{22} = R_{33} = Q^2 e^{-4\mu_3}$$

Riscrivendo le componenti del tensore di Ricci come combinazioni del tensore di Reimann si ottiene un sistema di 4 equazioni differenziali; e, definendo  $Z = e^{\mu_3}$  diventano:

$$fZ_{,u,u} - Z_{,u}f_{,u} = 0 \quad (2.3)$$

$$fZ_{,v,v} - Z_{,v}f_{,v} = 0 \quad (2.4)$$

$$f \left( 1 - \frac{Q^2}{Z^2} \right) + ZZ_{,u,v} + Z_{,u}Z_{,v} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_{,u}}{f} \right) + \frac{1}{Z} Z_{,u,v} = -\frac{Q^2}{Z^4} f \quad (2.6)$$

Dalla (2.3) e dalla (2.4) si deduce  $f = A(u)Z_{,v} = B(v)$  dove  $A(u)$  e  $B(v)$  sono funzioni unicamente delle variabili indicate. Sostituendo questo risultato nella (2.5) si ottiene una coppia di equazioni:

$$Z_{,u} = -A(u) \left( 1 + \frac{Q^2}{Z^2} \right) + \frac{F(u)}{Z} \quad Z_{,v} = -B(v) \left( 1 + \frac{Q^2}{Z^2} \right) + \frac{G(v)}{Z} \quad (2.7)$$

dove  $F$  e  $G$  sono funzioni arbitrarie. Combinando queste ultime si può ottenere il prodotto delle derivate di  $Z$  rispetto alle due variabili  $u$  e  $v$ :

$$Z_{,u,v} = -f \left( 1 + \frac{Q^2}{Z^2} \right) + \frac{F(u)Z_{,v}}{Z} = -f \left( 1 + \frac{Q^2}{Z^2} \right) + \frac{G(v)Z_{,u}}{Z}$$

da cui si può dedurre:

$$\frac{Z_{,u}}{Z_{,v}} = \frac{A(u)}{B(v)} = \frac{F(u)}{G(v)}$$

e in particolare che il rapporto fra le funzioni  $A$  e  $F$  e quello fra  $B$  e  $G$  sono uguali e, pertanto, equivalenti ad una costante  $2M$ . Applicando ciò nella (2.7) e nella definizione di  $f$  si ottiene:

$$f = -A(u)B(v) \left( 1 - \frac{2M}{Z} + \frac{Q^2}{Z^2} \right) \quad (2.8)$$

Arriviti a questo punto risulta comodo introdurre le coordinate di Boyer-Lindquist  $t, r, \theta, \varphi$  e, confrontando la metrica ottenuta con quella generale per sorgenti sferiche e stazionarie (1.19), si deduce che la funzione  $Z$  è identificabile con la distanza di luminosità  $r$ . Posto:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2$$

è possibile, andando a studiare i risultati ottenuti precedentemente per  $Z$  definire :

$$dr = -\frac{\Delta}{r^2} [A(u)du + B(v)dv] \quad (2.9)$$

e, tramite la (2.8), possiamo scrivere la metrica come:

$$ds^2 = -4\frac{\Delta}{r^2} A(u)B(v)dudv - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Ora si nota che, nel caso  $M^2 > Q^2$ , la  $\Delta$  si annulla per due valori distinti  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$  (che sono entrambi positivi) e nell'intervallo  $[r_-, r_+]$  cambia segno. Considerando per ora solo questo caso, si può dividere lo spazio tempo in tre intervalli: il primo fra lo 0 e  $r_-$ , il secondo solo fra  $r_-$  ed  $r_+$  ed il terzo da  $r_+$  in poi. In questi intervalli le funzioni incognite assumeranno valori differenti; nel primo e nel terzo intervallo si pone:

$$A(u) = -B(v) = \frac{1}{2} \quad \text{con} \quad dt = \frac{1}{2}(du + dv)$$

mentre nel secondo:

$$A(u) = B(v) = -\frac{1}{2} \quad \text{con} \quad dt = \frac{1}{2}(du - dv)$$

In questo modo si ottiene (nelle coordinate di Boyer-Lindquist) una formula valida in tutti e tre gli intervalli dello spazio tempo descritti sopra detta metrica di Reissner-Nordström:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.10)$$

## 2.2 Geodesiche

Abbiamo visto che, nella condizione  $M > |Q|$  lo spazio tempo si divide in tre regioni distinte; per comprendere meglio questa divisione e la natura dei due orizzonti  $r_+$  ed  $r_-$  (che viene detto *Orizzonte di Cauchy*) bisogna studiare le geodesiche prestando particolare attenzione al passaggio da una regione all'altra (quando possibile).

Sappiamo che le equazioni del moto possono ricavarsi tramite le equazioni di Eulero-Lagrange, in un sistema il cui elemento di linea è definito dalla (2.10) è possibile scrivere la Lagrangiana di una particella di prova a massa unitaria e carica nulla<sup>1</sup> come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \dot{t}^2 - \frac{r^2}{r^2 - 2Mr + Q^2} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right] \quad (2.11)$$

dove il punto indica la differenziazione rispetto al tempo proprio  $\tau$ . Andando a calcolare l'Hamiltoniana del sistema si vede che questa coincide con la Lagrangiana e, pertanto, non si ha una componente potenziale ma solo cinetica, inoltre non avendo dipendenza diretta dal tempo proprio sono entrambe costanti e, riparametrizzando  $\tau$ , si possono porre uguale a +1 per traiettorie di tipo tempo mentre per le traiettorie di tipo luce saranno sempre nullo.

Applicando ora le equazioni di Eulero-Lagrange si vanno a cercare gli integrali primi del moto, e non essendo la lagrangiana dipendente direttamente dal tempo o dalla variabile  $\varphi$  i momenti generalizzati di queste due coordinate si conservano si può porre:

$$p_t = \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \dot{t} = E \quad (2.12)$$

$$p_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = L \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup>Il caso di particelle cariche non rientra nello studio delle geodesiche, esso tuttavia verrà trattato in seguito in quanto offre risvolti interessanti sull'energia all'interno di un buco nero



dove  $E$  è l'energia del sistema e  $L$  è il momento angolare orbitale. Andando a studiare l'equazione del moto per la coordinata  $\theta$ :

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) = (r^2 \sin \theta \cos \theta) \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2$$

Si nota che nel caso in cui  $\theta$  sia pari a  $\pi/2$  e la sua derivata sia nulla lo sarà anche la sua derivata seconda. Perciò una traiettoria geodesica sarà descritta su di un piano invariante descritto dall'uguaglianza  $\theta = \pi/2$ . A questo punto sostituendo gli integrali primi del moto ed applicando il vincolo sulla  $\theta$  si può riscrivere la (2.11) come:

$$\mathcal{L} = (E^2 - \dot{r}^2) \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} - \frac{L^2}{r^2}$$

Piuttosto che cercare di risolvere l'equazione del moto di  $r$  risulta più comodo porre la Lagrangiana del sistema uguale a 0 o 1 a seconda della traiettoria e, come si tende a fare nel caso Newtoniano definire  $r$  in funzione di  $\varphi$  piuttosto che del tempo proprio e utilizzare  $u = r^{-1}$  come variabile indipendente.

## Geodesiche di tipo Luce

Si ottengono come equazioni:

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + L^2 \frac{\Delta}{r^4} = E^2 \quad \frac{dt}{d\tau} = E \frac{r^2}{\Delta} \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad (2.14)$$

e

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = -Q^2 u^4 + 2Mu^3 - u^2 + \frac{E^2}{L^2} = f(u) \quad (2.15)$$

si chiama il parametro  $L/E$  parametro d'impatto  $D$ .

Prima di trattare il caso più generale risulta comodo osservare cosa accade per geodesiche radiali, ovvero aventi  $L = 0$ . Ignorando per ovvi motivi la (2.15) dalle equazioni (2.14) si ricava:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{\Delta}{r^2}$$

che ha come soluzione:

$$t = \pm r \pm \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln |r - r_+| \mp \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln |r - r_-| + \text{const}$$

Ora si notano alcune cose: la coordinata  $t$  tende a  $+\infty$  quando ci si avvicina ad  $r_+$  e, nella fascia fra le due singolarità passerà da  $+\infty$  a  $-\infty$  tendendo a  $r_-$  ed infine ad un valore finito avvicinandosi alla singolarità; poiché il tempo proprio cala linearmente avendo un rapporto  $E$  è possibile per un raggio di luce raggiungere la singolarità in un tempo proprio finito e, come si vedrà in seguito, questo è l'unico in cui si riesce a raggiungere il punto  $r = 0$ .

Considerando l'equazione (2.15) sopra come una funzione di  $u$  si cercano le radici che la annullano. Si notano esistere sempre almeno due radici reali, una

minore di zero (e quindi senza alcun interesse fisico) ed un'altra positiva che si vede essere  $r < r_-$ , le altre due possono essere o entrambe reali o complesse coniugate.

Esistono due possibili traiettorie: quelle di primo tipo, che si trovano interamente al di fuori degli orizzonti degli eventi e, partendo dall'infinito, ritorna all'infinito dopo essere passata per il perielio; quelle di secondo tipo che procedono verso la singolarità in  $r = 0$  ed hanno due punti di equilibrio, una fuori dall'orizzonte degli eventi e l'altra all'interno dell'orizzonte di Cauchy. Determiniamo il parametro  $D$  affinché la  $f(u) = 0$  ammetta doppia soluzioni, tramite quest'ultima ed imponendo la sua derivata nulla. Si vede che la:

$$f'(u) = -2u(1 - 3Mu + 2Q^2u^2) = 0$$

ha, oltre alla soluzione  $u = 0$  che viene tralasciata, la coppia di soluzioni:

$$u_{\pm} = \frac{3M}{4Q^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right] \quad (2.16)$$

per  $u_+$  la funzione  $f$  ha un massimo mentre, per  $u_-$ , si ha un minimo che dovrà coincidere con la doppia soluzione il cui corrispondente valore  $r$ , per il quale si avrà un'orbita circolare instabile:

$$u_-^{-1} = r_c = \frac{3M}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right)$$

sostituendo quest'ultima nella (2.15) si ottiene il valore del parametro  $D_c$  per cui la doppia soluzione  $r_c$  deriva da  $f = 0$ , e si trova  $D_c = r_c^2/\sqrt{\Delta_c}$  dove  $\Delta_c$  è la delta calcolata per la  $r_c$ . Si ottiene così:

$$\varphi = \pm \int [-Q^2u^2 + 2(M - Q^2u_c)u + u_c(M - Q^2u_c)]^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{u - u_c} \quad (2.17)$$

operando la sostituzione  $\xi = (u - u_c)^{-1}$  si riduce questo integrale nella assai più semplice forma:

$$\varphi = \pm \int \frac{d\xi}{(-Q^2 + b\xi + c\xi^2)^{1/2}} \quad (2.18)$$

dove

$$b = 2(M - 2Q^2u_c) \quad c = u_c(3M - 4Q^2u_c)$$

A seconda del segno di  $c$  si ottengono due possibili soluzioni:

$$\mp \varphi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left( 2\sqrt{c(-Q^2 + b\xi + c\xi^2)} + 2c\xi + b \right) & (c > 0) \\ -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \left( \frac{2c\xi + b}{\sqrt{4Q^2c + b^2}} \right) & (c < 0) \end{cases} \quad (2.19)$$

Quest'ultima comprende entrambi i tipi di traiettoria, ciò che le differenzia è l'intervallo su cui sono definite; le traiettorie di primo tipo esistono nell'intervallo:  $\infty > r > r_c$ , e quindi  $-u_c^{-1} > \xi > -\infty$ . Quelle di secondo tipo esistono invece nell'intervallo  $r_c > r > r_{\min}$  dove  $r_{\min}$  è la soluzione positiva di:

$$u_c(M - Q^2u_c)r^2 + 2(M - Q^2u_c)r - Q^2 = 0$$

Entrambe le orbite raggiungono asintoticamente l'orbita instabile  $r_c$  da direzioni opposte ruotandole attorno un numero infinito di volte.

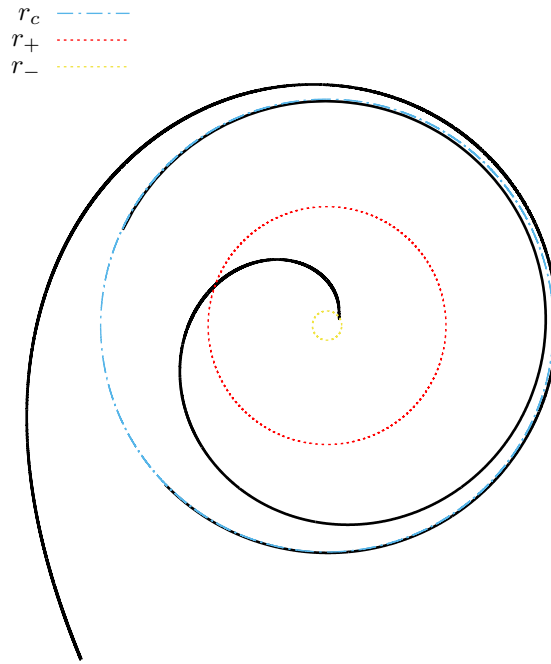


Figura 2.1: Geodesica di tipo luce con parametro d'impatto  $D = D_c$ ,  $M = 0.8$ ,  $Q = 0.5$ . A dispetto delle apparenze la traiettoria supera l'orizzonte di Cauchy e si ferma in  $r_{\min}$ .

## Geodesiche di Tipo Tempo

Considerando prima il caso delle traiettorie di tipo tempo le equazioni che governano le geodesiche saranno:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2 \quad \frac{dt}{d\tau} = E \frac{r^2}{\Delta} \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L^2}{r^2} \quad (2.20)$$

e

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -Q^2 u^4 + 2Mu^3 - u^2 \left(1 + \frac{Q^2}{L^2}\right) + \frac{2M}{L^2} u - \frac{1 - E^2}{L^2} \quad (2.21)$$

Come nel caso delle traiettorie di tipo luce prima di studiare il caso più generale si osserva il caso radiale e, tramite la seguente equazione:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} = E^2$$

si nota che nella regione compresa fra la singolarità e l'orizzonte di Cauchy quest'ultima dovrà annullarsi e si conclude che una traiettoria avrà un punto di svolta e quindi è impossibile raggiungere la singolarità.

Si studia ora la situazione per cui sono presenti orbite circolari stabili o instabili, le condizioni per cui queste si verificano sono l'annullarsi della  $f(u)$  e della sua derivata:

$$f'(u) = -4Q^2 u^3 + 6MQ^2 - 2 \left(1 + \frac{Q^2}{L^2}\right) u + \frac{2M}{L} = 0$$

Si ricava che per un'orbita circolare con raggio  $r_c$  l'energia ed il momento angolare saranno:

$$E^2 = \frac{(1 - 2Mu_c + Q^2u_c^2)^2}{1 - 3Mu_c + 2Q^2u_c^2} \quad L^2 = \frac{M - Q^2u_c}{u_c(1 - 3Mu_c + 2Q^2u_c^2)} \quad (2.22)$$

affinché queste ultime siano valide il denominatore  $1 - 3Mu_c + 2Q^2u_c^2$  deve essere maggiore di zero e, confrontandolo con il caso delle geodesiche di tipo luce se ne deduce che il raggio minimo per un'orbita circolare è equivalente a quello dell'orbita instabile di un fotone. Si trasforma ora la (2.21) in

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = (u - u_c)^2 \left[ -Q^2u^2 + 2 \left( M - Q^2u_c - \frac{M}{L^2}u_c^2 \right) u_c \right] \quad (2.23)$$

e, reintroducendo la variabile  $\xi$  e trasformando quest'ultima in un'integrale si riottiene la soluzione (2.19) dove però

$$c = u_c \left( 3M - 4Q^2u_c - \frac{M^2}{L^2}u_c \right)$$

Da questa si possono trovare orbite stabili di secondo tipo o orbite instabili di entrambi i tipi (se  $c < 0$ ).

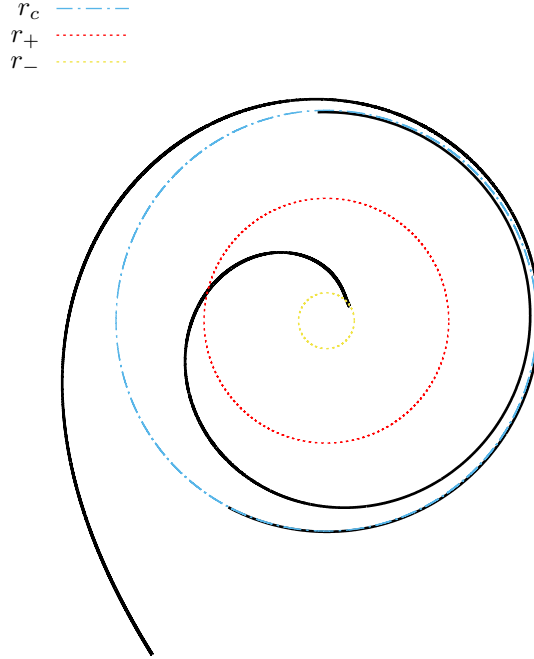


Figura 2.2: Geodesica di tipo tempo con  $M = 0.9$ ,  $Q = 0.7$ .

Il raggio minore per un'orbita circolare stabile si ottiene in un punto di flesso di  $f$ , per cui oltre all'annullarsi di  $f$  e  $f'$  bisogna imporre anche l'annullarsi della sua derivata seconda:

$$f''(u) = 4Q^4u^3 - 9MQ^2u^2 + 6M^2u - M = 0$$

(il fattore  $L$  è stato eliminato tramite la (2.22)).

## 2.3 Orizzonti degli Eventi

Lo studio, seppur parziale, delle geodesiche offre una conoscenza più approfondita dello spazio tempo. Risulta immediato che, al di fuori di  $r_+$  si ha una configurazione molto simile a quella dello spazio tempo di Schwarzschild, al punto che, al di là del campo elettromagnetico generato dalla sorgente un osservatore esterno farebbe difficoltà a distinguere le due situazioni se abbastanza distante dalla sorgente. Inoltre qualsiasi oggetto passi attraverso  $r_+$  è per sempre perso per un osservatore esterno e, qualsiasi radiazione emessa da lui subisce un red-shift di intensità infinita, come si evince facilmente dalla (2.14), se emessa nel secondo intervallo. Questo pertanto ha lo stesso comportamento della superficie  $r = 2M$  nella metrica di Schwarzschild che come lui sarà un orizzonte degli eventi.

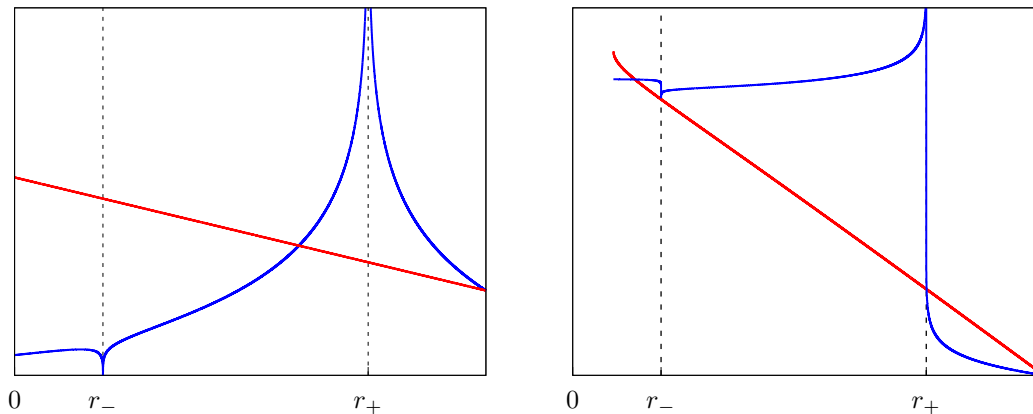


Figura 2.3: Grafici dell'andamento del tempo proprio (in rosso) e la coordinata  $t$  (in blu) per traiettorie radiali. Sulla sinistra è mostrata una traiettoria di tipo Luce mentre sulla destra una di tipo Tempo.

Ora un osservatore che si trova nella regione compresa fra  $r_+$  ed  $r_-$  non può ovviamente tornare all'esterno, seguendo una traiettoria di tipo tempo attraversare la superficie  $r_-$ , nel tragitto questo osserverà in un flash la storia dell'intero universo esterno, questo avviene perché qualsiasi radiazione verrà infinitamente blu-shiftata (come si nota dalla (2.14)), l'osservatore arriva in una regione dello spazio tempo ottenuta tramite una trasformazione di parità delle coordinate  $u, v$  e, in questa maniera, il futuro dell'osservatore non è più determinato dal suo passato. Alternativamente può oltrepassare l'orizzonte  $r_-$ , evitare la singolarità in  $r = 0$  ed uscire in un nuovo universo asintoticamente piatto dove le sue condizioni iniziali non determinano più il suo futuro. Su ha qui un potenziale problema, tale processo implicherebbe una possibile natura non deterministica dello spazio tempo. Non è ancora noto se ciò sia effettivamente possibile, stando all'ipotesi di Censura Cosmica forte di Penrose lo spazio tempo ha natura deterministica e qualsiasi soluzione che indichi il contrario è da considerarsi perciò impossibile; non si ha ad oggi una dimostrazione che la confermi.<sup>2</sup> Se tale ipotesi fosse esatta lo studio degli orizzonti

<sup>2</sup>I buchi neri di Reissner-Nordström hanno in realtà un collegamento molto forte con la

di Cauchy potrebbe dimostrarsi vano giacché diventerebbero oggetti impossibili da crearsi.

## Mettrica estremante e Singolarità nuda

Si è considerato fin'ora unicamente il caso  $M > |Q|$  da cui si ottiene una coppia di orizzonti degli eventi. In questa maniera tuttavia si lasciano fuori svariate possibilità che meritano per lo meno un accenno; si prende perciò una sorgente puntiforme di massa fissata  $M$  e si va a modificare la quantità di carica elettrica e se ne studia il comportamento.

Si prende anzitutto il caso più ovvio, ovvero quello con carica nulla; come ci si potrebbe aspettare la (2.10) si riduce alla metrica di Schwartzchild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.24)$$

ciò diviene una sorta di conferma della validità dei calcoli compiuti fin'ora e ne deduciamo che lo spazio tempo di Reissner-Nordström sarà una generalizzazione di quello di Schwartzchild.

Facendo crescere la quantità di carica all'interno dell'oggetto l'ampiezza dell'intervallo  $r_- < r < r_+$  diventa sempre minore finché, quando  $M = |Q|$  la regione di spazio-tempo intermedia collassa e i due orizzonti coincidono. Questo caso si dice *Mettrica Estremante di Reissner-Nordström*. Si potrebbe essere tentati di ricondurre anche questo caso ad una metrica di Schwartzchild avente un unico orizzonte che, a causa dell'interazione elettromagnetica viene percepita solo la metà della massa della sorgente. Questo non è assolutamente vero: basta infatti fare una rapida sostituzione nella metrica nota per accorgersi che tale assunzione risulta falsa. Lo spazio tempo esterno è, come nel caso  $M > |Q|$ , simile a quello di Schwartzchild ma, attraversato l'orizzonte degli eventi non si ha alcuna inversione delle coordinate temporali e radiali.

L'aggettivo estremante assegnato alla metrica non è casuale, continuando infatti ad aumentare la carica elettrica si arriverà al punto in cui questa sarà maggiore della massa. Si nota subito che in queste condizioni l'uguaglianza  $\Delta = 0$  non ha soluzioni reali e, in particolare, è sempre positivo; pertanto in queste condizioni non si crea alcun orizzonte degli eventi ed quindi possibile osservare direttamente la singolarità anche trovandosi all'infinito. Questa situazione (che si noti bene è completamente assente nel caso di spazio tempo sferico privo di carica elettrica) si dice *singolarità nuda*. Vi sono parecchi dibattiti sulla possibilità di questa configurazione. È stato ipotizzato da Penrose che sia impossibile per un osservatore all'infinito vedere una singolarità dello spazio tempo non schermata da un orizzonte degli eventi (ipotesi di Censura Cosmica di Penrose debole), cosa ovviamente violata dalla presenza di una singolarità nuda. Non vi è tuttavia una dimostrazione di tale affermazione [14], che ha tra l'altro vari detrattori, e resta quindi uno dei grandi problemi aperti della Relatività Generale.

---

Censura Cosmica di Penrose. Uno degli indizi a suo favore, e in effetti uno dei fenomeni che ha portato Penrose a formare questa congettura, è l'instabilità dell'orizzonte di Cauchy che viene discussa nella sezione 2.7

## 2.4 Estrazione di Energia

Particelle con carica non nulla non possono, in uno spazio tempo di Reissner-Nordström, descrivere una geodesica. L'unica componente del 4-potenziale vettore non nulla è  $A_0 = \frac{Q}{r}$  e le equazioni del moto si otterranno dalla lagrangiana:

$$2\mathcal{L} = \frac{\Delta}{r^2} \dot{t}^2 - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + 2 \frac{Qq}{r} \dot{t} \quad (2.25)$$

dove  $q$  è il rapporto fra la carica e la massa<sup>3</sup> della particella di prova. Le equazioni del moto si ricavano facilmente e, come nel caso delle geodesiche sono presenti due integrali primi del moto: il momento angolare descritto dalla (2.13) e l'energia:

$$E = \frac{\Delta}{r^2} \dot{t} + \frac{qQ}{r}$$

e la (2.21) diventa:

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = -Q^2 u^4 + 2Mu^3 - u^2 \left( 1 + \frac{Q^2(1-q^2)}{L^2} \right) + \frac{2(M-qQE)}{L^2} u - \frac{1-E^2}{L^2} \quad (2.26)$$

si nota che nel caso in cui la carica della particella e della sorgente abbiano segno opposto si hanno stati ad energia negativa nella regione compresa fra l'orizzonte degli eventi esterno e  $r = M + (M^2 - Q^2(1-q^2))^{1/2}$  [4], questo fatto indica che è possibile l'estrazione di energia da un buco nero carico. Un esempio di questo processo può essere questo: una particella proviene dall'infinito e, arrivata all'orizzonte  $r_+$  si divide in due particelle, la prima (avente carica opposta a quella del buco nero) supera l'orizzonte degli eventi, l'altra ritorna all'infinito. Si vede che quest'ultima ha energia maggiore della particella iniziale poiché con la variazione di carica  $Q$  il buco nero ha perso energia elettromagnetica.

## 2.5 Struttura Interna

Nelle considerazioni fatte fin'ora ci si è posti come osservatori esterni con una sorgente puntiforme, dando per scontata la sua esistenza e stabilità. Data tuttavia l'assenza di dati sperimentali riguardo corpi celesti con carica elettrica non nulla, o per lo meno il cui contributo sia in qualche modo significativo, è necessario controllare se una tale soluzione possa essere stabile.

### Metrica Interna

Considerato un oggetto a simmetria sferica di carica  $Q$ , massa  $M$  che si estende per un raggio  $a$  non è possibile descriverne la struttura interna utilizzando la metrica (2.10), in questo caso infatti l'assunzione di avere il tensore di energia impulso dipendente solo dal campo elettromagnetico non è sicuramente valida, la presenza

---

<sup>3</sup>Poiché non si conoscono particelle di massa nulla con carica elettrica si considerano unicamente le traiettorie di tipo tempo

di materia rende necessario andare a modificare il tensore  $e$ , di conseguenza, trovare una soluzione completamente nuova alle equazioni di Einstein<sup>4</sup>.

È stato dimostrato da Vaidya e Tikekar [19] che la metrica interna di una sorgente sferica ha la forma:

$$ds^2 = \phi^2 dt^2 - \left(1 - \frac{kr^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.27)$$

dove  $R$  e  $k$  costanti che determinano la curvatura con  $k < 1$ . Considerata la sorgente come un fluido perfetto carico si devono risolvere le equazioni di Maxwell e di Einstein per determinare le costanti  $R$ ,  $k$  e la funzione  $\phi$  che dipende solo dalla coordinata  $r$ . Il tensore energia impulso sarà:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}) - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (2.28)$$

inoltre poichè la soluzione considerata è statica l'unica componente non nulla della 4-velocità sarà quella temporale che si vede essere  $u^t = e^\phi$ . Ora dovendo risolvere le equazioni di Maxwell si ha che la 4-corrente  $J^\mu$  che è collegata alla densità di carica  $\sigma$  tramite la relazione  $J^\mu = \sigma u^\mu$ . Per la simmetria della sorgente si nota che l'unica componente indipendente del 4-tensore elettromagnetico non nulla è  $F_{01}$ . Da questo si ricava il campo elettrico  $-F_{10}F^{10} = E^2$  e, dall'uguaglianza  $E = Q/r^2$ , si ottiene la carica all'interno di una sfera di raggio  $r$ :

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \sigma r'^2 \left(\frac{1 - \frac{kr'^2}{R^2}}{1 - \frac{r'^2}{R^2}}\right)^{1/2} dr' \quad (2.29)$$

dalle equazioni di Einstein-Maxwell si ottiene invece il campo:

$$E^2 = \frac{\alpha^2 r^2}{R^4} \left(1 - \frac{kr^2}{R^2}\right)^2$$

dove  $\alpha$  è una costante.

Si possono ridurre le equazioni di Einstein-Maxwell nella forma:

$$(1 - z^2)\phi''(z) + z\phi' + (1 + \lambda)\phi = 0$$

dove  $z^2 = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$  e  $\lambda = -k + 2\frac{\alpha^2}{k}$ . quest'equazione al secondo ordine ha come soluzione nota:

$$\phi = AT_{n+1}^{-3/2}(z) + B(1 - z^2)^{3/2}T_{n-2}^{1.5}(z) \quad (2.30)$$

dove  $n = \sqrt{2 + \lambda}$ ,  $T_b^a$  è una funzione di Gegenbauer e  $A$  e  $B$  sono costanti da determinare.

Si ricavano le costanti  $A$  e  $B$  imponendo che la metrica interna coincida in  $r = a$  con la metrica esterna. A differenza della metrica esterna di Reissner-Nordström è descritta unicamente dalla (2.21) non è possibile trovare un'unica soluzione per la metrica interna, a seconda della natura della sorgente  $k$  e  $\alpha$  assumono differenti valori[18]. In particolare le assunzioni fatte qui limitano la casistica solo ad alcune soluzioni; una descrizione più completa delle varie possibilità è stata fatta da Ivanov [7]

<sup>4</sup>La metrica Reissner-Nordström resta valida all'esterno della sorgente.



## Stabilità di una Stella Carica

Ricavata la metrica interna si possono andare a studiare le possibili configurazioni di una stella con carica elettrica, si riscrive anzitutto la densità di carica elettrica  $\epsilon$  in funzione della densità di massa  $\rho$  come:

$$\epsilon = f \times \rho \quad (2.31)$$

dove  $f$  sarà il rapporto fra carica e massa; si è fatta l'assunzione di avere distribuzione di carica e massa uniforme. Si vanno ora a studiare le equazioni politropiche di stato con la presenza di carica elettrica, dal potenziale elettrico all'interno della stella e dalle equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificate si ricava l'equazione:

$$P = \kappa \rho^{n+1/n} \quad (2.32)$$

dove il fattore  $n$  si dice indice politropico che, per stelle relativistiche, si vede essere  $\frac{3}{2}$  e  $\kappa$  è una costante. Si ha così un'equazione che va ad analizzare le possibili modifiche del fattore  $f$ , andando a studiare il rapporto fra particelle cariche e barioni a carica neutra si vede che inevitabilmente il numero di particelle cariche dovrà essere più piccolo di almeno un fattore  $10^{-18}$  rispetto a quello di particelle neutre. Si può pertanto fare un'approssimazione e vedere che la presenza di carica non porta all'atto pratico grandi contributi per le interazioni nucleari o per le equazioni di stato [15], e possono quindi essere approssimate ad un caso di equilibrio chimico e carica nulla. Andando ad utilizzare modelli più complessi è possibile trovare dei valori limite per il rapporto carica massa. Nel caso in cui  $f < 0.087$  il contributo elettromagnetico è essenzialmente trascurabile e pertanto la struttura interna della stella non varia da un caso a massa equivalente ma massa nulla. Se invece  $f > 0.95$  la stabilità del corpo celeste non è più garantita e l'attrazione Coulombiana non riesce più a mantenere compatta la stella portando ad una fuga di particelle cariche. Pertanto nell'ipotesi che durante il collasso gravitazionale la carica sia conservata o, per lo meno, non vada completamente persa, la possibilità di avere buchi neri con carica elettrica derivanti dal collasso di una stella non appare una pura speculazione senza basi teoriche.

## 2.6 Perturbazioni

Per avere una prospettiva più completa sulla natura di un buco nero di Reissner-Nordström si può studiare il comportamento che quest'ultimo avrebbe quando sottoposto a perturbazioni (facilmente scomponibili in onde) dello spazio tempo.

### Perturbazioni Metriche

Studiando le perturbazioni di un sistema sferico aventi dipendenza dal tempo  $e^{i\sigma t}$ , è sempre possibile, senza perdita di generalità, limitarsi a situazioni a simmetria assiale; infatti misurando una perturbazione in un punto  $(\theta, \varphi)$  è sempre possibile passare ad un altro sistema di riferimento  $(\theta', \varphi')$  assegnandogli un angolo  $\gamma$  tale che:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi' - \varphi)$$

Data la natura lineare della perturbazione si può fare una interessante considerazione, una perturbazione simmetrica rispetto ad un asse alla quale viene applicata la trasformazione sopra verrà suddivisa in differenti perturbazioni non simmetriche rispetto ad un asse. All'atto pratico le equazioni governanti le perturbazioni si possono separare tramite le quattro variabili, ignorando la dipendenza da  $r$  e  $t$  si può immaginare la dipendenza delle onde simmetriche dalle funzioni di Legendre  $P_l(\cos \theta)$ . In particolare applicando la trasformazione sopra ad un'onda si può scrivere:

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta') e^{-im\varphi'} \quad (2.33)$$

dove  $l$  sarà l'ordine dell'onda incidente.

Si prende allora una metrica generale non statica simmetrica rispetto ad un asse:

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt - q_2 dx^2 - q_3 dx^3)^2 - e^{2\eta_2}(dx^2)^2 - e^{2\eta_3}(dx^3)^2 \quad (2.34)$$

È necessario in questa situazione risolvere di nuovo le equazioni di Maxwell e di Einstein per questa situazione non statica dello spazio tempo; cercando per prime soluzioni del tensore elettromagnetico si hanno due sistemi di equazioni differenziali. Il primo sistema (quello che si ottiene da  $F_{;\mu}^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$ ) è composto da quantità (o prodotti di quantità) che, a seguito dell'inversione della coordinata  $\varphi$ , cambiano di segno mentre nel secondo sistema le componenti rimangono invariate a seguito della trasformazione. Queste componenti si possono interpretare come polari ed assiali rispettivamente. Definendo  $x^2$  e  $x^3$  come componenti ortonormali nel caso di simmetria sferica si ottengono nel primo sistema:

$$(re^\nu F_{01} \sin \theta)_{,r} + re^{-\nu} F_{12,0} \sin \theta = 0 \quad (2.35)$$

$$re^\nu (F_{01} \sin \theta)_{,\theta} + r^2 F_{13,0} \sin \theta = 0 \quad (2.36)$$

$$re^\nu F_{01,0} + (re^{-\nu} F_{12})_{,r} + F_{13,\theta} = -Q (\omega_{,2} - q_{2,0}) \sin \theta \quad (2.37)$$

e nel secondo:

$$re^{-\nu} F_{03,0} = (re^\nu F_{23})_{,r} \quad (2.38)$$

$$\delta F_{02,2} - \frac{Q}{r^2} (\delta\psi + \delta\eta_3)_{,0} + \frac{e^\nu}{r \sin \theta} (F_{23} \sin \theta)_{,\theta} = 0 \quad (2.39)$$

$$\left[ \delta F_{02} + \frac{Q}{r^2} (\delta\nu + \delta\eta_2) \right]_{,\theta} + (re^\nu F_{30})_{,r} + re^{-\nu} F_{23,0} = 0 \quad (2.40)$$

dove gli elementi preceduti da  $\delta$  sono le variazioni degli elementi non nulli nella situazione imperturbata. Risulta conveniente infatti *linearizzare* le equazioni differenziali considerando variazioni infinitesime rispetto alla soluzioni nota non perturbata.

Similmente si vanno a calcolare le componenti del tensore di Ricci. A differenza del tensore elettromagnetico ci si può limitare al calcolo delle variazioni delle varie componenti.

$$\delta R_{00} = \delta R_{11} = -\delta R_{22} = \delta R_{33} = -2 \frac{Q}{r^2} \delta F_{02} \quad (2.41)$$

$$\delta R_{01} = -2\frac{Q}{r^2}F_{12} \qquad \delta R_{03} = 2\frac{Q}{r^2}F_{23} \qquad (2.42)$$

$$\delta R_{12} = 2\frac{Q}{r^2}F_{01} \qquad \delta R_{03} = 2\frac{Q}{r^2}F_{03} \qquad (2.43)$$

$$\delta R_{02} = \delta R_{13} = 0 \qquad (2.44)$$

Le componenti del tensore di Ricci che si prestano alla descrizione di una perturbazione assiale sono:  $R_{12}$  e  $R_{13}$ ; scrivendo queste ultime come equazioni differenziali della metrica si ottiene il sistema che governa lo spazio tempo composto da 5 equazioni: le due ottenute tramite il tensore di Ricci:

$$(r^2 e^{2\nu} N_{23} \sin^3 \theta)_{,3} + r^4 N_{02,0} \sin^3 \theta = 4Qr e^\nu F_{01} \sin^2 \theta \qquad (2.45)$$

$$(r^2 e^{2\nu} N_{23} \sin^3 \theta)_{,3} - r^2 N_{03,0} \sin^3 \theta = 0 \qquad (2.46)$$

(dove  $N_{ij} = q_{i,j} - q_{j,i}$  con  $i, j = 0, 2, 3$ ) e le tre equazioni di Maxwell (2.35)-(2.37). Si introducono ora le funzioni  $B = F_{01} \sin \theta$  e  $P = r^2 e^{2\nu} N_{23} \sin^3 \theta = \Delta N_{23} \sin^3 \theta$ ; ricordandosi ora della dipendenza dal tempo delle perturbazioni  $e^{i\sigma t}$  è possibile eliminare la componente  $q_0$ . Si vede poi che è possibile separare le funzioni  $B$  e  $P$  in una componente radiale ed una angolare (che in entrambi i casi è definita da una funzione di Gegenbauer  $T_b^a$ ):

$$B = 3B(r)T_{l+1}^{-1/2}(\theta) \qquad P = P(r)T_{l+2}^{-3/2}$$

Fatto ciò si introduce la coordinata  $r_* = \int dr \frac{r}{\Delta}$  e si definiscono le funzioni:

$$H_1^{(-)} = -r e^\nu B(r) 2\mu \qquad H_2^{(-)} = \frac{P(r)}{r} \qquad (2.47)$$

$$Z_1^{(-)} = q_1 H_1^{(-)} + \sqrt{-q_1 q_2} H_2^{(-)} \qquad Z_2^{(-)} = -\sqrt{-q_1 q_2} H_1^{(-)} + q_1 H_2^{(-)} \qquad (2.48)$$

dove  $q_1 = 3M + \sqrt{9M^2 + 4Q^2 \mu^2}$ ,  $q_2 = 3M - \sqrt{9M^2 + 4Q^2 \mu^2}$  e  $\mu^2 = (l-1)(l+2)$ . Tramite le funzioni  $Z^{(-)}$  è possibile ridurre il sistema composto da 5 equazioni differenziali in:

$$\left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \sigma^2 \right) Z_i^{(-)} = V_i^{(-)} Z_i^{(-)} \qquad (2.49)$$

dove il termine  $V_i^{(-)}$  indica la barriera di potenziale generata dal buco nero per perturbazioni assiali.

$$V_i^{(-)} = \frac{\Delta}{r^5} \left[ (\mu^2 + 2) r - q_j \left( 1 + \frac{q_i}{\mu^2 r} \right) \right] \qquad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ e } i \neq j \qquad (2.50)$$

Si è arrivati in questo modo ad una coppia di equazioni d'onda (che risultano assai più adatte visto come è stata definita la perturbazione) rendendo così non necessario il trovare una soluzione esatta per ottenere informazioni fisiche sulla stabilità del buco nero a seguito di perturbazioni assiali. Si procede ora nello studio delle componenti polari della perturbazione che offrono un risultato simile.

Le equazioni governanti le perturbazioni polari sono ottenute tramite le componenti del tensore di Ricci  $R_{02}$ ,  $R_{03}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{11}$  e la componente del tensore di Einstein

$G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R$  assieme alle equazioni di Maxwell (2.38)-(2.40). In questo caso si vanno a cercare gli incrementi delle funzioni. È possibile separare le funzioni incognite in una parte radiale ed una angolare nota:

$$\begin{aligned} \delta\nu &= D(r)P_l(\theta) & \delta\eta_2 &= L(r)P_l(\theta) \\ \delta\eta_3 &= T(r)P_l(\theta) + V(r)P_{l,\theta,\theta} & \delta\psi &= T(r)P_l(\theta) + V(r)P_{l,\theta} \cot \theta \\ \delta F_{02} &= \frac{r^2 e^{2\nu}}{2Q} B_{02}(r)P_l(\theta) & F_{03} &= -\frac{r e^\nu}{2Q} B_{03}(r)P_{l,\theta}(\theta) \\ F_{23} &= -i\sigma \frac{r e^{-\nu}}{2Q} B_{23}(r)P_{l,\theta} \end{aligned}$$

In questo modo ci si riduce ad equazioni dipendenti unicamente dalla componente radiale, come nel caso assiale si riduce il sistema ad una coppia di equazioni differenziali. Anzitutto si ottiene:

$$2T - l(l+1)V = -2(L + X - B_{23}) \quad (2.51)$$

con  $X = \frac{\mu^2}{2}V$  (dove  $\mu^2$  è già stato definito), le funzioni incognite si riconducono a due equazioni  $H^{(+)}$

$$H_2^{(+)} = \frac{2r}{\mu^2}X - \frac{r^2}{w}(L + X - B_{23}) \quad (2.52)$$

$$H_1^{(+)} = -\frac{1}{Q\mu} \left[ r^2 B_{23} + 2\frac{Q^2}{r} \left( \frac{2r}{\mu^2} - H_2^{(-)} \right) \right] \quad (2.53)$$

con  $w = \frac{\mu^2}{2}r + 3M - 2\frac{Q^2}{r}$ . È possibile ora definire delle funzioni  $Z^{(+)}$  esattamente come è stato fatto nella (2.48) con la semplice accortezza di utilizzare  $H^{(+)}$  piuttosto che  $H^{(-)}$ ; si ottiene così un'equazione d'Onda equivalente alla (2.49) i cui potenziali  $V^{(+)}$  sono:

$$V_1^{(+)} = \frac{\Delta}{r^5} \left( U + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)W \right) \quad V_2^{(+)} = \frac{\Delta}{r^5} \left( U - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)W \right) \quad (2.54)$$

dove

$$\begin{aligned} U &= (\mu^2 r + 3M)W + \left( w - \frac{\mu^2}{2}r - M \right) - \frac{\mu^2 \Delta}{w} \\ W &= \frac{\Delta}{r^2 w} (\mu^2 r + 3M) + \frac{1}{w} \left( \frac{\mu^2}{2}r + M \right) \end{aligned}$$

## Riflessione e Trasmissione

Essendo i potenziali  $V^{(\pm)}$  continui ed integrabili in  $r_*$  nell'intervallo  $[-\infty, +\infty]$  e poiché vanno a zero come  $r_*^{-2}$  per  $r_* \rightarrow \infty$  e per  $r_* \rightarrow -\infty$  si comporta come  $const + e^{r_*/(2M)}$  si può considerare il problema con lo stesso formalismo utilizzato in Meccanica Quantistica per una barriera di potenziale unidimensionale.

Si introducono le condizioni al contorno:

$$Z_j^{(\pm)} = \begin{cases} e^{i\sigma r_*} + R_j^{(\pm)}(\sigma)e^{-i\sigma r_*} & r_* \rightarrow \infty \\ T_j^{(\pm)}(\sigma)e^{+i\sigma r_*} & r_* \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.55)$$

dove  $R_j^{(\pm)}(\sigma)$  e  $T_j^{(\pm)}(\sigma)$  saranno interpretati come l'ampiezza dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa rispettivamente. Da un'analisi dei potenziali si può dedurre [3, pp. 166–174] l'ampiezza dell'onda trasmessa sarà la stessa sia per perturbazioni assiali che per perturbazioni polari e i coefficienti  $T_i^{(+)}(\sigma)$ ,  $T_i^{(-)}(\sigma)$  saranno uguali. Anche l'ampiezza dell'onda riflessa è indipendente dalla sua natura, tuttavia in

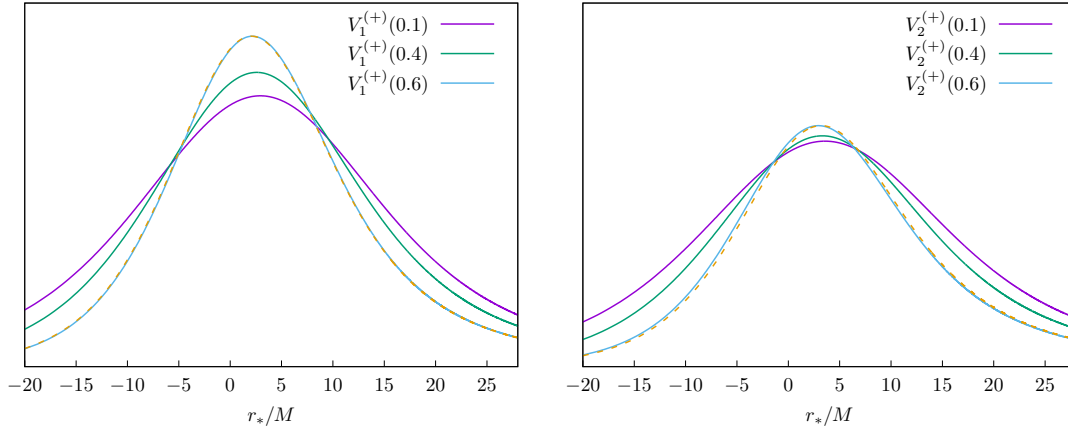


Figura 2.4: Barriere di Potenziale attorno ad un buco nero di Reissner-Nordström con  $M = 1$ . Sulla sinistra sono presenti i grafici di  $V_1^{(+)}$  e sulla destra  $V_2^{(+)}$  al variare di  $Q$ . In entrambi i è presente il grafico di  $V_i^{(-)}(0.6)$  che si nota essere quasi coincidente con la sua versione assiale

questo caso i coefficienti sono uguali solo in modulo e vale la seguente relazione:

$$R_j^{(+)}(\sigma) = R_j^{(-)}(\sigma)e^{i\theta_j} \quad e^{i\theta_j} = \frac{\mu^2(\mu^2 + 2) - 2i\sigma q_k}{\mu^2(\mu^2 + 2) + 2i\sigma q_k}$$

dove  $k = (1, 2)$  e  $k \neq j$ . Perciò è possibile continuare lo studio delle perturbazioni senza doversi preoccupare della loro natura assiale o polare, date le relazioni sopra sarà facile passare dai coefficienti di riflessione dell'uno o dell'altro (da ora in poi sarà per questo motivo soppresso l'apice  $(\pm)$ ).

Si può definire ora la matrice di scattering unitaria per ognuno dei potenziali  $V_1$  e  $V_2$  i cui elementi saranno per l'appunto i coefficienti di ampiezza delle onde riflesse e trasmesse:

$$S_i(\sigma) = \begin{bmatrix} T_i(\sigma) & R_i^*(\sigma) \\ R_i(\sigma) & T_i(\sigma) \end{bmatrix}$$

Ora per poter calcolare le ampiezze di un'onda incidente sulla barriera di potenziale sarà sufficiente considerare un vettore composto dalle ampiezze dell'onda proveniente da  $+\infty$  e quella proveniente da  $-\infty$  come vettore bidimensionale che, moltiplicato per la matrice  $S_i$  darà come risultato l'ampiezza delle onde riflesse e trasmesse. Per avere una formulazione più completa però si può pensare di cercare una matrice  $4 \times 4$  che includa le matrici di scattering  $S_1$  e  $S_2$  in modo da avere contemporaneamente tutte le perturbazioni gravitazionali ed elettromagnetiche.

Da un'analisi della casistica si vede che le perturbazioni elettromagnetiche sono descritte, a meno di una costante dimensionale, dalla funzione  $H_1$  mentre quelle gravitazionali sono descritte dalla funzione  $H_2$ . Tramite le funzioni (2.48) si

esprimono queste due in funzione delle  $Z$ :

$$H_1 = Z_1 \cos \gamma - Z_2 \sin \gamma \quad H_2 = Z_1 \sin \gamma + Z_2 \cos \gamma \quad (2.56)$$

dove

$$\sin 2\gamma = \frac{2\sqrt{-q_1 q_2}}{q_1 - q_2} = \frac{2Q\mu}{\sqrt{9M^2 + 4Q^2\mu^2}}$$

In questo modo è piuttosto semplice e conveniente analizzare i casi limite ovvero un'onda puramente elettromagnetica o puramente gravitazionale proveniente dall'infinito. Nel primo caso si impone  $H_2$  nullo e si ricavano così le ampiezze delle onde  $Z$  come funzioni delle ampiezze  $H_1$ :  $Z_1 = H_1 \cos \gamma$ ,  $Z_2 = H_1 \sin \gamma$ . È ora noto che l'ampiezza delle onde  $Z$  riflesse e trasmesse saranno:

$$Z_i^{(r)} = Z_i R_i(\sigma) \quad Z_i^{(t)} = Z_i T_i(\sigma)$$

dove ovviamente gli apici  $(r)$  e  $(t)$  indicano un'onda riflessa e trasmessa rispettivamente. Riapplicando queste due alla (2.56) si ottiene:

$$H_1^{(r)} = H_1 (R_1 \cos^2 \gamma + R_2 \sin^2 \gamma) \quad (2.57a)$$

$$H_1^{(t)} = H_1 (T_1 \cos^2 \gamma + T_2 \sin^2 \gamma) \quad (2.57b)$$

$$H_2^{(r)} = H_1 (R_1 - R_2) \sin \gamma \cos \gamma \quad (2.57c)$$

$$H_2^{(t)} = H_1 (T_1 - T_2) \sin \gamma \cos \gamma \quad (2.57d)$$

nel caso di onde puramente gravitazionali si ottiene un risultato simile, posto  $H_1$  nullo si calcolano le  $Z$  e di conseguenza le ampiezze delle onde riflesse e trasmesse che son date dalla (2.57) con l'unica accortezza di invertire gli indice delle  $H$ . Si è dedotta quindi un'interessante proprietà di un buco nero di Reissner-Nordström, un'onda incidente subirà una trasformazione da energia gravitazionale a elettromagnetica.

Tornando ora alla situazione generale si descrive la perturbazione tramite un vettore  $\mathbf{H} = (H_1^d, H_1^l, H_2^d, H_2^l)$  dove gli apici  $l, d$  indicano un'onda proveniente dall'orizzonte degli eventi o dall'infinito rispettivamente. Si deduce quindi dai casi limite la matrice di Scattering  $S$ :

$$S\mathbf{H} = \begin{bmatrix} T_{11} & R_{11}^* & T_{21} & R_{21}^* \\ R_{11} & T_{11} & R_{21} & T_{21} \\ T_{12} & R_{12}^* & T_{22} & R_{22}^* \\ R_{12} & T_{12} & R_{22} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^d \\ H_1^l \\ H_2^d \\ H_2^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(t)} \\ H_1^{(r)} \\ H_2^{(t)} \\ H_2^{(r)} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

dove

$$R_{11} = R_1 \cos^2 \gamma + R_2 \sin^2 \gamma$$

$$R_{22} = R_1 \sin^2 \gamma + R_2 \cos^2 \gamma$$

$$T_{11} = T_1 \cos^2 \gamma + T_2 \sin^2 \gamma$$

$$T_{22} = R_1 \sin^2 \gamma + T_2 \cos^2 \gamma$$

$$R_{12} = R_{21} = (R_1 - R_2) \sin \gamma \cos \gamma$$

$$T_{12} = T_{21} = (T_1 - T_2) \sin \gamma \cos \gamma$$

## 2.7 Stabilità Classica degli Orizzonti degli Eventi

Lo studio della matrice di scattering fornisce il comportamento delle perturbazioni agenti sul buco nero ma da solo non dà informazioni sulla stabilità di quest'ultimo. Il metodo sviluppato ha tuttavia fornito alcune informazioni di grande importanza: la possibilità di esprimere le perturbazioni tramite la funzione d'onda (2.49) (avendo definito la funzione con  $r_*$ ) e l'esistenza di un potenziale definito su tutte le regioni dello spazio tempo e così la possibilità di applicare il formalismo della meccanica quantistica per risolvere il problema. Data una perturbazione agente su di un supporto compatto se ne studia l'evoluzione; nel caso in cui lo spazio tempo risulta stabile la funzione d'onda che descrive la perturbazione sarà limitata sul supporto mentre nel caso instabile questa ha una crescita non limitata.

### Orizzonte Esterno

Si analizza per primo il caso dell'orizzonte esterno. Tutte le soluzioni dipendenti dal tempo saranno funzioni continue  $\psi$  determinate da:

$$\psi(r_*, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\sigma, 0) Z(r_*, \sigma) d\sigma$$

e la sua evoluzione temporale sarà data invece:

$$\psi(r_*, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\sigma, 0) e^{i\sigma t} Z(r_*, \sigma) d\sigma$$

dove si è supposto che la dipendenza dal tempo sia legata ad un termine  $e^{i\sigma t}$ . Si vede inoltre che le funzioni  $\psi$  sono quadrato sommabili per qualsiasi valore di  $t$  e inoltre:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(r_*, 0)|^2 dr_* = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\sigma, 0)|^2 d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(r_*, t)|^2 dr_*$$

Ne segue che per qualsiasi  $t > 0$  le funzioni  $\psi$  sono limitate e, pertanto lo spazio tempo è stabile nella regione al di fuori dell'orizzonte esterno.

### Orizzonte di Cauchy

Si considera ora la regione di spazio tempo compresa fra i due orizzonti. Le funzioni  $Z$  non subiscono alcuna variazione, i potenziali  $V_i$  sono tuttavia minori di zero e, descritti tramite la variabile  $r_*$  (che anche in questo intervallo va da  $-\infty$  a  $+\infty$ ), indicano un pozzo di potenziale piuttosto che una barriera. Si procede ora in maniera simile al caso di riflessione e trasmissione al di fuori dell'orizzonte esterno andando a calcolare le condizioni al contorno della funzione d'onda  $Z$  che sarà

$$Z(r_*) = \begin{cases} A(\sigma)e^{-i\sigma r_*} + B(\sigma)e^{i\sigma r_*} & r_* \rightarrow +\infty, r \rightarrow r_- \\ e^{-i\sigma r_*} & r_* \rightarrow -\infty, r \rightarrow r_+ \end{cases} \quad (2.59)$$

queste condizioni al contorno derivano dal fatto che le uniche onde presenti in questa regione di spazio tempo sono quelle che attraversano l'orizzonte  $r_+$  che

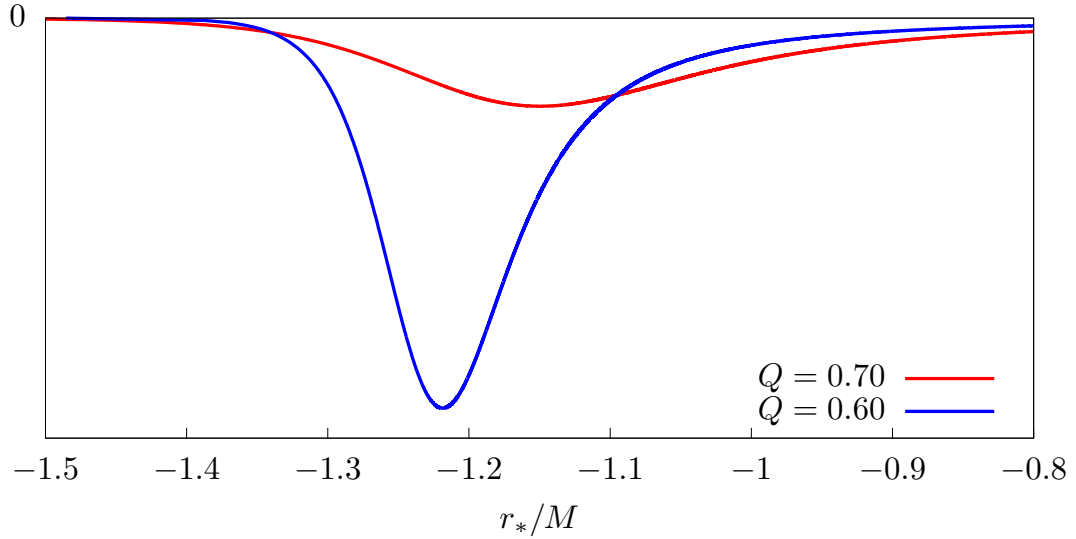


Figura 2.5: Pozzo di Potenziale di un buco nero di Reissner-Nordström con  $M = 1$  nella regione compresa fra l'orizzonte di Cauchy e quello esterno

ovviamente non possono uscire da questa regione. I coefficienti  $A$  e  $B$  sono legati a quelli di trasmissione e riflessione calcolati prima, tuttavia data la natura del potenziale questi vengono chiamati coefficienti di amplificazione:

$$A(\sigma) = \frac{1}{T_1(-\sigma)} \quad B(\sigma) = \frac{R_1(-\sigma)}{T_1(-\sigma)}$$

che si vedono avere la proprietà:

$$|A(\sigma)|^2 - |B(\sigma)|^2 = 1$$

Reintroduciamo la dipendenza dal tempo  $e^{i\sigma t}$  e le coordinate di tipo luce  $u, v$  che in questa regione dello spazio tempo sono:

$$u = r_* + t \quad v = r_* - t$$

Ora è interessante andare a studiare il flusso della radiazione percepita da un osservatore in caduta libera nel momento in cui questo attraversa l'orizzonte di Cauchy. Presa la 4-velocità dell'osservatore  $U^\mu$ , imponiamo che questo abbia momento angolare nullo ed Energia  $E$  otteniamo che il flusso di radiazione sarà:

$$\mathcal{F} = U^\mu Z_{,\mu} = \frac{r^2}{\Delta} \left[ EZ_{,t} + \sqrt{E^2 - \frac{\Delta}{r^2}} Z_{,r_*} \right] \quad (2.60)$$

si può ora dedurre che la divergenza o meno di questo flusso per traiettorie di tipo luce dirette verso l'orizzonte di Cauchy dipenderà dalle funzioni:

$$Y_{,u} = \int_{-\infty}^{+\infty} i\sigma \frac{R_1(-\sigma)}{T_1(-\sigma)} Z(\sigma) e^{i\sigma u} d\sigma \quad X_{,-v} = \int_{-\infty}^{+\infty} i\sigma \left( \frac{1}{T_1(-\sigma)} - 1 \right) Z(\sigma) e^{-i\sigma v} d\sigma \quad (2.61)$$



Si ottiene il seguente risultato: nell'ipotesi che un osservatore si muova mantenendosi sulla sfera  $S(2)$  di raggio  $r_-$  partendo da  $t = -\infty$  fino a  $t = +\infty$  il flusso di radiazione assumerà un valore finito. Cosa molto più interessante avviene se un osservatore parte dall'orizzonte  $r_+$  e arriva all'orizzonte di Cauchy. In questa situazione il flusso  $\mathcal{F}$  assume valore infinito, ciò significa che qualsiasi perturbazione che attraversa l'orizzonte  $r_+$  ed entra in questa regione dello spazio tempo subisce una amplificazione infinita, anche se ha supporto compatto. Dal punto di vista dell'osservatore questo nel momento in cui tenta di attraversare l'orizzonte di Cauchy si trova colpito da un flusso di radiazione di intensità infinita. Per tale motivo l'orizzonte di Cauchy viene detto instabile.



## Capitolo 3

# Fenomeni Quantistici in un Buco Nero di Reissner Nordström

Nel capitolo precedente si è data una descrizione classica di un Reissner-Nordström utilizzando oggetti teorici che si limitano alla teoria della Relatività Generale come concepita da Einstein. Tuttavia la mancanza della Meccanica Quantistica nella descrizione, uno dei più alti traguardi della scienza del ventesimo secolo, sembra pesare. Purtroppo l'assenza di una teoria quantistica della gravitazione sperimentalmente provata non consente una descrizione certa di cosa avvenga nella singolarità o vicino ad essa. Questo tuttavia non significa che non sia possibile in alcun modo dare una descrizione di fenomeni strettamente quantistici causati da un buco nero. Negli ultimi anni infatti la Relatività Generale *classica* è sempre più una teoria ben confermata che, al di fuori di alcune importanti congetture e problemi aperti, non presenta più misteri o nuove eccitanti possibilità.

L'introduzione della teoria dei campi su spazi curvi ha offerto incredibili nuovi risultati e interessanti nuove prospettive riguardo la possibilità di unire le due grandi teorie della fisica moderna. Non si può ovviamente dare una descrizione di fenomeni quantistici nella singolarità, ma a debita distanza da essa è possibile fare uno studio sensato della materia. In questo capitolo si fa una rapida analisi di uno dei fenomeni derivanti da questa unione, la radiazione di Hawking.

### 3.1 Radiazione di Hawking

#### Entropia di un Buco Nero

Si immagini un box di gas che viene *lanciato* in un buco nero. Considerando la condizione iniziale e quella finale si vede che il secondo principio della termodinamica viene violato: l'entropia del gas sparisce dall'universo. Questo è ovviamente assurdo e rivela una falla nel ragionamento: al buco nero non è stata assegnata alcuna entropia. Per risolvere il problema assegniamo al box una massa  $m$ , lunghezza  $L$  e temperatura  $T$ , mentre si assegna al buco nero la massa  $M$  [1], per semplicità ora non si prende un buco nero carico, i risultati che otterremo saranno però facilmente riconducibili a casi più generali. Dalla sparizione del gas per un osservatore esterno

la differenza di Entropia che questo percepisce sarà approssimativamente:

$$\Delta S \sim -\frac{m}{T}$$

Si dimostra che la distanza minima dall'orizzonte a cui si può trovare il box prima di sparire per un osservatore esterno sarà simile alla lunghezza  $L$ , oltre questo punto la massa del buco nero subirà un aumento:

$$\Delta M \sim m \sqrt{1 - \frac{2M}{2M + \delta r}} \sim \frac{mL}{M} \quad (3.1)$$

dove  $\delta r \sim L^2/M$ , supponendo poi che la lunghezza del box sia nello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda termica del box  $\hbar/T$ , si vede che la variazione d'entropia necessaria a mantenere la seconda legge della termodinamica sarà:

$$\Delta S \sim -\frac{mL}{\hbar} \sim -\frac{M\Delta M}{\hbar} \sim \frac{\Delta A}{\hbar} \quad (3.2)$$

dove  $A$  sarà l'area dell'orizzonte degli eventi. Da questo, e da analisi più complesse tramite oscillatori armonici, Berkstein ipotizzò che ad un buco nero si potesse attribuire Entropia dell'ordine di  $A/\hbar$ . Questo crea però un assurdo se si considera la Relatività Generale Classica dato che, per definizione, considera il buco nero come un corpo nero a temperatura nulla poiché se messo a contatto con un oggetto ne assorbirà tutto il calore senza emettere nulla. Si ha una spiegazione tramite Hawking che, applicando la teoria quantistica, dimostrò valida la considerazione sull'entropia e, in particolare, che qualsiasi buco nero emette una radiazione di corpo nero detta *Radiazione di Hawking* a temperatura:

$$T \sim 10^{-8} \left( \frac{M_\odot}{M} \right) \text{K} \quad (3.3)$$

Ne risulta ovvio che questa radiazione non può lasciare invariato il corpo celeste, all'emissione di particelle deve corrispondere una variazione dell'energia della sorgente quindi, intuitivamente, una perdita di massa. Questo processo viene chiamato evaporazione di un buco nero, ciò può apparire come un assurdo date le considerazioni fatte nel capitolo precedente. L'assunzione della staticità dovrebbe cadere immediatamente. Dalla (3.3) però si nota che la radiazione ha intensità incredibilmente bassa, per un buco nero di massa pari a quella del sole dovrebbe avere temperatura pari a qualche decina di nano kelvin. I tempi di evaporazione infatti assumono valori immensamente grandi; restando nell'esempio della massa solare sono stati previsti tempi di circa  $10^{64}$  anni per evaporare completamente, tempo che cresce all'aumentare della massa del buco nero. Per questi motivi l'assunzione di sorgente statica resta valida entro tempi non immensamente grandi.

## Radiazioni di particelle tramite tunneling

Il trattare la radiazione di Hawking come puramente termica lascia limitazioni nella descrizione di quest'ultima. In particolare non abbiamo informazioni sulla natura delle particelle emesse, sulla loro massa o sulla loro carica elettrica. Questo limite

viene superato da Parikh e Wilczek considerando il processo di radiazione come tunnel quantistico. In questa maniera, pur trattando solo paricelle senza carica nè massa [13], si ha una descrizione della radiazione come non termica che così evita il paradosso dovuto alla perdita di informazioni a seguito dell'evaporazione del buco nero.

Consideriamo per prime particelle non massive che escono da un buco nero di Reissner-Nordström, queste dovranno seguire le geodesiche andando ad uscire dall'orizzonte (quindi in verso opposto rispetto a quanto ci aspettiamo). Prima di tutto andiamo ad *eliminare* gli orizzonti con una trasformazione della coordinata temporale da  $t$  a  $t'$ :

$$t' = t + 2\sqrt{2Mr - Q^2} + M \ln \left( \frac{r - \sqrt{2Mr - Q^2}}{r + \sqrt{2Mr - Q^2}} \right) + \frac{Q^2 - M^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \operatorname{atanh} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2} \sqrt{2Mr - Q^2}}{Mr} \quad (3.4)$$

in questo modo la metrica di Reissner-Nordström (2.10) viene scritta come elemento di linea di Painlevé:

$$ds^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} + Q^2 r^2 \right) (dt')^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} dr dt' - dr^2 - r^2 d\Omega$$

Questa metrica mostra in maniera evidente la natura stazionaria, non statica e non singolare dello spazio tempo. Ricaviamo da questa l'equazione del moto di una particella uscente a massa nulla:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt'} = 1 - \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}$$

Si fa ora una piccola considerazione: abbiamo considerato la massa della sorgente essere costante ad un valore  $M$ , tuttavia l'emissione di particelle non può non avere alcun effetto su di essa. Facciamo perciò una trasformazione  $M \rightarrow M - \omega$  per rappresentare questo processo. Dobbiamo andare ora a calcolare l'azione della particella uscente dall'orizzonte, considerata come onda  $s$  uscente ad energia positiva che si muove da  $r_{in}$  a  $r_{out}$  abbiamo:

$$S = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr$$

Ora moltiplicando e dividendo l'integrando per i due termini dell'equazione hamiltoniana  $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}$  ed applicando un cambiamento di coordinate passando dal momento  $p_r$  all'energia si può riscrivere l'azione in modo più comodo:

$$S = \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH = \int_0^\omega \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}} (-d\omega') \quad (3.5)$$

dove l'integrale viene calcolato valutandone il residuo. Si calcola ora il tasso di emissione:

$$\Gamma \sim e^{2\operatorname{Im} S} = e^{-4\pi \left[ 2\omega(M-\omega/2) - (M-\omega) \sqrt{(M-\omega)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 - Q^2} \right]}$$

che può essere riscritto come:

$$e^{\Delta S_{\text{BN}}} \quad (3.6)$$

Sappiamo che esistono varie particelle aventi carica elettrica e la loro emissione corrisponde allo scaricarsi del buco nero di Reissner-Nordström, poiché non si conoscono particelle a massa nulla con carica elettrica, dovremo avere una particella massiva; non seguiamo però il processo utilizzato prima. Se prendiamo ora un campo scalare corrispondente ad una particella di massa  $m_0$  e carica  $q$ , andiamo a risolvere la sua equazione di Klein Gordon su spazio tempo di Reissner-Nordström [16]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - iqA_\mu \right) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} - iqA_\nu \right) \Psi \right] = \frac{m_0^2}{\hbar^2} \Psi \quad (3.7)$$

dove il campo elettromagnetico sappiamo essere  $(-\frac{Q}{r}, 0, 0, 0)$ . Andando a riscrivere l'equazione si nota che è possibile applicare la separazione delle variabili e riscrivere il campo come:

$$\Psi = e^{-i\omega t} Y_{lm}(\theta, \varphi) \Phi(r)$$

dove  $Y_{lm}$  sono le armoniche sferiche con  $l$  numero quantico di momento angolare e  $m$  numero quantico magnetico. Riduciamo quindi il problema ad una sola equazione radiale. Possiamo semplificare ulteriormente l'equazione andando ad applicare la trasformazione  $\Phi(r) = \frac{R(r)}{r}$ , e calcolando nel limite  $r \rightarrow r_+$ .

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + (\omega - \omega_0)^2 R(r) = 0 \quad (3.8)$$

dove  $\omega_0 = \frac{qQ}{r_+}$ . Possiamo ora calcolare la funzione d'onda radiale  $\xi$ :

$$\xi^\pm = R(r) e^{-i\omega t} = \exp(-i\omega t \pm i(\omega - \omega_0)r_*)$$

dove il  $\pm$  sta ad indicare una particella diretta verso l'infinito o verso la singolarità rispettivamente. Calcoliamo ora la probabilità di una particella di entrare nel buco nero o di uscirne tramite un processo di tunnel. Si ottengono facilmente da un'analisi:

$$\Gamma^- = \left| \frac{\xi_I^-}{\xi_E^-} \right|^2 = e^{\pi\omega_0/\kappa} \quad \Gamma^+ = \left| \frac{\xi_E^+}{\xi_I^+} \right|^2 = e^{-\pi(2\omega - \omega_0)/\kappa} \quad (3.9)$$

dove i pedici  $I, E$  indicano se l'onda si trova all'interno dell'orizzonte  $r_+$  o al suo esterno rispettivamente mentre  $\kappa = \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}$  è la gravità di superficie.

Ora come nel caso della particella a massa nulla la radiazione di Hawking deve necessariamente portare a delle modifiche dello spazio tempo che, per la conservazione dell'energia e della carica, avranno l'effetto di *togliere* dalla sorgente le suddette quantità. Appliciamo perciò le trasformazioni:  $M \rightarrow M - \omega$  e  $Q \rightarrow Q - q$  ai risultati ottenuti sopra, potremmo rifare tutti i calcoli ma otterremo esattamente lo stesso risultato. Si calcola il fattore di scattering come:

$$\Gamma = \Gamma^+ \Gamma^- = e^{-2\pi(\omega - \omega_0)/\kappa}$$

Si può riscrivere questo come:

$$\Gamma = \prod_{i,j} \Gamma_{\omega_i, q_j} = \exp \left[ - \int_0^\omega \frac{4\pi d\omega'}{2\frac{(M-\omega')}{r_+^2} - 2\frac{(Q-q)^2}{r_+^3}} + \int_0^q \frac{4\pi(Q-q')dq'}{r_+ \left( 2\frac{(M-\omega')}{r_+^2} - 2\frac{(Q-q)^2}{r_+^3} \right)} \right]$$

si dimostra che gli argomenti degli integrali sono le derivate parziali della variazione d'entropia. Si ottiene così anche in questo caso l'uguaglianza:

$$\Gamma = e^{\Delta S_{BN}}$$

In entrambi i casi trattati il fattore  $\Gamma$  equivale con quello calcolato per una radiazione termica, se ne può dedurre che l'ipotesi di trattare la radiazione di Hawking come un processo di tunneling oltre l'orizzonte degli eventi sia corretta. Si nota che è possibile avere radiazione sia di particelle a massa nulla che di particelle cariche; all'evaporazione del buco nero equivale quindi una perdita di carica. Nell'ipotesi di censura cosmica di Penrose questo può apparire come una conferma della validità della radiazione di Hawking, se la perdita di carica fosse impossibile infatti qualsiasi buco nero carico dovrebbe decadere in una singolarità nuda con un rapporto massa -carica elettrica lievemente minore di 1. Ciò in realtà non accade ed è interessante vedere che, anche non considerando la possibilità di radiazione carica, un buco nero tenderà comunque a non diventare una singolarità nuda.

## Evoluzione Temporale

Avendo determinato la possibilità di avere una radiazione come processo di tunnel oltre gli orizzonti si può fare un passo indietro studiando come il buco nero evapori, per una radiazione composta unicamente da particelle a massa nulla, nel tempo analizzandone il comportamento ed il suo destino. Consideriamo un buco nero di massa  $M$  e carica positiva  $Q$  per semplicità, in realtà tutti i risultati che si ottengono qui sono validi anche per una carica negativa con la semplice accortezza di porre la carica in valore assoluto. Il campo elettromagnetico da esso generato va a causare una creazione di coppia particella antiparticella al di fuori dell'orizzonte esterno con un rate  $\Omega$ , ottenutosi dalla formula di Schwinger:

$$\Omega = \frac{e^2}{4\pi^3 \hbar^2} \frac{Q^2}{r^4} \exp \left( \frac{-\pi m^2 r^2}{\hbar e Q} \right) \times \left( 1 + o \left( \frac{e^3 Q}{m^2 r^2} \right) \right) \quad (3.10)$$

poiché questo rate dipende dalla massa al quadrato si ignorano particelle più pesanti di un elettrone. Si nota che nell'equazione sopra è presente un fattore infinitesimo al primo ordine, tuttavia nell'ipotesi di campo debole  $e^3 Q / (m^2 r^2) \ll 1$  il primo termine fornisce una descrizione adeguata del fenomeno. Integrando poi la (3.10) sul volume esterno all'orizzonte degli eventi possiamo ottenere un'equazione differenziale che fornisce la variazione della carica elettrica in funzione della coordinata temporale:

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{e^3}{\pi^2 \hbar^2} \frac{1}{r_+} \exp \left( - \frac{r_+^2}{Q Q_0} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{Q Q_0}} \operatorname{erfc} \left( \frac{r_+}{\sqrt{Q Q_0}} \right) \quad (3.11)$$

dove  $\operatorname{erfc}(x)$  è la funzione complementare della funzione di errore e  $Q_0 = \hbar e / (\pi m^2)$ .

È possibile fare ora qualche considerazione da questa formula riguardo la perdita di carica. Si nota facilmente che, per qualsiasi carica, un buco nero estremante, avente ovvero  $Q^2 = M^2$  sarà quello che perde carica più velocemente. Facendo inoltre l'assunzione:  $r_+^2 \gg Q_0 Q$ , che è sempre vera nella condizione  $M \gg Q_0$ , si può approssimare la funzione di errore complementare alla sua serie asintotica. È importante notare che questa assunzione implica il considerare solo buchi neri di massa estremamente elevata, sull'ordine delle  $10^6$  masse solari, per oggetti più leggeri infatti la carica viene espulsa molto velocemente nelle fasi iniziali dell'evaporazione decadendo in questo modo in un buco nero di Schwartzchild. Così l'equazione sopra diventa:

$$\frac{dQ}{dt} \simeq -\frac{e^4}{2\pi^3 \hbar m^2} \frac{Q^3}{r_+^3} \exp\left(\frac{-r_+^2}{Q Q_0}\right) \quad (3.12)$$

Ora si considera invece la perdita di massa del buco nero. È possibile identificare due processi fisici che portano a questo, da una parte la radiazione termica di Hawking e, nel caso di oggetti abbastanza massivi e con abbastanza carica elettrica, che sono per inciso quelli che si stanno considerando, dalla produzione di coppie di particelle. Si studiano nella radiazione di Hawking solo particelle a massa nulla, quindi fotoni, gravitoni e neutrini, in particolare per questi ultimi si considera la massa nulla se minore di  $10^{-10}$  eV. Definite come  $\sigma_\gamma$ ,  $\sigma_\nu$ ,  $\sigma_g$  le sezioni d'onda medie termiche per fotoni neutrini e gravitoni rispettivamente, si può calcolare la variazione di massa come:

$$\frac{dM_1}{dt} = -\frac{\pi^2}{15\hbar^3} T_H^4 \left( \frac{7}{8} n_\nu \sigma_\nu + \sigma_\gamma + \sigma_g \right) \quad (3.13)$$

dove  $n_\nu$  è il numero di tipi di sapori dei neutrini a massa nulla, che in modo molto tradizionalista si impongono essere 3. Ora calcolare le sezioni d'urto di ogni particella è piuttosto difficoltoso, si può riscrivere questa equazione differenziale tramite la sezione d'urto ottica del buco nero di Reissner-Nordström:

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{8} \frac{\left(3M + \sqrt{9M^2 - 8Q^2}\right)^4}{3M^2 - 2Q^2 + M\sqrt{9M^2 - 8Q^2}}$$

si indica il termine somma delle sezioni d'urto come  $\alpha\sigma_0$ , resta il problema di calcolare le sezioni d'urto. È possibile però fare la seguente considerazione: il rapporto fra sezione d'urto di un tipo di particella non massiva e sezione d'urto ottica per un buco nero di Schrodinger e uno di Reissner-Nordström si può assumere essere simile, con il vantaggio che questi valori nel primo caso sono noti ottenendo [6]:

$$\sigma_\nu \simeq 0.66852\sigma_0 \quad \sigma_\gamma \simeq 0.24044\sigma_0 \quad \sigma_g \simeq 0.02748\sigma_0$$

Ovviamente questo processo non è completamente corretto, tuttavia questa approssimazione è abbastanza valida.

Si prende ora il caso di perdita di massa dovuta alla creazione particella anti-particella, data la natura esponenziale della (3.10) la maggior parte delle particelle



saranno create vicino all'orizzonte  $r_+$ . Si può facilmente ipotizzare il comportamento delle due particelle: quella avente carica opposta alla sorgente supererà l'orizzonte degli eventi mentre l'altra sarà respinta all'infinito dall'interazione elettromagnetica che, in queste situazioni è molto più intensa dell'attrazione gravitazionale causata dal buco nero. Per questi motivi si può ignorare il contributo di scattering che normalmente andrebbe considerato e la variazione di massa sarà perciò legata unicamente alla creazione di coppia particella antiparticella:

$$\frac{dM_2}{dt} = \frac{Q}{r_+} \frac{dQ}{dt}$$

questo termine diventa importante in caso di temperatura bassa o di forte perdita di carica. Unendo i due contributi si ottiene l'equazione che governa la variazione di massa del buco nero:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\pi^2}{15\hbar^3} T_H^4 \alpha \sigma_0 + \frac{Q}{r_+} \frac{dQ}{dt} \quad (3.14)$$

dove  $\alpha = \left(\frac{7}{8}n_\nu\sigma_\nu + \sigma_\gamma + \sigma_g\right) \sigma_0^{-1} = 2.0228$ .

Una soluzione analitica della (3.12) e della (3.14) non è stata trovata, si può tuttavia determinare un risultato significativo che ben descriva l'evoluzione di un buco nero tramite un semplice processo di integrazione numerica. Dal loro confronto anzitutto si possono notare alcuni dettagli che forniscono interessanti informazioni. Si nota anzitutto che nei termini di variazione della carica, ovvero  $\frac{dQ}{dt}$  e  $\frac{dM_2}{dt}$  si ha una dipendenza esponenziale dalle grandezze  $M$  e  $Q$  mentre la variazione dovuta al contributo termico ha dipendenza polinomiale. Si possono allora dedurre due casi limitanti: nel primo si impone il contributo esponenziale essere molto piccolo, in questa situazione la carica resterà pressappoco costante mentre la massa tenderà a calare sotto effetto della radiazione. Il fattore  $(Q/M)^2$  tenderà perciò a crescere. Ci sarà poi il caso in cui il contributo esponenziale sarà dominante; in questo caso la variazione di carica sarà maggiore di quella di massa di un fattore  $Q/r_+$ , che sarà al massimo dell'ordine di grandezza dell'unità, in questo caso, quindi, il fattore  $(Q/M)^2$  tenderà a calare essendo la perdita di carica più veloce di quella della massa.

Fatte le seguenti considerazioni si può andare a determinare l'evoluzione di un buco nero a seconda della sua condizione iniziale. Dall'integrazione numerica si evince anzitutto una cosa: i due casi limite sono interpretabili come due regioni dello spazio separate da un percorso nel quale carica e massa calano in modo praticamente uguale, che si dice attrattore. Un sorprendente risultato deriva dal fatto che a prescindere dalle situazioni iniziali qualsiasi buco nero nella fase finale della sua evoluzione tenderà a seguire questo percorso<sup>1</sup> che tende verso un . Si illustrano ora le linee generali dell'evoluzione a seconda delle condizioni iniziali. Nel caso in cui il buco nero sia nella configurazione di *perdita della massa*, che sarà il caso in cui il contributo esponenziale è trascurabile, questo tenderà a perdere massa in modo piuttosto veloce mantenendo la carica elettrica costante finché non interseca l'attrattore e segue questa traiettoria. Una piccola particolarità si ha nel

<sup>1</sup>In realtà ci sono varie possibili traiettorie tutte molto simili fra loro comprese in una regione molto piccola

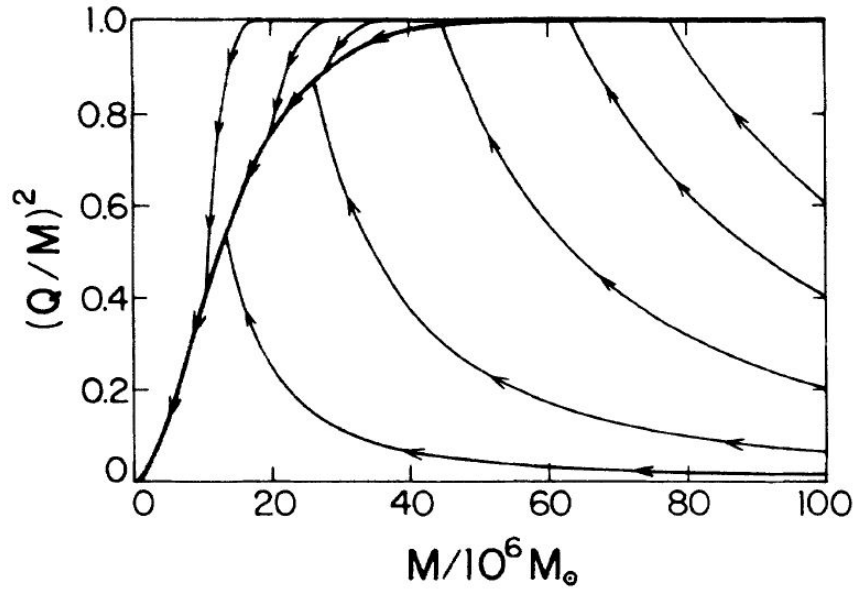


Figura 3.1: Grafico presentato da Hiscock e Weems per descrivere l'evoluzione di Buchi Neri Supermassivi. Si notino le *traiettorie* che, a prescindere dalla condizione iniziale vanno ad unirsi all'attrattore (rappresentato dalla linea più marcata).

caso di oggetti la cui massa è almeno  $10^7$  volte maggiore di quella del sole: la temperatura di Hawking tenderà a salire per perdita della massa finché, raggiunto un valore massimo, questa inizierà a calare nonostante il buco nero perda massa. Se si andasse a calcolare il calore specifico del buco nero infatti ci si accorgerebbe della presenza di una regione, avente come limite l'attrattore e come limite inferiore la linea  $(Q/M)^2 = \frac{3}{4}$ , nella quale il calore specifico è positivo. Inevitabilmente il buco nero raggiungerà un minimo di temperatura nell'uscire da questa regione e, immediatamente, intersecherà l'attrattore.

Un buco nero che invece si trovi nella zona di *perdita di carica*, ovvero nella zona in cui il fattore esponenziale è predominante, ha un'evoluzione assai meno interessante. Esso è infatti impossibilitato ad accedere alla zona in cui il calore specifico è positivo o ad oltrepassare l'attrattore, molto semplicemente questo perderà carica e massa finché non intersecherà l'attrattore e non perderà tutta la sua carica. Vi è in realtà un piccolo dettaglio che è piuttosto interessante: dalle equazioni (3.14) e (3.12) si nota che se si considerasse solo il contributo di creazione particella antiparticella il buco nero tenderebbe ad avere superficie costante. Questo non si verifica a causa del contributo termico, tuttavia poiché esso è effettivamente molto piccolo si può dire che, approssimativamente, un buco nero in fase di *perdita di carica* mantiene costante la sua superficie.

Recenti sviluppi in realtà indicano che il processo di creazione di particella antiparticella sia da considerarsi parte della radiazione di Hawking [12] rendendo il modello trattato finora valido per buchi neri supermassivi. Nelle fasi finali dell'evoluzione di un buco nero tuttavia le assunzioni di Hiscock e Weems cadono richiedendo una modellistica più complessa che non verrà trattata in questa tesi.

## 3.2 Monopolo Magnetico

Quando si è ricavata la metrica nella sezione 2.1 è stata considerata unicamente la possibilità di carica elettrica non nulla per la sorgente senza considerare alcun contributo magnetico. Questa scelta non è stata casuale, avendo definito la nostra sorgente statica, risulta triviale che questa non genererà campo magnetico per il movimento di particelle con carica elettrica. L'idea di una carica magnetica (non nulla) invece è estranea all'elettrodinamica classica. Preso un qualsiasi magnete è impossibile separare i due poli che sono parte di quest'ultimo, tagliandolo a metà si otterranno due magneti distinti. Questa idea è stata formalizzata matematicamente nella legge di Gauss per i campi magnetici.

Con l'introduzione della meccanica quantistica Dirac dimostrò [5] che dei poli magnetici singoli non sono da considerarsi oggetti impossibili, anzi il formalismo quantistico non nega la loro esistenza; in particolare se nell'universo ci fosse anche un solo monopolo magnetico allora la carica elettrica sarà necessariamente quantizzata. Il fatto che effettivamente esista un valore fondamentale della carica elettrica non è ovviamente una conferma, ma solo un indizio sul fatto che questa congettura possa essere corretta.

Per andare a studiare questi ultimi, risulta necessario andare a ridefinire le equazioni di Maxwell dato che esse non tengono conto dell'esistenza di una carica magnetica. Si introduce perciò un quadrivettore di carica magnetica  $K^i$  [11] e si ottiene:

$$F_{,\nu}^{\mu\nu} = -J^\mu \qquad G_{,\nu}^{\mu\nu} = -K^\mu \qquad (3.15)$$

dove  $G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}$  è il duale del tensore elettromagnetico. Sempre per la presenza della carica magnetica si introduce un altro quadripotenziale vettore che viene chiamato potenziale magnetoelettrico  $C^\mu$  tale che:

$$G_{\mu\nu} = C_{\nu,\mu} - C_{\mu,\nu}$$

similmente da ora si indicherà il tensore  $G$  come tensore magnetoelettrico. Si dimostrano facilmente varie proprietà del tensore magnetoelettrico in relazione al tensore elettromagnetico:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \qquad G^{\lambda\mu}G_{\nu\lambda} = F^{\lambda\mu}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

dalla seconda in particolare si ricava il tensore energia impulso simmetrico:

$$T_\nu^\mu = F^{\lambda\mu}F_{\nu\lambda} + G^{\lambda\mu}G_{\nu\lambda}$$

### Buco nero Magnetico

Si ipotizza ora di avere un monopolo magnetico di massa  $M$ , carica elettrica  $Q$  e magnetica  $P$  posto nella coordinata  $r = 0$  e si vanno a calcolare le modifiche indotte da questo sullo spazio tempo. Si procede come si è fatto nella sezione 2.1 andando a risolvere per prime le nuove equazioni di Maxwell che abbiamo ottenuto (3.15). Ipotizzando di avere una sorgente puntiforme sferica e statica avremo:  $j^\nu = (Q\delta(r), 0, 0, 0)$  e  $k^\nu = (P\delta(r), 0, 0, 0)$  per cui, risolvendo le equazioni, si

ottengono i termini non nulli:

$$F^{01} = \frac{Q}{r^2} \qquad G^{01} = \frac{P}{r^2}$$

non bisogna qui fare l'errore di considerare queste come uniche componenti indipendenti non nulle dei rispettivi tensori, come è stato fatto nel caso a carica magnetica nulla, è facile notare infatti che, ricordandosi della definizione di  $G^{\mu\nu}$  come tensore duale di quello elettromagnetico che la componente 01 di uno dei due va a definire la componente 23 dell'altro.

Vengono tralasciati i calcoli per ottenere la metrica dato che essi saranno gli stessi utilizzati per il caso meno generale solo con alcune piccole variazioni si arriva a:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.16)$$

dove  $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + P^2$ . Si ottengono poi le intensità dei campi elettromagnetico e magnetoelettrico come componenti dei loro corrispettivi 4-potenziali, le componenti non nulle dei due saranno:

$$A_t = \frac{Q}{r}, \quad A_\varphi = -P \cos \theta \quad C_t = i \frac{P}{r} \quad C_\varphi = iQ \cos \theta$$

Notiamo che l'influenza del campo magnetico è simile a quella del campo elettrico e, andando a calcolare gli zeri della delta, si hanno tre possibilità:

- Nel caso in cui si ha  $M^2 > Q^2 + P^2$  la delta si annulla in due punti  $r_\pm$  che saranno:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - (Q^2 + P^2)}$$

è ovvio che questi equivalgono a due orizzonti degli eventi, il primo sarà l'orizzonte esterno mentre il secondo sarà quello di Cauchy.

- Nel caso  $M^2 = Q^2 + P^2$  i due orizzonti collassano in uno solo.
- Nel caso  $M^2 < Q^2 + P^2$  non si crea alcun orizzonte e si ha una singolarità nuda.

come ci si poteva aspettare le tre possibili configurazioni equivalgono perfettamente a quelle di un buco nero senza carica magnetica. Se ne deduce che gran parte delle considerazioni fatte nel capitolo precedente possono essere ampliate a questa possibilità con la semplice accortezza di sostituire alla carica  $Q$  un'ipotetica *carica generalizzata*  $E^2 = Q^2 + P^2$  senza alcun problema.

## Instabilità Magnetica

L'introduzione di carica magnetica nella teoria della relatività generale sembrerebbe non portare ad alcun risultato più complesso dell'introduzione di un termine  $P^2$  nella funzione  $\Delta$ . Ciò tuttavia non è vero, andando a studiarne il comportamento a seguito di perturbazioni, ci si accorge dell'instabilità di questa soluzione.

Prima di andare a trattare il caso più generale, però, consideriamo una particella monopolo di massa  $M_{\text{MON}} = v/e$  e carica magnetica  $P = 1/e$  dove  $e$  è la carica

dell'elettrone. Classicamente il monopolo avrà un centro di raggio  $(ev)^{-1}$  all'interno del quale il campo di Higgs devia dal suo valore nel vuoto e va ad applicare una correzione per rimuovere la singolarità nell'energia dovuta alla particella puntiforme, facendo estendere il campo magnetico di Coulomb verso l'interno. Se poniamo questa particella all'interno di un buco nero di Reissner-Nordström abbiamo la possibilità di avere  $r_+ < (ev)^{-1}$  per cui il buco nero risulta, a causa dell'estensione verso l'interno del campo di Coulomb, immerso nel monopolo; da un punto di vista energetico questa soluzione appare quella più conveniente.

Tornando ora al caso generale e andando a calcolare la stabilità della soluzione avente carica elettrica nulla e carica magnetica  $P = n/e$  a seguito di perturbazioni [9] studiando le fluttuazioni del funzionale azione. Da queste deriviamo che la stabilità della soluzione è assicurata se  $r_+ > \sqrt{n}/(ev)$ . Questa instabilità classica porta ad alcuni risultati importanti nell'evoluzione del buco nero, in assenza di essa si avrebbe una perdita di massa dovuta alla radiazione di Hawking finché questo non raggiunge la sua massa critica e, in quel momento, la sua temperatura di Hawking svanisce, a meno che non abbia perso carica magnetica. Ciò deve inevitabilmente equivalere alla creazione di una coppia monopolo-antimonopolo al di fuori dell'orizzonte con una particella che, cadendo al suo interno attratta dalla carica magnetica opposta, va a modificare  $P$ , mentre l'altra se ne va all'infinito. Le condizioni che rendono la produzione particella antiparticella significative sono però già incluse in quelle di instabilità classica. Pertanto un buco nero che sta evaporando continuerà a perdere massa e, più lentamente, carica magnetica, anche nell'ipotesi di stabilità la produzione particella-antiparticella all'esterno del buco nero andrà a modificare la sua carica e quindi tenderà a farlo diventare instabile. L'evaporazione del buco nero pertanto tenderà a continuare finché questo non avrà carica magnetica unitaria e, per la perdita di massa, il raggio dell'orizzonte esterno sarà finalmente minore di quello del cuore del monopolo; in questa maniera il buco nero è andato perduto e, al suo posto, rimane un monopolo non singolare. Per quanto detto fin'ora, riguardo stabilità e creazione di coppie di particelle all'esterno dell'orizzonte degli eventi, il *decadimento* in un monopolo appare come destino inevitabile di un buco nero a carica magnetica.



# Bibliografia

- [1] S. Carlip. «Black Hole Thermodynamics and Statistical Mechanics». In: *Physics of Black Holes: A Guided Tour*. A cura di Eleftherios Papantonopoulos. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 89–123.
- [2] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. 2004.
- [3] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford Classic Texts in the Ph. Clarendon Press, 1998.
- [4] G. Denardo e R. Ruffini. «On the energetics of Reissner Nordström geometries». In: *Physics Letters B* 45.3 (1973), pp. 259–262.
- [5] P.M. Dirac. «Quantised singularities in the electromagnetic field,» in: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 133.821 (1931), pp. 60–72. eprint: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/133/821/60.full.pdf>.
- [6] William A. Hiscock e Lance D. Weems. «Evolution of charged evaporating black holes». In: *Phys. Rev. D* 41 (4 1990), pp. 1142–1151.
- [7] B. V. Ivanov. «Static charged fluid spheres in general relativity». In: (2001). arXiv: [gr-qc/0109010](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0109010) [gr-qc].
- [8] L.D. Landau, E.M. Lifshits e A. Machov. *Teoria dei Campi*. Fisica Teorica v. 2. Editori Riuniti University Press, 2010.
- [9] Kimyeong Lee, V. P. Nair e Erick J. Weinberg. «A classical instability of Reissner-Nordström solutions and the fate of magnetically charged black holes». In: *Phys. Rev. Lett.* 68 (8 1992), pp. 1100–1103.
- [10] C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, 1973.
- [11] F. Moulin. «Magnetic monopoles and Lorentz force». In: *Nuovo Cim.* B116 (2001), pp. 869–877. arXiv: [math-ph/0203043](https://arxiv.org/abs/math-ph/0203043) [math-ph].
- [12] Yen Chin Ong. «Hiscock and Weems: Modeling the Hawking Evaporation of Asymptotically Flat Charged Black Holes». In: *Evolution of Black Holes in Anti-de Sitter Spacetime and the Firewall Controversy*. A cura di Yen Chin Ong. Springer Berlin Heidelberg, nov. 2016, pp. 101–119.
- [13] Maulik K. Parikh e Frank Wilczek. «Hawking radiation as tunneling». In: *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), pp. 5042–5045. arXiv: [hep-th/9907001](https://arxiv.org/abs/hep-th/9907001) [hep-th].

- 
- [14] Roger Penrose. «The Question of Cosmic Censorship». In: *Black Holes and Relativistic Stars*. A cura di R.M. Wald. University of Chicago Press, 1998. Cap. 5.
- [15] Subharthi Ray, Aquino L. Espindola, Manuel Malheiro, Jose P. S. Lemos e Vilson T. Zanchin. «Electrically charged compact stars and formation of charged black holes». In: *Phys. Rev. D* 68 (2003), p. 084004. DOI: [10.1103/PhysRevD.68.084004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.084004). arXiv: [astro-ph/0307262](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0307262) [astro-ph].
- [16] Zhao Ren, Zhang Li-Chun e Li Huai-Fan. «Hawking Radiation of Charged Particles in Reissner–Nordström Black Hole». In: *Communications in Theoretical Physics* 53.3 (2010), p. 499.
- [17] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [18] R. Tikekar e G. P. Singh. «An interior Reissner-Nordstrom metric on spheroidal space-times». In: *Grav. Cosmol.* 4 (1998), pp. 294–296.
- [19] P. C. Vaidya e Ramesh Tikekar. «Exact relativistic model for a superdense star». In: *Journal of Astrophysics and Astronomy* 3.3 (1982), pp. 325–334.



## **Ringraziamenti**

Ringrazio i miei genitori, mia sorella, i miei amici e tutti i miei coinquilini per il sostegno ed il supporto che mi hanno dato in questi tre e anni e soprattutto per la possibilità che ho avuto di vivere questa esperienza. Ringrazio i miei compagni, in particolare Chiara Bartolini per tutto l'aiuto, il sostegno e la gioia che mi ha dato, e Lorenzo Margotti che è stato un punto fermo nelle pause pranzo di questi tre anni. Ringrazio infine il professor Kamentchick per la sua disponibilità ed il suo aiuto come relatore.