

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

**P-punti nella compattificazione di  
Stone-Čech di  $\omega$**

Tesi di Laurea in Logica e Topologia

RELATORE:  
**Chiar.mo Prof.  
Stefano Francaviglia**

PRESENTATA DA:  
**Nicola Carissimi**

SESSIONE UNICA  
ANNO ACCADEMICO 2017/2018



# Introduzione

In questo elaborato studiamo l'aspetto topologico che sta dietro a un problema di indipendenza, ossia lo studio di un'asserzione che la teoria generata dagli assiomi di ZFC non contiene, come non contiene la sua negazione, a meno di non considerare ulteriori assunzioni. Più precisamente vedremo sotto quali condizioni possiamo mostrare l'esistenza di particolari ultrafiltri (detti p-punti) sull'insieme dei numeri naturali, i quali (gli ultrafiltri sui naturali) sono sottoinsiemi propri dell'insieme delle parti dei numeri naturali aventi proprietà di chiusura per intersezione e sovrainsiemi, e massimalità per inclusione. Studieremo quindi lo spazio degli ultrafiltri per poi osservare che esso non è che il caso particolare di una compattificazione di uno spazio topologico, di cui vedremo alcune importanti proprietà. In tale spazio compatto andremo allora a studiare le caratteristiche topologiche dei p-punti.

Ciò che risulta tuttavia valere per l'asserzione "esistono p-punti" è la non dimostrabilità né confutabilità a partire dai soli assiomi della teoria degli insiemi. Sui risultati topologici che mostrerò ci sarà quindi l'ombra costante della teoria dei modelli, gli oggetti principalmente usati nella tecnica del forcing, sulla quale a sua volta vi è l'ombra dei teoremi di incompletezza di Gödel. Vedremo quindi nel primo capitolo richiami ad alcune nozioni e alcuni fondamentali risultati, le cui dimostrazioni esulano lo scopo dell'elaborato ma sono tutte trovabili in [1], che ci permetteranno di portare avanti un discorso introduttivo sul forcing.

Il forcing è una tecnica che mira ad estendere un modello di una teoria (preciseremo il significato di tutti questi termini) per trovare modelli più grandi (insiemisticamente parlando) che risultino ancora modelli della stessa teoria, ma costruiti in modo da "forzare" un enunciato  $\varphi$  a essere vero (l'enunciato sarà quindi consistente con la teoria iniziale), e nel caso si trovi un'altra estensione che forzi il risultato in questione ad essere falso (l'estensione trovata è quindi un modello di  $\neg\varphi$ ), seguirà che né  $\varphi$ , né  $\neg\varphi$  appartengono alla nostra teoria, ossia, se la teoria in questione è una teoria assiomatica, come lo è ZFC,  $\varphi$  non può essere né provato né rifiutato a partire dagli assiomi.



# Indice

<b>1</b>	<b>Enunciati indipendenti</b>	<b>7</b>
1.1	Richiami di teoria dei modelli . . . . .	7
1.2	Richiami di teoria degli ordinali . . . . .	15
1.3	Un po' di forcing . . . . .	22
<b>2</b>	<b>P-punti</b>	<b>31</b>
2.1	Filtri e ultrafiltri . . . . .	31
2.2	CH implica l'esistenza di p-punti . . . . .	39
<b>3</b>	<b>La compattificazione di Stone-Čech</b>	<b>45</b>
3.1	Compattificazione di uno spazio . . . . .	45
3.2	Proprietà universale della compattificazione di Stone-Čech . . . . .	53
3.3	Immersione in cubi di uno spazio . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Compattificazione di Stone-Čech di <math>\omega</math></b>	<b>63</b>
4.1	Proprietà di $\beta\omega$ . . . . .	63
4.2	Studio topologico dei p-punti . . . . .	66



# Capitolo 1

## Enunciati indipendenti

### 1.1 Richiami di teoria dei modelli

Ricordiamo alcune nozioni di logica matematica, nell'ambito della logica del prim'ordine.

**Definizione 1.1.1** (alfabeto). Un *alfabeto*  $\Lambda$  della logica del prim'ordine è costituito dall'unione dei seguenti insiemi:

- *simboli logici* (comuni a tutti gli alfabeti della logica del prim'ordine).
- *simboli propri* (dell'alfabeto), la cui unione costituisce l'insieme  $S$  che caratterizza l'alfabeto  $\Lambda(S)$ .

I primi sono di tre tipi

1. simboli per *variabili*  $\{v_1, v_2, \dots\}$ , in un'infinità numberabile,
2. simboli per *connettivi*  $\{\neg, \vee\}$ ,
3. simbolo di *quantificazione*  $\{\forall\}$ .

Ed eventualmente parentesi e simboli ausiliari, non necessari poiché definibili mediante quelli elencati, come ulteriori connettivi ( $\Rightarrow, \wedge$ ), o il quantificatore  $\exists$ . I secondi constano invece di

1. simboli per *funzioni*  $k$ -arie  $\{f_i^k\}$ , finiti o numerabili, con numero di argomenti  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,
2. simboli per *costanti*  $\{c_i\}$ , finiti o numerabili,
3. simboli per *predicati*  $\{P_i^k\}$ , finiti o numerabili, ma almeno uno, con numero di argomenti  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

**Definizione 1.1.2** (termine). Un *termine* è definito ricorsivamente a partire da una variabile o una costante (variabili e costanti sono termini), per applicazione, con passaggi finiti, di funzioni  $k$ -arie a  $k$  termini ( $f(t_1, \dots, t_k)$  è un termine per ogni funzione  $k$ -aria).

**Definizione 1.1.3** (formula ben formata). Una *fbf* (*formula ben formata*) è definita ricorsivamente a partire da predicati applicati a termini ( $P(t_1, \dots, t_n)$  è una fbf, detta *atomica*) per applicazione (finita) di disgiunzione, negazione (se  $\varphi$  e  $\psi$  sono fbf, allora sono fbf  $\neg\varphi$  e  $\varphi \vee \psi$ ) e quantificazione di fbf (se  $x$  è una variabile e  $\varphi$  una fbf, allora  $\forall x\varphi$  è una fbf).

**Definizione 1.1.4** (sottoformule). Data una fbf  $\varphi$ :

- Se  $\varphi = P(t_1, \dots, t_k)$  l'unica sottoformula di  $\varphi$  è  $\varphi$  stessa.
- Se  $\varphi = \neg\psi$ , o  $\varphi = \chi \vee \psi$ , le sottoformule di  $\varphi$  sono  $\varphi$  stessa e rispettivamente  $\psi$ , o  $\chi$  e  $\psi$ .
- Se  $\varphi = \forall x\psi$  le sottoformule di  $\varphi$  sono  $\varphi$  e  $\psi$ .
- Sottoformule di sottoformule di  $\varphi$  sono sottoformule di  $\varphi$ .

**Definizione 1.1.5** (occorrenze di variabili libere e vincolate). Diremo che si ha un'*occorrenza* di una variabile  $x$  in una fbf  $\varphi$  ogni qualvolta essa viene scritta. Un'occorrenza di  $x$  è detta *vincolata* se  $x$  compare in una sottoformula di  $\varphi$  quantificata rispetto a  $x$  (i.e. della forma  $\forall x\varphi$  o  $\exists x\varphi$ , quest'ultimo definito come  $\neg\forall x\neg\varphi$ ). Un'occorrenza di  $x$  si dice libera se non è vincolata.

**Definizione 1.1.6** (variabili libere e vincolate). Una variabile in una fbf si dice *libera* se ha occorrenze libere, e *vincolata* se ha occorrenze vincolate.

**Osservazione 1.1.7.** Contrariamente a quanto vale per le singole occorrenze, una variabile in una fbf può essere sia libera che vincolata.

**Definizione 1.1.8** (enunciato). Una fbf  $\varphi$  è detta *enunciato* se in essa non compaiono variabili libere.

**Definizione 1.1.9** (chiusura universale). Data una fbf  $\varphi$  in cui compaiono variabili libere  $x_1, \dots, x_n$ , chiamiamo *chiusura universale* di  $\varphi$  l'enunciato  $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ , abbreviato in  $\forall\varphi$ . La chiusura universale di un enunciato è l'enunciato stesso.

**Definizione 1.1.10** (interpretazione). Dato un alfabeto  $\Lambda(S)$ , un'*interpretazione* è una coppia  $\mathcal{I}=(M, I)$ , ove  $M$  è un insieme non vuoto, e  $I$  una funzione definita su  $S$  a valori in  $M$  tale che:

- $(P^{\mathcal{I}} :=) I(P) \subset M^n$  per ogni  $P$  predicato  $n$ -ario,
- $(c^{\mathcal{I}} :=) I(c) \in M$  per ogni  $c$  simbolo di costante,
- $(f^{\mathcal{I}} :=) I(f) : M^n \rightarrow M$  per ogni  $f$  funzione  $n$ -aria.

**Definizione 1.1.11** (assegnazione a variabili). Una *assegnazione alle variabili* è una funzione  $\sigma$  definita sulle variabili e a valori in  $M$  (con notazione  $\sigma(v_i) = v_i^\sigma$ ).

**Definizione 1.1.12** (varianti di assegnazione). Data una variabile  $x$  e un'assegnazione  $\sigma$ , un' *$x$ -variante* di assegnazione di  $\sigma$  è una assegnazione  $\tau$  tale che  $\tau(y) = \sigma(y)$  per ogni  $y \neq x$ .

**Osservazione 1.1.13.** Chiaramente  $x$  non è tra i  $v_i$  come simbolo, stiamo solo usando il metalinguaggio per indicare una generica variabile.

Con questi due strumenti possiamo quindi interpretare in  $M$  anche i termini:

**Definizione 1.1.14** (assegnazione a termini).

$$t^{\mathcal{I},\sigma} := \begin{cases} c^{\mathcal{I}}, & \text{se } t = c, \\ v^\sigma, & \text{se } t = v, \\ f^{\mathcal{I}}(s_1^{\mathcal{I},\sigma} \dots s_n^{\mathcal{I},\sigma}), & \text{se } t = f(s_1, \dots, s_n). \end{cases}$$

ove  $t = f(s_1, \dots, s_n)$  è una funzione  $n$ -aria applicata a termini  $s_1, \dots, s_n$ .

**Definizione 1.1.15** (soddisfacibilità). Diremo che una fbf  $\varphi$  è *soddisfatta* da  $\mathcal{I}$  e  $\sigma$  (in simboli  $\mathcal{I}, \sigma \models \varphi$ ) quando:

- se  $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ , allora  $(t_1^{\mathcal{I},\sigma}, \dots, t_n^{\mathcal{I},\sigma}) \in (P)^{\mathcal{I}}$
- se  $\varphi = \neg\chi$ , allora non vale  $\mathcal{I}, \sigma \models \chi$  (brevemente  $\mathcal{I}, \sigma \not\models \chi$ )
- se  $\varphi = \chi \vee \psi$ , allora  $\mathcal{I}, \sigma \models \chi$  oppure  $\mathcal{I}, \sigma \models \psi$
- se  $\varphi = \forall x\psi$ , allora per ogni  $\tau$   $x$ -variante di  $\sigma$  si ha  $\mathcal{I}, \tau \models \psi$

(Diremo che  $\varphi$  è *soddisfacibile* in  $\mathcal{I}$  se esiste  $\sigma$  tale che  $\mathcal{I}, \sigma \models \varphi$ ).

Segue da ciò la fondamentale

**Definizione 1.1.16** (modello). Diremo che un'interpretazione  $\mathcal{I}$  è un *modello* per una fbf  $\varphi$  se  $\mathcal{I}, \sigma$  la soddisfa per ogni assegnazione  $\sigma$  ( $\varphi$  sarà quindi detta *vera* in  $\mathcal{I}$ ). La notazione usata sarà  $\mathcal{I} \models \varphi$ .

Si chiamerà quindi modello per un insieme di fbf un modello per ciascuna fbf dell'insieme, e useremo, per un insieme di fbf  $\Psi$  e una fbf  $\chi$ , la notazione  $\Psi \models \chi$  se ogni modello di  $\Psi$  è anche un modello di  $\chi$ , e diremo che  $\chi$  è *conseguenza logica* di  $\Psi$ . Ci riferiremo spesso a un modello indicando soltanto l'insieme soggiacente se ciò non creerà confusione.

**Osservazione 1.1.17.** Si può mostrare per induzione sulla complessità di  $\varphi$  che date due assegnazioni  $\sigma$  e  $\tau$   $x$ -varianti l'una dell'altra e un'interpretazione  $\mathcal{I}$ , se  $x$  non occorre libera in  $\varphi$ , allora

$$\mathcal{I}, \sigma \models \varphi \text{ se e solo se } \mathcal{I}, \tau \models \varphi.$$

Un'importante e immediata conseguenza è il seguente teorema.

**Teorema 1.1.18.** *Fissata un'interpretazione  $\mathcal{I}$  un enunciato  $\varphi$  è soddisfatto ( $\mathcal{I}, \sigma \models \varphi$ ) o per ogni assegnazione  $\sigma$  o per nessuna.*

Che si può formulare anche dicendo che per ogni enunciato  $\varphi$  vale esattamente uno tra  $\mathcal{I} \models \varphi$  e  $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ . Vale inoltre il seguente risultato:

**Teorema 1.1.19.** *Una fbf  $\varphi$  è vera in una interpretazione  $\mathcal{I}$  se e solo se è vera per ogni variabile  $x$  la fbf  $\forall x\varphi$  nella stessa interpretazione.*

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{I}, \sigma \models \varphi$  per ogni assegnazione  $\sigma$ , sarà in particolare vero per una data assegnazione  $\sigma_0$ . Da ciò  $\mathcal{I}, \tau \models \varphi$  per ogni  $\tau$   $x$ -variante di  $\sigma_0$ . Allora  $\mathcal{I}, \sigma_0 \models \forall x\varphi$ , e la prima implicazione segue dall'arbitrarietà di  $\sigma_0$ . Viceversa se per ogni assegnazione  $\sigma$  vale  $\mathcal{I}, \sigma \models \forall x\varphi$ , allora ciò varrà in particolare per una certa assegnazione  $\sigma_0$ . Ora essendo  $\sigma_0$   $x$ -variante di se stessa, si ha  $\mathcal{I}, \sigma_0 \models \varphi$ , e si conclude ancora per genericità di  $\sigma_0$ .  $\square$

Vediamo ora una definizione più fine di variabile libera:

**Definizione 1.1.20** (termine libero per una variabile in una fbf). Un termine  $t$  si dice *libero per una variabile  $x$  in una fbf  $\varphi$*  se nessuna occorrenza libera di  $x$  si trova in una sottoformula quantificata rispetto a una variabile che occorre in  $t$ .

**Osservazione 1.1.21.** Una difficoltà nella formalizzazione dello studio delle fbf consiste nel definire correttamente le sostituzioni, ossia studiare con precisione come si può attuare senza alterare il significato di una fbf  $\varphi$  la sostituzione di una sua variabile  $x$  libera in  $\varphi$  con un termine  $t$ . Per fare ciò è sostanzialmente richiesto che  $t$  sia libero per  $x$  in  $\varphi$ . Più precisamente:

**Definizione 1.1.22** (sostituzione in termini e fbf). Per un termine  $s$  la sostituzione di una variabile  $x$  con un termine  $t$  si ottiene semplicemente sostituendo a tutte le occorrenze di  $x$  il termine  $t$ , e indicheremo la sostituzione con  $s[x|t]$  o  $s(t)$ . Per una fbf  $\varphi$ , la sostituzione di una variabile  $x$  con un termine  $t$  libero per  $x$  in  $\varphi$  è ottenuta sostituendo con  $t$  tutte e sole le occorrenze libere di  $x$  in  $\varphi$ . Anche in tal caso il risultato è indicato con  $\varphi[x|t]$  o  $\varphi(t)$ .

E quello appena descritto è un procedimento che può sembrare banale ma in realtà estremamente utile e spesso indispensabile. Sintatticamente simile ma dal significato completamente diverso è invece la seguente operazione di rinomina, applicata alle variabili *vincolate*.

**Definizione 1.1.23** (rinomina di variabili vincolate). Data una fbf quantificata (da un quantificatore  $Q \in \{\forall, \exists\}$ )  $Qx\varphi$ , una sua *rinomina* è una fbf  $Qy\varphi[x|y]$ , ove  $y$  è una variabile (in particolare un termine) libera per  $x$  in  $\varphi$ , che non ha occorrenze libere in  $Qx\varphi$ .

**Definizione 1.1.24** (predicato di uguaglianza). Chiamiamo *predicato di uguaglianza* di un alfabeto  $\Lambda$  un particolare simbolo per predicato binario  $P$  che venga interpretato solo da interpretazioni che siano modello dei seguenti due enunciati:

1.  $\forall v_0(P(v_0, v_0))$
2.  $\forall[\forall x, y(P(x, y) \Rightarrow (\varphi[u|x] \Rightarrow \varphi[u|y]))]$

per ogni fbf  $\varphi$  e  $x, y$  libere per  $u$  in  $\varphi$ .

**Osservazione 1.1.25.** Notiamo che l'interpretazione tramite  $\mathcal{I} = (M, I)$  del predicato di uguaglianza ( $=^{\mathcal{I}}$ ) è un sottoinsieme di  $M \times M$ , ma non è garantito a priori che tale sottoinsieme sia proprio l'identità su  $M$ , cioè  $\{(m, m), m \in M\}$ .

**Esempio 1.1.26.** Sia la fbf  $\varphi : 4n = 2n + 2$ , ove  $n$  è un simbolo di variabile, 2 e 3 sono simboli per costanti (tutti metalinguistici),  $=$  è il predicato di uguaglianza. Consideriamo l'interpretazione  $\mathcal{M} = (M, I) = (\mathbb{N}, I)$ , ove  $I$  interpreta i simboli di costante  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  con i numeri naturali  $i$ , le funzioni di somma e prodotto in modo standard ( $I(+)$  :  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  somma di numeri naturali. così come il prodotto). L'assegnazione  $\sigma$ , definita sulle variabili, che manda  $n$  (quale che sia tra i  $v_i$  come effettivo simbolo di variabile nel linguaggio) nel numero naturale 1, è tale che  $\mathcal{M}, \sigma$  soddisfa  $\varphi$ , ma chiaramente  $\mathcal{M}$  non è un modello per  $\varphi$ , perché non tutte le assegnazioni di valori alle variabili rendono  $\varphi$  vera in  $\mathcal{M}$ .

**Esempio 1.1.27.** Sia la fbf  $\varphi : 0\mathcal{R}n$ , con interpretazione  $\mathcal{M} = (M, I) = (\mathbb{N}, I)$ , ove  $I$  interpreta i simboli di costante con i rispettivi numeri naturali (come nell'esempio precedente) e il simbolo di predicato binario  $\mathcal{R}$  come sottoinsieme di  $\mathbb{N}^2$  dato dalle coppie  $\{(p, q); p \leq q\}$ . È quindi chiaro che per qualunque assegnazione  $\tau$  di valori alle variabili,  $\varphi$  è soddisfatta da  $\mathcal{M}, \tau$ , cioè  $\mathcal{M}$  è un modello per  $\varphi$ .

Quanto riguarda il problema della dimostrazione di un risultato, e quindi della definizione di una teoria, viene affrontato classicamente mediante l'uso di particolari assunzioni, più precisamente si definisce un sistema di derivazione, ma i risultati che si possono dimostrare usando uno di tali particolari sistemi non perderanno di generalità a patto che i sistemi godano di particolari proprietà (che vedremo per il sistema che stiamo per usare) che li rendono sostanzialmente equivalenti.

**Definizione 1.1.28** (regola di derivazione). Una *regola di derivazione*  $\mathcal{R}$  è una coppia di insiemi finiti di fbf, il primo eventualmente vuoto, il secondo non vuoto, le prime dette *premesse*, le seconde *conclusioni*.

**Definizione 1.1.29** (sistema di derivazione). Un *sistema di derivazione*  $\mathcal{S}$  è un insieme finito non vuoto di regole di derivazione.

**Definizione 1.1.30** (dimostrazione). Una *dimostrazione* in  $\mathcal{S}$  da premesse in un insieme di fbf  $\Phi$  è una  $n$ -upla di fbf  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , ognuna delle quali risulta essere

- una fbf in  $\Phi$ ,
- una fbf tra le conclusioni di una regola di derivazione  $\mathcal{R} \in \mathcal{S}$  le cui premesse compaiano tutte tra le fbf che la precedono nella dimostrazione.

L'ultimo elemento, cioè  $\varphi_n$ , di una dimostrazione  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  è detto *teorema*, e chiamiamo *teoria* un insieme di fbf chiuso per dimostrazione (i.e. se da premesse nella teoria si dimostra una fbf, questa appartiene ancora alla teoria). Indichiamo la dimostrazione in un sistema  $\mathcal{S}$  di una fbf  $\varphi$  da premesse in  $\Phi$  con  $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ .

Il sistema di derivazione che esponiamo, senza entrare particolarmente nel dettaglio, è quello di Hilbert-Ackermann (HA), che usa, oltre alle regole di derivazione, un'impostazione assiomatica: più precisamente valgono le definizioni seguenti.

**Definizione 1.1.31** (assiomi proposizionali). Date  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi$  fbf qualsiasi, sono assiomi

1.  $(\varphi \vee \varphi) \Rightarrow \varphi$
2.  $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$
3.  $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$
4.  $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow ((\psi \vee \varphi_1) \Rightarrow (\psi \vee \varphi_2))$

**Definizione 1.1.32** (assiomi della quantificazione). date  $\varphi, \psi$  fbf qualsiasi,  $x$  e  $y$  variabili qualunque e  $t$  un termine, sono assiomi

1.  $(\forall x\varphi) \Rightarrow (\varphi[x|t])$ , se  $t$  è libero per  $x$  in  $\varphi$
2.  $(\forall x(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x\psi))$ , se  $x$  non occorre libero in  $\varphi$

Tali sei (schemi di) assiomi sono complessivamente detti *assiomi logici*, per quanto riguarda le regole di derivazioni del sistema HA, queste sono solo due:

**Definizione 1.1.33** (regole di derivazione di HA). Definiamo per HA le seguenti regole di derivazione

- Modus Ponens:  $(\{(\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi)\}, \{\psi\})$
- Generalizzazione:  $(\{\varphi\}, \{\forall x\varphi\})$

ove  $\varphi, \psi$  sono fbf qualunque e  $x$  è una variabile qualunque.

I principali risultati che sussistono riguardo a questa impostazione assiomatica sono due, il primo ci dice in qualche modo che per come l'abbiamo costruito il nostro sistema è coerente con ciò che vogliamo poter dimostrare.

**Teorema 1.1.34** (correttezza di HA). *Il sistema HA è corretto, ossia se le premesse di una dimostrazione in HA sono vere in una certa interpretazione, allora sono vere anche le conclusioni nella stessa interpretazione. Cioè*

$$\Psi \vdash_{HA} \varphi \text{ implica } \Psi \models \varphi.$$

Questo risultato ci permette tra le altre cose, in virtù del fatto che una fbf è vera in una interpretazione se e solo se è vera la sua chiusura universale (che è un enunciato), di considerare una teoria limitandoci solo ai suoi enunciati. Chiameremo *teoria del prim'ordine* una teoria generata dagli assiomi logici di HA e gli assiomi propri (della teoria). Diamo allora, prima del secondo importante risultato riguardante HA così come tutta la logica del prim'ordine, alcune altrettanto importanti definizioni e teoremi che ci permetteranno di approcciarci ai problemi di indipendenza.

**Osservazione 1.1.35.** Le definizioni che seguiranno non specificano il sistema di derivazione in cui si lavora, tale libertà sarà giustificata dal Teorema 1.1.40.

**Definizione 1.1.36** (consistenza). Un insieme di enunciati  $\Psi$  è detto *consistente* se non è possibile derivare da esso una contraddizione, ossia

$$\nexists \chi (\Psi \vdash (\chi \wedge \neg \chi)).$$

**Definizione 1.1.37** (indipendenza). Un enunciato  $\varphi$  è *indipendente* da un insieme di enunciati  $\Psi$  se

$$(\Psi \not\vdash \varphi) \wedge (\Psi \not\vdash \neg \varphi).$$

In tal caso sia  $\Psi \cup \{\varphi\}$  che  $\Psi \cup \{\neg \varphi\}$  sono consistenti, infatti vale la seguente proposizione.

**Proposizione 1.1.38.**  $\Psi \not\vdash \varphi$  se e solo se  $\Psi \cup \{\neg \varphi\}$  è consistente.

*Dimostrazione.* Se  $\Psi \vdash \varphi$  è chiaro che  $\Psi \cup \{\neg \varphi\} \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$ , viceversa se  $\Psi \cup \{\neg \varphi\}$  non fosse consistente da esso si potrebbe derivare  $\chi \wedge \neg \chi$ , ma da una contraddizione (fbf mai vera, in nessuna interpretazione) si può chiaramente derivare qualunque fbf, compresa  $\varphi$ .  $\square$

**Teorema 1.1.39** (del modello). *Un insieme di enunciati  $\Psi$  è consistente se e solo se esiste un modello  $\mathcal{I} \models \Psi$ .*

La parte significativa di quest'ultimo teorema è quella che a partire dalla consistenza ci garantisce l'esistenza di un modello, mentre l'altra implicazione segue facilmente dalla definizione di modello. Una facile conseguenza è l'altro importante risultato che riguarda HA, e che rende la costruzione di una teoria in qualche modo svincolata dallo specifico sistema di derivazione che si usa (purché adeguato, come stiamo per vedere che lo è HA), ed è il seguente teorema.

**Teorema 1.1.40** (completezza di HA). *Se  $\Phi$  è un insieme di enunciati e  $\varphi$  è un enunciato*

$$\Phi \models \varphi \text{ implica } \Phi \vdash_{HA} \varphi.$$

La doppia implicazione segue allora dalla correttezza. Per tale motivo questo risultato è spesso detto anche Teorema di completezza della logica del prim'ordine.

**Teorema 1.1.41** (compattezza). *Un insieme di enunciati ha un modello se e solo se ha un modello ogni suo sottoinsieme finito.*

Da non confondere con la completezza intesa nel Teorema 1.1.40, è la seguente nozione

**Definizione 1.1.42** (completezza secondo Hilbert-Post). Un insieme di enunciati  $\Psi$  è detto *completo* secondo Hilbert-Post se per ogni enunciato  $\varphi$ , esattamente uno tra  $\varphi$  e  $\neg\varphi$  è dimostrabile da premesse in  $\Psi$ . Nel caso tale insieme di enunciati sia una teoria  $\mathcal{T}$ , chiaramente, essa si dirà completa quando esattamente uno tra  $\varphi$  e  $\neg\varphi$  appartiene a  $\mathcal{T}$ .

E finalmente, detta ZFC la teoria del prim'ordine (generata quindi da assiomi logici, per esempio quelli di HA, e propri, che non trattiamo in dettaglio e daremo all'occorrenza per noti), con uguaglianza (le sue fbf sono costruite a partire da un alfabeto in cui vi sia il predicato di uguaglianza) e con altro unico simbolo proprio il predicato binario  $\in$ , si hanno i due seguenti casi particolari dei teoremi di incompletezza:

**Teorema 1.1.43** (primo teorema di incompletezza di Gödel per ZFC). *ZFC è incompleta, cioè esistono enunciati nel linguaggio della teoria degli insiemi  $\varphi$  tali che né  $\varphi$ , né  $\neg\varphi$  appartengono alla teoria.*

**Osservazione 1.1.44.** Si noti bene che il fatto che ogni interpretazione  $\mathcal{I}$  soddisfi necessariamente un enunciato  $\varphi$  o la sua negazione  $\neg\varphi$  (1.1.18), non è in contraddizione con l'esistenza di enunciati che non sono conseguenza logica di un insieme di fbf. Anche ammesso che ZFC abbia un modello (si veda poi il risultato successivo), tale modello sarà certamente un modello di una tra  $\varphi$  e  $\neg\varphi$ , ma non è necessariamente detto che esattamente uno di essi sia un teorema di ZFC.

**Teorema 1.1.45** (secondo teorema di incompletezza di Gödel per ZFC). *La consistenza di ZFC non è dimostrabile in ZFC.*

Equivalentemente (grazie al Teorema 1.1.39) possiamo affermare che l'esistenza di un modello di ZFC non è dimostrabile in ZFC.

## 1.2 Richiami di teoria degli ordinali

Ricordiamo alcune definizioni e alcuni risultati fondamentali che ci permetteranno di lavorare con il concetto di cardinalità.

**Definizione 1.2.1** (buon ordine). Un *insieme ben ordinato*  $(A, <)$ , o semplicemente  $A$  se si sottintende l'ordine, è un insieme linearmente ordinato per cui ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo.

**Definizione 1.2.2** (successori e limiti). Dato un insieme ben ordinato  $X$ , e  $x \in X$ , che non sia il massimo di  $X$  (non tutti gli insiemi ben ordinati hanno il massimo), definiamo il *successore* di  $x$  come il minimo (che esiste perché  $X$  è ben ordinato) del sottoinsieme di  $X$   $\{y \in X \text{ t.c. } y > x\}$  (non vuoto perché  $x$  non è massimo). Indichiamo spesso con  $x + 1$  il successore di  $x$ . Inoltre detto  $0$  il minimo di  $X$ , se un elemento  $x \in X$  non è un successore di nessun altro elemento ed è diverso da  $0$ , allora diremo di  $x$  che è un *limite*.

**Definizione 1.2.3** (isomorfismo d'ordine). Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra insiemi ben ordinati è detto *isomorfismo d'ordine* (o semplicemente *isomorfismo*) se è biettiva e monotona. Due insiemi ben ordinati si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo tra essi.

**Osservazione 1.2.4.** La relazione di isomorfismo è una relazione d'equivalenza: l'identità è un isomorfismo tra  $X$  e se stesso, la funzione inversa di un isomorfismo tra due insiemi ben ordinati (da  $X$  a  $Y$ ) è un isomorfismo da  $Y$  a  $X$  e la composizione di funzioni biettive e monotone è una funzione biettiva e monotona.

**Definizione 1.2.5** (ordinale). Dato un insieme ben ordinato  $X$ , la classe di isomorfismo  $\alpha = [X]$  è detta *ordinale*.

**Teorema 1.2.6** (induzione transfinita). *Sia  $(C, <)$  un insieme ben ordinato e  $P(x)$  una fbf con variabile libera  $x$ , che possiamo pensare come una qualunque proprietà. Se*

$$\forall a \in C (\forall b \in C (b < a \Rightarrow P(b))) \Rightarrow P(a),$$

*allora*

$$\forall a \in C (P(a)).$$

*Dimostrazione.* Sia l'insieme  $A = \{a \in C \text{ t.c. } \neg P(a)\}$ , se per assurdo  $A \neq \emptyset$ , essendo  $C$  ben ordinato esiste un minimo per  $A$ , diciamo  $a$ , allora per minimalità ogni elemento più piccolo non sta in  $A$ , ossia  $\forall b \in C (b < a \Rightarrow P(b))$ , e quindi per ipotesi vale anche  $P(a)$ , contraddicendo il fatto che  $a \in A$ .  $\square$

Vogliamo ora giungere a dimostrare che la classe degli ordinali è ben ordinata. Risulta necessario parlare di classe poiché supporre che tutti gli ordinali costituiscano gli elementi di un insieme conduce a un caso particolare del paradosso di Russel, noto come paradosso di Burali-Forti, intendiamo comunque mostrare in sostanza che ogni sottoinsieme proprio di questa classe è ben ordinato. Definiamo pertanto un ordine su un qualunque insieme di ordinali.

**Definizione 1.2.7** (segmenti). Chiamiamo *segmento* di un insieme ben ordinato  $X$  un insieme della forma

$$[a, b) = \{x \in X \text{ t.c. } a \leq x < b\},$$

detto  $0$  il minimo di  $X$ , un segmento  $[0, b)$ ,  $b \in X$  è detto *segmento iniziale* (definiamo segmento iniziale di  $X$  anche  $X$  stesso).

**Definizione 1.2.8** (ordine sugli ordinali). Chiamiamo segmento (iniziale) di un ordinale  $\alpha = [X]$  la classe di isomorfismo di un segmento (iniziale) di  $X$ . Più precisamente se  $\alpha = [X]$  allora  $\beta$  è detto segmento iniziale di  $\alpha$  se esiste  $Y$ , con  $\beta = [Y]$ , la cui classe di isomorfismo è la classe di isomorfismo di un segmento iniziale di  $X$ . Diremo per due ordinali  $\beta$  e  $\alpha$  che

$$\beta \prec \alpha$$

se e solo se  $\beta$  è un segmento iniziale di  $\alpha$ .

Mostriamo che la relazione  $\prec$  è una relazione d'ordine: è infatti riflessiva (immediato dalla definizione), transitiva, poiché se  $[X] \prec [Y]$  e  $[Y] \prec [Z]$ , allora  $X$  è isomorfo a un segmento iniziale di  $Y$ , che è isomorfo a un segmento iniziale di  $Z$ , e allora la composizione degli isomorfismi è un isomorfismo tra  $X$  e un segmento iniziale di  $Z$ , e antisimmetrica: per mostrarlo premettiamo il seguente risultato che ci servirà anche in seguito.

**Lemma 1.2.9.** *Dato un insieme ben ordinato  $(X, \leq)$ , un sottoinsieme  $Z \subseteq X$ , e un isomorfismo d'ordine  $f : X \rightarrow Z$ . Allora vale per ogni  $x \in X$  che  $x \leq f(x)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $T = \{x \in X \text{ t.c. } f(x) < x\}$ , mostriamo che  $T = \emptyset$ . Se per assurdo non fosse vuoto, allora in quanto sottoinsieme di  $X$ ,  $T$  ha un minimo, diciamo  $x_0$ , per cui vale  $f(x_0) < x_0$ . Sia allora  $x_1 = f(x_0)$ . Essendo  $f$  un isomorfismo d'ordine si ha (da  $x_1 < x_0$ ) che  $f(x_1) < f(x_0) = x_1$ , e quindi  $x_1 \in T$ , il che contraddice la minimalità di  $x_0$ .  $\square$

Una conseguenza è il seguente teorema.

**Teorema 1.2.10.** *Dato un insieme ben ordinato  $Y$  e un suo segmento iniziale proprio  $X = [0, a)$ ,  $a \in Y$ , allora non esiste un isomorfismo d'ordine tra i due.*

*Dimostrazione.* Sia per assurdo un isomorfismo tra  $Y$  e  $X$ . Vale per il lemma appena mostrato che per ogni  $y$  in  $Y$  si ha  $y \leq f(y)$ , in particolare  $a \leq f(a)$ , e allora, essendo il codominio di  $f$  proprio  $X$ , vale  $f(a) \in X$ , e quindi  $f(a) < a$ , ma questo contraddice il lemma. Pertanto  $X$  e  $Y$  stanno in classi di isomorfismo differenti.  $\square$

Allora sia  $\alpha \prec \beta$  e  $\beta \prec \alpha$ . La definizione di  $\alpha \prec \beta$  ci dice che se  $\alpha = [X]$ , allora  $X$  è segmento iniziale di un certo  $Y$ , con  $[Y] = \beta$ , che a sua volta, da  $\beta \prec \alpha$  è segmento iniziale di un certo  $X'$ , con  $[X'] = \alpha$ , pertanto  $X$  è un segmento iniziale di  $X'$ . Se supponiamo per assurdo che  $X$  sia un segmento iniziale proprio di  $Y$ , segue il fatto che  $X$  è un segmento iniziale proprio di  $X'$ , ma ciò è assurdo per il Teorema 1.2.10, poiché essi stanno nella stessa classe di equivalenza, cioè  $\alpha$ . Si ha quindi  $[X] = [Y]$ , da cui  $\alpha = \beta$ . Vediamo allora una nozione che ci caratterizzerà gli ordinali in modo più costruttivo.

**Definizione 1.2.11** (insieme transitivo). Un insieme  $X$  si dice  $\in$ -transitivo se per ogni  $x \in X, y \in x$  vale  $y \in X$ , cioè vale l'implicazione

$$y \in x \in X \Rightarrow y \in X.$$

**Osservazione 1.2.12.** Una condizione equivalente è richiedere che  $x \in X \Rightarrow x \subseteq X$  (i.e.  $X \subseteq \mathcal{P}(X)$ ), infatti se vale la transitività, dato  $x \in X$  si ha che per ogni  $y \in X$  vale  $y \in X$ , perciò  $x \subseteq X$ . Viceversa se  $x \in y \in X$ , essendo per ipotesi  $y \subseteq X$ , si avrà che  $x$  è un elemento di un sottoinsieme di  $X$ , e quindi  $x \in X$ .

**Definizione 1.2.13** (insieme di Von Neumann). Un insieme  $X$  è detto *di Von Neumann* se è  $\in$ -transitivo e ben ordinato dalla relazione di appartenenza.

**Lemma 1.2.14.** *L'unione di insiemi di Von Neumann è un insieme di Von Neumann.*

*Dimostrazione.* Sia  $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ , con  $X_i$  di Von Neumann. mostriamo che è un insieme transitivo e ben ordinato da  $\in$ . Per la transitività sia  $y \in x \in X$ , allora esiste  $j$  per cui  $x \in X_j$ , e per transitività di  $X_j$  si ha  $x \subseteq X_j$ , da cui  $y \in X_j$  e quindi  $y \in X$ . Veniamo al buon ordinamento: sia un suo sottoinsieme non vuoto  $A$ , dato un suo elemento  $a_0 \in A$ , si ha  $a_0 \in X$ , e quindi  $a_0 \in X_i$  per qualche  $i \in I$  (e dalla transitività di  $X_i$  segue  $a_0 \subseteq X_i$ ), oppure  $a_0 = X_i$ . In ogni caso  $a_0 \subseteq X_i$ . Ha perciò senso considerare l'intersezione  $a_0 \cap A$ , e siamo allora davanti a due possibilità: o tale intersezione è vuota, e allora siamo nelle condizioni di affermare che  $a_0$  è il minimo che cerchiamo, infatti un elemento  $a$  è minimale in  $A$  se e solo se nessun elemento che appartiene ad  $a$  appartiene anche ad  $A$ , cioè se e solo se  $a \cap A = \emptyset$ . Tuttavia potrebbe anche essere  $a_0 \cap A \neq \emptyset$ , in tal caso  $\exists a_1 \in (a_0 \cap A) \subseteq a_0$ . Vale allora sia  $a_1 \in a_0$  che  $a_1 \in A$ , e come prima può valere che l'intersezione  $a_1 \cap A$  sia vuota o non vuota, se è vuota abbiamo vinto, altrimenti proseguiamo, trovando un elemento  $a_2 \in a_1 \in a_0$  e così via... Allora un elemento minimale (i.e. un elemento  $a \in A$  tale che  $a \cap A = \emptyset$ ) deve necessariamente esistere, finiamo

altrimenti (nel caso  $A$  sia infinito, altrimenti il problema non sussiste) per costruire una successione  $\in$ -decrecente

$$\dots \in a_{n+1} \in a_n \in \dots \in a_1 \in a_0,$$

e ciò è assurdo poiché contro l'assioma di buona fondazione (ogni insieme è ben fondato, vedi Definizione 1.3.2).  $\square$

**Teorema 1.2.15.** *Ogni famiglia di insiemi di Von Neumann è ben ordinata da  $\in$ .*

*Dimostrazione.* Il risultato segue osservando che ogni sottoinsieme  $B \subseteq A$  di un insieme ben ordinato  $(A, <)$  è chiaramente ben ordinato dalla stessa relazione d'ordine ristretta a  $B \times B$ , e dal fatto che ogni insieme di insiemi di Von Neumann è un sottoinsieme di un insieme di Von Neumann. Vediamo allora di mostrare questo secondo risultato: sia  $V = \{X_i\}_{i \in I}$  una famiglia di insiemi di Von Neumann e consideriamo la particolare unione

$$X = \bigcup_{i \in I} (X_i \cup \{X_i\}).$$

Vale chiaramente che  $V \subseteq X$ , e il risultato segue quindi dal Lemma 1.2.14, osservando che  $X_i \cup \{X_i\}$  è ancora un insieme di Von Neumann, è infatti  $\in$ -transitivo poiché se  $h \in k \in X_i \cup \{X_i\}$ , allora  $k \in X_i \vee k = X_i$ , in ogni caso per transitività  $k \subseteq X_i$ , quindi essendo  $h \in k$  vale anche  $h \in X_i \subseteq (X_i \cup \{X_i\})$ , e quindi  $h \in (X_i \cup \{X_i\})$ , per quanto riguarda il buon ordinamento un sottoinsieme di  $X_i \cup \{X_i\}$  è un sottoinsieme  $A$  di  $X_i$ , che ha minimo, al quale al più è stato aggiunto  $X_i$  come elemento, al quale appartengono tutti gli altri elementi di  $A$ , e che quindi non inficia l'esistenza del minimo.  $\square$

**Teorema 1.2.16.** *A ogni insieme di Von Neumann corrisponde uno e un solo ordinale, e viceversa.*

*Dimostrazione.* Dato un insieme di Von Neumann  $X$  costruiamo esplicitamente la relazione nel modo più naturale, ossia associando a  $X$  la propria classe di isomorfismo:

$$\alpha_X = [X].$$

Quello trovato è un ordinale in quanto classe di isomorfismo di un insieme di Von Neumann, che è ben ordinato. L'unicità viene osservando il fatto che ordinali di Von Neumann differenti  $X$  e  $Y$  sono uno elemento (e sottoinsieme proprio) dell'altro, di più, sono uno segmento iniziale dell'altro, infatti vale

$$X = [0, X) = \{y \in Y \text{ t.c. } y \in X\},$$

che è proprio la sintassi di segmento iniziale. Allora grazie al Teorema 1.2.10 ciò implica anche che le rispettive classi di isomorfismo sono distinte. Veniamo allora al viceversa: vogliamo associare ad ogni ordinale uno e un solo insieme di Von Neumann. Per farlo, dato un ordinale  $\alpha$ , costruiamo esplicitamente un isomorfismo d'ordine tra l'insieme ben ordinato di cui  $\alpha = [W]$  è classe di isomorfismo e un insieme di Von Neumann. Definiamo allora  $F$  una funzione definita su  $(W, <)$  che a ogni  $x \in W$  associa (se esiste) l'insieme di Von Neumann  $X$  (unico per quanto appena osservato) isomorfo al segmento iniziale  $[0, x)$  di  $W$ . Mostriamo che tale  $X$  esiste sempre: se l'insieme  $\{x \in W \text{ t.c. non esiste un insieme di Von Neumann } X \text{ isomorfo a } [0, x)\}$  fosse non vuoto, avrebbe un minimo  $x_0$ , tale che per ogni  $x \in W$ ,  $x < x_0$  esiste un insieme di Von Neumann  $X$  e un isomorfismo  $f_x : X \rightarrow [0, x)$ , e siamo davanti a due casi:

- se  $x_0 = \bar{x} + 1$  è un successore consideriamo  $f_{x_0} = f_{\bar{x}} \cup \{(\bar{X}, \bar{x})\}$ , definita su  $\bar{X} \cup \{\bar{X}\}$ , che è ancora un isomorfismo d'ordine, tra un insieme di Von Neumann (per quanto mostrato nella dimostrazione del Teorema 1.2.15) e  $[0, x_0)$ , è infatti monotona poiché ogni elemento di  $\bar{X}$  è minore di (appartiene a)  $\bar{X}$ , che come elemento è mandato in  $\bar{x}$ , che è più grande di tutti gli altri elementi dell'immagine. La biiettività segue dalla biiettività di  $f_{\bar{x}}$ .
- se  $x_0$  è un limite consideriamo invece  $f_{x_0} = \bigcup_{x < x_0} f_x$ , per la quale abbiamo però un problema di definizione, che possiamo risolvere osservando che due di tali isomorfismi  $f_{x_1}$  e  $f_{x_2}$  (con  $x_1 < x_2 < x_0$ ) definiti rispettivamente su  $X_1$  e  $X_2$  (per cui si ha quindi  $X_1 \in X_2$ ) coincidono su  $X_1$  grazie al fatto che sono isomorfismi d'ordine. La funzione risultante dall'unione è ancora un isomorfismo, da un insieme di Von Neumann (Lemma 1.2.14) al segmento  $[0, x_0)$ : dati due elementi  $x_1 < x_2$  dell'unione dei domini questi apparterranno a due insiemi di Von Neumann  $X_1, X_2$ , con  $X_1 \in X_2$ , e per essi la funzione  $f_{x_0}$  coinciderà con  $f_{x_2}$ , che per ipotesi è un isomorfismo d'ordine.

E in ogni caso giungiamo all'assurdo. Allora detto  $Y$  il minimo degli insiemi di Von Neumann che non appartengono a  $F(W)$ ,  $F$  sarà proprio l'isomorfismo cercato tra  $W$  e  $Y$ , ed avremo associato a  $W$ , e così all'ordinale  $\alpha$  un (unico, sempre grazie al fatto che nessun insieme ben ordinato è isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio, e insiemi di Von Neumann differenti sono uno segmento iniziale dell'altro) insieme di Von Neumann.  $F : W \rightarrow Y$  è infatti un isomorfismo d'ordine poiché è iniettivo (ad elementi diversi sono associati segmenti iniziali diversi), suriettivo per definizione di  $Y$ , infatti ogni

elemento di  $Y$ , (i.e. ogni elemento minore di  $Y$ ) sta in  $F(W)$ , e monotono per costruzione.  $\square$

Segue allora il nostro obiettivo:

**Teorema 1.2.17.** *Ogni insieme di ordinali è ben ordinato.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è dovuta dall'identificazione tra ordinali e insiemi di Von Neumann, più precisamente al fatto che a ogni ordinale è associato univocamente un insieme di Von Neumann, unito all'uso del Teorema 1.2.15, osservando che non solo vale  $X \in Y \Rightarrow [X] \prec [Y]$ , ma anche il viceversa, infatti  $[X] \prec [Y]$ , (a meno che non sia  $X = Y$ ), implica chiaramente che  $X \subsetneq Y$ , e quindi per transitività vale anche  $X \in Y$ , e la dimostrazione è conclusa.  $\square$

**Osservazione 1.2.18.** Tale teorema ci permette di definire, come minimo di sottoinsiemi propri della classe degli ordinali, il più piccolo ordinale avente una certa proprietà, per esempio

**Definizione 1.2.19** (cardinale). Chiamiamo *cardinalità* di un insieme  $X$ , e indichiamo con  $|X|$ , il più piccolo ordinale  $\alpha$  tra gli ordinali per i quali esiste una biezione tra  $\alpha$  e  $X$ . Gli ordinali che sono cardinalità di qualche insieme sono detti *cardinali*.

Seguono le definizioni di  $\omega$ , il più piccolo ordinale infinito, di  $\omega_1$ , il più piccolo ordinale non numerabile (ossia il più piccolo ordinale infinito che non ha la proprietà di essere in biezione con  $\omega$ ),  $\omega_2$ , il più piccolo ordinale maggiore di  $\omega_1$  che non ha la proprietà di essere in biezione con  $\omega_1$ , e così via... Le cui cardinalità sono classicamente indicate rispettivamente con  $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$

**Definizione 1.2.20** (CH). Possiamo quindi definire l'enunciato CH:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

Grazie all'osservazione 1.1.25 è sensata la seguente definizione.

**Definizione 1.2.21** (modello normale). Un modello di una teoria con uguaglianza si dice *normale* se il predicato di uguaglianza è interpretato dal modello come la relazione identica sull'insieme soggiacente al modello.

**Teorema 1.2.22.** (*Löwenheim-Skolem*) *Se un insieme di enunciati ha un modello normale infinito, allora ha un modello di qualunque cardinalità infinita (maggiore o uguale alla cardinalità dell'alfabeto).*

In particolare, se esiste un modello normale per un insieme di enunciati, allora esiste sempre un modello numerabile (poiché nella nostra definizione un alfabeto è sempre numerabile).

## 1.3 Un po' di forcing

Vediamo per cominciare un caso semplice di forcing, per una teoria molto meno complicata di ZFC:

**Esempio 1.3.1.** Consideriamo la teoria dei gruppi GT, ossia la teoria generata da assiomi logici e i classici assiomi propri, cioè quelle meglio note come proprietà di gruppo. Più precisamenre, come tutti sappiamo un gruppo è definito come la coppia  $\mathbf{G} = (G, *)$ , ove  $G$  è un insieme e  $*$  una funzione, con proprietà di

- chiusura ( $*$  è definita su  $G \times G$  a valori in  $G$ )
- associatività di  $*$
- esistenza dell'elemento neutro
- esistenza dell'elemento inverso

noti anche appunto come assiomi di gruppo. Detto ciò non è difficile capire chi siano i modelli di GT: i gruppi! E un enunciato indipendente da GT potrebbe allora essere, osservando che esistono modelli (i.e. gruppi) commutativi e gruppi non commutativi,  $\forall x \forall y (x * y = y * x)$ : non possiamo, a partire dai soli assiomi, dimostrare questo enunciato, perché per il Teorema di completezza della logica del prim'ordine ciò significherebbe che tale enunciato è conseguenza logica di GT, ossia ogni modello di GT è anche modello di  $\forall x \forall y (x * y = y * x)$ , e così non è perché esistono modelli non commutativi, e analogamente non possiamo neanche dimostrare la sua negazione. Vediamo ora cosa significa per questa teoria usare il forcing. Sia il modello  $\mathbf{G} = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$  e  $\varphi$  l'enunciato  $\exists x (x \cdot x = 2)$ . Chiaramente  $\mathbf{G} \not\models \varphi$ . Estendiamo allora l'insieme soggiacente  $\mathbf{G}$  con gli elementi della forma  $qX$  al variare di  $q \in \mathbb{Q}^+$ , e definiamo l'operazione  $*$  come segue:

- $p * q = p \cdot q$
- $p * qX = (p \cdot q)X$
- $pX * q = (q \cdot p)X$
- $pX * qX = 2 \cdot p \cdot q$
- $(pX)^{-1} = (\frac{1}{2} \cdot p^{-1})X$

per ogni  $p, q \in \mathbb{Q}^+$ . Sia allora  $\mathbb{Q}^+[X] = \mathbb{Q}^+ \cup \{pX \text{ t.c. } p \in \mathbb{Q}^+\}$  e  $\mathbf{G}[X] = (\mathbb{Q}^+[X], *)$ . Tale struttura è ancora un modello di GT:  $*$  va chiaramente da  $G \times G$  a  $G$ , è associativa (lo verifichiamo solo per gli elementi nuovi):

$$\begin{aligned} pX * (qX * tX) &= pX * (2 \cdot q \cdot t) = (p \cdot 2 \cdot q \cdot t)X = \\ &= (2 \cdot p \cdot q \cdot t)X = (2 \cdot p \cdot q) * tX = (pX * qX) * tX, \end{aligned}$$

esiste l'elemento neutro che è chiaramente l'elemento neutro di  $\mathbf{G}$  (il numero razionale 1) e l'inverso per un elemento nuovo (sia  $pX$ ) è effettivamente quello definito come  $(pX)^{-1}$ :

$$pX * \left(\frac{1}{2} \cdot p^{-1}\right)X = (2 \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot p^{-1}) = 1.$$

Ora è chiaro che  $\mathbf{G}[X] \models (1X * 1X = 2)$ , e quindi esiste un modello per  $\varphi$ , che abbiamo ottenuto estendendo un modello esistente.

Il forcing, usato più comunemente per mostrare risultati di consistenza e indipendenza in ZFC, con la sottintesa assunzione che ZFC sia consistente (vedi Teorema 1.1.45), è una tecnica che, proprio come nell'esempio visto, ha il fine di trovare modelli di un certo enunciato che risultino ancora modelli per ZFC, cioè per suoi assiomi (o un qualunque insieme finito di essi, grazie al Teorema 1.1.41). Sebbene si tratti di uno strumento estremamente utile, che in anni recenti ha permesso di dimostrare l'indipendenza di numerose congetture e problemi aperti nei campi più differenti della matematica, il risultato che ci limiteremo a discutere ed usare nell'elaborato, è, come già accennato, l'indipendenza di CH (ossia il fatto che se ZFC è consistente, allora né CH, né  $\neg$ CH appartengono a ZFC), conseguenza del lavoro di Kurt Gödel, che provò la consistenza di CH, costruendo (sotto l'ipotesi che ZFC abbia un modello) un modello ZFC in cui CH vale, e Paul Cohen che, inventando la tecnica del forcing, costruì un modello di ZFC che soddisfa  $\neg$ CH (per entrambi i risultati si veda ad esempio [3]). Quello che faremo noi è dare un'idea del metodo e una traccia della dimostrazione di Cohen meno tecnica rispetto all'uso più comune che al giorno d'oggi si fa del forcing, ma probabilmente più chiara e interessante ai fini di questa tesi per capire in cosa il forcing consista, seguendo liberamente l'approccio esposto nell'articolo [2].

**Definizione 1.3.2** (insieme ben fondato). Un insieme  $a$  è ben fondato se non esiste una successione  $\in$ -decrescente in esso, ossia non esiste  $(a_n)_{n \in \omega} \subseteq a$  tale che

$$\dots \in a_{n+1} \in a_n \in \dots \in a_1 \in a_0 = a.$$

Gli insiemi ben fondati (che un assioma di ZFC richiede siano tutti gli insiemi) sono sostanzialmente gli insiemi costruiti a partire da  $\emptyset$  per applicazione di insieme delle parti, unione, sottoinsieme e tutte le altre solite operazioni insiemistiche. Viene preclusa anche in questo modo la possibilità che un insieme appartenga a se stesso (successione  $\in$ -decescente costante).

**Definizione 1.3.3** (modello standard). Un modello  $(M, I)$  di ZFC è detto *standard* se gli elementi di  $M$  sono insiemi ben-fondati e se  $I$  interpreta il segno di relazione  $\in$  come l'ordinaria relazione binaria di appartenenza.

Non è ovviamente detto che, anche assumendo la consistenza di ZFC, si abbia l'esistenza un modello standard, e infatti così non è, sono necessarie assunzioni più forti della consistenza di ZFC che tuttavia ora faremo senza entrare nel dettaglio. Un'ulteriore proprietà che si può richiedere per un modello di ZFC e che useremo per la costruzione che seguirà è la transitività, il che ci permetterà un controllo sugli elementi del modello, che non potranno essere insiemi di cardinalità superiore a quella del modello stesso. A questo punto è da osservare il fatto che si possa credere che vi sia circolarità nello studio di un modello di ZFC: un modello è definito infatti esso stesso come un insieme, il che può generare confusione, e ci si potrebbe chiedere se in realtà non stiamo “definendo” gli insiemi in termini di insiemi, ma così non è. Infatti la circolarità scompare se osserviamo che non stiamo definendo gli insiemi in termini di insiemi, stiamo bensì definendo *i modelli di ZFC* in termini di insiemi, e così avviciniamo il loro studio nello stesso modo in cui avviciniamo lo studio di qualunque altro oggetto matematico. Un argomento cruciale nello studio della teoria dei modelli è la cosiddetta *assolutezza*: come sarà ormai chiaro i modelli sono strutture nelle quali l'insieme dei simboli propri di un alfabeto (se parliamo di modelli di ZFC le costanti e come predicati solo  $\in$ , oltre al predicato di uguaglianza  $=$ ) vengono interpretati, e così tutti i vari oggetti che si possono costruire a partire dagli assiomi della teoria (logici e propri). Il modo di interpretarli, grazie al fatto che  $M$  è definito come insieme e  $R$  è interpretata come l'usuale relazione di appartenenza, risulta spesso una vera e propria “uguaglianza”, per esempio un modello standard e transitivo di ZFC contiene in esso come elementi effettivamente tutti gli insiemi del tipo  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$  così come  $\aleph_0$ . Tali oggetti della classe degli insiemi sono quindi perciò detti *assoluti*, in quanto coincidono con la loro controparte in  $M$ , così con essi sono assoluti grazie alla definizione di modello anche la relazione di appartenenza, la relazione di “essere sottoinsieme di” o di “essere in biezione con”, tutti insiemi definiti mediante l'unico simbolo proprio  $\in$ . Ora, tuttavia, non è sempre così che vengono interpretati gli oggetti, un apparente paradosso sorge infatti dal Teorema di Löwenheim-Skolem: ci si potrebbe chiedere come vengano interpretati in un modello numerabile (che

esiste sempre a patto che esista un modello infinito), oggetti costruibili in ZFC come cardinali più che numerabili. Ricordando l'assioma di potenza, che afferma che

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow (\forall w (w \in z \Rightarrow w \in x)))$$

si potrebbe ingenuamente pensare che il fatto che  $\aleph_0$  stia in  $M$  implichi che  $2^{\aleph_0}$  (il suo insieme delle parti) stia in  $M$ , ma osservando più attamente, “letto in  $M$ ” l'assioma ci garantisce l'esistenza di un certo  $y$  in  $M$  con la seguente proprietà: per ogni  $z$  in  $M$ , vale  $z \in y$  se e solo se ogni  $w$  in  $M$  che soddisfa  $w \in z$  soddisfa anche  $w \in \aleph_0$ . Segue necessariamente che tale  $y$  è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $\aleph_0$ ? No, innanzitutto non è nemmeno immediato che  $z$  sia un sottoinsieme di  $\aleph_0$ , l'assioma infatti non richiede che *ogni*  $w$  che soddisfa  $w \in z$  soddisfa anche  $w \in \aleph_0$ , richiede soltanto che ogni  $w$  in  $M$  che soddisfa  $w \in z$  soddisfa  $w \in \aleph_0$ , tuttavia grazie alla transitività che abbiamo supposto per  $M$ , vale che se  $w \in z$ , allora  $w$  sta effettivamente in  $M$ , e quindi è vero che per ogni  $w$  per cui  $w \in z$  vale  $w \in \aleph_0$ . Più importante è il fatto che  $y$  non contiene *ogni* sottoinsieme di  $\aleph_0$ , ma contiene soltanto quei sottoinsiemi di  $\aleph_0$  che sono in  $M$ , pertanto segue chiaramente dal fatto che  $M$  è numerabile e transitivo, che  $y$  è numerabile, e quindi  $y$ , che pure interpreta in  $M$   $2^{\aleph_0}$ , non può essere uguale (insiemisticamente parlando) a  $2^{\aleph_0}$ . E questo fatto appena osservato è cruciale, vediamo infatti, prima del metodo vero e proprio per costruire il modello desiderato che soddisfi  $\neg\text{CH}$ , come procederà la dimostrazione. Abbiamo visto come sono definiti  $\aleph_1, \aleph_2, \dots$ , e chiaramente questi oggetti, anche se non l'abbiamo fatto esplicitamente, possono essere costruiti a partire dagli assiomi, il che ci dice che in un modello standard numerabile e transitivo  $M$  di ZFC questi hanno una interpretazione  $(\aleph_1^M, \aleph_2^M, \dots)$ . Sia ora una funzione

$$F : \aleph_2^M \times \aleph_0 \rightarrow 2,$$

da intendersi come una successione di funzioni da  $\aleph_0$  in  $2 = \{0, 1\}$  indicizzata in  $\aleph_2^M$ . La numerabilità e la transitività di  $M$  implicano la numerabilità di  $\aleph_2^M$ , perciò possiamo supporre che le funzioni della nostra successione siano a due a due distinte. Ora, se  $F$  sta in  $M$ , ognuna di queste funzioni  $\aleph_0 \rightarrow 2$  indicizzate in  $\aleph_2^M$  sta in  $M$ , pertanto identificando queste funzioni in  $M$  con i rispettivi sottoinsiemi di  $\aleph_0$ , i.e. l'insieme delle parti di  $\aleph_0$  in  $M$ , essendo tali funzioni distinte l'una dall'altra, deve essere almeno  $\aleph_2$  in  $M$ , ossia

$$M \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2,$$

e quindi  $M$  soddisfa  $\neg\text{CH}$ . In caso contrario (se  $F$  non sta in  $M$ ), l'idea è quella di “aggiungere forzatamente” a  $M$  l'insieme  $F$ , e con esso tutto ciò

che dalla sua aggiunta segue, come i suoi elementi, i suoi sottoinsiemi e tutto ciò che deve esserci per ottenere quello che si vorrà mostrare essere,  $M[F]$ , un insieme che sia ancora un modello di ZFC. Le difficoltà tecniche sono notevoli, daremo ora una traccia di come procede la costruzione di  $M[F]$ , e quindi la prova della consistenza di  $\neg\text{CH}$ .

**Osservazione 1.3.4.** Sull'insieme degli enunciati di una teoria  $\mathcal{T}$  si può costruire una relazione di equivalenza data da

$$\varphi \sim \psi \text{ se e solo se } \mathcal{T} \models (\varphi \iff \psi).$$

Detto allora  $L$  l'insieme quoziente, sia  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ , ove  $\mathbf{0}$  è l'insieme degli enunciati non soddisfatti da alcun modello di  $\mathcal{T}$ , e  $\mathbf{1}$  l'insieme degli enunciati veri in  $\mathcal{T}$  (teoremi);  $\vee, \wedge, \neg$  sono i soliti connettivi. Tale struttura è un'algebra di Boole, detta anche *algebra di Lindenbaum-Tarski*.

L'idea per forzare un enunciato a essere vero nasce proprio nel considerare l'insieme degli enunciati con la sua struttura di algebra di Boole, e se vogliamo quindi che valgano certi enunciati, ma non sappiamo se far valere forzatamente questi enunciati intacchi la validità di altri, possiamo mapparli in modo "coerente" in un'altra opportuna algebra  $\mathbb{B}$  attraverso la funzione  $\|\cdot\|^{\mathbb{B}}$  definita su  $L$  a valori in  $\mathbb{B}$ , mandando in  $\mathbf{1}$  gli enunciati che vogliamo siano soddisfatti, in  $\mathbf{0}$  quelli che vogliamo non siano soddisfatti, e altrimenti in valori intermedi dell'algebra. Stiamo sostanzialmente sviluppando così in una logica raramente usata in matematica, detta "logica a più valori", che usa infatti più valori di verità. Quello che si intende per coerente è che vogliamo sia rispettato il significato intuitivo che diamo ai connettivi e agli altri elementi dell'alfabeto: se per esempio valgono  $\varphi$  e  $\psi$  vogliamo che anche  $\varphi \wedge \psi$  valga. Richiediamo quindi che la nostra mappa

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|^{\mathbb{B}}$$

rispetti le condizioni che lo rendono quello che si chiama un isomorfismo di algebre:

$$\begin{aligned} \|\varphi \vee \psi\|^{\mathbb{B}} &= \|\varphi\|^{\mathbb{B}} \cup \|\psi\|^{\mathbb{B}} \\ \|\varphi \wedge \psi\|^{\mathbb{B}} &= \|\varphi\|^{\mathbb{B}} \cap \|\psi\|^{\mathbb{B}} \\ \|\neg\varphi\|^{\mathbb{B}} &= (\|\varphi\|^{\mathbb{B}})^c \end{aligned}$$

Ciò che vorremmo è che la funzione  $L \rightarrow \mathbb{B}$  mandi in  $\mathbf{1}$ , oltre agli enunciati forzati, anche gli assiomi di ZFC. Per quanto riguarda gli enunciati atomici, cioè predicati applicati a costanti (per esempio  $\|x = y\|^{\mathbb{B}}$  o  $\|x \in y\|^{\mathbb{B}}$ , con  $x$

e  $y$  costanti), nuovamente, se vogliamo che certe relazioni di appartenenza o uguaglianza valgano (siano soddisfatte), ma vogliamo posporre il giudizio riguardo ad altre, siamo portati all'idea di costruire degli "insiemi a più valori": osserviamo che ogni insieme ("in senso classico") può essere visto come una funzione a valori nell'algebra di Boole banale  $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$  che manda in  $\mathbf{1}$  gli elementi che appartengono all'insieme e in  $\mathbf{0}$  gli elementi che non appartengono all'insieme. Generalizzando, tale funzione, e quindi questo nuovo insieme a più valori, la possiamo definire a valori in una qualsiasi algebra di Boole. Più precisamente, per induzione, definiamo un *insieme a valori in  $\mathbb{B}$*  come segue:

- $\emptyset$  è un insieme a valori in  $\mathbb{B}$
- una funzione definita su un insieme a valori in  $\mathbb{B}$  con codominio  $\mathbb{B}$  è un insieme a valori in  $\mathbb{B}$

Siamo allora nelle condizioni di costruire, data un'algebra opportuna (vedremo poi nella costruzione quali saranno le condizioni da porvi) e supposta l'esistenza di un modello  $M$  di ZFC, l'insieme  $M^{\mathbb{B}}$  come l'insieme costituito da tutti gli insiemi a valori in  $\mathbb{B}$  appartenenti a  $M$ . Esso sarà detto *modello a valori booleani*. Tuttavia la struttura  $M^{\mathbb{B}}$  lungi ancora dall'essere un modello, i suoi elementi non sono ancora infatti insiemi in senso classico, bensì insiemi a più valori, e dato un enunciato  $\varphi$  in  $L$ , di questo non sappiamo sempre dire se sta in  $M^{\mathbb{B}}$  ( $\|\varphi\|^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$ ) oppure no ( $\|\varphi\|^{\mathbb{B}} = \mathbf{0}$ ), poiché per certi enunciati sarà un valore tra essi intermedio in  $\mathbb{B}$ . D'altro canto vedremo che  $M^{\mathbb{B}}$  soddisferà ZFC nel senso che per ogni enunciato  $\varphi$  di ZFC varrà  $\|\varphi\|^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$ . Per trasformare la nostra struttura  $M^{\mathbb{B}}$  in un insieme i cui elementi siano insiemi in senso classico, occorrerà passare ad un opportuno quoziente. Ora rimane anzitutto da finire la definizione della nostra mappa  $\|\cdot\|^{\mathbb{B}}$  sugli enunciati quantificati e sugli enunciati atomici: per le prime si osserva che "esiste  $x$  con una certa proprietà  $\varphi(x)$ " non significa altro che  $\varphi(a) \vee \varphi(b) \vee \dots$ , con  $a, b, \dots$  appartenenti a  $M^{\mathbb{B}}$ , e analogamente per  $\forall$ , seguono quindi le definizioni

$$\|\exists x \varphi(x)\|^{\mathbb{B}} = \bigcup_{a \in M^{\mathbb{B}}} \|\varphi(a)\|^{\mathbb{B}}$$

$$\|\forall x \varphi(x)\|^{\mathbb{B}} = \bigcap_{a \in M^{\mathbb{B}}} \|\varphi(a)\|^{\mathbb{B}}$$

Il problema sorge quindi nell'osservare che per infiniti elementi non è garantita l'esistenza di sup e inf nell'algebra  $\mathbb{B}$ . L'algebra che cerchiamo va quindi richiesta *completa*, ossia con la proprietà di esistenza di inf e sup per un qualunque sottoinsieme di elementi. Per quanto riguarda gli enunciati atomici la

costruzione risulta più sottile e complicata, ed esula lo scopo illustrativo del ragionamento, vediamo quindi di arrivare al punto centrale della costruzione, anche se un'ultima osservazione da fare sulla definizione di  $M^{\mathbb{B}}$  è che vi sono ulteriori condizioni che l'algebra deve rispettare oltre alla completezza perché risulti effettivamente un modello di ZFC. Per esempio poiché vogliamo valga l'assioma di potenza, dato un elemento  $x \in M^{\mathbb{B}}$ , analogamente a come si fa per la logica a due valori (scrivendo l'insieme delle parti di  $K$  come  $2^K$ ) è naturale costruire il suo insieme delle parti  $y$  in  $M^{\mathbb{B}}$  ponendo

$$\text{dom}(y) = \mathbb{B}^{\text{dom}(x)},$$

cioè vogliamo che non gli elementi, ma gli “elementi potenziali” di  $y$ , cioè  $\text{dom}(y)$  siano i “sottoinsiemi potenziali” di  $x$ , cioè le funzioni da  $\text{dom}(x)$  a  $\mathbb{B}$ . Se  $w \in \text{dom}(y)$ , il valore associato in  $\mathbb{B}$  a  $y(w)$  vorremmo fosse  $\|w \subseteq x\|^{\mathbb{B}}$ , ma il punto è che se l'algebra  $\mathbb{B}$  non sta in  $M$ , le funzioni da  $\text{dom}(x)$  a  $\mathbb{B}$  sarebbero sì insiemi a valori in  $\mathbb{B}$  ma potrebbero non appartenere a  $M$ . Il modo più semplice per ovviare a tale problema è vincolare  $\mathbb{B}$  ad essere, oltre che completa, anche un elemento di  $M$  (la completezza sarà quindi necessaria solo in  $M$ , cioè ogni sottoinsieme di  $\mathbb{B}$  che sia anche in  $M$  ammette  $\inf$  e  $\sup$ ). A tal punto seguirebbe il grosso del lavoro, cioè una lunga verifica del fatto che  $M^{\mathbb{B}}$ , con i vincoli appena espressi su  $\mathbb{B}$ , soddisfa effettivamente (gli assiomi di) ZFC e si comporta adeguatamente sulle conseguenze logiche (se dal modello  $M$  di ZFC si aveva per esempio che  $\psi$  era conseguenza logica di  $\varphi$  dovrà essere che se  $\|\varphi\|^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$ , anche  $\|\psi\|^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$ ). Non ci resta ora che trasformare il nostro modello a valori booleani in un effettivo modello di ZFC, ossia vogliamo sapere precisamente quali enunciati sono veri nella nostra nuova struttura. Per fare ciò consideriamo un insieme  $U \subseteq \mathbb{B}$  tale che  $\|\varphi\|^{\mathbb{B}} \in U$  per ogni enunciato  $\varphi$  soddisfatto dal nuovo modello di ZFC. Da tale richiesta seguono alcune proprietà che  $U$  dovrà avere, per esempio essendo che per ogni enunciato  $\varphi$  nel nostro nuovo modello vogliamo che sia soddisfatta una e una sola tra  $\varphi$  e  $\neg\varphi$  (vedi Teorema 1.1.18), segue che per ogni  $x \in \mathbb{B}$ ,  $U$  dovrà contenere uno e uno solo tra  $x$  e  $(x)^C$ , un'altra proprietà di  $U$  sarà la chiusura rispetto a  $\cap$ , così come se  $x \in U$  e  $(x \cap y = x)$  dovrà essere  $y \in U$ , infine chiaramente dovrà valere  $\mathbf{0} \notin U$ , tutte proprietà che seguono da come abbiamo costruito  $\|\cdot\|^{\mathbb{B}}$ . Come vedremo ampiamente nel resto dell'elaborato, le proprietà appena elencate non sono altro che quelle che ha un ultrafiltro (Definizione 2.1.3) e che lo caratterizzano, per l'insieme parzialmente ordinato costruito su  $\mathbb{B}$  mediante la relazione d'ordine definita da

$$x \leq y \text{ se e solo se } x \cap y = x.$$

Dato pertanto un ultrafiltro  $U \subseteq \mathbb{B}$  (si osservi che  $U$  non è richiesto essere in  $M$ ) definiamo la relazione su  $M^{\mathbb{B}}$

$$x \sim_U y \text{ se e solo se } \|x = y\|^{\mathbb{B}} \in U$$

la quale risulta essere banalmente una relazione d'equivalenza. Definiamo allora il quoziente  $M^{\mathbb{B}}/U$  e indichiamo i suoi elementi, le classi d'equivalenza a cui appartiene un certo  $x$ , con  $x^U$ . In  $M^{\mathbb{B}}/U$  definiamo quindi la relazione d'appartenenza  $\in_U$  mediante

$$x^U \in_U y^U \text{ se e solo se } \|x \in y\|^{\mathbb{B}} \in U$$

(si presti attenzione alla differenza tra i simboli  $\in$  nella seconda parte della definizione: in “ $x \in y$ ” esso è soltanto il segno per il predicato binario dell'alfabeto che usa ZFC). Più facile, dopo aver mostrato che  $M^{\mathbb{B}}$  soddisfa ZFC (nel senso che gli assiomi vengono mandati in  $\mathbf{1}$  da  $\|\cdot\|^{\mathbb{B}}$ ), è mostrare che  $M^{\mathbb{B}}/U$  è effettivamente un modello di ZFC. Abbiamo allora in mano uno strumento molto potente, poiché tutto sommato le richieste su  $\mathbb{B}$  sono piuttosto deboli: possiamo considerare un modello  $M$ , un'algebra di Boole  $\mathbb{B}$  in  $M$  e un ultrafiltro  $U \subseteq \mathbb{B}$  e con essi costruire un nuovo modello di ZFC, ciò che sussiste è che tuttavia, se pure supponiamo di partire con un modello  $M$  standard e transitivo, non è detto che anche  $M^{\mathbb{B}}/U$  lo sia: alcune proprietà di  $M^{\mathbb{B}}/U$ , tra cui essere standard e transitivo, a patto che lo sia  $M$ , sono conseguenza di una condizione da porre sull'ultrafiltro  $U$  particolarmente usata, anche nel caso di trovare un modello che soddisfi  $\neg\text{CH}$ .

**Definizione 1.3.5.** Dato un insieme parzialmente ordinato  $\mathbb{P} = (P, \leq)$ , un sottoinsieme  $D \subseteq P$  è detto *denso* se per ogni  $p \in P$  esiste  $q \in D$  tale che  $q \leq p$ .

**Definizione 1.3.6.** Dato un insieme parzialmente ordinato  $\mathbb{P} = (P, \leq)$ , un sottoinsieme  $G \subseteq P$  è detto *generico* se  $G \cap D \neq \emptyset$  per ogni  $D \subseteq P$  denso.

Nel nostro caso l'insieme parzialmente ordinato è  $\mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$  con la relazione d'ordine sopra descritta, e la condizione che si richiede è che  $U$  sia *generico su  $M$* , ossia  $U$  interseca ogni insieme denso di  $\mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$  che sia anche elemento di  $M$ . Oltre al fatto che  $M^{\mathbb{B}}/U$  risulta essere standard e transitivo, un'altra proprietà garantita dalla genericità di  $U$  è che  $U$  è effettivamente un sottoinsieme di  $M^{\mathbb{B}}/U$ , più precisamente  $M^{\mathbb{B}}/U$  è il più piccolo modello standard transitivo contenente  $M$  ed  $U$ . Abbiamo quindi costruito quello che chiamammo  $M[F]$ : un modello per ZFC ottenuto aggiungendo un nuovo sottoinsieme di  $M$ . Degno di nota, prima di ritornare alla fine della traccia della dimostrazione di consistenza di  $\neg\text{CH}$ , è il seguente risultato, di cui si può trovare una dimostrazione in [3]:

**Teorema 1.3.7.** (*Rasiowa-Sikorski*) *Se  $M$  è un modello numerabile e  $\mathbb{B}$  un'algebra in  $M$ , esiste un ultrafiltro  $U \subseteq \mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$  generico su  $M$ .*

Sia allora  $M$  un modello numerabile standard e transitivo di ZFC, se  $M$  non soddisfa già  $\neg\text{CH}$ , sia  $\mathbb{P} = (P, \leq)$  l'insieme parzialmente ordinato delle funzioni parziali finite  $\aleph_2^M \times \aleph_0 \rightarrow 2$  (i.e. funzioni a dominio un sottoinsieme finito di  $\aleph_2^M \times \aleph_0$  e a valori in  $\{0, 1\}$ ) ordinate per inclusione inversa ( $f \leq g$  se e solo se  $f \supseteq g$ ). Vi è un metodo standard che non trattiamo qui per completare un qualunque insieme parzialmente ordinato ad un'algebra di Boole, chiamiamo allora  $\mathbb{B}$  il completamento di  $\mathbb{P}$  in  $M$ . Consideriamo ora  $U$  un ultrafiltro generico su  $M$ , che esiste grazie alla numerabilità di  $M$ : ciò che andremo a mostrare è che  $F = \bigcup U$  è una funzione da  $\aleph_2^M \times \aleph_0$  in  $2$ . Per verificarlo vediamo intanto che è una funzione almeno parziale, cioè un insieme di coppie ordinate  $(a, b)$  per cui  $a \in \aleph_2^M \times \aleph_0$  e  $b \in \{0, 1\}$  tale che nessuna coppia abbia lo stesso primo elemento, e ciò segue dal fatto che due elementi di  $U$  (cioè due particolari funzioni di  $P$ ) assumono infatti gli stessi valori ove sono entrambe definite, e questo vale perché essendo  $U$  un ultrafiltro due suoi elementi ammettono un inf, ossia una funzione che le estende entrambe. Inoltre  $F$  è a tutti gli effetti una funzione (totale) grazie alla genericità di  $U$ : l'insieme di tutte le funzioni definite su uno stesso elemento del dominio formano un particolare insieme denso, intersecando  $U$  ciascuno di essi,  $F$  risulta definita su tutto il dominio. Inoltre vale, ancora grazie alla genericità di  $U$ , che le funzioni  $\aleph_0 \rightarrow 2$  la cui successione costituisce  $F$  sono ancora a due a due disgiunte. Allora l'assioma dell'unione ci garantisce che  $F \in M[U]$  e pertanto, da quanto osservato in precedenza,  $M[U]$  è il modello cercato per  $\neg\text{CH}$ .

# Capitolo 2

## P-punti

### 2.1 Filtri e ultrafiltri

La definizione di p-punto verrà data nella Sezione 2.2.

**Definizione 2.1.1** (filtro). Dato un insieme parzialmente ordinato  $\mathbf{P} = (P, \leq)$ , chiamiamo *filtro* un insieme  $\mathcal{F} \subseteq P$  tale che:

- $x, y \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists z \in \mathcal{F}$  t.c.  $z \leq x$  e  $z \leq y$
- $x \in \mathcal{F}, x \leq y \in P \Rightarrow y \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F} \neq P$

**Osservazione 2.1.2.** Caso particolare di filtro è quello detto anche *filtro su un insieme*  $A$ , ossia un filtro  $\mathcal{F}$  sull'insieme parzialmente ordinato  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ : Per esso vale

- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$

la terza condizione è infatti equivalente, nel caso  $\mathbf{P} = (\mathcal{P}(A), \subseteq)$  alla condizione  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ; mentre il fatto che l'intersezione di due insiemi appartenga al filtro implica banalmente l'esistenza di un elemento minore o uguale di due elementi del filtro, e viceversa, se per una coppia di insiemi del filtro esiste sempre un elemento minore di entrambi, grazie alla condizione di chiusura per sovrainsiemi anche l'intersezione, che è chiaramente sovrainsieme di qualunque elemento così fatto, apparterrà al filtro.

**Definizione 2.1.3** (ultrafiltro). Dato un insieme parzialmente ordinato  $\mathbf{P} = (P, \leq)$ , un filtro  $\mathcal{F}$  è detto *ultrafiltro* se è massimale per inclusione, ossia se per ogni filtro  $\mathcal{U}$  tale che  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \subseteq P$  si ha  $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ .

**Esempio 2.1.4.** Sia lo spazio topologico  $\omega$ , il primo ordinale infinito, con topologia discreta e l'insieme  $\mathcal{F}_B = \{A \in \mathcal{P}(\omega) \text{ t.c. } A \supseteq B\}, B \subseteq \omega$ . Tale insieme è un filtro, non è però un ultrafiltro a meno che  $B$  non sia un singolo (i.e. un insieme che contiene un solo elemento), infatti se  $B_1$  è un sottoinsieme non banale di  $B$ ,  $\mathcal{F}_B \cup B_1$  è un'estensione propria di  $\mathcal{F}_B$ .

**Esempio 2.1.5.**  $\mathcal{F}_a = \{A \subseteq \omega \text{ t.c. } a \in A\}, a \in \omega$  è effettivamente un ultrafiltro, perché ogni estensione di  $\mathcal{F}_a$  aggiunge un elemento  $Q \subseteq \omega$  per il quale vale ovviamente  $a \in Q$  aut  $a \notin Q$ , e nel primo caso l'estensione non è propria, nel secondo caso, siccome  $a \in \mathcal{F}_a$ , si avrebbe  $a \cap Q = \emptyset \in \mathcal{F}_a$ .

**Esempio 2.1.6.** Si consideri, sempre su  $\omega$ , l'insieme

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(\omega) \text{ t.c. } |\omega \setminus A| < \aleph_0\},$$

ossia l'insieme degli insiemi cofiniti. Dati due elementi  $A, B \in \mathcal{C}$ , si ha  $|(A \cap B)^C| = |A^C \cup B^C| \leq |A^C| + |B^C| \leq \aleph_0$ ; Se  $A \in \mathcal{C}, A \subset B$ , allora  $B^C \subset A^C$ , quindi  $|B^C| \leq |A^C| \leq \aleph_0$ ; infine  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  perché ha complementare  $\omega$ , quindi non finito.  $\mathcal{C}$  è detto anche *filtro cofinito* o *filtro di Fréchet*.

**Definizione 2.1.7** (catena). Dato un insieme parzialmente ordinato  $(P, \leq)$ , chiamiamo *catena* su  $P$  un sottoinsieme  $C \in P$  totalmente ordinato, ossia tale che ogni coppia  $(x, y)$  di elementi di  $C$  è comparabile (vale  $x \leq y$  o  $y \leq x$ ).

**Esempio 2.1.8.** Si consideri l'insieme parzialmente ordinato  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$ , una catena è, per esempio,  $C_x = \{B(x, \rho), \rho \in \mathbb{R}\}, x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.1.9** (lemma di Zorn). Chiamiamo *lemma di Zorn* la seguente asserzione: “Sia  $(X, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato tale che ogni catena di  $X$  possiede un maggiorante, allora  $X$  contiene almeno un elemento massimale.”.

Diamo per noto il seguente risultato (per una dimostrazione si veda si veda [5]):

**Proposizione 2.1.10.** *In ZF, l'assioma di scelta implica il lemma di Zorn.*

**Definizione 2.1.11** (proprietà delle intersezioni finite). Un insieme non vuoto ha la *proprietà delle intersezioni finite (p.d.i.f.)* se l'intersezione di ogni suo sottoinsieme finito è non vuota (intendendo per intersezione di un insieme l'intersezione degli insiemi suoi elementi).

**Esempio 2.1.12.** Sia  $\mathcal{A} = \{(0, \frac{1}{n}), n < \omega\}$ . Ogni suo sottoinsieme finito è della forma  $\mathcal{A}_I = \{(0, \frac{1}{n_i}), i \in I = \{1, \dots, m\}\}$ , e la sua intersezione è

$$\bigcap_{i=1, \dots, m} (0, \frac{1}{n_i}) = (0, \frac{1}{\max\{n_i\}}) \neq \emptyset.$$

Quindi  $\mathcal{A}$  ha la p.d.i.f.

**Esempio 2.1.13.** Ogni filtro su un insieme ha la p.d.i.f., infatti un filtro è per definizione chiuso per intersezioni finite di suoi elementi e non contiene l'insieme vuoto.

**Lemma 2.1.14.** *Ogni insieme  $F \subset \mathcal{P}(X)$  avente la p.d.i.f. è contenuto in un filtro minimale  $\mathcal{F}$ , detto filtro generato da  $F$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo la chiusura di  $F$  per intersezioni finite, ossia

$$\mathcal{F}^* = F \cup \left\{ \bigcap_{i \in I} F_i, F_i \subset F, I \in [\omega]^{<\omega} \right\}$$

ove la scrittura  $[X]^{<\alpha}$  indica  $\{A \subseteq X \text{ t.c. } |A| < \alpha\}$  (quelli in questione sono i sottoinsiemi finiti di  $\omega$ ) e quindi

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ t.c. } A \supset B, B \in \mathcal{F}^*\}.$$

$\mathcal{F}$  contiene  $F$ , è chiuso per intersezioni, per sovrainsiemi, e non contiene l'insieme vuoto.  $\square$

**Teorema 2.1.15.** *Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  avente la p.d.i.f., allora esiste un ultrafiltro  $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{A}$ .*

*Dimostrazione.* Grazie al Lemma 2.1.14 è sufficiente mostrare che ogni filtro  $\mathcal{F}$  si può estendere a un ultrafiltro. Sia

$$\Omega_{\mathcal{F}} = \{p \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ t.c. } p \text{ è un filtro su } X \text{ e } \mathcal{F} \subseteq p\}$$

il quale, in quanto sottoinsieme dell'insieme delle parti di  $X$ , risulta un insieme parzialmente ordinato con la relazione d'ordine

$$p \leq_{\Omega_{\mathcal{F}}} q \iff p \subseteq q.$$

Sia  $\mathcal{C}$  una catena in  $(\Omega_{\mathcal{F}}, \leq_{\Omega_{\mathcal{F}}})$ , allora  $\bigcup \mathcal{C} \in \Omega_{\mathcal{F}}$  è un maggiorante di  $\mathcal{C}$ , infatti per ogni  $p \in \mathcal{C}$  è chiaro che  $p \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ , cioè  $p \leq_{\Omega_{\mathcal{F}}} \bigcup \mathcal{C}$ , resta da vedere che  $\bigcup \mathcal{C}$  è effettivamente in  $\Omega_{\mathcal{F}}$ , cioè che è un filtro, ma così è perché: dati  $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$

esistono per definizione di unione  $p, q \in \mathcal{C}$  t.c.  $A \in p, B \in q$ ; ora  $\mathcal{C}$  è per definizione un insieme totalmente ordinato, perciò  $p$  e  $q$  sono confrontabili. Supponiamo senza ledere la generalità che sia  $p \subseteq q$  (cioè  $p \leq_{\Omega_{\mathcal{F}}} q$ ), segue che  $A, B \in q$ , e siccome  $q$  è un filtro anche  $A \cap B \in q \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ . Allo stesso modo anche, se  $A \in \bigcup \mathcal{C}$  e  $B \supseteq A$ , si ha che esiste  $p$  tale che  $A \in p$ , e quindi  $B \in p \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ . Infine chiaramente  $\emptyset \notin \bigcup \mathcal{C}$  poiché  $\emptyset \notin p \forall p \in \mathcal{C}$ . Pertanto  $\bigcup \mathcal{C} \in \Omega_{\mathcal{F}}$ , ed è allora un maggiorante della catena  $\mathcal{C}$ . per genericità di  $\mathcal{C}$ , il lemma di Zorn garantisce allora l'esistenza di almeno un  $\mathcal{U}$  elemento massimale di  $(\Omega_{\mathcal{F}}, \leq_{\Omega_{\mathcal{F}}})$ , ossia un elemento

$$\mathcal{U} \text{ t.c. } \forall q \in \Omega_{\mathcal{F}} (\mathcal{U} \leq_{\Omega_{\mathcal{F}}} q \Rightarrow q = \mathcal{U}).$$

Ognuno di questi  $\mathcal{U}$  è quindi un elemento di  $\Omega_{\mathcal{F}}$ , e quindi è un filtro massimale che contiene  $\mathcal{F}$ , cioè l'estensione a ultrafiltro cercata, e per genericità di  $\mathcal{F}$  abbiamo quindi mostrato l'esistenza di un'estensione a ultrafiltro di ogni filtro.  $\square$

Vediamo allora alcune proprietà degli ultrafiltri, qui nel caso particolare di ultrafiltri su  $\omega$ , anche se, come vedremo nei capitoli seguenti e con le opportune accortezze, si presteranno a generalizzazioni su spazi topologici più generali.

**Proposizione 2.1.16.** *Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  ultrafiltri su  $\omega$ , allora vale:*

1.  $B \subset \omega, A \cap B \neq \emptyset \forall A \in \mathcal{U} \Rightarrow B \in \mathcal{U}$
2.  $A, B \subset \omega, A \cup B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U} \vee B \in \mathcal{U}$
3.  $\mathcal{U} \neq \mathcal{V} \Rightarrow \exists A \in \mathcal{U}, \exists B \in \mathcal{V} \text{ t.c. } A \cap B = \emptyset$

*Dimostrazione.* 1. Si consideri l'insieme  $G = \{A \cap B, A \in \mathcal{U}\}$ , il quale ha la p.d.i.f., infatti se

$$\bigcap_{i=1, \dots, m} (A_i \cap B) = \emptyset \Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_m = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{U}.$$

Allora esiste un ultrafiltro  $\mathcal{G} \supseteq G$ . Tale ultrafiltro ha per elemento  $B$ , perché  $B \in G$  per  $\omega = A \in \mathcal{U}$ , inoltre dato un elemento  $A \in \mathcal{U}$ , si ha  $A \cap B \in G$  (e quindi appartiene anche a  $\mathcal{G}$ ), e siccome  $\mathcal{G}$  è un filtro, anche  $A$ , sovrainsieme di  $A \cap B$  sta in  $\mathcal{G}$ . Pertanto  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G} \ni B$ , e per massimalità degli ultrafiltri  $\mathcal{U} = \mathcal{G} \ni B$ .

2. Sia per assurdo  $A \cup B \in \mathcal{U}$  e  $A, B \notin \mathcal{U}$ . Per argomento contronominale su 1., si ha che esistono  $C, D \in \mathcal{U}$  t.c.  $A \cap C = B \cap D = \emptyset$ , allora poiché

stanno in  $\mathcal{U}$  sia  $A \cup B$  (per ipotesi) che  $C \cap D$  (perché intersezione finita di elementi di  $\mathcal{U}$ ), anche la loro intersezione starà in  $\mathcal{U}$ , cioè

$$\mathcal{U} \ni (A \cup B) \cap (C \cap D) \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap D) = \emptyset,$$

assurdo.

3. Sia  $A \in \mathcal{U}$  tale che  $A \notin \mathcal{V}$ , che esiste perché, oltre a essere diversi,  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  sono ultrafiltri, quindi non possono essere uno incluso nell'altro. Da 1. (applicato a  $\mathcal{V}$  e  $A$ ) si ha allora che esiste  $B \in \mathcal{V}$  tale che  $B \cap A = \emptyset$ .  $\square$

**Proposizione 2.1.17.** *Sia  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro su  $\omega$ , allora  $\forall A \subset \omega$  vale  $A \in \mathcal{U}$  oppure  $\omega \setminus A \in \mathcal{U}$  (sicuramente non entrambi).*

*Dimostrazione.* La prova è un caso particolare di 2.1.16 punto 2., con insiemi  $(A, B) = (A, \omega \setminus A)$ , che sono chiaramente tali che  $A \cup \omega \setminus A = \omega \in \mathcal{U}$ . Sicuramente non entrambi perché la loro intersezione (vuota) apparterebbe a  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Osservazione 2.1.18.** In generale un ultrafiltro su un insieme  $X$  si può definire equivalentemente come un filtro  $\mathcal{F}$  per il quale per ogni elemento  $A \in \mathcal{P}(X)$  vale  $A \in \mathcal{F}$  aut  $(A)^C \in \mathcal{F}$ , infatti un verso si dimostra identicamente alla precedente proposizione, mentre d'altro canto se per assurdo un filtro  $\mathcal{F}$  con la proprietà detta non fosse massimale, allora esisterebbe una sua estensione  $\mathcal{G}$ , e con esso un elemento  $A \in \mathcal{G}$  tale che  $A \notin \mathcal{F}$ , ma allora per ipotesi  $A^C \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ , e quindi  $A, A^C \in \mathcal{G} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{G}$ , assurdo.

**Definizione 2.1.19** (filtro principale e libero). Un filtro  $\mathcal{F}$  su un insieme  $X$  è detto *principale* se è della forma  $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \text{ t.c. } A \supseteq X_0\}$ , ove  $X_0 \subseteq X$ . Un filtro non principale è detto *libero*.

**Osservazione 2.1.20.** Un *ultrafiltro principale* è chiaramente un filtro principale che è anche un ultrafiltro (analogamente per ultrafiltri liberi), precisamente gli ultrafiltri principali su un insieme  $X$  sono tutti e soli della forma  $\mathcal{F}_a = \{A \subseteq X \text{ t.c. } a \in A\}$ , con  $a \in X$ .

**Esempio 2.1.21.** Un ultrafiltro libero è per esempio un ultrafiltro generato, grazie al Teorema 2.1.15, dal filtro di Fréchet  $\mathcal{C}$  su  $\omega$ . Quest'ultimo infatti, contentendo tutti e soli gli insiemi cofiniti, non può essere della forma di famiglia di sovrainsiemi di uno stesso elemento, perché per ogni elemento  $a \in \omega$  esiste almeno un elemento (per esempio  $\omega \setminus a$ ) di  $\mathcal{C}$  che non contiene  $a$ .

**Osservazione 2.1.22.** Un ultrafiltro libero non ha per elementi insiemi finiti, infatti se  $A$  è un sottoinsieme finito (di un insieme  $X$ ) in un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  su  $X$ , si hanno due casi: o esiste  $a \in A$  tale che  $\{a\} \in \mathcal{U}$ , e questo è il caso in cui  $\mathcal{U}$  è un filtro principale, oppure per ogni  $a \in A$  vale (dalla Proposizione 2.1.17)  $X \setminus \{a\} \in \mathcal{U}$ , da cui l'intersezione finita

$$\emptyset = A \bigcap_{a \in A} (X \setminus \{a\}) \in \mathcal{U}$$

(assurdo).

Conseguenza immediata è che ogni insieme cofinito appartiene a ogni ultrafiltro libero, ossia per ogni  $\mathcal{U}$  ultrafiltro libero vale  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ .

**Osservazione 2.1.23.** L'insieme degli ultrafiltri principali su  $\omega$  ha cardinalità  $\aleph_0$ , grazie alla corrispondenza biunivoca con  $\omega$  data in modo naturale da

$$a \leftrightarrow \mathcal{F}_a.$$

Si osservi che, essendo la cardinalità di  $\mathcal{P}(\kappa) = 2^\kappa = |\{f : \kappa \rightarrow 2 = \{0, 1\}\}|$ , la cardinalità dell'insieme di tutti gli ultrafiltri su  $\omega$ , essendo quest'ultimo un sottoinsieme di  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ , non può superare  $2^{2^{\aleph_0}}$ .

Piuttosto sorprendente, alla luce di ciò, è il seguente importante risultato, la cui dimostrazione è tratta da [4].

**Teorema 2.1.24.** (*Pospíšil*) *Esistono esattamente  $2^{2^{\aleph_0}}$  ultrafiltri su  $\omega$ .*

*Dimostrazione.* Chiamiamo un insieme  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  *indipendente* se per ogni  $n + m$ -upla  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m \in \mathcal{A}$  distinti, l'intersezione

$$X_1 \cap \dots \cap X_n \cap (X \setminus Y_1) \cap \dots \cap (X \setminus Y_m)$$

ha cardinalità  $\aleph_0$ . Proviamo allora il seguente risultato preliminare, che fornisce l'esistenza di un insieme indipendente sufficientemente grande.

**Lemma 2.1.25.** *Esiste un insieme indipendente  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  di cardinalità  $2^{\aleph_0}$ .*

*Dimostrazione.* Sia

$$P = \{(S, \mathcal{T}), S \in [\omega]^{<\omega}, \mathcal{T} \in [[\omega]^{<\omega}]^{<\omega}\}.$$

Ossia, a parole, l'insieme di tutte le coppie costituite da un insieme finito di numeri naturali e un insieme finito di insiemi finiti di numeri naturali. Osserviamo che l'insieme degli insiemi finiti di un insieme numerabile è

numerabile (in simboli  $|X| = \aleph_0 \Rightarrow |[X]^{<\omega}| = \aleph_0$ ), infatti mostriamo essere numerabile intanto  $A_i$ : l'insieme dei sottoinsiemi di  $X$  di cardinalità finita  $i$ . Per induzione si ha  $A_1$  in biezione con  $X$  (tramite  $\{x\} \leftrightarrow x$ ), quindi numerabile, e  $A_{i+1} = \{b \cup a \mid b \in A_i, a \in \omega\}$  ha cardinalità quindi  $|A_i| \times \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ . Allora

$$[X]^{<\omega} = \bigcup_{i < \omega} A_i$$

è unione numerabile di insiemi numerabili, quindi numerabile. Da quanto osservato segue allora chiaramente che  $[\omega]^{<\omega}$  è numerabile, e conseguentemente che lo è anche  $[[\omega]^{<\omega}]^{<\omega}$ , e così  $|P| = |[\omega]^{<\omega}| \times |[[\omega]^{<\omega}]^{<\omega}| = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ . Per quanto possa sembrare svantaggioso, possiamo ridurci a cercare  $\mathcal{A}$  non tra i sottoinsiemi di  $\mathcal{P}(\omega)$ , ma tra quelli di  $\mathcal{P}(P)$ , e seguirà la tesi dalla biezione  $P \longleftrightarrow \omega$ . Costruiamo allora un tale  $\mathcal{A}$ . Sia, per ogni  $u \subseteq \omega$ ,

$$X_u = \{(S, \mathcal{T}) \in P \text{ t.c. } S \cap u \in \mathcal{T}\},$$

e sia quindi

$$\mathcal{A} = \{X_u, u \subseteq \omega\}.$$

Mostriamo quindi che

1.  $\mathcal{A}$  ha cardinalità  $2^{\aleph_0}$  (facile).
2.  $\mathcal{A}$  è indipendente (meno facile).

vediamo infatti

1. segue dal fatto che  $\mathcal{A}$  è indicizzato proprio in  $\mathcal{P}(\omega)$  e che a elementi diversi di  $\mathcal{P}(\omega)$  corrispondono elementi diversi di  $\mathcal{A}$  ( $u \neq v \Rightarrow X_u \neq X_v$ ), infatti se  $u \neq v$  esiste (a meno di scambiare  $u$  con  $v$  se sono uno incluso nell'altro) un elemento  $x \in u \wedge x \notin v$ , allora la coppia  $(S_x, \mathcal{T}_x)$ , con  $S_x = \{x\}$  e  $\mathcal{T}_x = \{S_x\}$  è tale che  $(S_x, \mathcal{T}_x) \in X_u$  (perché  $S_x \cap u = \{x\} = S_x \in \mathcal{T}_x$ , ma chiaramente  $(S_x, \mathcal{T}_x) \notin X_v$ ).
2.  $\mathcal{A}$  è indipendente se  $\forall X_{u_1}, \dots, X_{u_n}, Y_{v_1}, \dots, Y_{v_m} \in \mathcal{A}$  si ha  $|X_{u_1} \cap \dots \cap X_{u_n} \cap (P \setminus Y_{v_1}) \cap \dots \cap (P \setminus Y_{v_m})| = \aleph_0$ . Siano allora  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \subseteq \omega$  distinti, che oltre a garantire per quanto già visto che anche i rispettivi  $X_{u_i}, X_{v_j}$  siano distinti, ci garantisce che

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \exists \alpha_{i,j} \text{ t.c. } \alpha_{i,j} \in u_i \setminus v_j \wedge \alpha_{i,j} \in v_j \setminus u_i.$$

Sia allora

$$S \in [\omega]^{<\omega} \text{ tale che } S \supseteq \{\alpha_{i,j}\}_{i,j}. \quad (2.1)$$

Osserviamo che l'insieme di tutti gli  $S$  con la proprietà richiesta è infinito e contenuto in  $[\omega]^{<\omega}$ , quindi è necessariamente numerabile, e per costruzione vale

$$S \cap u_i \neq S \cap v_j. \quad (2.2)$$

E sia infine

$$\mathcal{T} = \{S \cap u_i, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Allora

$$(S, \mathcal{T}) \in X_{u_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

perché l'intersezione di  $S$  con  $u_i$  sta per definizione in  $\mathcal{T}$ , mentre  $(S, \mathcal{T}) \notin X_{v_j}$  perché da 2.2 l'intersezione di  $S$  con  $v_j$  è diverso da tutti gli elementi di  $\mathcal{T}$ , cioè  $S \cap v_j \notin \mathcal{T}$ , quindi per definizione di  $X_{v_j}$ , si ha  $(S, \mathcal{T}) \notin X_{v_j}$ . Segue che

$$(S, \mathcal{T}) \in P \setminus X_{v_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Allora ognuno degli  $S$  con la proprietà richiesta è tale che

$$(S, \mathcal{T}) \in X_{u_1} \cap \dots \cap X_{u_n} \cap (P \setminus X_{v_1}) \cap \dots \cap (P \setminus X_{v_m}),$$

che pertanto ha cardinalità  $\aleph_0$ . Il che conclude la dimostrazione del lemma. □

Sia quindi una famiglia indipendente di cardinalità  $2^{\aleph_0}$   $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ , consideriamo, per ogni funzione  $f : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ , l'insieme

$$\mathcal{G}_f = \{X \in \mathcal{A}; |\omega \setminus X| < \omega\} \cup \{X \in \mathcal{A}; f(X) = 1\} \cup \{\omega \setminus X; X \in \mathcal{A}, f(X) = 0\},$$

$\mathcal{G}_f$  ha la p.d.i.f. perché è un sottoinsieme di  $\mathcal{A}$ , che è indipendente, e quindi un'intersezione finita è della forma  $X_1 \cap \dots \cap X_n$  che ha cardinalità non solo non nulla, ma  $\aleph_0$ . Pertanto grazie al Teorema 2.1.15 esiste  $\mathcal{U}_f \supseteq \mathcal{G}_f$ . Inoltre poiché  $\mathcal{U}_f$  contiene il filtro di Frechét  $\mathcal{C}$ , ogni suo elemento è infinito, perché se per assurdo  $\mathcal{U}_f \ni u$  insieme finito, segue che  $u^C \notin \mathcal{U}_f$ , quindi  $u^C$ , per definizione cofinito, non appartiene a  $\mathcal{C}$  (assurdo). Infine a funzioni differenti corrispondono ultrafiltri differenti: sia  $X \in \mathcal{A}$  tale che  $f(X) \neq g(X)$ , per esempio  $f(X) = 1$ ,  $g(X) = 0$ . Allora da  $f(X) = 1$  si ha  $X \in \mathcal{G}_f \subseteq \mathcal{U}_f$ , mentre da  $g(X) = 0$  si ha  $\omega \setminus X \in \mathcal{G}_g \subseteq \mathcal{U}_g$ , pertanto non può essere  $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g$ , al quale altrimenti apparterebbe  $\emptyset$ . La dimostrazione si conclude quindi osservando che l'insieme delle funzioni da  $\mathcal{A}$  in  $\{0, 1\}$  ha cardinalità  $2^{|\mathcal{A}|} = 2^{2^{\aleph_0}}$ . □

Segue chiaramente dal Teorema 2.1.24 e dall'Osservazione 2.1.23 che  $2^{2^{\aleph_0}}$  è anche la cardinalità dei soli ultrafiltri liberi su  $\omega$ .

## 2.2 CH implica l'esistenza di p-punti

**Definizione 2.2.1** (quasi contenimento). Diremo che un insieme  $X$  è *quasi contenuto* in un insieme  $Y$  se la differenza  $X \setminus Y$  è finita. In simboli

$$X \subseteq^* Y \Leftrightarrow |X \setminus Y| < \aleph_0.$$

**Definizione 2.2.2** (pseudo-intersezione). Sia  $\{A_i, i \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  un insieme di sottoinsiemi infiniti di  $\omega$ . Un insieme infinito  $X \subseteq \omega$  è detto *pseudo-intersezione* della famiglia  $\{A_i, i \in \omega\}$  se è quasi contenuto in ognuno degli  $A_i$ :

$$\forall i \in \omega \ X \subseteq^* A_i.$$

E quindi la fondamentale

**Definizione 2.2.3** (p-punto). Un ultrafiltro libero  $\mathcal{U}$  su  $\omega$  è detto *p-punto* se

$$\forall (A_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{U} \ \exists X \in \mathcal{U} \text{ t.c. } X \subseteq^* A_n \ \forall n \in \omega.$$

In altre parole un p-punto è un ultrafiltro libero tale per cui ogni successione di suoi elementi ammette una pseudointersezione ancora nell'ultrafiltro.

Vediamo subito una condizione necessaria e sufficiente per essere un p-punto, che risulterà più facile da verificare.

**Proposizione 2.2.4.** *Sia  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro libero su  $\omega$ , sono equivalenti:*

1.  $\mathcal{U}$  è un p-punto.
2. Per ogni partizione di  $\omega = \bigsqcup_{n \in \omega} A_n$  t.c.  $A_n \notin \mathcal{U} \ \forall n$ , esiste  $X \in \mathcal{U}$  t.c.  $|X \cap A_n| < \aleph_0 \ \forall n \in \omega$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{U}$  un p-punto, e sia la partizione  $\omega = \bigsqcup_{n \in \omega} A_n$ , con  $A_n \notin \mathcal{U} \ \forall n \in \omega$ . Si ha quindi per la Proposizione 2.1.17  $\omega \setminus A_n \in \mathcal{U} \ \forall n \in \omega$ , e quindi  $(A_n^C)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{U}$ . Allora per definizione di p-punto

$$\exists X \in \mathcal{U} \text{ t.c. } X \subseteq^* A_n^C \ \forall n,$$

cioè  $|X \setminus A_n^C| < \aleph_0$ , ossia  $|X \cap A_n| < \aleph_0 \ \forall n$ . Viceversa, sia  $(A_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{U}$ , dovendo mostrare che esiste un elemento quasi contenuto in ognuno di essi, non è restrittivo supporre che la successione sia decrescente per inclusione, e che  $A_0 = \omega$ : supponiamo infatti di aver mostrato che per successioni decrescenti la condizione 2. implica che  $\mathcal{U}$  è un p-punto, e sia una successione qualunque  $(Y_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{U}$ . Se consideriamo ora la successione decrescente

$$(Y = \bigcup_{n \in \omega} Y_n, Y \setminus Y_0, Y \setminus (Y_0 \cup Y_1), \dots),$$

aver mostrato l'implicazione per tale successione ci permette immediatamente di dedurla per  $(Y_n)_{n \in \omega}$ , infatti se esiste  $X \in \mathcal{U}$  che ha intersezione finita con  $Y$ , tale  $X$  ha intersezione finita con tutti gli  $Y_n$ . Chiaramente non è restrittivo neanche supporre  $A_0 = \omega$ , a meno di aggiungerlo forzatamente come primo termine di una successione decrescente. Sia quindi  $(A_n)_{n \in \omega}$  una successione decrescente di sottoinsiemi di  $\omega$ , con  $A_0 = \omega$ . Detto, per ogni  $n$ ,  $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ , si consideri la partizione di  $\omega$  definita da

$$\{B_n \mid n \in \omega\} \cup \bigcap_{i \in \omega} A_i.$$

Ora, se  $\bigcap_{i \in \omega} A_i \in \mathcal{U}$  abbiamo già trovato l'elemento  $X \in \mathcal{U}$  cercato, infatti  $X = \bigcap_{i \in \omega} A_i$  è contenuto propriamente (non solo quasi contenuto), in ciascun  $A_n$ . Se invece  $\bigcap_{i \in \omega} A_i \notin \mathcal{U}$ , osserviamo che anche ciascun  $B_i$  non appartiene a  $\mathcal{U}$ , infatti se per assurdo  $\exists k \in \omega$  t.c.  $B_k \in \mathcal{U}$ , si avrebbe

$$B_k = A_k \setminus A_{k+1} \in \mathcal{U}, A_k \in \mathcal{U} \Rightarrow \emptyset = B_k \cap A_{k+1} \in \mathcal{U}.$$

La partizione trovata soddisfa pertanto le richieste di 2., pertanto, per ipotesi

$$\exists X \in \mathcal{U} \text{ t.c. } |X \cap B_n| < \aleph_0 \quad \forall n \in \omega.$$

Proviamo allora per induzione su  $n$  che  $X \subseteq^* A_n \quad \forall n \in \omega$ . Chiaramente

$$X \subseteq^* A_0 = \omega,$$

sia quindi  $X \subseteq^* A_n$ , mostriamo  $X \subseteq^* A_{n+1}$ , cioè  $|X \setminus A_{n+1}| < \aleph_0$ . Grazie al fatto che  $|X \cap B_n| < \aleph_0 \quad \forall n$ , si ha

$$\aleph_0 > |X \cap B_n| = |X \cap (A_n \setminus A_{n+1})| = |X \cap A_n \cap A_{n+1}^c| \geq |X \cap A_{n+1}^c| = |X \setminus A_{n+1}|,$$

Da cui  $X \subseteq^* A_{n+1}$ . □

**Esempio 2.2.5.** La caratterizzazione appena trovata ci fornisce un metodo per trovare ultrafiltri liberi che non siano p-punti. Sia  $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  una partizione numerabile di insiemi numerabili di  $\omega$ , e sia

$$\mathcal{F} = \{Z \subseteq \omega \text{ t.c. } X_n \subseteq^* Z \text{ per ogni } n \text{ eccetto al più un insieme finito di } n\}.$$

$\mathcal{F}$  è effettivamente un filtro, infatti  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  perché  $\emptyset \cap X_n = \emptyset \quad \forall n$ , che non è chiaramente cofinito in  $X_n$ , essendo quest'ultimo infinito per ipotesi;  $\mathcal{F}$  è inoltre chiuso per sovrainsiemi dei suoi elementi, perché per ogni  $Z_+ \supseteq Z \in \mathcal{F}$ , se è cofinito in  $X_n$  l'insieme  $Z \cap X_n$ , sarà a maggior ragione cofinito l'insieme più grande  $Z_+ \cap X_n$  per gli stessi  $n$ ; infine siano  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ , ciò

significa che  $Z_1 \cap X_n$  e  $Z_2 \cap X_m$  sono cofiniti rispettivamente in  $X_n$  e  $X_m$  per ogni  $n \in I$ ,  $m \in J$  con  $I$  e  $J$  sottoinsiemi cofiniti di  $\omega$ . Essendo dunque l'insieme degli insiemi cofiniti di un insieme infinito un filtro su quest'ultimo,  $K = I \cap J$  è ancora cofinito, allora vale che sia  $Z_1 \cap X_k$  che  $Z_2 \cap X_k$  sono cofiniti in  $X_k$ , allora la loro intersezione è cofinita in  $X_k$  per ogni  $k \in K$ ,  $K$  cofinito in  $\omega$ , ossia  $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$ . Sia allora  $\mathcal{U}$  l'estensione di  $\mathcal{F}$  a ultrafiltro, per la quale non vale la condizione equivalente all'essere p-punto. Infatti la partizione di partenza  $\{X_n, n \in \omega\}$  è tale sì che per ogni  $n$   $X_n \notin \mathcal{U}$  (come richiesto da 2. della Proposizione 2.2.4), e ciò segue dal fatto che per ogni  $n$   $\omega \setminus X_n \in \mathcal{U}$ , vero perché essendo gli  $X_i$  disgiunti,  $\omega \setminus X_n \cap X_m = X_m$ , chiaramente cofinito in  $X_n$  per ogni  $m \neq n$ ; ma non vale, come richiesto dalla condizione in questione, l'esistenza di un elemento  $X \in \mathcal{U}$  che abbia intersezione finita con tutti gli elementi della partizione. Sia infatti  $X \in \mathcal{U}$ , mostriamo che esiste un  $n$  tale che  $|X \cap X_n| = \aleph_0$ : consideriamo  $\omega \setminus X \notin \mathcal{U}$ , da cui  $\omega \setminus X \notin \mathcal{F}$ , ossia per infiniti (almeno un)  $n$  l'insieme  $(\omega \setminus X) \cap X_n$  non è cofinito in  $X_n$ :

$$\aleph_0 = |X_n \setminus ((\omega \setminus X) \cap X_n)| = |X_n \cap ((\omega \setminus X) \cap X_n)^C| = |X_n \cap (X \cup X_n^C)| = |X \cap X_n|.$$

Il seguente teorema ci garantisce che sotto l'ipotesi del continuo esistono p-punti.

**Teorema 2.2.6.** *Se  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ , allora esistono p-punti.*

*Dimostrazione.* Osserviamo preliminarmente che l'insieme delle partizioni di  $\omega$ , che indicheremo con  $\mathcal{P}$  ha stessa cardinalità dell'insieme delle parti  $\mathcal{P}(\omega)$ . Per fare questo possiamo trovare anzitutto una funzione iniettiva da  $\mathcal{P}(\omega)$  a  $\mathcal{P}$ , o più comodamente ed equivalentemente possiamo trovare un'iniezione dall'insieme delle parti dei numeri pari nell'insieme delle partizioni: consideriamo allora  $\{2n, n \in \omega\}$ , e ad ogni suo sottoinsieme  $A$  associamo la partizione  $\{A \cup \{1\}, \omega \setminus (A \cup \{1\})\}$ , così a due sottoinsiemi diversi di numeri pari vengono associate differenti partizioni, ossia  $|\mathcal{P}(\omega)| < |\mathcal{P}|$ . Viceversa osserviamo che ogni partizione di  $\omega$  è un sottoinsieme numerabile di  $\mathcal{P}(\omega)$ , allora ad ogni partizione associamo una successione di naturali come segue: elenchiamo gli elementi della partizione in ordine crescente del loro elemento minimale, avremo quindi che il primo elemento è l'insieme della partizione che contiene lo 0, il secondo è l'elemento della partizione che contiene il più piccolo naturale che non stia già nel primo, e così via... Tale costruzione individua univocamente l'insieme (eventualmente finito) di tali elementi minimali, e così la successione crescente che individuano (eventualmente estesa a successione dalla ripetizione dell'ultimo elemento nel caso l'insieme fosse finito), Ora ricordando che l'insieme delle successioni naturali ha la stessa

cardinalità di  $\mathcal{P}(\omega)$  si ha l'altra disuguaglianza. Veniamo quindi alla dimostrazione: sia  $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$  una enumerazione delle partizioni di  $\omega$ , e costruiamo una  $\omega_1$ -successione di sottoinsiemi infiniti di  $\omega$  ricorsivamente come segue:

$$X_0 = \omega,$$

dato  $\alpha = \beta + 1$  un ordinale successore (ricordiamo che la classe degli ordinali è ben ordinata), sia  $X_\alpha \subsetneq X_\beta$  un sottoinsieme infinito di  $\omega$  scelto tale per cui valga una tra le seguenti condizioni:

- $\exists A \in \mathcal{A}_\beta$  tale che  $X_\alpha \subseteq A$
- $|X_\alpha \cap A| < \aleph_0 \forall A \in \mathcal{A}_\beta$

E ciò è sempre possibile poiché se pure nessun insieme infinito  $X_\alpha \subsetneq X_\beta$  dovesse soddisfare la seconda condizione (per ognuno di questi  $X_\alpha$  esiste  $A \in \mathcal{A}_\beta$  tale che  $|X_\alpha \cap A| = \aleph_0$ ) potremmo in tal caso scegliere l'insieme infinito rinominando  $X_\alpha := X_\alpha \cap A$ , che soddisfa la prima condizione ed è ancora un sottoinsieme di  $X_\beta$ . Se invece  $\alpha$  è un ordinale limite, mostriamo che seppure, data la numerabilità di  $\omega$ , non sia possibile continuare con una successione decrescente, è possibile però costruire  $X_\alpha$  ancora infinito tale che

$$X_\alpha \subseteq^* X_\beta \forall \beta \prec \alpha.$$

Ci è utile per fare ciò la nozione di sottoinsieme cofinale di un insieme parzialmente ordinato:  $A \subseteq P$ , con  $\mathbb{P} = (P, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato, è detto *cofinale* in  $P$  se

$$\forall x \in P \exists a \in A \text{ t.c. } p \leq a.$$

Allora osserviamo che poiché per ogni ordinale successore  $\beta = \gamma + 1$  vale  $X_\beta \subseteq X_\gamma$ , ci è sufficiente mostrare  $|X_\alpha \setminus X_\beta| < \aleph_0$  non per ogni  $\beta \prec \alpha$ , ma solo per un insieme di  $\beta$  cofinale in  $\alpha$ , e poiché  $\alpha (< \omega_1)$  è numerabile, così lo è ogni suo sottoinsieme cofinale. Sia allora  $\{\beta_n\}_{n \in \omega}$  una successione crescente e cofinale in  $\alpha$ . Per ogni  $n \in \omega$  sia

$$i_n \in X_{\beta_n}, \text{ con } i_{n+1} > i_n,$$

scelta che è sempre possibile fare grazie al fatto che ognuno degli  $X_{\beta_n}$  è infinito. E sia quindi

$$X_\alpha = \{i_n, n \in \omega\}.$$

Tale insieme è come richiesto, perché per ogni  $\beta \prec \alpha$  l'insieme  $X_\alpha \setminus X_\beta$  non è altro che l'insieme degli  $i_n$  privato di tutti gli elementi maggiori di un certo indice, e pertanto  $|X_\alpha \setminus X_\beta| < \aleph_0$ . Sia allora

$$\mathcal{U} = \{X \supseteq X_\alpha \text{ per qualche } \alpha < \omega_1\}.$$

Osserviamo che  $\mathcal{U}$  è un ultrafiltro libero. Per vedere che  $\mathcal{U}$  è un filtro su  $\omega$ , essendo chiaramente chiuso per sovrainsiemi e non constando l'insieme vuoto tra gli elementi, vi è da osservare solo la chiusura per intersezione: siano  $X \supseteq X_\alpha$  e  $Y \supseteq X_\beta$ , e supponiamo senza ledere la generalità  $\beta \prec \alpha$ . Allora vale per costruzione la quasi inclusione  $X_\alpha \subseteq^* X_\beta$ , da cui l'osservazione che  $X_\alpha \cap X_\beta = X_\alpha \setminus E$ , con  $E$  sottoinsieme finito di  $\omega$ . Allora considerando il tratto di successione  $X_\alpha, X_{\alpha+1}, X_{\alpha+2}, \dots$  e notando che per costruzione questo è strettamente decrescente, allora esiste un certo ordinale  $\gamma$  per cui  $X_\alpha \setminus E \supseteq X_\gamma$ , e allora

$$X \cap Y \supseteq X_\alpha \cap X_\beta \supseteq X_\alpha \setminus E \supseteq X_\gamma$$

e quindi l'intersezione sta ancora in  $\mathcal{U}$ , che quindi è un filtro. La massimalità è dimostrata per assurdo come segue: supponiamo che l'estensione di  $\mathcal{U}$  a ultrafiltro, diciamo  $\mathcal{V}$  sia un'estensione propria, ossia esiste un elemento  $X \in \mathcal{V}$  tale che  $X \notin \mathcal{U}$ . Per la proprietà di ultrafiltro si ha quindi  $X^C \notin \mathcal{V}$  e quindi  $X^C \notin \mathcal{U}$ . Ora consideriamo la partizione di  $\omega$  data da  $\{X, X^C\} = \mathcal{A}_\beta$  per un certo  $\beta$ , allora per l'ordinale successore  $\alpha = \beta + 1$  vale per costruzione una tra le due condizioni, ma questo è assurdo poiché non può essere né  $\exists A \in \mathcal{A}_\beta$  t.c.  $X_\alpha \subseteq A$  perché altrimenti uno tra  $X$  e  $X^C$  starebbe in  $\mathcal{U}$ , né  $|X_\alpha \cap A| < \aleph_0 \forall A \in \mathcal{A}_\beta$  poiché sarebbe  $\aleph_0 = |X_\alpha| = |X_\alpha \cap X| + |X_\alpha \cap X^C| < \aleph_0$ . Allora  $\mathcal{U}$  è effettivamente un ultrafiltro, chiaramente libero perché costituito esclusivamente da insiemi infiniti. Per quanto riguarda la condizione di essere un p-punto utilizziamo la definizione equivalente data dalla Proposizione 2.2.4 e osserviamo che data  $\mathcal{A}_\alpha$  una partizione di  $\omega$  tale che  $A \notin \mathcal{U}$  per ogni  $A \in \mathcal{A}_\alpha$ , siamo allora davanti a due possibili condizioni: se  $\alpha$  è un ordinale successore, da  $A \notin \mathcal{U}$  segue che  $X_\alpha \not\subseteq A$  (non vale la prima condizione), vale perciò la seconda condizione  $|X_\alpha \cap A| < \aleph_0$ , che è proprio quella richiesta dalla condizione equivalente per essere p-punto. Se invece  $\alpha$  è un ordinale limite, procediamo per induzione transfinita sugli ordinali limite (che sono un insieme ben ordinato): se per assurdo esistesse  $A \in \mathcal{A}_\alpha$  per cui  $|X_\alpha \cap A| = \aleph_0$  si avrebbe, per  $\beta \prec \alpha$

$$\aleph_0 = |X_\alpha \cap A| = |X_\alpha \cap A \cap (X_\beta)^C| + |X_\alpha \cap A \cap X_\beta|,$$

ma  $|X_\alpha \cap A \cap X_\beta^C| < |A_\alpha \setminus X_\beta| < \aleph_0$  per costruzione, e se  $\beta$  è successore abbiamo concluso che anche  $|X_\alpha \cap A \cap X_\beta| < |X_\beta \cap A| < \aleph_0$  per quanto mostrato in precedenza, e quindi l'assurdo ( $\aleph_0 < \aleph_0$ ), così anche se  $\beta$  è un ordinale limite otteniamo l'assurdo usando l'ipotesi di induzione transfinita.  $\square$

Allora l'esistenza di p-punti è consistente con ZFC. La dimostrazione dell'esistenza di un modello di ZFC in cui non esistono p-punti è dovuta a

Saharon Shelah ([6]) e procede in modo del tutto costruttivo via forcing, senza l'ausilio (ottenuto sempre mediante forcing) dell'indipendenza di CH, poiché l'esistenza di p-punti è implicata anche da asserzioni sufficientemente più deboli dell'ipotesi del continuo, tali da essere consistenti anche con  $ZFC + \neg CH$ .

# Capitolo 3

## La compattificazione di Stone-Čech

### 3.1 Compattificazione di uno spazio

Compattificare uno spazio topologico significa trovare uno spazio (insiemisticamente più grande) compatto che contenga una copia omeomorfa e densa dello spazio di partenza. Più precisamente, quindi, si ha la seguente definizione.

**Definizione 3.1.1** (compattificazione di uno spazio). Dato uno spazio topologico  $(X, \tau)$  una compattificazione di  $X$  è una coppia  $(f, \tilde{X})$  ove  $\tilde{X}$  è uno spazio compatto e  $f$  è un omeomorfismo da  $X$  a un sottospazio denso di  $\tilde{X}$ .

**Esempio 3.1.2** (compattificazione di Alexandroff). Dato uno spazio topologico  $X$  non compatto, consideriamo lo spazio ottenuto aggiungendo un punto  $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$  con topologia data dalla topologia di  $X$  unita agli aperti contenenti  $\infty$ , che definiamo come gli insiemi della forma  $H \cup \{\infty\}$  ove  $H$  è il complementare di un compatto di  $X$ . Tale insieme è effettivamente una topologia, perché  $(\bigcup K_i^C) \cup \{\infty\} = (\bigcap K_i)^C \cup \{\infty\}$ , e  $\bigcap K_i$  è chiuso (i complementari di compatti in  $X$  sono aperti in  $\tilde{X}$  e l'intersezione qualunque di chiusi è chiusa) in un compatto, e quindi compatto, mentre per l'intersezione finita si ha  $(K_1^C \cap K_2^C) \cup \{\infty\} = (K_1 \cup K_2)^C \cup \{\infty\}$ , e l'unione finita di compatti è chiaramente compatta. Tale spazio inoltre è compatto poiché dato un ricoprimento aperto di  $\tilde{X}$  un sottoricoprimento finito è dato da un aperto di  $\infty$ , diciamo  $H = K^C$ , unito, essendo il ricoprimento di  $\tilde{X}$  anche un ricoprimento di  $K$ , al sottoricoprimento finito di  $K$ . Inoltre  $X$  è denso in  $\tilde{X}$  perché  $X$  non è chiuso in  $\tilde{X}$  poiché il suo complementare ( $\{\infty\}$ ) non è aperto in quanto per ipotesi  $X$  non è compatto, e quindi la sua chiusura

lo contiene strettamente. Possiamo allora più precisamente dire che  $(i, \tilde{X})$  è una compattificazione di  $X$ , ove  $i$  è la mappa di inclusione.

**Esempio 3.1.3.** Altri esempi sono dati dal proiettivizzato di ogni spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , che risulta essere una compattificazione di  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Infatti, ogni spazio proiettivo  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$  è il quoziente per la mappa antipodale sulla sfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ , che è compatta e quindi lo è il quoziente (immagine continua di un compatto). L'immersione continua di  $\mathbb{R}^{n-1}$  è la proiezione dal centro della sfera sulla calotta aperta di punti identificati, e quindi la sua chiusura è l'intero spazio proiettivo.

Ricordiamo inoltre la definizione delle due seguenti condizioni, e da che le avremo enunciate, salvo avviso contrario le sottintenderemo assunte fino alla fine del capitolo ogni volta che prenderemo in considerazione un generico spazio topologico.

**Definizione 3.1.4** (spazio di Hausdorff). Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice *spazio di Hausdorff* ( $T_2$ ) se per ogni coppia di punti  $x, y \in X$  esistono aperti disgiunti  $U, V$  tali che  $x \in U, y \in V$ .

**Definizione 3.1.5** (spazio completamente regolare). Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice *spazio completamente regolare* se per ogni chiuso  $F \subseteq X$  e per ogni punto  $x \in X \setminus F$  esiste una funzione  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tale che  $f(x) = 0$  e  $f(y) = 1 \forall y \in F$ .

Quello che faremo ora è una generalizzazione per spazi topologici di parte di quanto visto nel precedente capitolo per  $\omega$ , vedremo quindi quali sono le condizioni e gli strumenti da usare per trattare ciò che per  $\omega$  veniva gratuitamente della sua topologia discreta.

**Definizione 3.1.6** (completa separazione). Sia  $X$  uno spazio topologico, due suoi sottospazi  $A, B$  si dicono *completamente separati (in  $X$ )* se esiste  $f : X \rightarrow [0, 1]$  continua tale che  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in A$  e  $f(y) = 1$  per ogni  $y \in B$ .

Uno spazio completamente regolare è quindi uno spazio in cui chiusi e punti disgiunti sono completamente separati.

**Definizione 3.1.7** ((co)zero-insieme). Un sottospazio  $A$  di uno spazio  $X$  si dice *zero-insieme (di  $X$ )* se esiste  $f$  continua su  $X$  a valori in  $\mathbb{R}$  tale che  $A = f^{-1}(\{0\})$ , si dirà invece *cozero-insieme* se è complementare di uno zero-insieme. Denotiamo con  $\mathcal{Z}(X)$  l'insieme degli zero-insiemi di uno spazio.

**Osservazione 3.1.8.** Ogni zero-insieme di uno spazio topologico è chiaramente chiuso poiché controimmagine di  $\{0\}$ , che è chiuso in  $\mathbb{R}$ , mediante una funzione continua. Il viceversa non è tuttavia sempre vero, si consideri infatti la retta con due origini, ossia lo spazio topologico  $\mathbb{R} \cup \{0^*\}$  con topologia standard su  $\mathbb{R}$  unita agli aperti di  $0^*$  definiti come gli aperti di  $\mathbb{R}$  contenenti 0 uniti a  $\{0^*\}$ . Allora  $0^*$  è un chiuso, poiché è il complementare di  $\mathbb{R}$ , ma non è uno zero-insieme, se infatti una funzione definita sulla retta con due origini si annulla solo su  $0^*$ , questa assume sull'origine 0 un valore reale  $a \neq 0$ , allora la controimmagine mediante tale funzione dell'aperto  $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  è un sottoinsieme della retta con due origini che contiene  $0^*$  ma non 0, e quindi non può essere aperto, pertanto tale funzione non può essere continua.

**Osservazione 3.1.9.** Due sottospazi  $A$  e  $B$  di uno spazio topologico  $X$  (qualunque) sono completamente separati se e solo se  $A$  e  $B$  sono contenuti in zero-insiemi disgiunti. Infatti siano  $A$  e  $B$  completamente separati, cioè esiste una funzione continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tale che  $f(a) = 0 \forall a \in A$ ,  $f(b) = 1 \forall b \in B$ , allora  $f^{-1}(0)$  e  $f^{-1}(1)$  contengono rispettivamente  $A$  e  $B$ , sono disgiunti perché  $f$  è una funzione, e sono zero-insiemi ( $f^{-1}(1) = (f-1)^{-1}(0)$ ). Viceversa se  $A = f^{-1}(0)$  e  $B = g^{-1}(0)$ , con  $f, g$  continue su  $X$  a valori in  $[0, 1]$ , e  $A \cap B = \emptyset$ , allora la funzione

$$h(x) = \frac{f^2(x)}{f^2(x) + g^2(x)}$$

è ben definita perché se per assurdo esistesse  $x$  tale che  $f(x) = g(x) = 0$  sarebbe  $x \in A \cap B = \emptyset$ , è continua perché lo sono  $f$  e  $g$ , e vale 0 su  $A$  e  $\frac{f^2}{f^2} = 1$  su  $B$ .

**Osservazione 3.1.10.** L'intersezione (finita o) numerabile di zero-insiemi è ancora uno zero-insieme, sia infatti  $(A_n)_{n \in \omega}$  una successione di zero-insiemi di uno spazio  $X$ , e sia quindi per ogni  $n$  la mappa (i.e. funzione continua) definita su  $X$   $f_n$  tale che  $A_n = f_n^{-1}(0)$ . allora non è restrittivo pensare di costruire funzioni  $f_n^* = \frac{|f_n|}{2^n}$ , e quindi  $f = \sum_{n < \omega} f_n^*$  è una funzione continua tale che

$$\bigcap_{n < \omega} A_n = f^{-1}(\{0\}).$$

**Definizione 3.1.11** ( $z$ -(ultra)filtro). Uno  $z$ -filtro su uno spazio  $X$  è un filtro  $\mathcal{F}$  sull'insieme parzialmente ordinato per inclusione degli zero-insiemi di  $X$ : ossia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Z}(X)$  tale che

1. se  $A, B \in \mathcal{F}$  allora  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .

2. se  $A \in \mathcal{F}$  e  $A \subseteq B \in \mathcal{Z}(X)$  allora  $B \in \mathcal{F}$ .

3.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .

Uno *z-ultrafiltro* su  $X$  è uno z-filtro non propriamente contenuto in nessun altro z-filtro.

**Osservazione 3.1.12.** Valgono, con enunciati e dimostrazioni identiche a meno di cambiare (*ultra*)filtro con *z-(ultra)*filtro e  $\mathcal{P}(X)$  con  $\mathcal{Z}(X)$ , il Lemma 2.1.14 e il Teorema 2.1.15, così come, a meno di scambiare  $\omega$  con uno spazio  $X$ , la Proposizione 2.1.16. Meno scontate saranno altre proprietà per cui useremo le ipotesi sugli spazi topologici di essere Hausdorff e completamente regolari.

**Definizione 3.1.13** (compattificazione di Stone-Čech). Dato uno spazio  $X$  chiamiamo *compattificazione di Stone-Čech* e indichiamo con  $\beta X$  lo spazio degli z-ultrafiltri su  $X$  dotato della topologia generata dall'insieme (i.e. la più piccola topologia che contiene l'insieme)

$$\mathcal{B} = \{ \{p \in \beta X \text{ t.c. } A \notin p\}, A \in \mathcal{Z}(X) \},$$

ossia l'insieme degli insiemi di z-ultrafiltri che non hanno per elemento uno stesso zero-insieme.

**Osservazione 3.1.14.**  $\mathcal{U}_x = \{A \in \mathcal{Z}(X) \text{ t.c. } x \in A\}$ ,  $x \in X$  è uno z-ultrafiltro su  $X$ , è infatti uno z-filtro perché chiuso per intersezione (l'intersezione di due zero-insiemi contenenti  $x$  è ancora uno zero-insieme contenente  $x$ ), è chiuso per zero-sovrainsiemi (ogni zero-insieme di  $X$  che contiene uno zero-insieme a cui appartiene  $x$  è per ipotesi uno zero-insieme e ha chiaramente  $x$  tra i suoi elementi), e non consta come elemento  $\emptyset$  al quale ovviamente non appartiene  $x$ . Allora se per assurdo l'aggiunta di un elemento  $B \in \mathcal{Z}(X)$  estendesse  $\mathcal{U}_x$ , vorrebbe dire che  $x \notin B$ , esiste quindi per ipotesi di completa regolarità di  $X$  una funzione  $g$  che separa  $B$  (chiuso) e  $x$ . Supponiamo senza ledere la generalità che tale funzione valga 0 su  $x$  e 1 su  $B$ , ciò significa che esiste uno zero-insieme  $A = g^{-1}(0)$  che contiene  $x$  (quindi appartiene a  $\mathcal{U}_x$ ) ma ha intersezione vuota con  $B$ , e quindi si avrebbe l'assurdo  $\emptyset \in \mathcal{U}_x$ .

**Osservazione 3.1.15.** Alla luce dell'osservazione precedente ha senso quindi considerare la funzione  $i : X \rightarrow \beta X$  definita da

$$i(x) = \{A \in \mathcal{Z}(X) \text{ t.c. } x \in A\},$$

che è iniettiva. Infatti osserviamo preliminarmente che in uno spazio di Hausdorff ogni insieme contenente un solo punto è chiuso: sia  $x \in X$ , allora

$\forall y \neq x \exists \mathcal{U} \ni x$  ed  $\exists \mathcal{V}_y \ni y$  aperti disgiunti, questi ultimi in particolare non contengono  $x$  per ogni  $y$ . Considerando allora

$$\{x\}^C = \bigcup_{y \neq x} \mathcal{V}_y$$

che è aperto in quanto unione di aperti, da cui  $\{x\}$  è chiuso. Ora, se  $x \neq y$ , essendo supposto  $X$  di Hausdorff e completamente regolare, sia  $\{x\}$  che  $\{y\}$  sono chiusi, ed esiste, usando per esempio il fatto che  $\{x\}$  è chiuso,  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tale che  $f(x) = 0$  ed  $f(y) = 1$ . Possiamo allora usare un'accoretza che sfrutta le proprietà metriche di  $[0, 1]$  per lavorare più comodamente con zero-insiemi e con la proprietà di completa separazione: in generale se  $A, B$  sono zero-insiemi tali che esiste  $g : X \rightarrow [0, 1]$  per cui  $A = g^{-1}(\{0\})$  e  $B = g^{-1}(\{1\})$ , allora l'insieme  $g^{-1}([0, \frac{1}{4}])$  è ancora uno zero-insieme e che chiaramente contiene  $A$ . Per vederlo è sufficiente considerare la mappa continua  $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$s(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{4}{3}t - \frac{1}{3} & \text{se } t \in [\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

Ossia in parole povere una contrazione del primo quarto di segmento a 0 e la conseguente dilatazione del rimanente tratto. Ed è ora più chiaro che  $g^{-1}([0, \frac{1}{4}]) = (s \circ g)^{-1}(\{0\})$ . Possiamo analogamente costruire anche cozero-insiemi, tenendo a mente l'esempio mostrato servendoci della mappa  $s$ , è chiaro che  $g^{-1}([\frac{1}{4}, 1]) = (g^{-1}([0, \frac{1}{4}]))^C$  è un cozero-insieme che contiene questa volta  $B$ . Nel nostro caso vogliamo mostrare che esistono zero-insiemi disgiunti che contengono rispettivamente  $x$  e  $y$ , e sarà quindi sufficiente considerare  $f^{-1}([0, \frac{1}{4}]) \in i(x)$  e  $f^{-1}([\frac{3}{4}, 1]) \notin i(x)$ .

**Osservazione 3.1.16.** Segue dalla definizione di  $i$  che

$$i(X \setminus A) = i(X) \cap \{p \in \beta X \text{ t.c. } A \in p\}$$

per ogni  $A \in \mathcal{Z}(X)$ , e che quindi la controimmagine attraverso  $i$  di un aperto di  $i(X)$  è il complementare di uno zero-insieme, e quindi è aperta. Per mostrare che  $i$  (coristretta all'immagine) è aperta osserviamo anzitutto che i cozero-insiemi costituiscono una base per la topologia, infatti dato un qualunque aperto  $U \subseteq X$ ,  $C$  si può scrivere come unione di cozero-insiemi grazie alla completa regolarità: per ogni  $x \in U$  esiste una funzione  $f_x : X \rightarrow [0, 1]$  che vale 1 su  $x$  e 0 su  $U$ , allora

$$U = \bigcup_{x \in U} (f_x^{-1}(\{0\}))^C.$$

E quanto osservato ci dice allora che un aperto (unione di cozero-insieme) viene mandato da  $i$  nell'unione di aperti di  $\beta X$  (intersecati con  $i(X)$ ). L'iniezione  $i$  è quindi un omeomorfismo con la propria immagine, ed è perciò detta immersione canonica dello spazio nella sua compattificazione di Stone-Cëch, e data l'equivalenza topologica tra i due finiremo per identificare, quando ci sarà utile farlo, lo spazio stesso con la propria immersione.

**Osservazione 3.1.17.**  $\mathcal{B}$  è una base per la topologia che genera. Per mostrarlo notiamo che generando  $\mathcal{B}$  la topologia, quest'ultima è costituita da tutti le unioni di intersezioni finite di elementi di  $\mathcal{B}$ , pertanto è sufficiente mostrare che  $\mathcal{B}$  è chiusa per intersezioni finite, e sarà tale che ogni aperto è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ . Siano allora  $A_1, A_2 \in \mathcal{Z}(X)$  e i due rispettivi elementi di  $\mathcal{B}$

$$B_1 = \{p \in \beta X \text{ t.c. } p \notin A_1\} \text{ e } B_2 = \{p \in \beta X \text{ t.c. } p \notin A_2\}.$$

Ora  $p \notin A_1 \cup A_2 \Leftrightarrow (p \notin A_1 \wedge p \notin A_2)$ , e osservando che  $A_1 \cup A_2$  è ancora uno zero-insieme, si ha che

$$B_1 \cap B_2 = \{p \in \beta X \text{ t.c. } p \notin A_1 \cup A_2\}$$

è ancora un elemento di  $\mathcal{B}$ , che quindi è effettivamente una base.

**Proposizione 3.1.18.** *Dato un sottospazio  $A \in \mathcal{Z}(X)$  vale*

$$\overline{i(A)}^{\beta X} = \{p \in \beta X \text{ t.c. } A \in p\}$$

*Dimostrazione.* Essendo

$$i(A) = \bigcup_{x \in A} i(x) = \bigcup_{x \in A} \{B \in \mathcal{Z}(X) \text{ t.c. } x \in B\},$$

se  $p \in i(A)$ , allora  $p = \{B \in \mathcal{Z}(X) \text{ t.c. } x_p \in B\}$ , con  $x_p \in A$ , perciò in particolare  $A \in p$ , e quindi  $p \in \{p \in \beta X \text{ t.c. } A \in p\}$ , cioè

$$i(A) \subseteq \{p \in \beta X \text{ t.c. } A \in p\}$$

inoltre  $\{p \in \beta X \text{ t.c. } A \in p\}$  è il complementare di un elemento della topologia, quindi è chiaramente un chiuso di  $\beta X$ , da cui

$$\overline{i(A)}^{\beta X} \subseteq \{p \in \beta X \text{ t.c. } A \in p\}.$$

Viceversa, dato  $p$  tale che  $A \in p \in \beta X$ , sia per assurdo  $p \notin \overline{i(A)}^{\beta X}$ . Essendo quest'ultimo un chiuso, ciò significa che  $p$  appartiene a un aperto disgiunto

da esso, ed essendo  $\mathcal{B}$  una base per la topologia, ogni aperto è sovrainsieme di un elemento di  $\mathcal{B}$ , in simboli  $\exists B \in \mathcal{Z}(X)$  t.c.  $p \in \{q \in \beta X \text{ t.c. } B \notin q\}$ , cioè tale che  $B \notin p$ , e vale

$$i(A) \cap \{q \in \beta X \text{ t.c. } B \notin q\} = \emptyset,$$

da ciò  $i(A)$  è contenuto (in  $i(X)$  e) nel complementare di  $\{q \in \beta X \text{ t.c. } B \notin q\}$ , ossia

$$i(A) \subseteq i(X) \cap \{q \in \beta X \text{ t.c. } B \in q\} = i(B)$$

dalla Osservazione 3.1.16. Data la bigiettività di  $i$  coristretta alla propria immagine,  $i(A) \subseteq i(B)$  implica che  $A \subseteq B$ , ma appartenendo  $A$  a  $p$  per ipotesi ed essendo  $p$  in particolare un filtro (chiuso per zero-sovrainsiemi), ciò contraddice il fatto che  $B$  non appartiene a  $p$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.19.** Uno spazio  $X$  è denso in  $\beta X$ . Più precisamente

$$\overline{i(X)}^{\beta X} = \beta X.$$

Ciò segue immediatamente dalla precedente Proposizione, notando che  $X$  appartiene a ogni ultrafiltro:  $\overline{i(X)}^{\beta X} = \{p \in \beta X \text{ t.c. } X \in p\} = \beta X$ .

**Teorema 3.1.20.**  $\beta X$  è uno spazio di Hausdorff compatto.

*Dimostrazione.* Siano  $p, q \in \beta X$ ,  $p \neq q$  allora per l'analogo della proposizione 2.1.16 esistono  $A, B \in \mathcal{Z}(X)$  tali che  $A \in p$ ,  $B \in q$  e  $A \cap B = \emptyset$ . Poiché zero-insiemi disgiunti sono completamente separati (Osservazione 3.1.9), esiste  $f : X \rightarrow [0, 1]$  continua che vale 0 su  $A$  e 1 su  $B$ , Ora quello che vorremmo mostrare è che esistono due aperti  $U, V$  disgiunti della base (insiemi di ultrafiltri accomunati dal non avere per elemento uno stesso zero,insieme) intorno rispettivamente di  $p$  e  $q$ . In virtù di quanto osservato su come lavorare con gli zero-insiemi possiamo facilmente trovare cozero-insiemi (di  $X$ )  $C = f^{-1}([0, \frac{1}{8}])$ ,  $D = f^{-1}([\frac{7}{8}, 1])$  e zero-insiemi  $E = f^{-1}([0, \frac{1}{4}])$  ed  $F = f^{-1}([\frac{3}{4}, 1])$ , per cui valgono le inclusioni

$$A \subseteq C \subseteq E \text{ e } B \subseteq D \subseteq F,$$

e la disgiunzione  $E \cap F = \emptyset$ . Allora possiamo considerare gli aperti

$$U = \{r \in \beta X \text{ t.c. } X \setminus C \notin r\} \text{ e } V = \{r \in \beta X \text{ t.c. } X \setminus D \notin r\},$$

i quali contengono rispettivamente  $p$  e  $q$ , poiché se fosse  $X \setminus C \in p$ , cioè  $p \notin U$ , essendo anche  $A \in p$  dovrebbe valere  $A \cap (X \setminus C) = \emptyset \in p$ ; e così per  $q$ . Ora osserviamo che per ogni z-ultrafiltro  $r$  vale  $(X \setminus C) \cup X = X \in r$ ,

allora dalla Proposizione 2.1.16 generalizzata, si ha che se  $X \setminus C \notin r$ , allora  $E \in r$ . Da ciò l'inclusione

$$U \cap V \subseteq \{r \in \beta X \text{ t.c. } E \in r\} \cap \{r \in \beta X \text{ t.c. } F \in r\},$$

e quest'ultima è effettivamente vuota grazie al fatto che  $E$  ed  $F$  sono disgiunti. Vediamo allora la compattezza, provando preliminarmente il seguente lemma.

**Lemma 3.1.21.** *Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è compatto se e solo se ogni ricoprimento costituito da aperti in una base  $\mathcal{B}$  per  $\tau$  ammette ricoprimento finito.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $X$  compatto e sia  $\Theta$  un ricoprimento aperto di  $X$  contenuto in  $\mathcal{B}$ , allora per compattezza esso ammette un sottoricoprimento finito, che chiaramente è contenuto ancora in  $\mathcal{B}$ . Viceversa sia un ricoprimento aperto di  $X$ , diciamo  $\{U_i, i \in I\}$ , per definizione di base ogni  $U_i$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ , consideriamo quindi l'insieme  $\mathcal{B}$  avente per elementi tutti gli elementi di  $\mathcal{B}$  contenuti in almeno un  $A_i$  al variare di  $i$  in  $I$ : tale insieme è quindi un ricoprimento (perché la sua unione contiene l'unione degli  $A_i$  che contiene  $X$ ) costituito da elementi di  $\mathcal{B}$ , che quindi per ipotesi ammette un sottoricoprimento finito, diciamo  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ . Ora per ogni  $i$  scegliamo uno degli  $U_i$  che contiene  $B_i$ , così facendo troviamo un sottoricoprimento finito di  $\{U_i, i \in I\}$ :

$$\{U_i, 1 = 1, \dots, n\}.$$

□

Sia allora un ricoprimento aperto costituito da elementi in  $\mathcal{B}$ , che ricordiamo essere  $\{\{p \in \beta X \text{ t.c. } A \notin p\}, A \in \mathcal{Z}(X)\}$ , base per la topologia di  $\beta X$ , ossia base per

$$\{\{p \in \beta X \text{ t.c. } A_i \notin p\} \mid i \in I\}, \quad A_i \in \mathcal{Z}(X).$$

Supponiamo ora per assurdo che non esista alcun ricoprimento finito, ossia che per ogni insieme finito  $E \subseteq I$  valga

$$\bigcup_{i \in E} \{p \in \beta X \text{ t.c. } A_i \notin p\} \neq \beta X,$$

allora passando ai complementari si ottiene

$$\bigcap_{i \in E} \{p \in \beta X \text{ t.c. } A_i \in p\} \neq \emptyset,$$

Usando ora il fatto che per ogni  $A, B \in \mathcal{Z}(X)$  vale  $A \in p \wedge B \in p \Leftrightarrow A \cap B \in p$ , si ha

$$\{p \in \beta X \text{ t.c. } A \in p\} \cap \{p \in \beta X \text{ t.c. } B \in p\} = \{p \in \beta X \text{ t.c. } A \cap B \in p\}$$

E iterando per intersezioni finite, sar\`a:

$$\bigcap_{i \in E} \{p \in \beta X \text{ t.c. } A_i \in p\} = \left\{ p \in \beta X \text{ t.c. } \bigcap_{i \in E} A_i \in p \right\} \neq \emptyset$$

Ma allora, poich\`e per ogni  $B \in \mathcal{Z}(X)$  vale

$$\{p \in \beta X \text{ t.c. } B \in p\} = \emptyset \Leftrightarrow B = \emptyset$$

si ha che  $\bigcap_{i \in E} A_i \neq \emptyset$ , allora la famiglia degli  $A_i$  gode della p.d.i.f., e quindi esiste un ultrafiltro  $q \in \beta X$  che contiene la famiglia degli  $A_i$ , ossia

$$A_i \in q \quad \forall i \in I,$$

ci\`o significa che

$$q \notin \{p \in \beta X \text{ t.c. } A_i \notin p\},$$

allora

$$q \notin \bigcup_{i \in I} \{p \in \beta X \text{ t.c. } A_i \notin p\} = \beta X.$$

Ed ecco l'assurdo. □

## 3.2 Propriet\`a universale della compattificazione di Stone-\u010cech

Abbiamo quindi provato fin'ora che  $(i, \beta X)$ , per  $X$  di Hausdorff e completamente regolare, \u00e8 effettivamente una compattificazione. Studiamone ora alcune propriet\`a, e per farlo vediamo un risultato preliminare, la cui dimostrazione segue la prova data in [7].

**Lemma 3.2.1.** *Dato un sottospazio topologico  $X$  denso in  $Y$  e data una funzione continua  $f$  da  $X$  a uno spazio compatto  $K$ , valgono*

- *Se per ogni  $p \in Y \setminus X$  esiste  $f_p : X \cup \{p\} \rightarrow K$  continua ed estensione di  $f$  ( $f \subseteq f_p$ ), allora esiste  $g : Y \rightarrow K$  tale che  $f \subseteq g$ .*

- Se  $p \in Y \setminus X$  è tale che non vi è alcuna funzione continua  $g : X \cup \{p\} \rightarrow K$  che estenda  $f$ , allora esistono zero-insiemi di  $K$ ,  $A$  e  $B$ , tali che

$$A \cap B = \emptyset \text{ e } p \in \overline{f^{-1}(A)}^Y \cap \overline{f^{-1}(B)}^Y.$$

*Dimostrazione.* 1. Ci è sufficiente considerare  $g = f \cup (\bigcup_{p \in Y \setminus X} \{f_p\})$ , la cui continuità in ogni  $p \in Y \setminus X$  è data osservando che preso un intorno aperto di  $g(p)$ , diciamo  $V \subseteq K$ , esiste un intorno di  $g(p)$ , diciamo  $W$ , per cui  $\overline{W}^X \subseteq V$ , ciò è vero grazie alla completa regolarità di  $K$ , infatti essendo  $V^C$  e  $g(p)$  un chiuso e un punto disgiunti, esiste una funzione continua  $f : K \rightarrow [0, 1]$  che vale 0 su  $g(p)$  e 1 su  $V^C$ . Segue che  $W = f^{-1}([0, \frac{1}{4}))$  è un aperto di  $K$  disgiunto da  $V^C$  (i.e. contenuto in  $V$ ) contenuto chiaramente nel chiuso  $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ , pertanto  $\overline{W}^K \subseteq V$ . Allora sia, grazie alla continuità di  $f$ ,  $U$  un intorno di  $p$  in  $Y$  tale che  $f(U \cap X) \subseteq W$ . Ora per  $q \in U$  (e quindi  $q \in \overline{U \cap X}^Y$ ) si ha

$$g(q) = f_q(q) \in \overline{f_q(U \cap X)}^K = \overline{f(U \cap X)}^K \subseteq \overline{W}^K \subseteq V.$$

2. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ \overline{f(U \cap X)}^K, U \text{ intorno di } p \right\}$$

che dalla densità di  $X$  è una famiglia di chiusi con la proprietà delle intersezioni finite, infatti

$$\overline{f(U \cap X)}^K \cap \overline{f(V \cap X)}^K \supseteq f(U \cap X) \cap f(V \cap X) \supseteq f(U \cap V \cap X) \neq \emptyset.$$

Ora vi è da osservare un fatto fondamentale che lega la compattezza alla proprietà delle intersezioni finite, più precisamente vale il seguente risultato.

**Osservazione 3.2.2.** Uno spazio topologico  $X$  è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi di  $X$  avente la p.d.i.f. ha intersezione non vuota. Infatti la compattezza ci afferma che per ogni ricoprimento aperto

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists S \text{ t.c. } X = \bigcup_{i \in S} A_i$$

con  $S$  un sottoinsieme finito di  $I$ . Allora per argomento contronominale, passando quindi ai complementari si ottiene

$$\emptyset \neq \bigcap_{i \in I} (A_i)^C \Leftrightarrow \forall S \emptyset \neq \bigcap_{i \in S} (A_i)^C$$

per ogni  $S$  insieme finito di indici in  $I$ .

Allora dalla compattezza di  $K$  si ha che  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Ora, se tale intersezione constasse solo di un elemento, diciamo  $\bigcap \mathcal{F} = \{s\}$ , allora la funzione  $f \cup \{(p, s)\}$  sarebbe una funzione continua che estende  $f$  su  $X \cup \{p\}$ , vi devono perciò essere in tale intersezione almeno due elementi distinti  $s, t$ , pertanto essendo  $K$   $T_2$  esistono aperti disgiunti che li separano, e grazie alla completa regolarità anche zero-insiemi  $A, B$  disgiunti contenenti rispettivamente  $s, t$ , per i quali

$$p \in \overline{f^{-1}(A)}^Y \cap \overline{f^{-1}(B)}^Y.$$

□

Prima del seguente e cruciale risultato, ricordiamo un Teorema di estensione che ci sarà utile per continuare, di cui daremo per nota la dimostrazione, trovabile in [8].

**Teorema 3.2.3** (di estensione di Tietze). *Data una funzione continua  $f$  definita su un sottospazio chiuso  $C$  di uno spazio topologico  $X$  e a valori in  $\mathbb{R}$ , allora esiste una funzione  $F$  estensione continua di  $f$  all'intero spazio  $X$  tale che*

$$\sup_{x \in C} |f(x)| = \sup_{x \in X} |F(x)|.$$

**Teorema 3.2.4.** *Dato uno spazio  $X$  denso in uno spazio compatto  $Y$  sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *Per ogni funzione continua  $f$  da  $X$  a uno spazio compatto  $K$  esiste una funzione continua  $g \supseteq f$  definita su  $Y$  a valori in  $K$ , cioè il seguente diagramma commuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & K \\ \downarrow i & & \nearrow g \\ Y & & \end{array}$$

ove  $i$  è la mappa di inclusione.

2. *L'insieme  $\mathcal{F}_y = \{A \in \mathcal{Z}(X) \text{ t.c. } y \in \overline{A}^Y\}$  è uno  $z$ -filtro su  $X$  per ogni  $y \in Y$ .*

*Inoltre gli spazi  $X$  e  $Y = \beta X$  soddisfano queste proprietà, e per ogni altro  $Y$  che (con lo stesso  $X$ ) le soddisfa, vale l'esistenza di un unico omeomorfismo tra  $Y$  e  $\beta X$  che fissa (è l'identità ristretto a)  $X$ .*

*Dimostrazione.* Per la prima implicazione (supponiamo 1.) osserviamo che a  $\mathcal{F}_y$  chiaramente non appartiene l'insieme vuoto ed è una famiglia chiusa per zero-sovrainsiemi. Resta da mostrare che l'intersezione di elementi di  $\mathcal{F}_y$  è ancora un elemento di  $\mathcal{F}_y$ . Vorremmo quindi che dati due zero-insiemi  $A, B$  di  $X$  valesse  $y \in \overline{A}^Y \cap \overline{B}^Y \Rightarrow y \in \overline{A \cap B}^Y$ . Sia per assurdo  $y \notin \overline{A \cap B}^Y$ , costruiamo allora sotto questa assunzione una funzione continua su  $X$  in uno spazio compatto che non si può estendere con continuità a  $Y$ . Essendo  $A, B$  zero-insiemi di  $X$ , vale  $A = f^{-1}(\{0\})$  e, a meno di banali modifiche della definizione della funzione,  $B = g^{-1}(\{1\})$ , con  $f, g : X \rightarrow [0, 1]$ . Osserviamo che  $A \cap B$  è ancora uno zero-insieme, e quindi è chiuso. Pertanto per completa regolarità il punto  $y$  e il chiuso  $A \cap B$  si separano con una funzione continua  $f$  a valori in  $[0, 1]$ , e quindi anche con gli aperti  $f^{-1}([0, \frac{1}{4}])$ ,  $f^{-1}([\frac{3}{4}, 1])$ . Dentro all'aperto contenente  $y$  possiamo trovare un intorno chiuso di  $y$ , che chiamiamo  $C$ . Ora possiamo considerare i chiusi disgiunti  $A \cap C$  e  $B \cap C$ , e così la funzione

$$f \upharpoonright_{A \cap C} \cup g \upharpoonright_{B \cap C}$$

definita su un chiuso di  $X$ , ed ivi chiaramente continua. Allora siamo nelle condizioni di utilizzare il Teorema di estensione di Tietze, ed affermare che esiste una funzione  $h : X \rightarrow [0, 1]$  che vale 0 su  $A$  e 1 su  $B$ , e quindi per 1., essendo  $[0, 1]$  compatto, tale funzione ammette un'estensione continua a  $Y$ , diciamo

$$\tilde{h} : Y \rightarrow [0, 1].$$

Ora vale chiaramente che  $h(A) = 0 \Rightarrow \tilde{h}(\overline{A}^Y) = 0$ , poiché  $\tilde{h}^{-1}(\{0\})$  è un chiuso di  $Y$  che contiene  $A$ , e quindi contiene anche la sua chiusura in  $Y$ , e così analogamente per  $B$ . Pertanto, ricordando che  $y \in \overline{A}^Y \cap \overline{B}^Y$ , siamo nella situazione

$$\tilde{h}(y) = h(A) = 0 \neq 1 = h(B) = \tilde{h}(y),$$

assurdo. Viceversa supponiamo che per assurdo esista una funzione  $f : X \rightarrow K$  in uno spazio compatto  $K$  tale per cui questa non si può estendere a una funzione continua definita su  $Y$ , siamo allora nella condizione di applicare il primo punto del Lemma 3.2.1 e affermare che esiste un punto  $y \in Y \setminus X$  per cui ogni funzione continua  $g : X \cup \{y\} \rightarrow K$  non è estensione di  $f$ . Ci troviamo quindi nella condizione di applicare il secondo punto del Lemma, e possiamo affermare grazie ad esso che esistono  $A, B \in \mathcal{Z}(K)$  tali che  $A \cap B = \emptyset$  e  $y \in \overline{f^{-1}(A)}^Y \cap \overline{f^{-1}(B)}^Y$ . Ora non resta che osservare il fatto che  $f^{-1}(A)$  e  $f^{-1}(B)$  sono zero-insiemi di  $X$ , dette infatti  $s$  e  $t$  le funzioni per cui  $A = s^{-1}(\{0\})$  e  $B = t^{-1}(\{0\})$ , è chiaro che  $f^{-1}(A) = (s \circ f)^{-1}(\{0\})$  e  $f^{-1}(B) = (t \circ f)^{-1}(\{0\})$ ,

a tali insiemi appartiene  $y$  per quanto appena osservato, perciò essi sono elementi di  $\mathcal{F}_y$ , e così la loro intersezione  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ , pertanto  $\mathcal{F}_y$  non è uno  $z$ -filtro, assurdo. Inoltre  $\beta X$  è uno spazio compatto che ammette  $X$  come sottospazio denso, e vale anche, dalla Proposizione 3.1.18, che per  $p \in \beta X$ ,

$$p = \left\{ A \in \mathcal{Z}(X) \text{ t.c. } p \in \overline{i(A)}^{\beta X} \right\},$$

e allora la seconda condizione è soddisfatta (e quindi anche la prima) poiché gli elementi di  $\beta X$  sono  $z$ -ultrafiltri su  $X$ . Sia ora uno spazio compatto  $Y$  contenente  $X$  come sottospazio denso per cui valgano le proprietà equivalenti appena mostrate, allora dalla prima di queste proprietà (la proprietà universale) esiste una funzione continua che estende la mappa di inclusione, cioè  $h : \beta X \rightarrow Y$  tale che  $h(p) = p$  per ogni  $p \in X$ , così come una funzione continua  $k : Y \rightarrow \beta X$  per la quale  $k(p) = p$  per ogni  $p \in X$ . Dalla densità di  $X$  in  $\beta X$  e dalla continuità di  $k \circ h$  segue che  $k \circ h$  è l'identità su  $\beta X$ , e quindi  $h$  è un omeomorfismo tra  $\beta X$  e  $Y$ .  $\square$

Tale proprietà ci permette di dimostrare senza troppe difficoltà e in modo molto elegante un risultato fondamentale della topologia generale:

**Teorema 3.2.5** (di Tychonoff). *Sia  $\{(X_i, \tau_i), i \in I\}$  una famiglia di spazi topologici compatti, allora  $(\prod_{i \in I} X_i, \tau)$  è compatto, ove  $\tau$  è la topologia prodotto, cioè la topologia meno fine tra quelle che rendono continue le proiezioni  $\pi_i : X \rightarrow X_i$ .*

*Dimostrazione.* Detto  $X$  lo spazio prodotto, consideriamo le proiezioni  $\pi_i : X \rightarrow X_i$ , che sono funzioni continue e suriettive da  $X$  a uno spazio compatto. Allora se considero  $\beta X$  la compattificazione di Stone-Čech di  $X$ , per il Teorema 3.2.4 esiste una funzione  $\beta\pi_i : \beta X \rightarrow X_i$  che estende la proiezione, ed è quindi chiaramente suriettiva: il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} \beta X & \xrightarrow{\beta\pi_i} & X_i \\ \uparrow i & \nearrow \pi_i & \\ X & & \end{array}$$

Ricordando che una funzione  $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$  è continua se e solo se è continua su ogni componente del codominio, allora la funzione  $f : \beta X \rightarrow X$  definita da

$$p \longmapsto (\beta\pi_i(p))_{i \in I}$$

è continua perché lo è su ogni componente di  $X$  e suriettiva perché lo è ogni  $\beta\pi_i$  al variare di  $i \in I$ . Essendo infine  $\beta X$  compatto, dal Teorema di Weierstraß, l'immagine di  $f$  è compatta, ossia  $X$  è compatto.  $\square$

### 3.3 Immersione in cubi di uno spazio

In questa sezione vediamo un approccio differente, che si ispira all'impostazione di [10], per costruire la compattificazione di Stone-Čech che ci darà meno dettagli (non descriveremo in alcun modo i suoi punti né le loro caratteristiche) ma ci fornirà una visione d'insieme piuttosto interessante della struttura per capire in che spazio tale compattificazione vive e può essere equivalentemente definita.

**Definizione 3.3.1** (cubo). Dato un insieme  $A$  chiamiamo  $A$ -cubo lo spazio topologico  $[0, 1]^A$  delle funzioni da  $A$  in  $[0, 1]$  dotato della topologia prodotto, che ricordiamo, coincide con la topologia della convergenza puntuale.

**Definizione 3.3.2** (assiomi di separazione per funzioni). Diremo di una famiglia di funzioni  $F = \{f_i : X \rightarrow Y_i, i \in I\}$  definite su uno stesso spazio topologico (qualsiasi) a valori in spazi topologici qualsiasi che

- *separa i punti* se  $\forall x \neq y \exists f \in F$  t.c.  $f(x) \neq f(y)$ ,
- *separa chiusi e punti* se  $\forall A \subseteq X$  chiuso e  $\forall x \in X \setminus A \exists f_i \in F$  t.c.  $f_i(x) \notin \overline{f_i(A)}^{Y_i}$ .

**Definizione 3.3.3** (immersione canonica in un prodotto). Dato uno spazio topologico (qualsiasi)  $X$  e una famiglia di funzioni  $F = \{f_i : X \rightarrow Y_i, i \in I\}$  con  $I$  insieme di indici e  $Y_i$  spazi topologici, vi è un modo naturale per immergere  $X$  nel prodotto  $Y = \prod_{i \in I} Y_i$  attraverso l'*immersione canonica*

$$e : x \longmapsto (f_i(x))_{i \in I}.$$

**Teorema 3.3.4.** *Sia una famiglia di funzioni continue  $F = \{f_i : X \rightarrow Y_i, i \in I\}$ , allora vale per l'immersione canonica  $e$  di  $X$  nel prodotto  $\prod_{i \in I} Y_i$*

1.  $e$  è continua.
2. Se  $F$  separa chiusi e punti, allora  $e$  ristretta all'immagine è aperta (e suriettiva).
3. Se  $F$  separa i punti, allora  $e$  è iniettiva.

*Dimostrazione.* Immediato è il punto 1., poiché come già ricordato vale che una funzione definita su uno spazio topologico a valori in un prodotto è continua se e solo se è continua su ogni componente. Per mostrare 2. mostriamo prima la seguente condizione sufficiente per una funzione per essere aperta:

**Lemma 3.3.5.** *Se una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici è tale che  $\forall x \in X, \forall U$  intorno aperto di  $x \exists V$  aperto di  $Y$  tale che  $f(x) \in V \subseteq f(U)$ , allora  $f$  è aperta.*

*Dimostrazione.* Per mostrare che  $f$  è aperta mostriamo che  $f(\text{int}(U)) \subseteq \text{int}(f(U))$  per ogni  $U \subseteq X$ , segue l'apertura osservando che dato un aperto  $A$  vale per ipotesi  $f(A) = f(\text{int}(A)) \subseteq \text{int}(f(A))$ , e per definizione di parte interna l'inclusione inversa, da cui  $f(A) = \text{int}(f(A))$ . Allora sia  $U \subseteq X$  un sottospazio e sia  $y \in f(\text{int}(U))$ , cioè esiste  $x \in \text{int}(U)$  tale che  $f(x) = y$ . Per tale  $x$  e per il suo intorno aperto  $\text{int}(U)$  esiste un aperto  $V$  di  $Y$  tale che  $f(x) \in V \subseteq f(\text{int}(U))$ , ossia  $y = f(x) \in V \cap f(\text{int}(U)) = V$ , ma essendo allora tale sottospazio di  $f(\text{int}(U))$  un aperto contenuto in particolare in  $f(U)$ , per massimalità della parte interna sarà contenuto anche in  $\text{int}(f(U))$ , cioè  $y \in \text{int}(f(U))$ .  $\square$

Per mostrare l'apertura di  $e$  consideriamo allora un punto generico  $x \in X$  e un aperto  $U$  che lo contenga, allora  $x \notin X \setminus U$ , che è chiuso, perciò esiste (per ipotesi su  $F$ )  $\tilde{i} \in I$  per cui  $f_{\tilde{i}}(x) \notin \overline{f_{\tilde{i}}(X \setminus U)}^{Y_{\tilde{i}}}$ , ossia  $f_{\tilde{i}}(x) \in \overline{f_{\tilde{i}}(X \setminus U)}^{Y_{\tilde{i}}}{}^c$  (la complementazione è intesa nel prodotto), il quale è aperto (nel prodotto), ha per elemento  $e(x) = (f_i(x))_{i \in I}$  e la sua intersezione con  $e(X)$  è contenuta in  $e(U)$ . Per quanto riguarda 3., invece, se  $F$  separa i punti, dati  $x \neq y$ , c'è una funzione  $f \in F$  per cui  $f(x) \neq f(y)$ , pertanto  $e(x)$  non può essere uguale a  $e(y)$  in quanto differiranno necessariamente almeno per la  $f$ -esima componente.  $\square$

**Osservazione 3.3.6.** La conseguenza di tale teorema è che uno spazio di Hausdorff e completamente regolare ammette la famiglia  $F(X)$  di tutte le funzioni continue da esso a  $[0, 1]$  come famiglia di funzioni per le quali l'immersione canonica nel prodotto dei codomini è un omeomorfismo se ristretto all'immagine. Infatti Se  $X$  è completamente regolare esiste, per ogni chiuso di  $X$  e per ogni punto fuori di esso una funzione continua definita su  $X$  che vale 0 sul chiuso e 1 sul punto, inoltre se  $X$  è  $T_2$  i punti sono chiusi, e sono separati sempre per completa regolarità. Quindi  $F(X)$  soddisfa i due assiomi di separazione sopra enunciati, e l'immersione canonica è, oltre che continua, anche iniettiva e aperta. Più precisamente si può attuare la seguente costruzione.

**Definizione 3.3.7** (compattificazione nel cubo). Dato uno spazio topologico  $T_2$  e completamente regolare  $X$  consideriamo l'insieme  $F(X)$  delle funzioni continue da  $X$  all'intervallo unitario  $[0, 1]$ , e il cubo

$$\Omega = [0, 1]^{F(X)},$$

sia quindi l'immersione canonica

$$e : X \ni x \mapsto (f(x))_{f \in F(X)} \in \Omega$$

e infine lo spazio

$$\eta X = \overline{e(X)}^\Omega.$$

La coppia  $(e, \eta X)$  è detta *compattificazione nel cubo* di  $X$ .

**Osservazione 3.3.8.** Dal Lemma 3.3.4 e per quando osservato successivamente  $X$  è omeomorfo a  $e(X)$ , inoltre il cubo  $\Omega$  è compatto per il Teorema 3.2.5 in quanto prodotto di  $[0, 1]$  (che è notoriamente compatto)  $F(X)$  volte, segue quindi che anche  $\eta X$ , sottospazio chiuso di uno spazio compatto, è compatto.

Ciò che mostreremo in questa parte finale del capitolo è che la compactificazione nel cubo  $\eta X$  è, a meno di omeomorfismi, effettivamente la compactificazione di Stone-Čech  $\beta X$ . Lo faremo mostrando che la compactificazione nel cubo di uno spazio  $X$  soddisfa la proprietà universale di fattorizzazione di ogni mappa da  $X$  in un compatto. Vediamo prima il seguente risultato preliminare:

**Lemma 3.3.9.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua tra due qualunque spazi topologici, allora la funzione*

$$f^* : [0, 1]^Y \rightarrow [0, 1]^X$$

*definita da*

$$g \mapsto g \circ f$$

*è continua.*

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $f^*$  è continua su ogni componente, ossia, detta la proiezione sulla  $x$ -esima componente  $\pi_x$  la mappa di proiezione da  $[0, 1]^X$  a valori in  $[0, 1]$  che ad ogni  $f : X \rightarrow [0, 1]$  associa  $f(x)$ , mostriamo che

$$\pi_x \circ f^*$$

è una funzione continua per ogni  $x \in X$ . Osserviamo che

$$(\pi_x \circ f^*)(g) = \pi_x(f^*(g)) = \pi_x(g \circ f) = (g \circ f)(x),$$

uguaglianze che seguono immediatamente dalla definizione di  $f^*$  e di  $\pi_x$ . Ora, essendo  $f$  continua per ipotesi, non resta che osservare che  $g \in [0, 1]^Y$ , a priori non continua, agisce in realtà in modo continuo su ogni  $f(x)$ , e così è: si osservi infatti che la mappa (continua per definizione della topologia di  $[0, 1]^Y$ )

$$\pi_{f(x)} : [0, 1]^Y \rightarrow [0, 1]$$

manda ogni elemento  $g$  in  $\pi_{f(x)}(g) = g(f(x))$ . Allora  $f^*$  è continua poiché è continua su ogni componete.  $\square$

**Teorema 3.3.10.** *Sia  $X$  uno spazio topologico ( $T_2$  e completamente regolare),  $f : X \rightarrow K$  una funzione continua in uno spazio compatto ( $T_2$  e completamente regolare), detta  $(e, \eta X)$  la compattificazione nel cubo di  $X$ , esiste una funzione continua  $g \supseteq f \circ e^{-1}$  (ove quest'ultima è ben definita), ossia il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & \eta X \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & K \end{array}$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione  $f^*$  e la sua ristretta e coristretta alle funzioni continue di dominio e codominio che chiameremo per semplicità sempre

$$f^* : F(K) \rightarrow F(X).$$

Da tale funzione continua possiamo costruire la funzione continua

$$\begin{aligned} f^{**} : [0, 1]^{F(X)} &\rightarrow [0, 1]^{F(K)} \\ q &\longmapsto q \circ f^* \end{aligned}$$

Sia ora (oltre all'immersione canonica  $e$  di  $X$  in  $\eta X$ )  $d$  l'immersione canonica di  $K$  in  $\eta K$  che, come  $e$ , grazie alle ipotesi su  $K$ , è un omeomorfismo con la propria immagine. Il diagramma seguente descrive la situazione:

$$\begin{array}{ccccc} \eta X & \subseteq [0, 1]^{F(X)} & \xrightarrow{f^{**}} & [0, 1]^{F(K)} \supseteq & \eta K \\ \uparrow e & & & & \uparrow d \\ X & \xrightarrow{f} & & & K \end{array}$$

Se dimostriamo che il diagramma commuta, cioè che

$$d \circ f = f^{**} \circ e : X \rightarrow \eta K,$$

sarà

$$f \circ e^{-1} = d^{-1} \circ f^{**}$$

ove entrambe sono definite (su  $e(X)$  e a valori in  $K$ ), e quindi l'estensione cercata sarà

$$d^{-1} \circ f^{**} : \eta X \rightarrow K.$$

Siano allora generici  $x \in X$  e  $k \in F(K)$ , vale

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ e)(x)(k) &= (e(x) \circ f^*)(k) = e(x)(k \circ f) = (k \circ f)(x) = k(f(x)) = \\ &= d(f(x))(k) = (d \circ f)(x)(k). \end{aligned}$$

Direttamente dalle definizioni rispettivamente di  $f^{**}$ ,  $f^*$ ,  $e$  e  $d$ . □

Segue allora dal Teorema 3.2.4 che per ogni spazio topologico  $T_2$  e completamente regolare  $X$ , la sua compattificazione nel cubo è omeomorfa alla sua compattificazione di Stone-Čech, più precisamente esiste un unico omeomorfismo

$$h : \beta X \rightarrow \eta X$$

tale che  $h(i(x)) = e(x)$  per ogni  $x \in X$ .

# Capitolo 4

## Compattificazione di Stone-Čech di $\omega$

### 4.1 Proprietà di $\beta\omega$

**Osservazione 4.1.1.** Come si potrà facilmente intuire avendo letto quando detto fin'ora è che ciò che abbiamo fatto nel Capitolo 2 non è stato altro che studiare da un punto di vista insiemistico la compactificazione di Stone-Čech  $\beta\omega$ , ove  $\omega$  è inteso come spazio topologico dotato di topologia discreta. Viene così evidente che, come già anticipato, gli elementi della compactificazione, cioè gli  $z$ -ultrafiltri, sono in realtà esattamente gli ultrafiltri insiemistici dal fatto che  $\mathcal{Z}(\omega) = \mathcal{P}(\omega)$ , in quanto ogni funzione avente per dominio uno spazio discreto è chiaramente continua. Ciò che aggiungiamo a quando già sapevamo dal Capitolo 2 sono le proprietà dello spazio degli ultrafiltri su  $\omega$  dotato della topologia generata da (e che ha per base dall'Osservazione 3.1.17) l'insieme

$$\mathcal{B} = \{ \{p \in \beta\omega \text{ t.c. } A \notin p\}, A \subseteq \omega \}.$$

Il Teorema 2.1.24 ci fornisce quindi le dimensioni dello spazio topologico  $\beta\omega$ , la cui cardinalità è data allora dalla somma delle cardinalità degli ultrafiltri principali (in biezione con  $\omega$ ) con la cardinalità di ciò che abbiamo aggiunto per rendere lo spazio compatto, cioè gli ultrafiltri liberi. Perciò  $|\beta\omega| = \aleph_0 + 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ .

**Osservazione 4.1.2.** Altra importante osservazione da fare su  $\beta\omega$  che non vale in generale per gli altri spazi topologici presi in esame è che grazie al fatto che, contrariamente agli zero-insiemi di uno spazio, l'insieme delle parti è chiuso per complementari, la sua topologia può essere vista in modo più

intuitivo notando che  $\mathcal{B} = \{\{p \in \beta\omega \text{ t.c. } A \notin p\}, A \subseteq \omega\}$  è uguale a

$$\mathcal{B}^* = \{\{p \in \beta\omega \text{ t.c. } A \in p\}, A \subseteq \omega\}.$$

Infatti se  $P \in \mathcal{B}$ , allora  $P = \{p \in \beta\omega \text{ t.c. } A_P \notin p\}$ , che per la Proposizione 2.1.17 è uguale a  $\{p \in \beta\omega \text{ t.c. } A_P^C \in p\} \in \mathcal{B}^*$ , e in modo del tutto analogo l'altra inclusione.

**Osservazione 4.1.3.** Questo ci suggerisce l'esistenza di punti topologicamente parlando molto diversi in  $\beta\omega$ : vi sono i punti in  $\omega$  (ad essere corretti in  $i(\omega)$ ) e i punti della cosiddetta *corona*  $\beta\omega \setminus \omega$  (più precisamente  $\beta\omega \setminus i(\omega)$ ). I primi sono punti isolati (ossia per ogni punto esiste un aperto contenente solo il punto stesso), e ciò lo si osserva dal fatto che ogni naturale  $n$  si ha che  $i(n) = \{A \subseteq \omega \text{ t.c. } A \supseteq \{n\}\}$  è l'unico elemento dell'aperto  $\{p \in \beta\omega \text{ t.c. } \{n\} \in p\}$ . I punti della corona hanno invece proprietà molto differenti che studieremo più approfonditamente, si osservi intanto che se consideriamo un ultrafiltro libero  $p$ , i cui elementi sono sempre insiemi infiniti di naturali, ogni aperto contenente  $p$  è della forma (essendo  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$  una base) unione di  $\{q \in \beta\omega \text{ t.c. } A \in q\}$ , al variare di  $A \in p$  (unione di aperti della base contenenti  $p$ ). Il fatto è che ciascuno di questi insiemi, grazie alla biezione  $A \longleftrightarrow \omega$ , è in biezione con gli ultrafiltri su tutto  $\omega$ , e risulta quindi avere  $2^{2^{\aleph_0}}$  punti (in particolare gli insiemi contenenti i singoli punti di  $\beta\omega \setminus \omega$  non sono aperti).

**Osservazione 4.1.4.** La corona è uno spazio compatto, in quanto  $\omega$  è unione degli aperti  $\{p \in \omega \text{ t.c. } \{n\} \in p\}$  al variare di  $n \in \omega$ , pertanto è aperto, e quindi  $\beta\omega \setminus \omega$  è uno sottospazio chiuso dello spazio compatto  $\beta\omega$ .

Introduciamo la seguente notazione che ci renderà più pratico lavorare con intorni di punti di  $\beta\omega$ : dato un insieme  $A \subseteq \omega$ , chiamiamo

$$\overline{A} = \{p \in \beta\omega \text{ t.c. } A \in p\},$$

l'aperto costituito dagli ultrafiltri  $p$  per cui  $A \in p$ .

**Osservazione 4.1.5.** Seguono facilmente da questa definizione e da proprietà di filtro e ultrafiltro già mostrate le seguenti relazioni per ogni  $A, B \subseteq \omega$ :

1.  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2.  $\overline{(A)^C} = (\overline{A})^C$
3.  $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Infatti 1. è banalmente vera per proprietà di chiusura per sovrainsiemi dei filtri, 2. deriva dalla Proposizione 2.1.17, in quanto  $p \in (\overline{A^C})$  sse  $A^C \in p$  sse  $A \notin p$  sse  $p \notin \overline{A}$  sse  $p \in (\overline{A})^C$ . Per quanto riguarda 3. osserviamo che se  $A \subseteq B$ , per proprietà di filtro  $A \in p \Rightarrow B \in p$ , viceversa se assumiamo che  $A \in p \Rightarrow B \in p$  e che per assurdo  $A \not\subseteq B$ , allora  $A \setminus B \neq \emptyset$ , in particolare  $A \setminus B$  apparterrà ad almeno un ultrafiltro, diciamo  $p$  (per esempio un ultrafiltro principale su un elemento di  $A \setminus B$ , ma se quest'ultimo non è finito potrebbe essere anche libero). Ora per  $p$  vale la chiusura per sovrainsiemi ( $A \setminus B \subseteq B \Rightarrow B \in p$ ) e per intersezioni ( $(A \setminus B) \cap B = \emptyset \in p$ ), assurdo.

**Definizione 4.1.6** (sistema fondamentale di intorni). In uno spazio topologico  $X$ , una famiglia di intorni di un punto  $x \in X$ ,

$$\mathcal{N}_x = \{B_i \subseteq X \text{ t.c. } \exists A \text{ aperto di } X \text{ per cui } x \in A \subseteq B_i, i \in I\}$$

è detta *sistema fondamentale di intorni di  $x$*  se per ogni  $U \subseteq X$  intorno di  $x$  esiste  $V \in \mathcal{N}_x$  tale che  $x \in V \subseteq U$ .

**Definizione 4.1.7** (spazio primo-numerabile). Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è detto *primo-numerabile* se ogni suo punto ammette una base di intorni numerabile, cioè se per ogni  $x \in X$  esiste un sistema fondamentale di intorni di  $x$  numerabile.

**Osservazione 4.1.8.** Ogni spazio topologico metrizzabile  $X$  (su cui esiste una metrica che induce la sua topologia) è primo-numerabile, considerando per ogni  $x \in X$ , il sistema fondamentale di intorni  $\mathcal{N}_x = \{B(x, \lambda), \lambda \in \mathbb{Q}\}$ .

**Teorema 4.1.9.**  $\beta\omega$  non è metrizzabile.

*Dimostrazione.* L'idea consiste nel mostrare che  $\beta\omega$  non è primo-numerabile e usare l'Osservazione 4.1.8. Per farlo ragioniamo per assurdo, e mostriamo che in generale uno spazio topologico  $T_2$ , separabile (i.e. che ammette un sottospazio denso numerabile), come è  $\beta\omega$ , se è anche primo-numerabile allora ha cardinalità minore o uguale a  $2^{\aleph_0}$ , mentre la cardinalità di  $\beta\omega$  è noto dal Teorema 2.1.24 essere strettamente maggiore, precisamente  $2^{2^{\aleph_0}}$ . Dato allora uno spazio  $X$  di Hausdorff con un sottospazio denso numerabile  $D$ , costruiamo una funzione

$$\Phi : X \rightarrow \{(x_n)_{n \in \omega} \subseteq D\}$$

associando ad ogni punto una successione convergente ad esso, ricordando che per spazi topologici la convergenza per una successione naturale è definita da

$$x_n \rightarrow x \iff \exists \bar{n} \text{ t.c. } \forall U \text{ intorno di } x \text{ vale } x_n \in U \forall n > \bar{n}.$$

Mostriamo allora che una tale successione esiste costruendola esplicitamente: supposto la primo-numerabilità, ogni  $x \in X$  ha una base di intorni numerabile  $\mathcal{N} = \{U_i\}_{i \in \omega}$ , allora per ognuno di tali intorni, cioè per ogni  $i \in \omega$  consideriamo un elemento  $x_i \in D \cap U_i$ , che esiste per densità di  $D$ . Vale infine immediatamente che la funzione  $\Phi$  è iniettiva grazie al fatto che  $X$  è Hausdorff. Allora la cardinalità di  $X$  non può superare quella delle successioni naturali di numeri naturali, ossia  $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ .  $\square$

**Osservazione 4.1.10.** La dimostrazione del Teorema 4.1.9 ci dice in realtà più di quanto enunciato, infatti l'assurdo a cui giungiamo ha origine nell'aver supposto l'esistenza di un sistema fondamentale di intorni numerabile di ogni punto della corona  $\beta\omega \setminus \omega$ , pertanto quanto si può affermare è che nessun punto di  $\beta\omega \setminus \omega$  ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile.

## 4.2 Studio topologico dei p-punti

In questa sezione conclusiva vogliamo, dopo averli studiati insiemisticamente, dare una caratterizzazione topologica ai p-punti. Ricapitolando, nella compattificazione  $\beta\omega$  vi sono ultrafiltri principali, che sono tutti e soli i punti di  $\omega$ , e sono punti isolati (l'insieme contenente il singolo punto è un sistema fondamentale di intorni per il punto); inoltre vi sono gli ultrafiltri liberi, e tra essi alcuni che sono p-punti (assumendo CH) e altri che non lo sono (Esempio 2.2.5), e per ognuno di questi vale (che siano o meno p-punti) l'inesistenza di un sistema fondamentale di intorni numerabile. Per questa sostanziale differenza sottintenderemo in questa sezione di lavorare solo nella corona: ossia quando considereremo degli ultrafiltri, anche se non lo specificheremo, intenderemo parlare di ultrafiltri liberi. La notazione  $\overline{A}$ , per  $A \subseteq \omega$  indicherà l'insieme degli ultrafiltri liberi aventi per elemento  $A$ , cioè

$$\overline{A} = \{p \in \beta\omega \setminus \omega \text{ t.c. } A \in p\},$$

in particolare vale la seguente osservazione.

**Osservazione 4.2.1.**  $A \subseteq \omega$  è un insieme finito se e solo se  $\overline{A} = \emptyset$ . Infatti se  $A$  è finito non appartiene a nessun ultrafiltro libero (Osservazione 2.1.22), il viceversa segue per argomento contronominale mostrando che ogni insieme infinito  $B$  appartiene ad almeno un ultrafiltro libero. Consideriamo il filtro di Fréchet (gli insiemi cofiniti)  $\mathcal{C}$  e ad esso aggiungiamo  $B$ . Se mostriamo che l'insieme trovato gode della proprietà delle intersezioni finite, allora per il Teorema 2.1.15, esiste un ultrafiltro  $p \supseteq (\mathcal{C} \cup \{B\})$ , in particolare  $B \in p$ . L'intersezione finita  $\bigcap_{k < n} C_k$  di elementi di  $\mathcal{C}$  è cofinita ( $\mathcal{C}$  è un filtro), quindi

l'ulteriore eventuale intersezione con  $B$  (si noti che se  $B$  era già cofinito non vi era molto da dimostrare, poiché ogni filtro ha la p.d.i.f.) non può essere vuota, perché ciò implicherebbe che  $B \subseteq (\bigcap_{k < n} C_k)^C$ , il quale è un insieme finito.

**Proposizione 4.2.2.** *Siano  $A, B \subseteq \omega$ , vale allora*

$$A \subseteq^* B \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B},$$

ricordando la definizione di quasi contenimento  $A \subseteq^* B$  sse  $|A \setminus B| < \aleph_0$ .

*Dimostrazione.* Segue chiaramente dalle seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \overline{A} \not\subseteq \overline{B} &\Leftrightarrow \overline{A} \setminus \overline{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cap (\overline{B})^C \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{A \cap B^C} \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{A \setminus B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |A \setminus B| = \aleph_0 \Leftrightarrow A \not\subseteq^* B. \end{aligned}$$

□

Vediamo allora un importante lemma, la cui prova è ispirata a [9].

**Lemma 4.2.3.** *Sia  $\mathcal{Y} = \{Y_i \subseteq \omega, i \in \omega\}$  una famiglia numerabile di sottoinsiemi infiniti di  $\omega$  tale che ogni intersezione di un suo sottoinsieme finito sia ancora un sottoinsieme infinito di  $\omega$  (in simboli  $|\bigcap_{k \in I} Y_k| = \aleph_0$  per ogni insieme finito  $I \subseteq \omega$ , o proprietà forte delle intersezioni finite). Allora  $\mathcal{Y}$  ammette una pseudo-intersezione ancora infinita, ossia esiste  $Y \subseteq \omega$  infinito per cui  $Y \subseteq^* Y_i$  per ogni  $i \in \omega$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo anzitutto che se mostriamo il risultato per una famiglia di insiemi ordinata per inclusione decrescente il risultato vale anche in generale, infatti è possibile costruire la successione decrescente

$$\tilde{Y}_0 \supseteq \tilde{Y}_1 \supseteq \tilde{Y}_2 \supseteq \dots \supseteq \tilde{Y}_n \supseteq \dots$$

mediante la sostituzione

$$\tilde{Y}_n = \bigcap_{k < n} Y_k \text{ (osservando che } |\bigcap_{k < n} Y_k| = \aleph_0 \forall k \in \omega)$$

e se per essa vale la tesi ( $\exists Y$  infinito t.c.  $Y \subseteq^* \tilde{Y}_n$  per ogni  $n$ ) e l'ipotesi (che vale grazie al fatto che ogni intersezione finita degli  $Y_k$  è ancora un insieme infinito) allora da  $\tilde{Y}_n \subseteq Y_n$  varrà la tesi anche per la famiglia di partenza. Quindi è legittimo supporre  $\{Y_i \subseteq \omega, i \in \omega\}$  decrescente in  $i$ . Ora sia  $y_0 \in Y_0$ , poi siccome  $Y_1$  è infinito, esiste  $y_1 \in Y_1$  t.c.  $y_1 > y_0$ , così via si può costruire una successione di naturali crescente  $(y_n)_{n \in \omega}$ , e possiamo considerare l'insieme dei suoi elementi  $Y = \{y_n, n \in \omega\} \subseteq \omega$ .  $Y$  è proprio l'insieme cercato, poiché  $|Y| = \aleph_0$  e  $Y \subseteq^* Y_n$  per ogni  $n$ , infatti  $Y_n \ni y_n$  e  $Y_{n+1} \subseteq Y_n \forall n \in \omega$ , perciò  $y_{n+1} \in Y_n$ , e così via  $y_k \in Y_n \forall k \geq n$ , da cui  $|Y \setminus Y_n| < k < \aleph_0$ , cioè  $Y \subseteq^* Y_n$  per ogni  $n$ . □

**Osservazione 4.2.4.** Ora, dato un ultrafiltro (libero)  $p$  e una qualunque famiglia numerabile di suoi intorni, supposti per semplicità tutti elementi della base  $\mathcal{B}$  (quanto andremo ad osservare varrà ugualmente dalle proprietà della base), diciamo

$$\{\overline{A_i}, i \in \omega\},$$

osserviamo che essa è tale per cui l'insieme degli  $A_i$  è una famiglia numerabile di elementi infiniti ( $A_i \in p$ ) che godono della proprietà forte delle intersezioni finite, ossia l'intersezione di finiti  $A_i$  è un insieme infinito, poiché l'intersezione finita è ancora un elemento di  $p$  per proprietà di filtro. Allora per il Lemma 4.2.3

$$\exists A \subseteq \omega \text{ t.c. } A \subseteq^* A_i \forall i \in \omega,$$

inoltre  $A$  è infinito, e si ha per la Proposizione 4.2.2 che

$$\overline{A} \subseteq \overline{A_i} \forall i \in \omega,$$

con  $\overline{A} \neq \emptyset$ , e quindi

$$\overline{A} \subseteq \bigcap_{i \in \omega} \overline{A_i}.$$

Cioè l'intersezione di intorni della base di un punto della corona ha ancora parte interna non vuota. Da ciò, per le proprietà di una base, l'intersezione numerabile di intorni qualunque di un punto ha parte interna non vuota.

Ci chiediamo allora, visto che l'intersezione numerabile di intorni di un ultrafiltro libero ha parte interna non vuota, in quali casi l'ultrafiltro in questione giaccia ancora nella parte interna dell'intersezione.

**Teorema 4.2.5.**  $p \in \beta\omega \setminus \omega$  è un  $p$ -punto se e solo se per ogni famiglia numerabile  $\{\overline{A_i}, i \in \omega\}$  di intorni di  $p$  la loro intersezione è ancora un intorno di  $p$ , ossia esiste (un aperto o equivalentemente) un elemento della base  $\overline{A}$  tale che

$$p \in \overline{A} \subseteq \bigcap_{i \in \omega} \overline{A_i}.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la definizione di  $p$ -punto, ossia un ultrafiltro libero tale per cui ogni famiglia numerabile di suoi elementi ammette una pseudo-intersezione ancora nell'ultrafiltro. Allora  $\forall (A_n)_{n \in \omega} \subseteq p$

$$\begin{aligned} p \text{ è un } p\text{-punto} &\Leftrightarrow \exists A \in p \text{ t.c. } A \subseteq^* A_i \forall i \in \omega \Leftrightarrow \exists A \in p \text{ t.c. } \overline{A} \subseteq \overline{A_i} \forall i \in \omega \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p \in \overline{A} \subseteq \bigcap_{i \in \omega} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

□

Abbiamo allora dato ai  $p$ -punti una caratterizzazione topologica che ce li descrive come quei punti che non sono individuabili mediante una quantità infinita numerabile di intorni, nel senso che per ogni famiglia numerabile di loro intorni essi giacciono nella parte interna dell'intersezione di tale famiglia.



# Bibliografia

- [1] John Barwise *Handbook of mathematical logic*, Elsevier Science B.V., 1977
- [2] Timothy Chow *A beginners guide to forcing*, Cornell University Library, arXiv:0712.1320, 2008
- [3] Kenneth Kunen *Set theory. An introduction to independence proofs*, Elsevier (North Holland), 1988
- [4] Thomas Jech *Set theory, the 3rd millennium edition*, Springer-Verlag, 2003
- [5] Thomas Jech *The axiom of choice*, Dover Books on Mathematics, 2008
- [6] Saharon Shelah *Proper and improper forcing*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1998
- [7] Wistar W. Comfort, Stelios Negrepontis *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, 1974
- [8] Marco Manetti *Topologia*, Springer-Verlag, 2008
- [9] Wolfgang Wohofski *P-points and other ultrafilters in the Stone-Čech compactification of  $\mathbb{N}$* , 2008
- [10] John L. Kelley *General Topology*, Springer-Verlag, 1955