

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

Contraibilità dell'Outer Space

Tesi di Laurea in Teoria Geometrica dei Gruppi

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Francaviglia

Presentata da:
Evienia Bazzocchi

Sessione unica
Anno Accademico 2017/2018

Introduzione

I gruppi liberi finitamente generati sono certamente i gruppi infiniti più studiati e meglio noti, si tratta infatti di oggetti molto naturali, in forte analogia con gli spazi vettoriali finitamente generati. Molti problemi rimangono tuttavia aperti riguardo il gruppo degli automorfismi di un gruppo libero, primo fra tutti il problema del coniugio e la sua decidibilità: come stabilire se due automorfismi sono coniugati? È sempre possibile farlo? Un ottimo modo per studiare un gruppo è trovare uno spazio con buone proprietà su cui questo agisca e realizzarlo quindi come gruppo di simmetrie di tale spazio. Su quest'onda l'Outer Space nasce dall'esigenza di studiare il gruppo degli automorfismi di un gruppo libero finitamente generato, la struttura dei suoi sottogruppi così come le proprietà dei singoli automorfismi.

Introdotta da Karen Vogtmann e Marc Culler in un articolo del 1986 ([1]), l'Outer Space ha molte analogie con lo spazio di Teichmüller di una superficie, che parametrizza le strutture complesse su di essa. Un modo per descrivere un punto dello spazio di Teichmüller di una superficie S è come coppia del tipo (h, X) dove X è una superficie dotata di una metrica a curvatura costante negativa e h è un omeomorfismo da S in X chiamato *marcatura*, definito a meno di isotopie. Del tutto simile è la costruzione dell'Outer Space relativo al gruppo libero F_n su n elementi. Si realizza F_n come gruppo fondamentale della rosa a n petali e un punto dell'Outer Space è una coppia formata da un grafo metrico e un'equivalenza omotopica con tale rosa, anche questa equivalenza omotopica è detta *marcatura*. Il gruppo degli automorfismi $Aut(F_n)$ agisce su un punto dell'Outer Space modificando la marcatura. L'azione degli automorfismi interni risulta banale, quindi sull'Outer Space agisce in realtà il gruppo degli automorfismi esterni, $Out(F_n)$, da cui il nome dello spazio.

Forse il principale risultato raggiunto grazie all'Outer Space è stato il calcolo di alcuni invarianti algebrici di $Out(F_n)$ quali la coomologia e la caratteristica di Eulero ([2],[3]). In generale questo strumento geometrico ha rivelato che tale gruppo ha forti proprietà algebriche di finitezza. Per poter studiare $Aut(F_n)$ mediante la sua azione sull'Outer Space è però necessario

conoscere alcune basilari proprietà geometriche di quest'ultimo. In questo elaborato ne dimostreremo la contraibilità.

Il primo capitolo è dedicato alla definizione dell'insieme soggiacente l'Outer Space e della sua topologia. Quest'ultima è qui descritta mediante l'immersione di tale insieme in un prodotto infinito di copie di \mathbb{R} . Nell'ultimo paragrafo si descrive l'azione del gruppo degli automorfismi di F_n su tale spazio.

Nel secondo capitolo si introduce invece la struttura simpliciale dell'Outer Space, rendendone più chiara la geometria. Viene poi definita la *spina*, un retratto per deformazione dello spazio che permette di dimostrarne la connessione. Alla fine di questo capitolo vengono introdotti concetti che verranno sfruttati nell'ultima parte dell'elaborato. In particolare si descrivono in maniera combinatoria operazioni sui grafi che corrispondono a cammini nella spina, quali il *blowup* e le *mosse di Whitehead*.

Il terzo capitolo ripercorre la dimostrazione della contraibilità dell'Outer Space data da Vogtmann e Culler in [1]. L'impostazione è fortemente combinatoria e anche se la dimostrazione risulta molto articolata gli strumenti utilizzati sono piuttosto elementari.

Indice

1	Outer Space	7
1.1	L'insieme CV_n	7
1.2	Una topologia su CV_n : L'Outer Space	8
1.3	Azione di $Out(F_n)$ sull'Outer Space	10
2	Connessione dell'Outer Space	13
2.1	La struttura simpliciale dell'Outer Space	13
2.2	La spina	15
2.3	Connessione dell'Outer space	17
2.4	Lati ideali e mosse di Whitehead	19
3	Contraibilità dell'Outer Space	29
3.1	Norma di una rosa e <i>riduttività</i>	29
3.2	Risultati preliminari	32
3.3	Contraibilità dell'Outer space	34

Capitolo 1

Outer Space

1.1 L'insieme CV_n

Definizione 1.1.1 (Grafo). Un *grafo* è un CW-complesso di dimensione 1; le 0-celle sono dette *nodi* o *vertici* e le 1-celle sono dette *lati* del grafo. Per lato orientato intenderemo un lato fornito di un'orientazione, il numero dei lati orientati è quindi due volte il numero delle 1-celle. La *valenza* di un nodo v è il numero di lati orientati che terminano in v . Il *livello* di un grafo è il numero dei suoi nodi. Diremo *minimale* un grafo che non sia omotopicamente equivalente ad un suo sottografo proprio.

D'ora in avanti considereremo soltanto grafi connessi minimali senza nodi di valenza 1 o 2.

Definizione 1.1.2 (Alberi e foreste). Si dice *albero* un grafo connesso privo di cicli, ovvero omotopicamente equivalente ad un punto. Una *foresta* è un'unione di alberi. Equivalentemente, un albero è un grafo in cui ogni coppia di punti sia collegata da uno e un solo cammino, una foresta è un grafo i cui due punti sono collegati al più da un cammino.

Un risultato classico che si può trovare, ad esempio, in [5] è il seguente:

Teorema 1.1.3. *Il gruppo fondamentale di un grafo G è libero di rango*

$$l - v + 1$$

dove l è il numero dei lati e v il numero dei vertici di G .

Definizione 1.1.4 (\mathbb{R} -grafo). Un \mathbb{R} -*grafo* è un grafo con l'assegnazione di una lunghezza (reale positiva) a ciascun lato, o meglio un grafo dotato di una metrica tale per cui ogni lato è localmente isometrico a un intervallo di \mathbb{R} e la distanza tra due nodi è data dalla lunghezza del più corto cammino di lati

che li congiunge. Il *volume* di un grafo metrico è la somma delle lunghezze dei suoi lati.

Per $n \in \mathbb{N}$ sia fissato un grafo R_n con un nodo v e n lati e un isomorfismo tra il gruppo libero su n generatori F_n e il gruppo fondamentale $\pi_1(R_n, v)$ di R_n che ad un generatore associ un lato di R_n . D'ora in avanti considereremo identificati tali gruppi.

Definizione 1.1.5 (Grafo marcato). Un'equivalenza omotopica $g : R_n \rightarrow G$, dove G è un \mathbb{R} -grafo minimale senza nodi di valenza 1 e 2, è detta *marcatura* su G . Diremo due marcature $g_1 : R_n \rightarrow G_1$ e $g_2 : R_n \rightarrow G_2$ *equivalenti* se esiste un'isometria $i : G_1 \rightarrow G_2$ tale che $i \circ g_1 \simeq g_2$, cioè che faccia commutare a meno di omotopie (libere) il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & R_n & \\ g_1 \swarrow & & \searrow g_2 \\ G_1 & \xrightarrow{i} & G_2 \end{array}$$

Una classe di equivalenza rispetto a questa relazione sull'insieme delle marcature è detta *grafo marcato*. La notazione (g, G) indicherà la classe contenente $g : R_n \rightarrow G$.

Definizione 1.1.6. Definiamo CV_n come l'insieme dei grafi marcati (g, G) in cui l' \mathbb{R} -grafo G , univocamente determinato a meno di isometrie, ha volume 1. Essendo g un'equivalenza omotopica il gruppo fondamentale di G è isomorfo a F_n .

1.2 Una topologia su CV_n : L'Outer Space

In questo paragrafo verrà definita la topologia dell'Outer Space costruendo un'immersione di CV_n in un particolare prodotto infinito di copie di \mathbb{R} . Un'idea più intuitiva della geometria di tale spazio sarà data dallo studio, all'inizio del prossimo capitolo, della sua struttura simpliciale.

Definizione 1.2.1. Si fissi una marcatura $g : R_n \rightarrow G$ e sia g_* l'omomorfismo indotto da g sui gruppi fondamentali. Si definisce la lunghezza $l(\omega)$ di una parola $\omega \in F_n$ come la lunghezza del più corto ciclo di G nella classe di omotopia (libera) determinata da $g_*(\omega)$. Si osservi che cambiare il punto base nel gruppo fondamentale di G porta a considerare la stessa classe di omotopia libera, cioè cambiando il punto base in G le immagini attraverso i corrispondenti omomorfismi indotti di una parola ω sono cicli omotopi.

Osservazione 1.2.2. Due marcature equivalenti inducono la stessa funzione lunghezza su F_n , quindi possiamo dire che un grafo marcato (g, G) determina una funzione lunghezza su F_n .

Osservazione 1.2.3. Siccome, fissato un grafo marcato, la lunghezza appena definita di una parola di F_n è determinata da una classe di omotopia *libera* si ha

$$l(\omega) = l(x^{-1}\omega x) \quad \forall \omega, x \in F_n$$

cioè la funzione lunghezza l è in realtà definita sulle classi di coniugio delle parole di F_n .

Per dimostrare che due marcature che inducono la stessa funzione lunghezza sulle classi di coniugio di F_n sono equivalenti studiamo come ad una marcatura corrisponda un'azione di F_n su un \mathbb{R} -grafo.

Osservazione 1.2.4. Sia G un \mathbb{R} -grafo; il suo rivestimento universale \tilde{G} è un \mathbb{R} -albero, infatti si tratta di un grafo semplicemente connesso quindi di un albero su cui si può mettere una metrica assegnando ad un lato di \tilde{G} la lunghezza della sua immagine tramite la proiezione di rivestimento. Siccome stiamo considerando il rivestimento universale il gruppo degli automorfismi di rivestimento, che agisce su \tilde{G} , è isomorfo a $\pi_1(G)$. Allora una marcatura $g : R_n \rightarrow G$, che induce un isomorfismo tra $\pi_1(G)$ e $\pi_1(R_n) \cong F_n$, determina un'azione isometrica di F_n su \tilde{G} . Due marcature sono equivalenti se e solo se le azioni ad esse associate sono coniugate tramite un'isometria di \mathbb{R} -alberi (per i dettagli si veda [1]).

La Definizione 1.2.1 è un caso particolare di una costruzione generale che permette di associare una funzione lunghezza, ad un gruppo Γ che agisce su un \mathbb{R} -albero T :

Definizione 1.2.5. Sia Γ un gruppo che agisce sull' \mathbb{R} -albero T e sia $\gamma \in \Gamma$, si definisce la lunghezza di γ come $l(\gamma) = \min_{x \in T} d(x, \gamma(x))$, dove d è la distanza in T . Un elemento di Γ che ammetta punti fissi ha quindi lunghezza nulla.

Definizione 1.2.6 (Azione minimale). L'azione di un gruppo su un \mathbb{R} -albero si dice *minimale* se non esistono sottoalberi propri invarianti rispetto ad essa.

Definizione 1.2.7 (Azione abeliana). L'azione di un gruppo Γ su un \mathbb{R} -albero si dice *abeliana* se ogni elemento di $[\Gamma, \Gamma]$ ha lunghezza nulla nel senso della Definizione 1.2.5.

Sono ora utili i seguenti due risultati, le cui dimostrazioni si possono trovare in [5] e [6].

Teorema 1.2.8. *Un'azione minimale e non abeliana di un gruppo su un \mathbb{R} -albero è determinata, a meno di coniugio, dalla funzione lunghezza ad essa associata nel senso della Definizione 1.2.5.*

Teorema 1.2.9. *Se G è un \mathbb{R} -grafo minimale e senza nodi di valenza 1 o 2 come supposto sopra, una marcatura $g : G \rightarrow G$ determina un'azione minimale e libera quindi non abeliana di F_n sul rivestimento universale \tilde{G} di G .*

Osservazione 1.2.10. I Teoremi 1.2.8 e 1.2.9 garantiscono che se due grafi marcati (g, G) e (g', G') inducono la stessa lunghezza sulle classi di coniugio di F_n nel senso della Definizione 1.2.1 allora sono in realtà la stessa classe di marcature, cioè $(g, G) = (g', G')$ perchè determinano azioni di F_n su \mathbb{R} -alberi coniugate mediante isometria (si conclude quindi per l'Osservazione 1.2.4). Questo permette di dare la seguente definizione:

Definizione 1.2.11 (Outer Space). Sia C l'insieme di tutte le classi di coniugio di F_n . CV_n può essere immerso in \mathbb{R}^C mandando un grafo marcato nella sua funzione lunghezza sulle classi di coniugio di F_n . Le mappe $(g, G) \rightarrow l(c)$ per $c \in C$ danno le coordinate di questa immersione. L'origine di \mathbb{R}^C non sta nell'immagine di tale mappa, inoltre, siccome i grafi considerati hanno volume unitario e l'immersione è iniettiva, elementi distinti di CV_n non portano a funzioni lunghezza che differiscono per la moltiplicazione per uno scalare positivo. Questo significa che in realtà CV_n si può immergere in \mathbb{RP}^C . CV_n con la topologia indotta da \mathbb{RP}^C è detto *Outer Space*.

1.3 Azione di $Out(F_n)$ sull'Outer Space

Proposizione 1.3.1. *Ogni automorfismo di $F_n \cong \pi_1(R_n)$ si può realizzare come funzione continua $A : R_n \rightarrow R_n$; cioè dato un automorfismo $\alpha \in Aut(F_n)$ esiste una funzione continua $A : R_n \rightarrow R_n$ tale che l'omomorfismo indotto dai gruppi fondamentali A_* sia proprio α .*

Dimostrazione. Se $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ consideriamo una suddivisione R di R_n che spezzi il lato di R_n associato a x_i in $|\alpha(x_i)|$ lati $\forall i = 1, \dots, n$. Definendo A come la mappa che manda il j -esimo lato del cappio di R associato a x_i nella j -esima lettera della parola $\alpha(x_i)$ si ha la tesi. \square

Osservazione 1.3.2. La mappa A costruita in questa dimostrazione non è unica: se si prende una diversa suddivisione R' di R_n con le stesse caratteristiche di R si ottiene una diversa mappa A' , ma A e A' sono banalmente omotope.

Definizione 1.3.3. Definiamo un'azione di $Aut(F_n)$ su CV_n come segue: siano $\alpha \in Aut(F_n)$ e (g, G) un grafo marcato, poniamo $(g, G) \cdot \alpha = (g \circ A, G)$, dove A è una mappa costruita come nella dimostrazione precedente.

Proposizione 1.3.4. *L'azione è ben definita ovvero non dipende dal rappresentante della classe di marcature considerato nè dalla scelta della mappa A .*

Dimostrazione. Se $g' : R_n \rightarrow G'$ è una marcatura equivalente a $g : R_n \rightarrow G$ significa che esiste un'isometria $i : G \rightarrow G'$ tale che $i \circ g \simeq g'$, ma allora $i \circ g \circ A \simeq g' \circ A$ quindi anche le marcature $g \circ A : R_n \rightarrow G$ e $g' \circ A : R_n \rightarrow G'$ sono equivalenti, cioè $(g \circ A, G) = (g' \circ A, G')$.

Siano ora $A, A' : R_n \rightarrow R_n$ mappe costruite come nella dimostrazione della Proposizione 1.3.1, come osservato $A \simeq A'$, allora $g \circ A \simeq g \circ A'$ quindi $(g \circ A, G) = (g \circ A', G)$. \square

Proposizione 1.3.5. *Il gruppo degli automorfismi interni $Inn(F_n)$ agisce banalmente.*

Per la proposizione precedente, la cui dimostrazione si può trovare in [1], se due automorfismi differiscono per un automorfismo interno allora porteranno un grafo marcato in due marcature equivalenti; questo significa che vi è in realtà un'azione del gruppo degli automorfismi esterni $Out(F_n) = Aut(F_n)/Inn(F_n)$ su CV_n ; a questo si deve il nome di Outer Space.

Capitolo 2

Connessione dell'Outer Space

In questo capitolo parleremo della struttura simpliciale dell'Outer space che ci permetterà di definirne la spina, un retratto per deformazione del nostro spazio. Dimostreremo allora la connessione per archi della spina e quindi di CV_n .

2.1 La struttura simpliciale dell'Outer Space

Dato un grafo marcato $(g, G) \in CV_n$ si può considerare la famiglia di punti di CV_n che si ottengono cambiando la metrica su G , ovvero l'insieme dei grafi marcati (g_1, G_1) per i quali esiste un omeomorfismo $h : G \rightarrow G_1$ tale che $g_2 \simeq h \circ g$.

$$\begin{array}{ccc} & R_n & \\ g \swarrow & & \searrow g_2 \\ G & \xrightarrow{h} & G_2 \end{array}$$

I punti di questa famiglia sono univocamente determinati dalla lunghezza $l(e)$ che si assegna ad ogni lato e di G e si possono quindi parametrizzare come punti del cono positivo di uno spazio euclideo le cui coordinate sono indicizzate dai lati di G . Il fatto di considerare solo grafi di volume 1 è particolarmente comodo in questo contesto perchè allora questa famiglia di punti di CV_n , associata al grafo marcato (g, G) , altro non è che un k -simpleso aperto, dove $k + 1$ è il numero di lati di G .

Definizione 2.1.1 (Simpleso associato a un grafo marcato). Sia (g, G) . Detti e_0, \dots, e_k i lati di G , a (g, G) corrisponde il k -simpleso aperto

$$\sigma_{(g, G)} = \left\{ (l(e_0), \dots, l(e_k)) \in \mathbb{R}^{k+1}; l(e_i) > 0, \sum_{i=0, \dots, k} l(e_i) = 1 \right\}$$

che si può immergere in \mathbb{R}^C associando ad ogni punto di $\sigma_{(g,G)}$ la funzione lunghezza su C indotta dal corrispondente grafo marcato che consiste di una nuova metrica su G e della marcatura di partenza g .

Osservazione 2.1.2. Abbiamo in pratica trovato che CV_n è l'unione disgiunta di semplici aperti, ognuno dei quali parametrizza le possibili metriche su un grafo mantenendone la marcatura. Si può considerare la chiusura in CV_n di tali semplici: non si tratterà di veri e propri semplici chiusi, ma di semplici chiusi privati di un insieme di facce. Questo è dovuto al fatto che passare al bordo di un dato semplice $\sigma_{(g,G)}$ significa assegnare lunghezza nulla ad alcuni lati di G ovvero, topologicamente, collassarli ad un punto. Questa operazione non è però sempre consentita rimanendo all'interno di CV_n perchè non è detto che il grafo ottenuto da questo collasso sia ancora omotopicamente equivalente a R_n . Si può anzi osservare che in nessun caso la chiusura in CV_n corrisponde esattamente al semplice chiuso.

Definizione 2.1.3 (Semplici ideali e semplici all'infinito). Dato un semplice aperto $\sigma_{(g,G)}$ di CV_n chiamiamo *simpleso ideale* la sua chiusura in CV_n . Le facce mancanti in questa chiusura sono dette invece *semplici all'infinito*.

Osservazione 2.1.4. Se due semplici ideali di CV_n si incontrano la loro intersezione è una faccia (ideale) di entrambi. Esiste quindi un complesso simpliciale X^* in cui è possibile immergere CV_n come unione di semplici aperti.

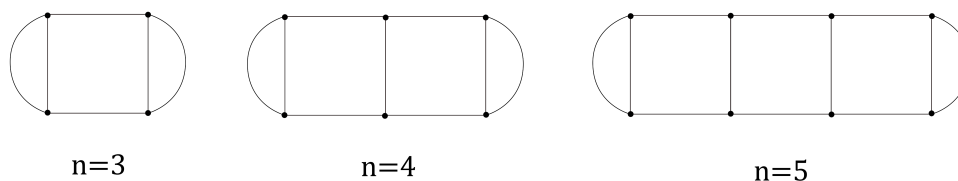
Proposizione 2.1.5. *La chiusura di un semplice ideale massimale di CV_n è un semplice di dimensione $3n - 4$, cioè CV_n è immergibile in un complesso simpliciale di dimensione $3n - 4$; in questo senso diciamo che $\dim(CV_n) = 3n - 4$.*

Dimostrazione. Un semplice ideale massimale di CV_n corrisponde ad un grafo G con il massimo numero di lati. Mostriamo che un grafo G omotopicamente equivalente a R_n ha al più $3n - 3$ lati. Il gruppo fondamentale di G è isomorfo a F_n , ma allora per il Teorema 1.1.3 si ha $l - v + 1 = n$, cioè $l = n + v - 1$. Siccome i grafi che consideriamo non hanno nodi di valenza 1 o 2 si ha $v \leq \frac{2l}{3}$ perchè ogni nodo deve essere vertice iniziale o finale di almeno 3 lati. Quindi si ha

$$l = n + v - 1 \leq n + \frac{2l}{3} - 1 \Rightarrow l \leq 3n - 3$$

Si è inoltre dimostrato che $v \leq 2n - 2$.

Per concludere basta osservare che esiste sempre un grafo omotopicamente equivalente a R_n con $3n - 3$ lati e $2n - 2$ nodi. In figura sono riportati i casi $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$, la costruzione è analoga per ogni n .



□

Osservazione 2.1.6. I semplici di dimensione più bassa di CV_n sono quelli che corrispondono a punti il cui grafo sottostante è una rosa ed hanno dimensione $n - 1$. Inoltre dato un qualsiasi grafo marcato (g, G) collassando un albero massimale di G si ottiene una rosa quindi ad ogni albero massimale di G corrisponde una diversa rosa il cui semplice ideale sarà una faccia (ideale) del semplice di partenza $\sigma_{(g,G)}$

2.2 La spina

In questa sezione definiamo un retratto per deformazione di CV_n : la sua spina. Sarà sufficiente dimostrare la contraibilità della spina per avere lo stesso risultato per l'Outer space.

Definizione 2.2.1 (Spina). Sia X^* il più piccolo complesso simpliciale in cui è possibile immergere CV_n , cioè il complesso formato dalla chiusura (in \mathbb{R}^C) dei semplici dell'Outer space, si definisce la *spina* K_n di CV_n come il più grande sottocomplesso della suddivisione baricentrica di X^* disgiunto da $X^* \setminus CV_n$.

Osservazione 2.2.2. Possiamo definire sull'insieme dei semplici aperti di CV_n la relazione d'ordine parziale "essere faccia di". Rigorosamente parlando, siccome stiamo trattando semplici aperti tra i quali quindi non vi è inclusione, dovremmo passare attraverso l'insieme dei corrispondenti semplici ideali con la, qui non più vuota, relazione di inclusione. Rispetto a tale relazione l'insieme dei semplici aperti è parzialmente ordinato. Si può pensare alla spina di CV_n come alla realizzazione geometrica di tale insieme parzialmente ordinato. Un semplice di K_n diventa in quest'ottica una catena di semplici aperti $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k$ dove σ_i è una faccia propria di σ_{i+1} nel senso specificato.

Teorema 2.2.3. K_n è un retratto per deformazione di CV_n e la retrazione è equivariante rispetto all'azione di $Out(F_n)$.

La retrazione è sostanzialmente costruita facendo collassare un simpleso della suddivisione baricentrica di X^* sulla sua faccia contenuta in K_n .

Osservazione 2.2.4. Supponiamo (g, G) e (g', G') siano vertici di K_n . Il simpleso aperto determinato da (g, G) è faccia di quello determinato da (g', G') se e solo se G è ottenuto da G' mandando a zero la lunghezza di un insieme di suoi lati e g è la composizione di g' con il corrispondente collasso. Quindi i vertici $(g_0, G_0), \dots, (g_k, G_k)$ formano un k -simpleso di K_n se e solo se, per ogni i , G_i può essere ottenuto da G_{i-1} da un collasso di lati d_i e il seguente diagramma commuta a meno di omotopie (libere):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R_n & & \\
 & g_0 \swarrow & & \searrow g_k & \\
 G_0 & & & & G_k \\
 & \swarrow d_1 & & \swarrow d_2 & \dots & \swarrow d_k \\
 & G_1 & & & & G_k
 \end{array}$$

Osservazione 2.2.5. I vertici di K_n sono baricentri di semplici aperti di CV_n ovvero sono grafi marcati (g, G) in cui tutti i lati di G hanno la stessa lunghezza quindi studiando K_n invece che CV_n si dimentica la struttura metrica e si guarda alla struttura combinatoria dell'Outer space.

Definizione 2.2.6 (Grafo etichettato). Possiamo rappresentare un vertice (g, G) di K_n con un *grafo etichettato*, ovvero con l'assegnazione a tutti i lati di G , fatta esclusione per un albero massimale, di un'etichetta. Un'etichetta consiste di un'orientazione e di una parola in $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, vediamo come viene assegnata quest'ultima. Si sceglie $h : G \rightarrow R_n$ inversa omotopica di g che collassi un albero massimale T di G all'unico nodo di R_n . Ogni lato di G che non sta in T è mappato in un cappio di R_n quindi a un lato di questo tipo si può assegnare la parola di $F_n \equiv \pi_1(R_n)$ che corrisponde alla classe di equivalenza omotopica di tale cappio. Naturalmente in questo caso si parla della classe di equivalenza omotopica puntata relativa al punto base, fino ad ora sottointeso, che si è scelto essere l'unico vertice di R_n .

Osservazione 2.2.7. Si osservi che h è un'equivalenza omotopica se e solo se l'insieme delle parole che etichettano i lati di G formano una base per F_n .

Osservazione 2.2.8. Questa rappresentazione non è unica: vi sono infiniti grafi etichettati che rappresentano uno stesso vertice di K_n . C'è infatti arbitrarietà nella scelta dell'inversa omotopica, quindi anche dell'albero massimale da collassare.

2.3 Connessione dell'Outer space

Definizione 2.3.1 (Mappa di grafi). Siano G_1 e G_2 due grafi, chiamiamo un'applicazione continua $f : G_1 \rightarrow G_2$ *mappa di grafi* se manda nodi in nodi e un lato o in un nodo o, omeomorficamente, in un altro lato.

Il seguente risultato è conseguenza dei teoremi classici di topologia algebrica sull'approssimazione simpliciale che si possono trovare per esempio in [5]:

Proposizione 2.3.2. *Siano G_1 e G_2 due grafi e $f : G_1 \rightarrow G_2$ un'applicazione continua, allora esistono G'_1 e G'_2 , suddivisioni di G_1 e G_2 , e una mappa di grafi $f' : G'_1 \rightarrow G'_2$ omotopa a f .*

Definizione 2.3.3 (Folding). Siano G_1 e G_2 due grafi e siano e_1 e e_2 due lati di G_1 con un vertice comune. Diciamo che una mappa di grafi $f : G_1 \rightarrow G_2$ è un *folding* o che *folda* la e_1 ed e_2 se le loro immagini sono lati e $f(e_1) = f(e_2)$.

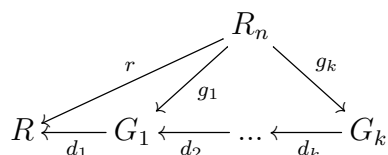
L'operazione di folding tra grafi è un potente strumento introdotto da John Robert Stallings (1935-2008) che permette di dimostrare in maniera geometrica importanti risultati sui gruppi liberi. Due esempi elementari sono l'Hopfianità dei gruppi liberi (la proprietà per la quale ogni endomorfismo suriettivo di un gruppo libero è un isomorfismo) e l'esistenza di un algoritmo per capire se un endomorfismo di gruppi liberi è un isomorfismo (cioè se è suriettivo). Noi useremo il folding per dimostrare che la spina è connessa per archi.

Definizione 2.3.4 (Rosa marcata). Definiamo *rose marcate* i vertici (g, G) di K_n il cui grafo sottostante G ha un solo nodo.

Lemma 2.3.5. K_n è l'unione delle stelle delle rose marcate.

Dimostrazione. Ogni vertice (g, G) della spina è contenuto nella stella della rosa ottenuta collassando tutti i lati non etichettati di un grafo etichettato che rappresenti il vertice stesso. La marcatura di tale rosa è data dalla composizione di g e tale collasso. Si osservi che l'insieme dei lati collassati è un albero massimale e quindi collassandolo si ottiene necessariamente un grafo con un solo vertice, ovvero una rosa. \square

Osservazione 2.3.6. Questo significa che ogni vertice (g, G) di K_n sta nella stella di una rosa (r, R) , cioè, come visto nell'Osservazione 2.2.4, (r, R) si ottiene da (g, G) tramite una serie di collassi d_1, \dots, d_k :



Si osservi che il collasso di un lato fa necessariamente calare di 1 il numero dei nodi (non si può collassare un cappio). Siccome, come visto nella Proposizione 2.1.5, il numero massimo di nodi di un garfo di K_n è $2n - 2$, per arrivare a R si possono fare al più $2n - 3$ collassi. La dimensione di K_n è quindi al più $2n - 3$.

Definizione 2.3.7 (Rosa standard). Diciamo *rosa standard* il grafo marcato $\rho_0 = (id, R_n)$ di K_n dove id è l'identità.

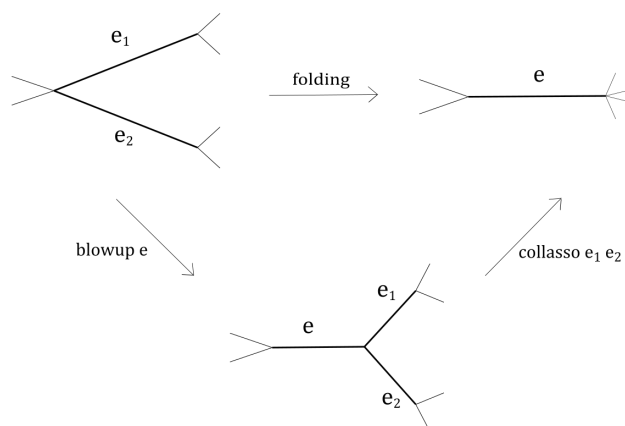
Osservazione 2.3.8. Se (r, R) è una rosa marcata di K_n e r è un omeomorfismo allora $(r, R) = \rho_0$ perchè essendo nella spina la metrica è necessariamente quella che dà ad ogni lato la stessa lunghezza.

Teorema 2.3.9. K_n è connesso per archi.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.3.5 ogni vertice della spina è collegato da un lato con una rosa marcata, quindi basta mostrare che ogni rosa marcata (r, R) è connessa alla rosa standard ρ_0 . Fissiamo una mappa di grafi $s : R \rightarrow R_n$ che sia un'inversa omotopica di r . Questo è possibile per la Proposizione 2.3.2 a meno di passare ad una suddivisione di R . Si osservi che suddividere il grafo significa introdurre nodi di valenza 2, quindi per pensarlo in K_n si ignorino i nodi di valenza 2. Vogliamo mostrare che s produce un cammino di lati in K_n che congiunge R a R_n . Supponiamo s non sia localmente iniettiva, questo significa che s può collassare dei lati o foldare coppie di lati che abbiano un nodo comune (le coppie foldate non possono avere entrambi i nodi comuni o formerebbero un cappio con immagine tramite s nullomotopa). Per quanto visto nell'Osservazione 2.2.4 il collasso di un lato di un grafo marcato corrisponde a un lato in K_n . L'operazione in questo senso inversa al collasso, che corrisponde a percorrere in senso inverso il lato di K_n , è detta *blowup* e possiamo immaginarla come la produzione, nel grafo, di un nuovo lato a partire da un nodo. Un folding corrisponde, in termini di operazioni sul grafo, ad un blowup seguito dal collasso di un albero. Anche il folding di una coppia di lati produce quindi un cammino di lati in K_n .

Se s non è localmente iniettiva possiamo esibire un collasso o un folding, che corrispondono a un cammino in K_n da R ad un certo grafo R' . s induce una mappa $s' : R' \rightarrow R_n$, se s' non è localmente iniettiva si ripete quanto fatto. Il processo terminerà in un numero finito di passi perchè folding e collassi fanno calare il numero dei lati. Si arriverà quindi a costruire un cammino di lati di K_n da R a un certo grafo G e la mappa $f : G \rightarrow R_n$ indotta da s sarà infine localmente iniettiva.

Mostriamo ora che f è in realtà un omeomorfismo: concludiamo quindi perchè il cammino costruito porta (r, R) nella rosa standard $(f^{-1}, G) = \rho_0$.



Sia x_i l' i -esimo lato di R_n . Siccome f è un'equivalenza omotopica esiste un coppia l_i di G tale che $f(l_i) \simeq x_i$, ma dato che f è localmente iniettiva l_i deve essere un coppia semplice (percorso una sola volta). Inoltre, per $i \neq j$, l_i e l_j si intersecano in uno e un solo punto perchè le loro immagini sono petali distinti. Infine l'unione di tali cappi deve essere tutto G perchè, se così non fosse, il complementare dovrebbe essere una foresta o f non sarebbe un'equivalenza omotopica, ma le foreste devono collassare. Quindi tutti i cappi l_i si intersecano in uno stesso punto a formare G che a questo punto non può che essere una rosa. Ma allora, siccome f manda petali in petali omeomorficamente, è un omeomorfismo. \square

2.4 Lati ideali e mosse di Whitehead

Le mosse di Whitehead sono operazioni tra grafi che corrispondono a cammini in K_n che collegano due rose e sono sostanzialmente la composizione di un blowup e un collasso. Nel dimostrare la connessione abbiamo usato il termine *blowup* per indicare il cammino di K_n inverso al collassio di un lato, in pratica quindi possiamo immaginarlo come un'operazione su un grafo che fa nascere un nuovo lato il cui collasso riporta al punto iniziale della spina. Vedremo in questo paragrafo un altro modo di descrivere un blowup. Per questa trattazione è comodo usare la definizione combinatoria di grafo:

Definizione 2.4.1 (Grafo combinatorio). Un grafo combinatorio G è una quaterna $(N(G), E(G), \bar{\cdot}, t)$, dove $N(G)$ e $E(G)$ sono insiemi e $N(G)$ è non vuoto, $\bar{\cdot} : E(G) \rightarrow E(G)$ è un'involuzione senza punti fissi e infine $t : E(G) \rightarrow N(G)$ è una funzione.

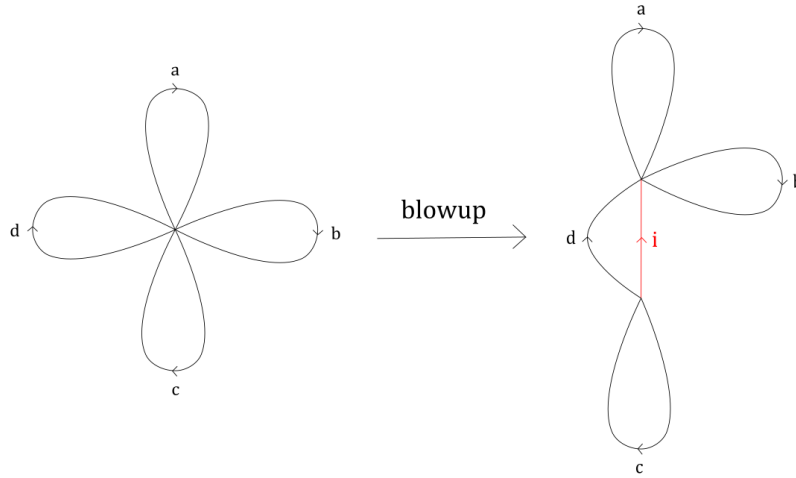
$N(G)$ va interpretato come l'insieme dei nodi di G , $E(G)$ come l'insieme dei

lati, $\bar{}$ è la funzione “lato inverso” e t è la funzione “nodo finale”. La funzione che a un lato associa il suo nodo iniziale sarà data dalla composizione $\bar{} \circ t$.

Osservazione 2.4.2. Sia $G = (N(G), E(G), \bar{}, t)$ un grafo combinatorio finito, cioè con $N(G)$ e $E(G)$ insiemi finiti. A G corrisponde un grafo topologico, cioè un CW-complesso unidimensionale X . Se $E(G) = \{e_1, \bar{e}_1, \dots, e_k, \bar{e}_k\}$, X è il CW-complesso le cui 0-celle sono punti indicizzati dagli elementi di $N(G)$ e le cui 1-celle sono descritte dagli omeomorfismi $\varphi_h : [0, 1] \rightarrow X$ per $h = 1, \dots, k$ in modo tale che, per ogni h , $\varphi_h(0)$ sia la 0-cella indicizzata da $t(e_h)$ e $\varphi_h(1)$ sia invece quella indicizzata da $t(\bar{e}_h)$.

Siccome tratteremo solo grafi finiti, la costruzione standard appena vista ci permette di parlare genericamente di “grafo” sfruttando talvolta la struttura topologica, talvolta quella combinatoria.

L’obiettivo è descrivere il blowup di un lato, a partire da una rosa (r, R) , solo in termini di lati di R . Partiamo da un esempio:



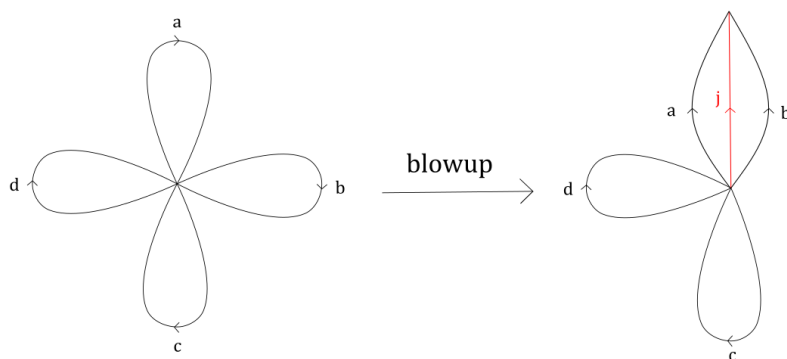
Esempio 2.4.3. Consideriamo la situazione riportata in figura. Il grafo di partenza è una rosa R il cui insieme dei lati è $E(R) = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \bar{c}, d, \bar{d}\}$ e con un unico nodo. Il blowup ha portato alla produzione del nuovo lato i e naturalmente del suo inverso, ma anche allo sdoppiamento del nodo della rosa. Se chiamiamo G il nuovo grafo si avrà quindi $E(G) = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \bar{c}, d, \bar{d}, i, \bar{i}\}$, $N(G) = \{t(i), t(\bar{i})\}$. Per descrivere il blowup basta descrivere il comportamento della funzione “nodo finale” in G , infatti la funzione “lato inverso” si estende ovviamente ai due nuovi lati mandando l’uno nell’altro. In particolare il blowup è determinato dall’insieme dei lati che la funzione “nodo finale”

manda nel nodo finale di i , visto che tutti gli altri verranno mandati invece nel nodo iniziale di i . Nel nostro caso tal insieme è per esempio

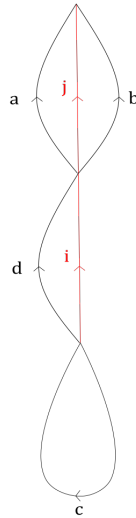
$$A = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, d\}$$

Naturalmente, sempre in riferimento alla figura, se avessimo considerato invece che i il suo opposto avremmo ottenuto il complementare di tale insieme. Si può quindi dire che A e A^c insieme determinino univocamente il nostro blowup. Proprio perchè può rappresentare un blowup chiameremo un sottoinsieme proprio di $E(R)$ lato ideale di R .

Analizziamo ora il seguente problema: dati due sottoinsiemi propri di $E(R)$ quando è possibile ottenere un nuovo grafo effettuando contemporaneamente i due blowup ad essi corrispondenti? Prendiamo ad esempio A come sopra e un nuovo insieme $B = \{a, \bar{b}\}$. Il grafo ottenuto dal blowup di B è il seguente:

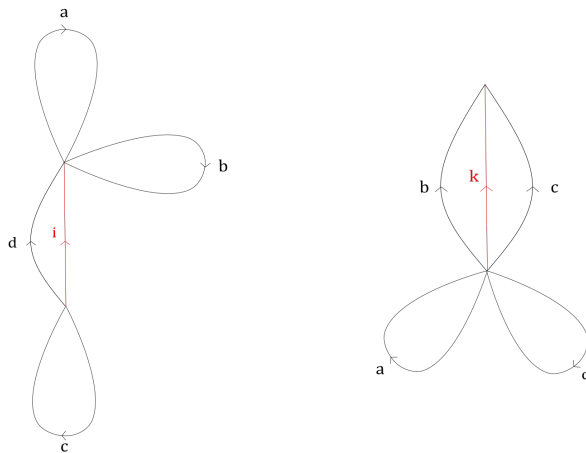


In questo caso è possibile eseguire contemporaneamente i due blowup. Vedremo che si dirà che A e B sono compatibili. Il grafo che si ottiene è il seguente:



Definizione 2.4.4 (Insiemi di lati compatibili). Sia (r, R) una rosa. Due sottoinsiemi A e B di $E(R)$ si dicono *compatibili* se uno tra i quattro insiemi $A \cap B$, $A^c \cap B$, $A \cap B^c$ e $A^c \cap B^c$ è vuoto.

Esempio 2.4.5. Consideriamo la rosa dell'esempio precedente. Vediamo che due sottoinsiemi di $E(R)$ non compatibili corrispondono a due blowup che non possono essere applicati contemporaneamente. Prendiamo come sopra $A = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, d\}$ e sia invece $A' = \{b, c\}$, i due insiemi non sono compatibili. Separatamente i due blowup generano i seguenti grafi:



Le due operazioni non possono essere applicate contemporaneamente: supponiamo infatti di aver già eseguito il blowup relativo ad A (il primo in figura); il lato generato dal blowup relativo a A' dovrebbe separare vertice iniziale e finale sia di b che di c il che evidentemente non è possibile.

Definizione 2.4.6 (Collezione completa di insiemi di lati). Data una rosa (r, R) , una collezione di sottoinsiemi di $E(R)$ si dice *completa* se i suoi elementi sono insiemi a due a due compatibili ed è chiusa rispetto alla complementazione.

Proposizione 2.4.7. Sia $\rho = (r, R)$ una rosa di K_n . Esiste una corrispondenza biunivoca tra le collezioni complete di sottoinsiemi di $E(R)$ e i vertici della stella di ρ in K_n .

Dimostrazione. Un vertice (g, G) di K_n è collegato a ρ da un lato se e solo se esiste una sequenza di collassi di lati $G \rightarrow G_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_1 \rightarrow R$ che faccia commutare a meno di omotopie il seguente diagramma:

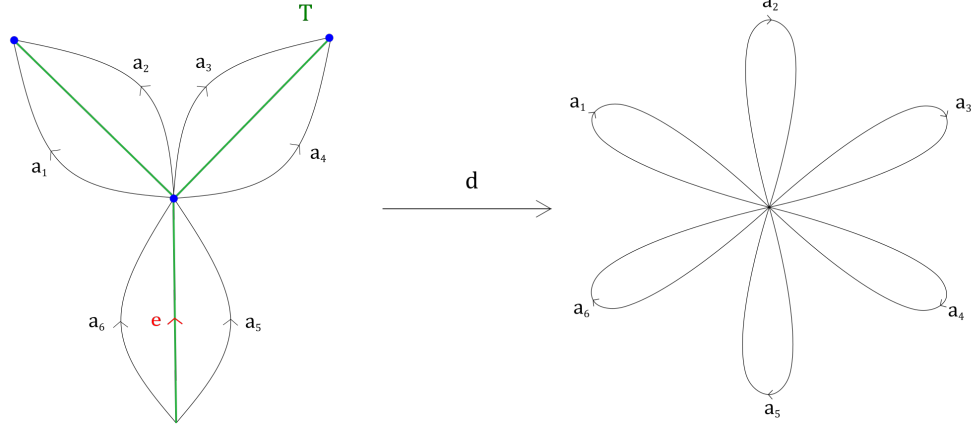
$$\begin{array}{ccccc}
 & & R_n & & \\
 & r \swarrow & & \searrow g & \\
 & & G_1 & \dots & G \\
 & \swarrow d_1 & \leftarrow d_2 & \dots & \leftarrow d_k \\
 R & & & &
 \end{array}$$

La composizione di tali collassi $d : G \rightarrow R$ è un'equivalenza omotopica che collassa un albero massimale T di G all'unico nodo x di R . Per la commutatività del diagramma e siccome si tratta di equivalenze omotopiche, la marcatura g è determinata da d e r a meno di omotopie. Questo significa che i vertici della stella di ρ corrispondono a mappe di grafi suriettive $d : G \rightarrow R$ tali che $d^{-1}(x)$ sia un albero massimale di G . Costruiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra queste mappe e le collezioni complete di sottoinsiemi di $E(R)$.

Sia d come sopra, $T = d^{-1}(x)$ è un albero massimale di G . Si osservi che d induce una biiezione tra $E(G) \setminus E(T)$ e $E(R)$. Per ogni $e \in E(T)$ definiamo un sottoinsieme e^* di $E(R)$ in modo tale che la collezione $\{e^* : e \in E(T)\}$ sia completa. Il grafo $(N(T), E(T) \setminus \{e\}, \bar{\cdot}|_{E(T) \setminus \{e\}}, t|_{E(T) \setminus \{e\}})$, dove $\bar{\cdot}$ e t sono rispettivamente le funzioni "lato inverso" e "nodo finale" in G , ha due componenti connesse, sia T_e quella contenente $t(e)$, il vertice finale di e . Sia e^* l'insieme dei lati di R della forma $d(f)$ dove f è un lato di G che non stia nell'albero massimale e che abbia il suo vertice finale in T_e :

$$e^* = \{d(f) : f \in E(G) \setminus E(T) \text{ e } t(f) \in T_e\}$$

Vediamo un esempio di come si costruisce e^* :



Per semplicità in figura abbiamo indicato i lati di $E(G) \setminus E(T)$ come le rispettive immagini tramite d . In questo caso i vertici di T_e sono quelli evidenziati in blu e $e^* = \{a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, \bar{a}_3, a_4, \bar{a}_4, a_5, \bar{a}_5, a_6, \bar{a}_6\}$.

Siano $e, f \in E(T)$. Vale $(\bar{e})_* = (e^*)^c$, inoltre e^* e f^* sono compatibili perchè $(N(T), E(T) \setminus \{e, f\}, -|_{E(T) \setminus \{e, f\}}, f|_{E(T) \setminus \{e, f\}})$ ha tre componenti connesse quindi uno dei quattro insiemi

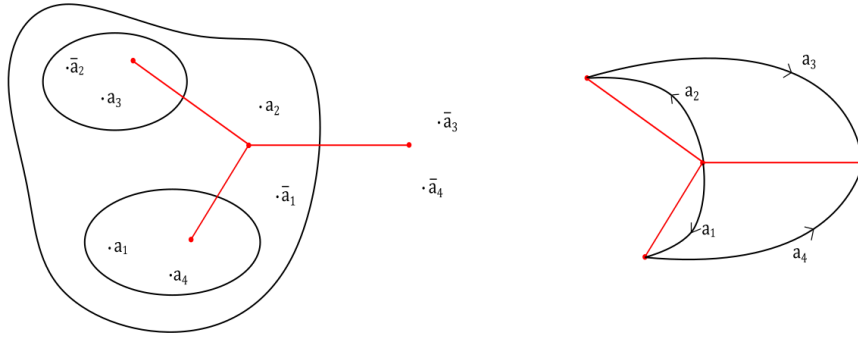
$$e^* \cap f^*, (e^*)^c \cap f^*, e^* \cap (f^*)^c, (e^*)^c \cap (f^*)^c$$

è necessariamente vuoto. Questo mostra che $\{e^* : e \in E(T)\}$ è completo.

Viceversa, data una collezione completa I di sottoinsiemi di $E(R)$ dobbiamo costruire un grafo G e una mappa $d : G \rightarrow R$ che collaksi un albero massimale T all'unico nodo di R e tale che $I = \{e^* : e \in E(T)\}$. Innanzi tutto costruiamo T prendendo $E(T) = I$ e la complementazione come involuzione. Definiamo la relazione di equivalenza in I ponendo $i \sim j$ se e solo se $i = j$ oppure i è un sottoinsieme proprio massimale di j^c , scriveremo $i \subset_m j^c$. Prendiamo allora come insiemi dei nodi $N(T)$ l'insieme delle classi di equivalenza e poniamo il vertice finale di i , $t(i)$, essere la classe di equivalenza di i . i_1, i_2, \dots, i_k è un cammino di lati ridotto in T se e solo se $t(i_1) = t(\bar{i}_2), t(i_2) = t(\bar{i}_3), \dots, t(i_{k-1}) = t(\bar{i}_k)$, cioè se e solo se $i_1 \subset_m i_2 \subset_m i_3 \subset_m \dots \subset_m i_k$. Quindi cammini di lati orientati ridotti in T corrispondono a catene strettamente crescenti di insiemi in I . Questo garantisce che T sia un albero. Ora costruiamo G a partire dal suo albero T aggiungendo, per ogni $e \in E(R)$, un lato e' ponendo $t(e') = t(i)$ dove i è un elemento massimale di I che non contiene e . La buona definizione di t è conseguenza della compatibilità degli insiemi di I . Infine si verifica che $I = \{e^* : e \in E(T)\}$.

Questo procedimento può essere visualizzato geometricamente mediante la rappresentazione con diagrammi di Venn degli insiemi della collezione

completa I . Rappresentiamo gli elementi di $E(R)$ come punti del piano. Per ogni coppia $\{i, i^c\} \subset I$ disegniamo una curva chiusa semplice che separi gli elementi di i da quelli di i^c . Se I è compatibile è possibile disegnare queste curve in modo tale che non si intersechino. Il grafo G e il suo albero massimale T avranno un nodo per ogni componente connessa del complementare di questa famiglia di curve. L'albero T avrà un lato che congiunge tutte le coppie di nodi che rappresentano componenti connesse adiacenti. Inoltre, per ogni $e \in E(R)$, c'è un lato di G che congiunge la componente di e a quella di \bar{e} . In figura è riportato un esempio di tale costruzione:



Nel caso in figura $E(R) = \{a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, \bar{a}_3, a_4, \bar{a}_4\}$ e l'insieme completo è

$$I = \{ \{a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, a_4\}, \{a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, a_4\}^c, \\ \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_4\}^c, \{\bar{a}_2, a_3\}, \{\bar{a}_2, a_3\}^c \}$$

□

Notazione 2.4.8. Abbiamo quindi visto come ad un sottoinsieme completo I di lati di una rosa (r, R) corrisponda il blowup di un albero che produce un grafo marcato (g, G) da cui si può tornare a R collassando tale albero (massimale in G). Il grafo G viene indicato con R^I . Come osservato vi è una corrispondenza biunivoca tra i lati di R e $E(R^I) \setminus E(T)$ quindi spesso li indicheremo allo stesso modo.

Osservazione 2.4.9. Può essere conveniente d'ora in poi lavorare su un retratto per deformazione di CV_n ancora più piccolo. Sia Y l'insieme dei punti di CV_n rappresentati da grafi marcati senza lati separatori. Un simpleso ideale di CV_n rappresentato da un grafo marcato con lati separatori incontra Y nelle facce ottenute assegnando lunghezza nulla ai lati separatori, che ovviamente non possono essere cappi. Y è retratto per deformazione di CV_n e una retrazione è definita mandando uniformemente a zero la lunghezza dei lati separatori e incrementando uniformemente la lunghezza degli altri

lati per mantenere il volume unitario. Se X^* è il più piccolo complesso simpliciale in cui si può immergere CV_n questa costruzione realizza Y come unione di semplici aperti di un sottocomplesso Y^* di X^* e la retrazione appena costruita si estende a retrazione per deformazione di X^* in Y^* . La costruzione della spina vista a partire da X^* si può fare a partire da Y^* : d'ora in avanti con K_n indicheremo il sottocomplesso massimale della suddivisione baricentrica di Y^* disgiunto da $Y^* \setminus Y$ e continueremo a chiamare questo retratto per deformazione di CV_n spina.

Osservazione 2.4.10. Sia (r, R) una rosa e I una collezione completa di sottoinsiemi di $E(R)$. Pensando alla costruzione geometrica di R^I mediante i diagrammi di Venn si trova che un sottoinsieme $i \in I$ corrisponde a un lato separatore in R^I se e solo se è invariante per l'involuzione di $E(R)$, cioè se per ogni lato e di R vale $e \in i \Rightarrow \bar{e} \in i$. È chiaro inoltre che R^I non avrà nodi di valenza 2 se e solo se ogni sottoinsieme della collezione I ha cardinalità maggiore di 1. Diamo quindi la definizione di lato ideale già anticipata tenendo conto di quanto osservato:

Definizione 2.4.11 (Lato ideale). Un lato ideale di una rosa R è un sottoinsieme i di $E(R)$ tale che $1 < |i| < 2n - 1$ ed esiste $e \in E(R)$ per cui $e \in i$ ma $\bar{e} \notin i$.

Notazione 2.4.12. Sia $\rho = (r, R)$ una rosa e $i \subset E(R)$ un lato ideale. Indicheremo con $D(i)$ il seguente insieme non vuoto:

$$D(i) = \{e \in E(R) \mid e \in i, \bar{e} \notin i\}$$

Definizione 2.4.13 (Mossa di Whitehead). Sia $\rho = (r, R)$ una rosa e $i \subset E(R)$ un lato ideale. Se $e \in D(i)$ possiamo vedere e come un lato del grafo $R^{\{i, i^c\}}$ e, per costruzione, $t(e) \neq t(\bar{e})$. Allora possiamo collassare il lato $\{e, \bar{e}\}$ di $R^{\{i, i^c\}}$ e ottenere una nuova rosa che indicheremo con ρ_e^i . L'operazione che trasforma ρ in ρ_e^i è detta *mossa di Whitehead* e la indicheremo con la coppia (i, e) .

Osservazione 2.4.14. Si noti che $(i, e) = (i, \bar{e}) = (i^c, e) = (i^c, \bar{e})$. Inoltre è evidente che una mossa di Whitehead determina un cammino di lati di lunghezza 2 in K_n .

Le mosse di Whitehead hanno un legame diretto con certi automorfismi di F_n , detti appunto automorfismi di Whitehead. Tale legame è esplicitato dalla proposizione che segue, dimostrata in [1]; definiamo intanto tali automorfismi:

Definizione 2.4.15 (Automorfismi di Whitehead). Sia F_n in gruppo libero su n elementi con base $\{x_1, \dots, x_n\}$ e sia A un sottoinsieme di $L = \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\}$ per il quale esiste una lettera $a \in L$ tale che $a \in A$ ma $a^{-1} \notin A$. Allora l'*automorfismo di Whitehead* (A, a) è l'automorfismo di F_n che fissa a e che ha il seguente comportamento sugli altri elementi di L :

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow axa^{-1} & \text{se } x \in A \text{ e } x^{-1} \in A \\ x \rightarrow xa^{-1} & \text{se } x \in A \text{ e } x^{-1} \notin A \\ x \rightarrow ax & \text{se } x \notin A \text{ e } x^{-1} \in A \\ x \rightarrow x & \text{se } x \notin A \text{ e } x^{-1} \notin A \end{array}$$

Proposizione 2.4.16. *Sia $\rho_0 = (1, R_n)$ la rosa standard. Una rosa $\rho \in K_n$ è ottenuta da ρ_0 mediante mosse di Whitehead se e solo se esiste un automorfismo di Whitehead ω , dato in termini della base standard di $\pi_1(R_0)$, tale che $\rho = \rho_0 \cdot \omega$. In particolare, se $\pi_1(R_0) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ e A è un sottoinsieme di $\{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\}$, dato $a \in A$ con $a^{-1} \notin A$, si ha $(\rho_0)_a^A = \rho_0 \cdot (A, a)$.*

Osservazione 2.4.17. In quest'ottica la connessione di K_n è conseguenza del fatto che gli automorfismi di Whitehead generano $\text{Aut}(F_n)$ (si veda [9]).

Capitolo 3

Contraibilità dell'Outer Space

In questo capitolo dimostreremo la contraibilità dell'Outer Space provando la contraibilità della spina che, come visto, è l'unione delle stelle delle rose. Procederemo assegnando ad ogni rosa un valore reale che chiameremo norma. La definizione della norma di una rosa dipenderà in realtà dalla scelta di un determinato sottoinsieme finito W dell'insieme delle classi di coniugio di F_n , C . Collasseremo poi mano a mano le stelle delle rose con norma maggiore sull'unione delle stelle di quelle con norma più piccola fino ad arrivare al complesso dato dall'unione delle stelle con norma minimale. Infine dimostreremo che per una particolare scelta di W , cioè usando una particolare norma, il complesso a cui si arriva è in realtà la stella di una singola rosa ed è quindi contraibile. La strada scelta per dimostrare il risultato è quella adottata nell'articolo in cui l'Outer Space venne introdotto ([1]) dove si possono trovare anche i risultati qui non dimostrati. Sfrutteremo fortemente gli strumenti sviluppati nell'ultimo paragrafo del secondo capitolo, in particolare la descrizione combinatoria di un vertice della stella di una rosa in termini di lati ideali e insiemi compatibili. Questo ci permetterà di trattare spesso gli oggetti che useremo in modo quasi esclusivamente insiemistico.

3.1 Norma di una rosa e *riduttività*

Definizione 3.1.1 (Norma di una rosa). Sia $W \subset C$ un insieme finito di classi di coniugio di F_n . Definiamo sull'insieme delle rose vertici di K_n la norma a valori interi

$$\|\rho\|_W = n \sum_{\omega \in W} l(\omega)$$

dove l è la funzione lunghezza su F_n associata a $\rho = (r, R)$. Se $r_* : \pi_1(R_n) \rightarrow \pi_1(R)$ è l'omomorfismo indotto da r , sostanzialmente la norma- W di ρ è la

somma su $\omega \in W$ del numero di petali che formano $r_*(\omega)$ perchè R_n , siccome è un vertice di K_n , è formata da n petali di lunghezza $1/n$.

Nel seguito W indicherà sempre un sottoinsieme finito di C e $\rho = (r, R)$ sarà una rosa fissata di K_n .

Definizione 3.1.2 (Riduttività). Sia i un lato ideale di ρ e sia $e \in D(i)$. La *riduttività della mossa di Whitehead* (i, e) è definita come $red(i, e) = \|\rho\|_W - \|\rho_e^i\|_W$. La *riduttività* di i è invece

$$red(i) = \max_{e \in D(i)} red(i, e)$$

Il lato ideale i è detto *riduttivo* se $red(i) \geq 0$, *zero-riduttivo* se $red(i) = 0$ e *strettamente riduttivo* se $red(i) > 0$. Infine i è detto *massimalmente riduttivo* se $red(i) \geq red(j)$ per ogni lato ideale j di R .

Osservazione 3.1.3. Sia $g : R_n \rightarrow G$ un grafo marcato e sia $e \in E(G)$, se g_* è l'omomorfismo indotto da G sui gruppi fondamentali, indicheremo con $|e|_g$ la somma, al variare di ω in W , del numero di occorrenze di e o \bar{e} nei cicli di lati ridotti che rappresentano la classe di coguglio $g_*(\omega)$. È chiaro che se $g' : R_n \rightarrow G'$ è ottenuto da (g, G) collassando un lato $\{f, \bar{f}\}$ ed $e \in E(G) \setminus \{f, \bar{f}\}$ si ha $|e|_g = |e'|_{g'}$, dove e' è l'immagine di e mediante il collasso. Allora se (g, G) è il grafo marcato ottenuto dal blowup del lato ideale i di una rosa $\rho = (r, R)$, si ha

$$red(i, e) = |e|_g - |i|_g$$

dove continuiamo a chiamare i il lato di G prodotto dal blowup.

Inoltre se consideriamo i cicli di lati ridotti in R che rappresentano gli elementi di W possiamo osservare che $|i|_g$ è pari al numero di volte in cui in essi occorrono coppie di lati orientati consecutivi del tipo e, f con $e \in i$ e $\bar{f} \in i^c$ oppure $e \in i^c$ e $\bar{f} \in i$. Questo risulta chiaro pensando alla costruzione di G con i diagrammi di Venn. Quanto osservato significa che $|e|_g$ e $|i|_g$ sono in realtà quantità che dipendono solo dalla rosa R e dalla sua marcatura, d'ora in avanti le indicheremo quindi semplicemente con $|e|$ e $|g|$. Siano allora i e j lati ideali compatibili di ρ e siano $e \in D(i)$, $f \in D(j)$. La quantità $\|\rho_e^i\|_W - \|\rho_{e,f}^{i,j}\|_W$, che sarebbe la riduttività di (i, e) calcolata a partire da ρ_e^i è quindi pari alla riduttività di (i, e) calcolata a partire da ρ cioè a $red(i, e) = \|\rho\|_W - \|\rho_e^i\|_W$.

Definizione 3.1.4 (Grafo a stella). Per $W \subset C$ e una rosa $\rho = (r, R)$ definiamo il *grafo a stella* $S_W(\rho)$ come il grafo il cui insieme dei nodi è

$E(R)$ e che ha $\forall e, f \in E(R)$ un lato non orientato che congiunge e a \bar{f} per ogni occorrenza di e e f come lati orientati consecutivi nei cicli ridotti che rappresentano $r_*(\omega)$ al variare di $\omega \in W$, dove r_* è l'omomorfismo indotto da r sui gruppi fondamentali.

Osservazione 3.1.5. Per $e \in E(R)$, $|e|$ può essere interpretato come la valenza del nodo del grafo a stella $S_W(\rho)$ che rappresenta e . Possiamo interpretare in termini di grafo a stella anche $|i|$ dove i è un lato ideale di R . Per far questo mappiamo $S_W(\rho)$ nel piano del diagramma di Venn rappresentante $I = \{i, i^c\}$ mandando i nodi del grafo a stella, che sono indicizzati dai lati orientati di R , nei corrispondenti punti del diagramma e facendo sì che ogni lato di $S_W(\rho)$ intersechi la curva chiusa che forma il diagramma al massimo una volta. Bisogna inoltre avere l'accortezza che eventuali punti doppi di questa mappa non giacciono sulla curva chiusa del diagramma di Venn. È chiaro che una mappa del genere esiste e a questo punto $|i|$ è il numero di intersezioni del grafo a stella con la curva chiusa del diagramma di Venn.

Lemma 3.1.6 (Lemma di fattorizzazione). *Siano $\rho = (r, R)$ e $\rho' = (r', R')$ rose di K_n le cui stelle hanno intersezione non vuota, cioè supponiamo ρ' si ottenga da ρ dal blowup di un insieme di coppie compatibili di lati ideali $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ seguito dal collasso di un insieme di lati $O = \{e_1, \dots, e_k\}$. Allora*

$$\|\rho\|_W - \|\rho'\|_W \leq \sum_{\alpha=1}^k \text{red}(i_\alpha)$$

Dimostrazione. Supponiamo esista una permutazione $\sigma \in S_n$ tale che per ogni $\alpha = 1, \dots, k$ si ha $e_\alpha \in D(i_{\sigma(\alpha)})$ o $\bar{e}_\alpha \in D(i_{\sigma(\alpha)})$. A meno di sostituire in O un lato con il complementare possiamo supporre $e_\alpha \in D(i_{\sigma(\alpha)})$, allora

$$\begin{aligned} \|\rho\|_W - \|\rho'\|_W &= \sum_{\alpha=1}^k |e_\alpha| - \sum_{\alpha=1}^k |i_\alpha| = \sum_{\alpha=1}^k (|e_{\sigma(\alpha)}| - |i_{\sigma(\alpha)}|) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^k \text{red}(i_{\sigma(\alpha)}, e_\alpha) \leq \sum_{\alpha=1}^k \text{red}(i_{\sigma(\alpha)}) = \sum_{\alpha=1}^k \text{red}(i_\alpha) \end{aligned}$$

Mostriamo quindi che tale σ esiste. Sia $G = R^I$; considerando lati e lati ideali di R come lati di G , allora sia I che O corrispondono a alberi massimali di G : T_I e T_O . Siano C_1 e Z_1 rispettivamente le 1-catene e gli 1-cicli del complesso di catene di omologia singolare di G . C_1 e Z_1 sono \mathbb{Q} -spazi vettoriali rispetto all'operazione di concatenazione che indicheremo col $+$; l'insieme delle classi dei lati di un albero massimale forma una base per lo spazio quoziente C_1/Z_1 . Ma allora in C_1/Z_1 si ha per ogni $\alpha = 1, \dots, k$

$$[e_\alpha] = \sum_{\beta=1}^k \epsilon_{\alpha\beta} [i_\beta]$$

e la matrice $(\epsilon_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,k}$ è non singolare. I coefficienti di tale matrice possono evidentemente essere soltanto 0, 1 o -1, in particolare $\epsilon_{\alpha\beta}$ è non nullo se e solo se $\{i_\beta, i_\beta^c\}$ è un lato dell'unico cammino ridotto che unisce i due vertici di e_α . Questo equivale a dire che e_α è non nullo se e solo se $e_\alpha \in D(i_\beta)$ o $\bar{e}_\alpha \in D(i_\beta)$, cioè sostanzialmente se e_α era un ciclo di R aperto dal blowup di i_β . Siccome

$$\det(\epsilon_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,k} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \epsilon_{\alpha\sigma(\alpha)} \neq 0$$

deve esistere $\sigma \in S_n$ tale che $\prod_{i=1}^n \epsilon_{\alpha\sigma(\alpha)} \neq 0$ e cioè $\epsilon_{\alpha\sigma(\alpha)} \neq 0$ per ogni α . Ma allora, per ogni α , o e_α o \bar{e}_α sta in $D(i_{\sigma(\alpha)})$ e quindi σ è la permutazione cercata. \square

3.2 Risultati preliminari

Questo paragrafo è dedicato ad alcuni risultati utili per dimostrare la contraibilità dell'Outer Space.

Lemma 3.2.1. *Sia $\rho = (r, R)$ una rosa di K_n . Se i e j sono lati ideali di R non compatibili, dati $e \in D(i)$ e $f \in D(j)$, esistono $g \in \{e, f\}$ e $k \in \{i \cap j, i \cap j^c, i^c \cap j, i^c \cap j^c\}$ tali che*

$$\text{red}(k, g) \geq \min(\text{red}(i, e), \text{red}(j, f))$$

con la disuguaglianza stretta a meno che non valga $\text{red}(i, e) = \text{red}(j, f)$.

Proposizione 3.2.2. *Sia ρ una rosa e siano ρ' e ρ'' rose ottenute da ρ mediante mosse di Whitehead. Supponiamo $\|\rho'\|_W < \|\rho\|_W \geq \|\rho''\|_W$, allora esiste una sequenza di mosse di Whitehead che trasforma ρ' in ρ'' tale che ogni rosa intermedia abbia norma strettamente minore di ρ .*

Dimostrazione. Supponiamo $\rho' = \rho_e^i$ e $\rho'' = \rho_f^j$. Se i e j sono compatibili per l'Osservazione 3.1.3 si ha $\text{red}(i, e) = \|\rho\| - \|\rho_e^i\| = \|\rho_f^j\| - \|\rho_{e,f}^{i,j}\|$ quindi

$$\|\rho_{e,f}^{i,j}\| = \|\rho_f^j\| - \text{red}(i, e) = \|\rho_f^j\| - \|\rho\| + \|\rho_e^i\| < \|\rho\| - \|\rho\| + \|\rho\| = \|\rho\|$$

Ma allora la sequenza di mosse di Whitehead cercata sarà

$$\rho_e^i \xrightarrow{(j,f)} \rho_{e,f}^{i,j} \xrightarrow{(e,i)} \rho_f^j$$

Se invece i e j non sono compatibili siano k e g i lati dati dal Lemma precedente (con le stesse notazioni). Se $g = e$, siccome $k \subset i$ o $k \subset i^c$, $\|\rho_e^k\| <$

$\|\rho_e^i\| < \|\rho\|$. Inoltre k e j sono compatibili perchè $k \subset j$ o $k \subset j^c$, quindi con un ragionamento analogo a quello di prima si mostra che $\|\rho_{e,f}^{k,j}\| < \|\rho\|$ e la sequenza cercata è $\rho_e^i \rightarrow \rho_e^k \rightarrow \rho_{e,f}^{k,j} \rightarrow \rho_f^j$. Se invece $g = f$, $\|\rho_f^k\| < \|\rho_f^j\| \leq \|\rho\|$ e siccome i e k sono compatibili, si verifica come sopra che $\|\rho_{e,f}^{i,k}\| < \|\rho\|$ quindi la sequenza di mosse di Whitehead è $\rho_e^i \rightarrow \rho_{e,f}^{i,k} \rightarrow \rho_f^k \rightarrow \rho_f^j$. \square

Proposizione 3.2.3. *Siano ρ e ρ' rose con $\|\rho\|_W$ minimale. Allora esiste una sequenza di rose $\rho = \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m = \rho'$ tale che per ogni $i = 1, \dots, m$ ρ_i è ottenuta da ρ_{i-1} mediante mosse di Whitehead e tali che per un certo $k \in \{0, 1, \dots, m\}$*

$$\|\rho_0\|_W = \|\rho_1\|_W = \dots = \|\rho_k\|_W < \|\rho_{k+1}\|_W < \dots < \|\rho_m\|_W$$

Dimostrazione. Si consideri una sequenza di mosse di Whitehead che porta da ρ a ρ' . Applicando ripetutamente la proposizione precedente si ottiene la tesi. \square

Corollario 3.2.4. *Sia $\rho = (r, R)$ una rosa, se $\|\rho\|_W$ non è minimale allora R ha un lato strettamente riduttivo*

Dimostrazione. Applicando la proposizione precedente a ρ e una rosa ρ_0 che minimizzi la norma si troverà una sequenza $\rho_0, \dots, \rho_{m-1}, \rho_m = \rho$, in cui ogni rosa è ottenuta dalla precedente mediante una mossa di Whitehead, per la quale necessariamente varrà:

$$\|\rho_0\|_W = \dots \leq \|\rho_{m-1}\|_W < \|\rho\|_W$$

Il cammino di lati di K_n inverso a una mossa di Whitehead è ancora una mossa di Whitehead. Supponiamo allora $\rho_{m-1} = \rho_e^i$, allora i è un lato ideale riduttivo perchè $red(i) \geq red(i, e) = \|\rho\|_W - \|\rho_e^i\|_W > 0$ \square

Siamo in realtà in grado di provare un risultato più forte:

Teorema 3.2.5 (Teorema di esistenza). *Sia $\rho = (r, R)$ una rosa che non minimizzi la norma e sia I un (eventualmente vuoto) insieme completo di lati ideali zero-riduttivi, allora esiste un lato ideale strettamente riduttivo di R compatibile con tutti i lati ideali di I .*

Dimostrazione. Sia j un lato ideale di R strettamente riduttivo compatibile con il massimo numero possibile di lati ideali in I . Supponiamo per assurdo esista $i \in I$ con il quale j non sia compatibile, allora per il Lemma 3.2.1 uno dei seguenti lati ideali sarà strettamente riduttivo: $j \cap i, j^c \cap i, j \cap i^c, j^c \cap i^c$. Ognuno di questi però è compatibile con i e con tutti i lati ideali con cui è compatibile j il che contraddice l'ipotesi di massimalità su j . \square

Continuiamo a lavorare con una rosa marcata $\rho = (r, R)$ e con un sottoinsieme $W \subset C$. Fissiamo inoltre un insieme completo di lati ideali zero-riduttivi I .

Definizione 3.2.6 (Proprietà di minimax). Diremo che un lato ideale di R ha la *proprietà di minimax* rispetto ad I se è compatibile con ogni lato ideale di I , ha riduttività massima tra i lati ideali di R compatibili con tutti i lati di I e non ha sottoinsiemi propri con queste stesse caratteristiche ed è quindi in questo senso minimale.

Osservazione 3.2.7. Un lato ideale con la proprietà del minimax rispetto ad un insieme di lati zero-riduttivi I è strettamente riduttivo per il Teorema di esistenza.

Definizione 3.2.8 (Outer slices). Sia i un lato ideale di R con la proprietà di minimax rispetto a I e sia $e \in i$ un lato che realizzi la riduttività, cioè tale che $red(i, e) = red(i)$. Se j è un lato ideale di R non compatibile con i , considerando se necessario al posto di j il suo complementare, possiamo supporre $e \in j$. Si dicono *outer slices* di j su i i due lati ideali $i \cap j^c$ e $i^c \cap j^c$.

Lemma 3.2.9. Sia I un insieme completo di lati ideali zero-riduttivi. Siano i un lato ideale di R con la proprietà di minimax rispetto ad I e $e \in i$ tale che $\bar{e} \in i^c$ e $red(i) = red(i, e)$. Se j è un lato ideale compatibile con I ma non compatibile con i , allora una delle due outer slices j' di j su i è tale che

$$red(j') \geq red(j)$$

3.3 Contraibilità dell'Outer space

Per dimostrare la contraibilità di K_n , e di conseguenza dell'Outer space, proveremo la contraibilità di un suo retratto per deformazione:

$$K_{min} = \bigcup_{\|\rho\| \text{ minimale}} st(\rho)$$

In particolare vedremo che, per una certa scelta di W , K_{min} è la stella di una sola rosa.

Fissato W , sia $<$ un ordine totale sulle rose di K_n che rispetti la norma $\|\cdot\|_W$, che indicheremo semplicemente con $\|\cdot\|$, cioè tale che se $\|\rho\| < \|\rho'\|$ allora $\rho < \rho'$.

Notazione 3.3.1. Sia ρ una rosa di K_n , definiamo

$$K_{\leq \rho} = \bigcup_{\rho' \leq \rho} st(\rho') \quad \text{e} \quad K_{< \rho} = \bigcup_{\rho' < \rho} st(\rho')$$

Definizione 3.3.2 (Stella superiore e link superiore). Sia v un vertice di K_n , chiameremo *stella superiore* di v il sottocomplesso $st_+(v)$ della stella di v generato da vertici che sono grafi di livello maggiore o uguale al livello di v . Analogamente diremo *link superiore* di v il sottocomplesso $lk_+(v)$ del link di v generato da vertici con livello maggiore o uguale a v . Definiamo anche la stella superiore di un sottocomplesso L di K_n , $st_+(L)$, come l'unione delle stelle superiori di tutti i vertici di L .

Osservazione 3.3.3. Si può considerare la stella di una rosa $\rho = (r, R)$ come la realizzazione geometrica dell'insieme parzialmente ordinato (rispetto all'inclusione) dei lati ideali di ρ . Sia I un insieme completo di lati ideali di ρ e $v = \rho^I = (r^I, R^I)$ il vertice di K_n ad esso corrispondente, allora $st_+(v)$ è la realizzazione geometrica dell'insieme parzialmente ordinato di tutti gli insiemi completi di lati ideali J che contengono I .

Definizione 3.3.4. Sia ρ una rosa di K_n , I un lato ideale di ρ e $v = \rho^I$, definiamo i seguenti sottocomplessi di $st_+(v)$:

$$R(I) = \{J \supset I : J \text{ è completo e con un lato ideale riduttivo}\}$$

$$S(I) = \{J \supset I : J \text{ è completo e con un lato ideale strettamente riduttivo}\}$$

$$TR(I) = \{J \supset I : J \text{ è completo con solo lati ideali riduttivi}\}$$

$$TS(I) = \{J \supset I : J \text{ è completo, è formato soltanto da lati ideali riduttivi e
ne contiene uno strettamente riduttivo}\}$$

Definiamo i sottocomplessi di $st_+(v)$ $R(v)$, $S(v)$, $TR(v)$ e $TS(v)$ come la realizzazione geometrica rispettivamente di $R(I)$, $S(I)$, $TR(I)$ e $TS(I)$.

Lemma 3.3.5. *Sia P un insieme parzialmente ordinato e $f : P \rightarrow P$ tale che $p \leq f(p)$ per ogni $p \in P$. Allora f induce una retrazione per deformazione dalla realizzazione geometrica di P alla realizzazione geometrica di $f(P)$.*

Lemma 3.3.6. *Sia I un insieme completo di lati ideali zero-riduttivi della rosa ρ e sia $v = \rho^I$, allora $TS(v)$ è contraibile.*

Dimostrazione. Per il Teorema 3.2.5 esiste un lato ideale strettamente riduttivo compatibile con ogni lato ideale di I , in particolare sia m con la proprietà del minimax. L'obiettivo è collassare $TS(v)$ al suo vertice rappresentato da $I \cup \{m, m^c\}$. Per ogni sottocomplesso L di $st(v)$ definiamo $C(L, m)$ come l'insieme dei lati ideali j di ρ che non sono compatibili con m e tali che $j \in J$ per un certo vertice ρ^J di L . Definiamo poi la *complessità* $c(L)$ essere la cardinalità di $C(L, m)$.

Affermazione. Sia L' un sottocomplesso di $TS(v)$ con $c(L') = 0$ tale che $st_+(L') \cap TS(v) \subset L'$ e $I \cup \{m, m^c\} \in L'$. Allora L' è contraibile.

Dimostrazione. Vogliamo applicare il Lemma 3.3.5 alla mappa f che manda un vertice J di L' in $J \cup I \cup \{m, m^c\}$. Siccome L' ha complessità nulla, m è compatibile con tutti i lati ideali di un qualsiasi suo vertice J quindi $f(J)$ sta ancora in $ST(v)$. In particolare $f(J) = J \cup I \cup \{m, m^c\} \in st_+(J) \subset st_+(L')$, ma per ipotesi $st_+(L') \cap TS(v) \subset L'$ quindi l'immagine di f è contenuta in L' . Siccome $J \subset f(J)$ il Lemma afferma che L' ammette come retratto per deformazione la sua immagine. Si osservi che ogni vertice in $f(L')$ contiene $I \cup \{m, m^c\}$, inoltre, siccome per ipotesi $I \cup \{m, m^c\} \in L'$, $I \cup \{m, m^c\}$ è anche un vertice di $f(L')$. Allora lo stesso Lemma ci fornisce una retrazione per deformazione di $f(L')$ a $I \cup \{m, m^c\}$ indotta dalla mappa che manda tutti i vertici in $I \cup \{m, m^c\}$.

Se $c(TS(v)) = 0$ l'affermazione precedente ci permette di concludere. Supponiamo $c(TS(v)) > 0$. L'obiettivo è trovare un sottocomplesso L' di $TS(v)$ che sia suo retratto per deformazione e tale che $st_+(L') \cap TS(v) \subset L'$, $I \cup \{m, m^c\} \in L'$ e $c(L') < c(TS(v))$. Si potrà allora ripetere l'operazione riducendo la complessità ad ogni passo e arrivando quindi ad un sottocomplesso con complessità nulla che può essere retratto a $I \cup \{m, m^c\}$ il che porta alla tesi del Lemma.

Scegliamo $e \in D(m)$ tale che $red(m, e) = red(m)$. Orientiamo ogni lato ideale i in modo tale che $e \in i$. Sia $C' \subset C(TS(v), m)$ l'insieme dei lati ideali $i \in C(TS(v), m)$ che minimizzano la cardinalità di $m \cap i^c$. Scegliamo poi $a \in C'$ che abbia cardinalità massimale, cioè tale che $|a| \geq |c'| \forall c' \in C'$. Per il Lemma 3.2.9 uno dei due lati ideali $a \cup m^c$ e $a \cup m$ ha riduttività maggiore a quella di a , infatti $red(a \cup m^c) = red(a^c \cap m)$ e analogamente $red(a \cup m) = red(a^c \cap m^c)$. Chiamiamo a_0 tale lato ideale. Consideriamo la mappa g da $TS(v)$ in se stesso che manda un vertice J in $J \cup \{a_0^c, a_0\}$ se $a \in J$ e che fissa gli altri vertici.

Dobbiamo mostrare che l'immagine di g è un sottoinsieme di $TS(v)$ e cioè che a_0 è compatibile con ogni vertice J che contenga a . Fissiamo quindi $J \ni a$ e sia $b \in J$; b è compatibile con a , supponiamo però non sia compatibile con a_0 . Siccome $e \in a \cap b \neq \emptyset$ e $\bar{e} \in a^c \cap b^c \neq \emptyset$ per compatibilità deve valere $a \subset b$ o $b \subset a$. Se b fosse contenuto in a sarebbe compatibile con a_0 quindi necessariamente $a \subset b$. Siccome abbiamo supposto b non sia compatibile con a_0 si ha anche che b non è compatibile con m perchè a_0 contiene m o m^c . Ma siccome $a \subset b$ si avrebbe che b non è compatibile con m e $|m \cap b^c| \leq |m \cap a^c|$. Dato che $a \in C'$ vale però anche $|m \cap b^c| \geq |m \cap a^c|$ quindi si avrebbe $|m \cap b^c| = |m \cap a^c|$ e cioè $b \in C'$. Questo contraddice la massimalità di a perchè $a \subset b$ quindi abbiamo raggiunto un assurdo e necessariamente b è

compatibile con a_0 il che prova la buona posizione della mappa.

Per il Lemma 3.3.5 g induce una retrazione di $TS(v)$ ad un suo sottocomplesso che si può ulteriormente retrarre ad un sottocomplesso L' , grazie allo stesso risultato, mediante la mappa che manda un vertice J in se stesso se $a \notin J$ e J in $J \setminus \{a, a^c\}$ altrimenti. La buona posizione deriva dal fatto che il dominio di questa nuova mappa è l'immagine di g . Vale ora $C(L', m) = C(TS(v), m) \setminus \{a, a^c\}$ cioè L' ha complessità strettamente minore di $TS(v)$.

Questo procedimento può essere replicato su L' e così via fino ad ottenere un sottocomplesso con complessità nulla il che completa la prova della contraibilità di $TS(v)$. \square

Corollario 3.3.7. *Sia I un insieme completo di lati ideali zero-riduttivi della rosa ρ e sia $v = \rho^I$, allora $S(v)$ è contraibile.*

Dimostrazione. La mappa $S(I) \rightarrow TS(I)$ che manda un elemento J nel suo sottoinsieme costituito dai lati ideali riduttivi soddisfa le ipotesi del Lemma 3.3.5 quindi induce una retrazione per deformazione da $S(v)$ in $TS(v)$ che per il Lemma precedente è contraibile. \square

Lemma 3.3.8. *Sia I un insieme completo di lati ideali zero-riduttivi della rosa ρ e sia $v = \rho^I$. Sia L un sottocomplesso di $R(v)$ tale che*

i) L contiene $S(v)$

ii) $L = \bigcup_{w \in L \cap TR(v)} st_+(w)$

Allora L è contraibile

Dimostrazione. Definiamo

$$d(L) = \max_{w \in (L - S(v)) \cap TR(v)} \{\dim st_+(w)\}$$

La dimostrazione procede per induzione su $d(L)$.

Per il passo base dimostriamo che se $d(L) = 0$ allora necessariamente $L = S(v)$ ed è quindi contraibile per il Corollario 3.3.7. Per ipotesi $S(v) \subset L$, per mostrare l'altra inclusione prendiamo $w \in L$. Per l'ipotesi ii) $w \in st_+(w')$ per un certo $w' = \rho^J$ con J costituito da lati ideali tutti riduttivi. Se tutti i lati ideali di J sono zero-riduttivi per il Teorema 3.2.5 esiste un lato ideale k strettamente riduttivo compatibile con tutti i lati ideali di J . Ma allora $J \cup \{k, k^c\}$ è un insieme completo di lati ideali che rappresenta un vertice di $st_+(w')$ e in particolare di $lk_+(w')$ quindi necessariamente $\dim(st_+(w')) \geq 1$

il che contraddice l'assunzione $d(L) = 0$ perchè w era un generico punto di $L \setminus S(v)$. Quindi J deve contenere un lato ideale strettamente riduttivo e cioè $w' = \rho^J \in S(v)$. Allora, siccome $w \in st_+(w')$, anche $w \in S(v)$.

Supponiamo ora $d(L) = k > 0$. Sia L' l'unione di $S(v)$ e delle stelle superiori dei vertici $w \in TR(v)$ tali che $\dim st_+(w) < d(L)$. L' soddisfa banalmente l'ipotesi i), mostriamo che soddisfa anche la ii), cioè facciamo vedere che $L' = \bigcup_{w \in L' \cap TR(v)} st_+(w)$. Sia $u \in L'$, se, secondo la definizione di

L' , u è nella stella di un certo $w \in TR(v)$ tale che $\dim st_+(w) < d(L)$ allora in particolare è banalmente vero che $u \in \bigcup_{w \in L' \cap TR(v)} st_+(w)$, se invece $u \in S(v)$

allora $u = \rho^J$ con J che contiene un lato strettamente riduttivo. Siccome L soddisfa la proprietà ii) esiste $w' \in L \cap TR(v)$ tale che $u \in st_+(w')$, se $w' = \rho^{J'}$ allora u starà anche nel vertice w rappresentato da J' unito ad un lato strettamente riduttivo di J , ma a questo punto $w \in TR(v) \cap S(v) \subseteq TR(v) \cap L'$. Questo dimostra che $L' \subseteq \bigcup_{w \in L' \cap TR(v)} st_+(w)$. Viceversa, sia

$u \in st_+(w)$ con $w \in L' \cap TR(v)$. Dobbiamo mostrare che $u \in L'$. Se $\dim st_+(w) < d(L)$ questo è ovviamente vero, se $w \in S(v)$ allora anche $u \in S(v) \subseteq L'$. Se invece $w \in st_+(w')$ con $w' \in L' \cap TR(v)$ tale che $\dim st_+(w') < d(L)$ allora $u \in st_+(w) \subseteq st_+(w') \subseteq L'$. Quindi L' soddisfa le ipotesi i) e ii). Infine $d(L') < d(L)$ perchè se $w \in (L' \setminus S(v)) \cap TR(v)$ allora $w \in st_+(w')$ per un certo w' con $\dim st_+(w') < d(L)$ e quindi, siccome $st_+(w) \subseteq st_+(w')$ anche $\dim st_+(w) < d(L)$. Ma allora possiamo applicare l'ipotesi induttiva e L' è contraibile.

Se $w \in L \setminus L'$ si ha $\dim st_+(w) = d(L)$ e la stella di w in L coincide con la stella superiore, se esistesse $u \in st(w) \setminus st_+(w)$ infatti si avrebbe $u \in (L \setminus S(v)) \cap TR(v)$ e $\dim st_+(u) > d(L)$ il che è assurdo. Per ogni coppia di vertici $w, w' \in L \setminus L'$ si ha allora $st_+(w) \cap st_+(w') \subset L'$ perchè se esistesse $u \in st_+(w) \cap st_+(w') \cap (L \setminus L')$ la sua stella comprenderebbe w e w' che non starebbero però nella sua stella superiore contraddicendo quanto appena affermato. Allora possiamo pensare a L come all'unione di L' e le stelle (in L), o equivalentemente stelle superiori, dei vertici di $L \setminus L'$. Per dimostrare che L è contraibile basta quindi mostrare che $st_+(w) \cap L'$ è contraibile per un qualsiasi $w \in L \setminus L'$.

Siccome $S(v) \subset L'$ se $w \in L \setminus L'$ è riduttivo allora è necessariamente zero-riduttivo. Vogliamo allora applicare nuovamente l'ipotesi induttiva: $S(w) \subset st_+(w) \cap L'$ quindi il punto i) è soddisfatto. $L' \cap st_+(w)$ è l'unione delle stelle superiori dei vertici $u \in st_+(w) \cap L'$ che sono contenuti in $TR(v)$ e quindi anche in $TR(w)$ e cioè è soddisfatta anche ii) quindi, siccome $d(st_+(w) \cap L') <$

$d(L)$, $st_+(w) \cap L'$ è contraibile. □

Teorema 3.3.9. K_{min} è un retratto per deformazione di K_n

Dimostrazione. Facciamo vedere che, per ogni rosa ρ , $K_{\leq \rho}$ si retrae per deformazione a K_{min} . Mostriamo allora che per una qualsiasi rosa ρ la cui norma non sia minimale $K_{\leq \rho} = st(\rho) \cup K_{< \rho}$ ammette K_{min} come retratto per deformazione. Procediamo per induzione: se ρ è, nell'ordine fissato, la prima rosa con norma non minimale si ha $K_{< \rho} = K_{min}$, quindi la tesi è banalmente verificata per l'ultima rosa con norma minimale. Supponiamo K_{min} sia retratto per deformazione di $K_{< \rho}$ per una certa ρ , allora, siccome $st(\rho)$ è contraibile, per mostrare che $K_{\leq \rho} = st(\rho) \cup K_{< \rho}$ si ritrae a K_{min} basta provare che $L = st(\rho) \cap K_{< \rho}$ è contraibile. Si osservi che il teorema di esistenza di un lato riduttivo garantisce innanzi tutto che L è non vuoto. Mostriamo che soddisfa le ipotesi del Lemma 3.3.8 prendendo $I = \emptyset$. L'ipotesi i) è soddisfatta perchè un vertice $v = \rho^J$ sta in $S(v)$ se e solo se J contiene un lato ideale j strettamente riduttivo che sta allora nella stella di una qualsiasi rosa ottenuta da ρ mediante una mossa di Whitehead che coinvolga $\{j, j^c\}$ la quale ha norma minore di ρ . Mostriamo ora che L soddisfa la condizione ii): sia $v = \rho^J$ un qualsiasi vertice di L , dobbiamo trovare un vertice $v' = \rho^{J'}$ di L che sia composto solo da lati ideali riduttivi tale che $v \in st_+(v')$, cioè tale che $J' \subseteq J$. Siccome $v \in st(\rho) \cap st(\rho')$ per una certa rosa ρ' con $\|\rho'\| < \|\rho\|$, il Lemma di fattorizzazione 3.1.6 garantisce che esistono lati di J con riduttività non negativa. Definiamo allora J' come l'insieme dei lati riduttivi di J . □

Per concludere che K_n è contraibile basta quindi mostrare che lo è K_{min} , in particolare mostriamo che, per una particolare scelta di $W \subset C$, K_{min} è la stella di una sola rosa.

Definizione 3.3.10. Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ la base di F_n corrispondente ai petali della rosa R_n , definiamo

$$W_0 = \{x_i\}_{i=1}^n \cup \{x_i x_j\}_{i < j} \cup \{x_i x_j^{-1}\}_{i < j}$$

Osservazione 3.3.11. Il grafo a stella $S_{W_0}(\rho_0)$, dove $\rho = (id, R_n)$ è la rosa standard, è il grafo completo su $2n$ nodi, cioè il grafo con $2n$ nodi in cui ogni coppia di nodi è collegata da un lato.

La seguente proposizione garantisce che, per $W = W_0$, K_{min} è la stella di una sola rosa. Questo conclude la prova della contraibilità di K_n e quindi dell'Outer Space.

Proposizione 3.3.12. *Per una qualsiasi rosa ρ , $\|\rho\|_{W_0} \leq n(2n - 1)$ e l'uguaglianza è raggiunta soltanto dalla rosa standard ρ_0 .*

Dimostrazione. La norma di ρ_0 è la somma sulle parole $\omega \in W_0$ del numero di petali cui corrisponde ω in R_n e quindi

$$\|\rho_0\|_{W_0} = n + n(n - 1) + n(n - 1) = n(2n - 1)$$

Mostriamo ora che ρ_0 non ha lati ideali riduttivi. Sia i un lato ideale di ρ_0 , consideriamo il diagramma di Venn ad esso corrispondente sovrapposto al grafo a stella $S_{W_0}(\rho_0)$, come da Osservazione 3.1.5. Se i ha cardinalità k la curva chiusa che lo rappresenta interseca il grafo a stella $k(2n - k)$ volte, cioè $|i| = k(2n - k)$. Per un qualsiasi lato $e \in E(R_n)$, $|e|$ è il numero di volte in cui e o \bar{e} occorre nelle parole di W_0 e quindi per ogni lato vale $|e| = 1 + n - 1 + n - 1 = 2n - 1$. Quindi $\forall e \in D(i)$

$$\text{red}(i, e) = |e| - |i| = (2n - 1) - k(2n - k) = (k - 1)(k - (2n - 1))$$

Siccome i è un lato ideale $1 < k < 2n - 1$ e cioè $\forall e \in D(i)$ $\text{red}(i, e) < 0$. Quindi ρ_0 non ha lati riduttivi, in particolare non ha lati strettamente riduttivi quindi per il Corollario 3.2.4 deve avere norma minimale. Infine, siccome ρ_0 non ha lati zero-riduttivi, per la Proposizione 3.2.3 non possono esistere altre rose con la sua stessa norma e cioè ρ_0 è l'unica rosa che minimizza la norma. \square

Bibliografia

- [1] Marc Culler e Karen Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1):91-119, 1986.
- [2] Karen Vogtmann. Automorphisms of free group and outer space. *Geom. Dedicata*, 94:1-31, 2002.
- [3] Karen Vogtmann. The cohomology of automorphism groups of free groups. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006)*, 2006.
- [4] Karen Vogtmann. Contractibility of Outer Space: reprise. *ArXiv1505.02610v1*, 2015.
- [5] Allen Hatcher. Algebraic Topology. *Cambridge University Press*, 2002.
- [6] Roger Alperin e Hymann Bass, Length functions of group actions on Λ -trees, Combinatorial group theory and topology. *Ann. of Math. Stud.*, 111, *Princeton Univ. Press*, 1987.
- [7] Marc Culler e John W. Morgan. Group action on \mathbb{R} -trees. *Proc. London Math Soc.*, 55(3):571-604, 1987.
- [8] Karen Vogtmann. What is... outer space? *Notices Amer. Math. Soc.*, 55(7):784-786, 2008.
- [9] John Henry Constantine Whitehead. On equivalent sets of elements in a free group. *Ann. Math.*, 37:782-800, 1936.