ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Curriculum Didattico

LA PERCEZIONE DELLE DIFFICOLTÀ IN ALGEBRA

Tesi di Laurea in Didattica Matematica ed Algebra

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Barnabei Marilena

Co-Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bolondi Giorgio

Presentata da:
Gloria Teggi

Sessione unica
Anno Accademico 2017-2018

Ad Agnese, Franco, Grazia e Marco

Indice

Capitolo 1

L'Algebra e l'uomo

1.1 Introduzione

Nell'esperienza quotidiana possiamo sperimentare che esistono alcune attività che la nostra mente compie spontaneamente per prendere coscienza di ciò che la circonda ed operare in essa, ad esempio completare la lettura di una parola data senza fissarsi su ogni singola lettera, ultimare tratti di linee ed immaginare una figura piana... Non sempre queste intuizioni, però, portano ad una soluzione corretta ma ne possono fornire una che in realtà è un'illusione. Sottoponendo, infatti, l'immagine seguente ad un candidato, questo, probabilmente, risponderà che non vede solo tre cerchi a cui mancano settori circolari e tre angoli, ma che ci sono due triangoli.

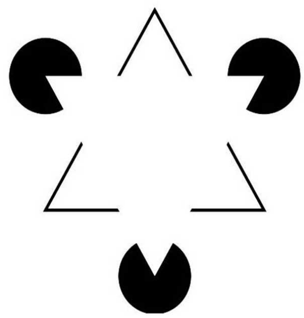


Figura 1.1: Cosa vedi?

Egli infatti è portato spontaneamente a completare le parti mancanti della figura anche se queste non esistono. Mi sono allora chiesta se anche in campo matematico esistono attività spontanee, se è possibile incrementarle e fino a che punto è bene fidarsi di queste per arrivare ad una soluzione corretta del problema.
Per rispondere al primo interrogativo mi sono basata su alcuni studi che dimostrano, per esempio, che a colpo d'occhio, l'uomo riesce a contare solamente tre oggetti, non di più e che per farlo ha bisogno di operazione più complicate.
Per quanto riguarda il secondo quesito un altro studio pubblicato sulla rivista Nature Neuroscience (17 Agosto 2014) rivela che i meccanismi neurali per l'apprendimento e lo sviluppo delle

strategie risolutive matematiche avrebbero sede nell'ippocampo, una parte del cervello che ha un ruolo fondamentale per la memoria a lungo termine. Un gruppo di neuroscienziati dell' Università di Stanford, California, ha sottoposto una serie di problemi con addizioni ad una cifra a 28 bambini di 7-9 anni, a 20 ragazzi di 14-17 anni e a 20 giovani adulti. I bambini hanno affrontato i calcoli contando con le dita, mentre ragazzi e adulti sono ricorsi a veloci strategie più astratte. Per capire come avvenga questo passaggio, di incremento di abilità, nell'approccio con l'aritmetica, i ricercatori hanno proposto lo stesso tipo di calcoli agli stessi bambini in due successivi esperimenti, condotti a distanza di un anno. Nel secondo test, i giovani volontari hanno riportato evidenti progressi, mostrando un graduale passaggio dai calcoli in punta di dita a quelli a mente: durante la prova infatti, hanno mosso meno le mani e le labbra. La chiave delle aumentate abilità matematiche sarebbe la coordinazione dei segnali provenienti dall'ippocampo con quelli di altre aree cerebrali, come la neocorteccia, che interviene nell'immagazzinamento di ricordi a lungo termine. I bambini con connessioni più forti tra ippocampo e neocorteccia sarebbero anche quelli più rapidi nel risolvere a mente i problemi matematici. Il "vedere" nella propria mente i numeri e l'astrazione di essi, porta ad una risoluzione più agevole dei calcoli. Non solo, con l'aumento dell'età e dello sviluppo del pensiero astratto è possibile introdurre anche nuove materie come l'Algebra.

Per rispondere al terzo quesito ho constatato che più aumenta l'astrazione e con essa la difficoltà della materia più la nostra mente sarà meno portata ad una risoluzione spontanea e visiva del problema posto. A volte, proprio come in un'illusione ottica, pensiamo di poter risolvere un problema in un modo (esistono due triangoli nell'illusione iniziale) ma in realtà ci allontaniamo dalla vera essenza del problema (non ci sono triangoli). È in questi casi che nasce l'errore: da una sbagliata interpretazione del quesito. L'errore non deve essere motivo di rimprovero, ma un'occasione per vedere l'argomento dalla giusta prospettiva ed eliminare l'illusione una volta per tutte. Uno dei modi per iniziare a diminuire le occasioni di errore è chiedersi da dove esso scaturisca. La fonte primaria è costituita dalle difficoltà che la materia comporta. Il docente deve cercare di studiare il rapporto tra studente e difficoltà. Il primo stadio di questa relazione è la percezione che gli studenti hanno delle difficoltà. Una percezione esagerata della difficoltà bloccherà il ragazzo a priori, mentre una sua sottostima potrebbe non condurre alla soluzione giusta. La presente tesi vuole indagare proprio la percezione che gli studenti hanno delle difficoltà in ambito algebrico, così da poterli aiutare meglio a comprendere la materia. Per iniziare riprendiamo due aspetti dell'Algebra: un po' di storia per capire in quale contesto sia nata e le tradizionali difficoltà che essa comporta.

1.2 Un po' di storia

Al tempo in cui l'Algebra iniziò a muovere i suoi primi passi sostanziali, i grandi matematici greci erano stati sommersi da secoli di guerre e vicende storiche, che avevano reso il mondo antico sottomesso agli Arabi. Durante il primo secolo di vita dell'impero musulmano, dal 650 al 750 d.C. non si arrivò a grandi conquiste matematiche.
Nella seconda metà dell'VIII secolo vi fu un risveglio culturale, che tra le altre cose permise di non perdere una buona parte della matematica antica. A Bagdad vennero raccolti scienziati e filosofi dalla Siria, dall'Iran e dalla Mesopotamia e la città diventò ben presto una "nuova Alessandria" di cui si ricorda in particolare la mitica biblioteca e il museo. In questo periodo si tradusse una parte degli Elementi di Euclide. Si narra che al califfo mecenate al-Mamun apparve in sogno Aristotele e che avesse così deciso di far tradurre in arabo tutte le opere greche. In base a speciali trattati si ottennero manoscritti greci dall'Impero bizantino con il quale gli arabi erano sempre in conflitto. Proprio a Bagdad, al-Mamun fondò una "Casa del Sapere" paragonabile al museo di Alessandria.
Tra i suoi membri vi era un astronomo e matematico: al-Khuwarizmi, il quale scrisse, in particolare, due opere di aritmetica e di algebra che svolsero un ruolo molto importante nella storia della matematica. Una di queste (pervenutaci solo in copia latina) "De numero indorum" presentava un'esposizione completa del sistema di numerazione indiano, probabilmente a causa di questo libro si è diffusa l'errata convinzione che il nostro sistema sia di origine araba.
Quando, poi, in Europa cominciarono ad apparire traduzioni (poco accurate) dell'opera, all'autore vennero attribuito sia il libro che il contenuto, ma al-Khuwarizmi non aveva vantato nessuna pretesa di originalità sul sistema. Ma la nuova notazione si diffuse e anche il nome dell'autore al-Khuwarizmi, tradotto dai latini poco precisamente, diventò algorismi ed iniziò ad indicare lo schema di numerazione che usava le cifre indiane, e che oggi più in generale indica una regola di procedimento o di operazioni. Ma non solo ad al-Khuwarizmi si deve anche il termine Algebra. La sua opera più importante è stata "Al-jabr wa'l muqabalah" che tratta di un algebra retorica, in cui anche i numeri erano scritti in lettere piuttosto che in simboli. Nonostante questo l'opera si avvicina all'Algebra elementare moderna. Presenta un'esposizione piana ed elementare delle equazioni, soprattutto di secondo grado, con buone argomentazioni. I termini del titolo dell'opera non sono chiari ma siccome al-Khuwarizmi scriveva che al-Mamun gli aveva chiesto: "Di comporre una breve opera sul calcolo delle regole di completamento e riduzione, limitandosi agli aspetti più facili e utili della matematica di cui ci si serve costantemente nei casi di eredità, donazioni, distruzioni, sentenze, commerci, misurazioni di terreni, scavi di canali, calcoli geometrici ed altre cose del genere" allora la parola Al-jabr fu tradotta con qualcosa di simile a restaurazione o completamento e sembra riferita alla trasposizione dei termini sottratti da un membro all'altro dell'equazione. La parola muqabalah si ritiene riferita alla riduzione o equilibrio cioè alla cancellazione di termini simili che compaiono in entrambi i membri di un'equazione.
E' interessante constatare che nel "Don Chisciotte" si usa il termine algebrista in riferimento a un guaritore in grado di sistemare o restaurare dislocazioni delle ossa.
La traduzione latina de "Al-jabr wa'l muqabalah" si apre con un capitolo sul valore posizionale dei numeri, per poi passare a trattare in sei capitoli la soluzione dei sei tipi di equazioni formate da tre specie di quantità: radici, quadrati e numeri (x, x^2, numeri). Per esempio nel primo

capitolo si parla dell'equazione con quadrati uguali a radici: $x^2 = 7x$. La radice $x = 0$ ancora non veniva riconosciuta, ma si parla del discriminante positivo. Le soluzioni in realtà sono ricette da seguire per giungere alla soluzione. L'autore esaurisce i casi di equazioni di primo grado e quelli di secondo grado con una radice positiva. La fonte degli arabi non è ancora certa ma il carattere arbitrario delle regole richiama l'antica matematica babilonese e la matematica indiana medievale, la presenza dell'Algebra retorica predilige però la fonte babilonese. Nei capitoli successivi al-Khuwarizmi cerca di dimostrare geometricamente le affermazioni date, il che fa pensare più ad un'ispirazione greca. Probabilmente gli arabi attinsero sia dagli indiani, che dai greci che dai mesopotamici. Vi sono anche regole per sviluppare espressioni binomiali come per esempio i prodotti e problemi svolti, ricordiamo poi sempre che gli arabi non ammettevano radici negative e grandezze negative.
All'Algebra di al-Khuwarizmi ne seguì una di Omar Khayyam che includeva equazioni di terzo grado generali, ritenendo, erroneamente, che fossero di impossibile soluzione aritmetica quindi ne dava solo soluzioni geometriche. Nella sua Algebra Khayyam esponeva una regola per la quarta, quinta, sesta e anche oltre, potenza del binomio, ma tale opera non ci è pervenuta. La matematica degli arabi ha apportato contributi fondamentali alla matematica che conosciamo.

Fibonacci, mercante e matematico pisano, venuto in contatto con la cultura araba e avendo studiato a fondo l'opera di al-Khuwarizmi (che comunque non considerava ancora lo zero), nel 1202 scrisse "Liber Abaci", in cui spiegava il nuovo metodo di calcolo appreso, che assegnava un valore diverso ad uno stesso numero in relazione alla posizione che questo assumeva. In più si parlava per la prima volta dello zephirum, il nuovo segno grafico dello zero che entrava a far parte della nostra numerazione simboleggiando il concetto di vuoto, che successivamente divenne zefiro, zefro, zero. Il fatto che lo zero ricordi il nome di un vento, dà l'idea di come l'uomo abbia fatto fatica ad accettarlo. "Liber Abaci" diffuse in Europa l'Algebra araba.

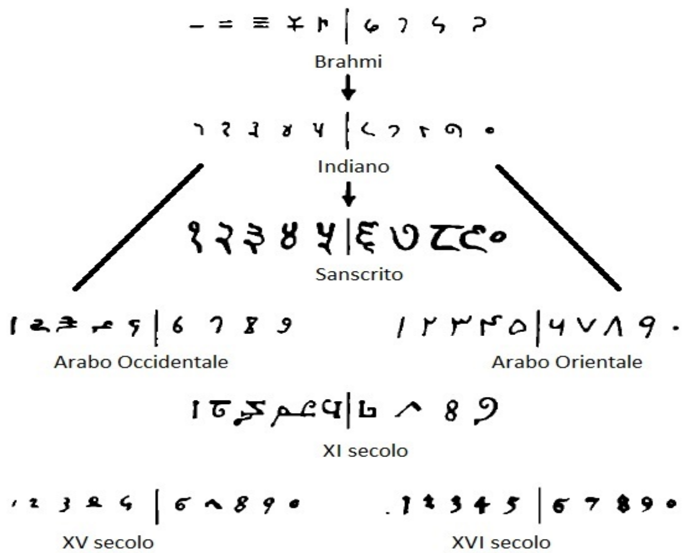


Figura 1.2: Evoluzione delle cifre

1.3 Le difficoltà in matematica in particolare in Algebra

La matematica in generale è una materia che per sua natura comporta delle difficoltà. Ricordare argomenti svolti anche parecchi anni prima, non poter ragionare a compartimenti ma dover fare dei collegamenti, il fatto che la matematica è una materia che si costruisce nel corso degli anni, dover ritrovare schemi già visti in nuove strutture, sono tra le cause che fanno percepire agli studenti una difficoltà quando si affacciano alla matematica. Come gli studenti percepiscano la difficoltà è l'argomento della presente tesi e verrà indagato nella seconda parte di questa. Analizziamo ora, invece, quali sono le cause delle difficoltà in matematica e in particolare in Algebra.

Per prima cosa occorre sottolineare che nell'apprendimento della matematica non si può parlare solo delle difficoltà intrinseche della materia, o del modo di spiegare del docente o ancora delle difficoltà dell'allievo, ma occorre indagare la relazione che sussiste tra questi tre poli, più che impostare un focus su uno di essi. Si parla in tal caso del triangolo dell'insegnamento. La materia con le sue complessità intrinseche viene portata a livello dello studente da una persona che si è già scontrata a sua volta con il triangolo dell'apprendimento, quando era un allievo. L'apprendimento diventa allora un insieme di processi più che uno scambio unilaterale tra docente ed allievo. Il triangolo comporta una serie di implicazioni tacite e relazioni talvolta difficili. Secondo alcuni ricercatori, come ad esempio Brousseau (1983) alcune difficoltà della disciplina sono da ricondurre ad ostacoli epistemologici, cioè ostacoli che prima ancora che nel singolo individuo che apprende hanno un riscontro nel pensiero della storia della matematica. L'allievo riscontra le stesse difficoltà affrontate dalla comunità dei matematici. Sono un esempio di tali concetti lo zero, la nozione di infinitamente piccolo e l'Algebra stessa. Storicamente l'Algebra e il passaggio ad un linguaggio simbolico ha richiesto molto tempo e anche lo studente trova difficoltà nei primi approcci. Si potrebbe allora essere propensi alla teoria secondo cui l'ontogenesi ricapitola la filogenesi, ma altri ricercatori (Radford e Puig) sostengono che non è esatto ritenere del tutto valida questa teoria. Infatti ogni individuo è caratterizzato da un luogo, una cultura e da una storia specifica che lo differenzia dagli altri individui: il rapporto tra filogenesi ed ontogenesi è più complicato di quanto ci si aspetti.
In terzo luogo la materia stessa non è facile. Secondo l'ipotesi di Villani (1993) tra le fonti intrinseche di difficoltà vi sono i seguenti aspetti: la terminologia e il simbolismo, le tecniche di calcolo, la sequenzialità, i problemi e la loro traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico, l'astrazione, il rigore e l'infinito. L'Algebra si colloca tra questi ostacoli epistemologici. Lo stesso Diofanto, parlando con l'amico Dionisio riconosce la difficoltà della materia: "Forse la materia ti sembrerà più difficile, e la mente di chi inizia ad apprendere può essere scoraggiata dagli errori".
Le difficoltà sono spesso evidenziate dagli errori che gli studenti commettono. Il docente deve cogliere l'occasione di errore come fonte di accrescimento per l'intera classe perchè l'errore può essere di distrazione ma può spesso, anche, evidenziare difficoltà di molti e non solo di un singolo individuo. Uno dei rami della matematica in cui gli errori si fanno più portavoce delle difficoltà, a differenza di altri, è l'Algebra. Secondo le ricerche molte delle difficoltà incontrate nelle prime fasi di approccio all'Algebra sono collegate con l'acquisizione del significato del segno, la comprensione che i simboli non sempre rappresentano oggetti e la sintassi del linguaggio algebrico. Il passaggio dall'Aritmetica all'Algebra infatti è concettualmente difficile in quanto in aritmetica

i segni rappresentano quantità conosciute invece in Algebra è richiesto un livello di astrazione maggiore. Studi storici recenti dimostrano che il significato dei calcoli era legato alla geometria che veniva usata anche per giustificare le formule trovate. Il significato geometrico venne via via perso. Lo stesso al-Khwarizmi nel suo trattato algebrico, giustifica le formule date per via geometrica, questa pratica scomparve già nel Rinascimento, quando emerse il simbolismo.
Avere poi a che fare con quantità negative è un ostacolo epistemologico. Infatti i ragazzi sono abituati a ragionare in termini di oggetti e non riuscendo a riportare il loro ragionamento al mondo reale si trovano in difficoltà. Non a caso l'Algebra viene presentata al terzo anno della scuola secondaria di primo grado. Si ritiene infatti che a 13 14 anni i ragazzi siano pronti per iniziare a ragionare in modo astratto. Il pensiero astratto si intensifica, infatti, in età più avanzata rispetto a quello concreto.
Gli errori tipici che si presentano in Algebra sono la semplificazione errata delle frazioni algebriche (l'alunno semplifica addendi e non prodotti) e la gestione del segno meno. In un secondo tempo poi un altro grande ostacolo che si presenta è la scrittura di un'equazione che risolva un problema dato. Sono necessari molti esercizi e pazienza affinchè il meccanismo diventi autonomo. In Algebra è molto importante che le relazioni espresse dal triangolo dell'insegnamento vengano gestite al meglio. Infatti si pongono le basi per tutta la matematica successiva.

1.4 Gli errori e la percezione delle difficoltà

Le difficoltà in Algebra spesso portano gli alunni a commettere errori. Non solo errori di distrazione che possono avere varie cause esterne alla materia, ma errori nei passaggi e nei procedimenti richiesti che svelano una comprensione immatura della materia. Il docente e l'alunno devono insieme cercare di sorpassare le difficoltà.
Lo studente deve provare a porsi nelle condizioni giuste di apprendimento: concentrandosi, studiando ed esercitandosi.
L'insegnante, dal canto suo, tenterà di far riflettere sul significato dell'errore. In questo senso cercare di capire come i propri studenti percepiscono le difficoltà lo potrebbe portare ad una più profonda consapevolezza delle debolezze dei ragazzi. La presente tesi ha lo scopo di indagare la percezione delle difficoltà in Algebra secondo i ragazzi in modo da muovere i primi passi verso la riduzione degli errori. Per fare questo sono stati preparati cinque diversi compiti da sottoporre alle cinque diverse classi di un liceo scientifico, scelto in quanto i suoi studenti hanno un confronto con l'Algebra più ravvicinato ed approfondito rispetto a studenti di altre scuole. In accordo con i docenti delle varie classi e tenendo conto del programma svolto sono state selezionate domande facenti riferimento a varie difficoltà dell'Algebra.
Per la classe prima il test proponeva esercizi sulle basi dell'Algebra
Per la seconda le domande sono state tratte dalle prove invalsi di anni diversi
Per la classe terza è stato fatto riferimento alle coniche e al significato delle loro equazione
Per la classe quarta i quesiti erano di conteggio di insiemi con una sfumatura probabilistica
Per la classe quinta gli item sono stati tratti dai quesiti della seconda prova dell'esame di Stato di anni precedenti.
Ogni compito si compone di due parti: la prima richiede una semplice lettura delle domande e una compilazione di una tabella richiedente la classifica, dal più facile al più difficile, degli esercizi; la seconda prevede la risoluzione degli esercizi e la compilazione di una tabella analoga alla precedente. Gli studenti si scontreranno con una percezione a priori e una più consapevole a posteriori. Indagando la differenza tra le due tabelle cercheremo di capire come gli alunni percepiscano le difficoltà algebriche. In tal senso ad ogni studente sarà chiesto il motivo della scelta dell'esercizio più difficile.
Le prove sono poi state corrette. Le griglie sono state confrontate con una classifica attesa stilata in base a criteri oggetti come la lunghezza dell'esercizio, la difficoltà dei calcoli o l'età del ragazzo al momento del primo incontro con l'argomento. Sono stati creati diversi tipi di grafici per visualizzare la percezione delle difficoltà. Le risposte alla domanda sono state analizzate, interpretate e sono state estratte considerazioni. A seconda della modalità di somministrazione concordata con il docente è stata osservata anche il comportamento dei ragazzi nei confronti del test.
Per ogni classe sono poi emerse considerazioni che sono state elaborate per ottenere il risultato finale sulla percezione delle difficoltà. Le difficoltà in matematica, in particolare in Algebra, prima o poi toccano tutti gli studenti, sia per la natura della materia sia per una predisposizione o meno del ragazzo verso un ramo della matematica. Al di là di questi ostacoli esistono però ragazzi con disturbi specifici del sistema dei numeri, del calcolo, con disturbi mnemonici in assenza di lesioni neurologiche e di problemi cognitivi più generali. Nella presente tesi non vengono trattati questi casi in quanto risulterebbe una percezione delle difficoltà sovrastata.

Iniziamo con la presentazione del test della classe prima con le relative soluzioni.

Capitolo 2

Classe prima liceo scientifico

2.1 Compito

I batteri
Testo del problema

Una colonia di batteri che vive su un substrato gelatinoso, raddoppia la propria superficie ogni mese e ricopre tutta la superficie del gel in 20 mesi. Quanto tempo impiega a ricoprire metà gel?

Quale struttura matematica hai usato per rispondere al quesito?

- A. Potenze
- B. Proprietà dell'addizione
- C. Aree delle figure piane
- D. Equazioni di primo grado

Il quesito è un gioco matematico. Il ragazzo non lo riconoscerà tra gli argomenti affrontati in classe, cosa che lo spaeserà. Non è difficile se lo studente ragiona.
Soluzione

Ogni mese la superficie ricoperta dai batteri raddoppia. Se a 20 mesi ha ricoperto tutto il gel significa che il mese prima la colonia aveva ricoperto solo metà gel. Risposta: 19 mesi.
Soluzione: A

Si può notare che il problema era risolvibile anche meccanicamente, cioè partendo da una superficie 1, raddoppiarla ogni volta finchè non si trova $20^{20} = 524288$. Si costruisce la tabella e si cerca la metà di 524288 a quale potenza del due corrisponde. Anche questo metodo porta alla soluzione giusta, ma rivela un ragionamento meno sofisticato e meno matematico del precedente.

Mese	Area ricoperta: unità di misura A	Mese	Area ricoperta: unità di misura A
1	1	11	1024
2	2	12	2048
3	4	13	4096
4	8	14	8192
5	16	15	16384
6	32	16	32768
7	64	17	65536
8	128	18	131072
9	256	19	262144
10	512	20	524288

Figura 2.1: Batteri

La piramide
Testo del problema
Riempi le caselle con il numero giusto. Cosa ti ricorda? A cosa serve?

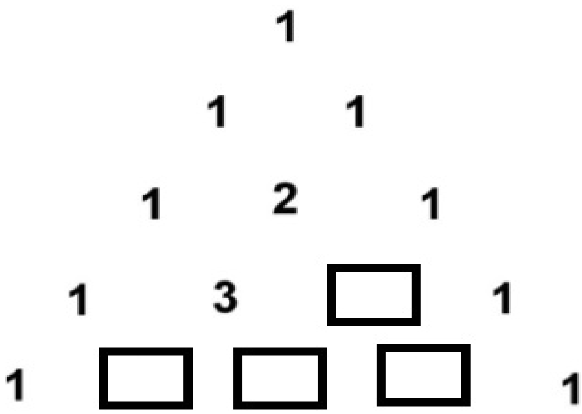


Figura 2.2: La piramide

Anche questo quesito può inizialmente essere considerato come un gioco matematico, ma poi muta in qualcosa che lo studente conosce. Ci si aspetta che rispetto all'esercizio precedente occupi nella classifica dei ragazzi una posizione inferiore.
Soluzione
I numeri da inserire sono (dall'alto al basso e da sinistra verso destra) $3, 4, 6, 4$. Ne risulta il Triangolo di Tartaglia. Il triangolo di Tartaglia serve per ottenere in modo facile i coefficienti delle potenze n-esime di un binomio.

Il meno

Testo del problema

Semplifica la seguente frazione algebrica:

$$\frac{x}{y-x}+\frac{x}{x+y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

L'esercizio vuole puntare l'attenzione sul meno nelle frazioni algebriche che di solito crea molti problemi tra i ragazzi. Questi ricordano di cambiare segno al primo addendo ma non al secondo. Si ritiene che il quesito sia un buon discriminatore tra i ragazzi più bravi e quelli più deboli che lo riterranno difficile.

Soluzione

Possiamo semplificare la frazione algebrica in questo modo:

$$\frac{x}{-(-y+x)}+\frac{x}{x+y}-\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{-x(x+y)+x(x-y)-2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{-x^2-xy+x^2-xy-2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{-xy-xy-2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{-4xy}{(x+y)(x-y)}$$

Frazione Algebrica

Testo del problema

$$\frac{x+3+2x}{x+3}$$

è uguale a:

La frazione è costruita apposta per indurre il ragazzo a semplificare gli addendi. Un ragazzo che non ha capito bene l'argomento troverà questo esercizio facile se non gli verrà il dubbio di poter semplificare addendi, difficile se invece gli verrà.

Soluzione

La frazione algebrica non si riesce a semplificare. L'esercizio vuole testare se lo studente ha capito che non può semplificare fattori e addendi.

Frazione Algebrica

Testo del problema

Semplifica la seguente frazione algebrica:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}$$

Il quesito è un classico esercizio che i ragazzi affrontano nello studio delle frazioni algebriche. I ragazzi non dovrebbero trovarlo difficile.

Soluzione

Portando la frazione ad un unico denominatore otteniamo:

$$\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}$$

$$\frac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

Frazione Algebrica

Testo del problema

Scrivi in altro modo la frazione algebrica togliendo il primo meno

$$-\frac{-x-2}{(x+2)}$$

Un altro quesito che sottolinea l'importanza del segno meno. Questi quesiti vogliono rafforzare e velocizzare gli studenti nel suo uso.

Soluzione

$\frac{x+2}{(x+2)}$. L'esercizio è costruito per testare l'abilità del ragazzo nell'operare con il "meno". Spesso infatti ricordano di cambiare il primo segno dopo il meno ma non il secondo.

Frazione Algebrica

Testo del problema

A quale frazione è equivalente la frazione seguente:

$$-\frac{-x-4}{(x+4)}$$

- A. $\frac{x+4}{(x+4)}$

- B. 1

- C. $\frac{x-4}{(x+4)}$
- D. $+\frac{-x-4}{-(x+4)}$

Altro quesito che richiede di riflettere sul significato del segno meno. I distrattori sono stati costruiti in modo da indurre in tentazione lo studente e tengono conto degli errori più frequenti.
Soluzione

v. v. f. v. Anche questo esercizio è costruito in modo che il ragazzo sia obbligato a ragionare sul significato del meno.

Divisione

Testo del problema

Semplifica la seguente frazione algebrica:

$$\left[1-\frac{3}{2(a-1)}-\frac{5}{2(a+1)}\right]:\frac{a^2-4a}{a+1}$$

Quesito classico sulla semplificazione delle frazioni algebriche. Presenta però la divisione che viene affrontata in un secondo momento all'interno del capitolo. E' considerato l'esercizio più difficile perchè è un riassunto di tutto l'argomento.
Soluzione

$$\left[1-\frac{3}{2(a-1)}-\frac{5}{2(a+1)}\right]:\frac{a^2-4a}{a+1}$$

$$\left[\frac{2a^2-2-3a-3-5a+5}{2(a-1)(a+1)}\right]\cdot\frac{a+1}{a(a-4)}$$

$$\left[\frac{2a^2-8a}{2(a-1)(a+1)}\right]\cdot\frac{a+1}{a(a-4)}$$

$$\left[\frac{2a(a-4)}{2(a-1)}\right]\cdot\frac{1}{a(a-4)}=\frac{1}{a-1}$$

Esponenti

Testo del problema

A quale esponente devi elevare

$$-\frac{2x}{3+x}$$

per ottenere:

$$\frac{(3+x)^2}{4x^2}$$

L'esercizio è costruito in modo tale da fra riflettere sugli esponenti negativi. Gli esponenti negativi, solitamente non sono intuitivi o immediati e creano difficoltà tra gli studenti.
Soluzione

L'esponente a cui occorre elevare la frazione è -2

Ancora frazioni

Testo del problema

Determina per quali valori la frazione algebrica non è definita e per quale si annulla:

$$\frac{a-9}{a-4}$$

L'esercizio introduce il delicato legame tra denominatori e condizioni di esistenza che accompagnerà il ragazzo attraverso tutta la matematica dei cinque anni. Tale concetto è messo in relazione all'annullarsi della frazione stessa. E' considerato l'esercizio più facile perchè non sono richiesti calcoli, basta solo aver capito che il denominatore di una frazione non può essere nullo. Inoltre la frazione di cui viene richiesto lo studio non è complicata.

Soluzione

La frazione non è definita per $a = 4$ infatti in questo caso il denominatore si annullerebbe e non sarebbe possibile avere una frazione con lo 0 al denominatore. La frazione si annulla per $a = 9$, infatti in questo caso si annullerebbe il numeratore. Una frazione con 0 al numeratore, e il denominatore non nullo, darà sempre 0.

Classifica esercizi

Per stilare l'ordine degli esercizi a seconda della difficoltà si è tenuto conto di due fattori in particolare: da quanto tempo gli alunni conoscono il concetto in questione e se l'esercizio richiede di riflettere sul significato o se viene richiesta l'applicazione di regole. Un esercizio in cui si richiede solo una regola e in cui si arriva alla soluzione anche senza aver capito il significato dei concetti, viene considerato più facile di un esercizio che richiede la comprensione del significato. Nel compito dato ai ragazzi i quesiti sono stati mescolati.

2.2 Presentazione dati

2.2.1 La classe e l'insegnante

La classe è composta da 23 alunni, di cui 13 maschi e 10 femmine. La docente, che opera sulla classe sia in matematica che in fisica, riferisce che è una classe difficile, in quanto è una prima, e che spesso è obbligata a riprendere passaggi e concetti. E' la classe stessa che le chiede di ripetere e questo rallenta il ritmo che l'insegnante vorrebbe sostenere. Il libro adottato è: "La matematica a colori" di Leonardo Sasso. L'insegnante ha un metodo di insegnamento coinvolgente, spesso fa domande e richiede l'intervento dei ragazzi. In questo modo cerca di mantenere l'attenzione degli alunni. Il salto dalla scuola secondaria di primo grado a quella di secondo grado è risultato, per molti ragazzi, difficile sia per via di nuovi argomenti, sia per la modalità di lezione che risulta, per loro, troppo spedita. La docente alterna lezioni tradizionali con lavagna e gesso a lezioni più innovative avvalendosi di video e dell'uso del computer. Durante le lezioni viene sottolineato più l'aspetto pratico della teoria per la risoluzione degli esercizi, un pò perchè la docente, laureata in fisica, predilige questo approccio, un pò perchè sono gli alunni stessi che lo richiedono.

2.2.2 Modalità di somministrazione della prova

La prova viene consegnata agli studenti e viene data loro una settimana per svolgere il test a casa. La prova è stata concordata con l'insegnante, in modo che fosse motivo di ripasso e di potenziamento sulle frazioni algebriche. Inizialmente la prova doveva essere data come compito a casa in preparazione alla verifica, ma poi l'insegnante ne ha dovuto diminuire il programma proprio perchè le era stato richiesto dalla classe. La docente sperava di concludere prima il capitolo e di verificarlo per intero, ma ha voluto aspettare affinchè i ragazzi svolgessero al meglio il test. In particolare sottoponendo il test nella data prestabilita i ragazzi non avrebbero saputo affrontare l'esercizio 8. Tutti gli alunni hanno riconsegnato il test, ma uno non ha completato le tabelle per cui i dati saranno riferiti a 22 test.

2.2.3 Esposizione dei dati raccolti

Il test vuole valutare la percezione della difficoltà degli esercizi, che i ragazzi colgono leggendo gli esercizi e poi risolvendoli. Si vuole valutare anche se la percezione della difficoltà cambia dopo che gli esercizi sono stati svolti. I dati sono raccolti tramite le due griglie presenti nei compiti.
Analizziamo inizialmente i due estremi della griglia corrispondenti all'esercizio più facile e a quello più difficile. Dopo aver contato quante volte ogni esercizio viene scelto come il più facile e quante volte come il più difficile, separatamente nella prima classifica e poi nella seconda, calcoliamo le percentuali.

	Prima scelta				Seconda scelta			
	Facile	%	Difficile	%	Facile	%	Difficile	%
Es 1	4	18,18%	3	13,64%	5	22,73%	5	22,73%
Es 2	9	40,90%	2	9,10%	5	22,73%	4	18,18%
Es 3	1	4,55%						
Es 4			3	13,64%			1	4,55%
Es 5	2	9,10%			1	4,55%		
Es 6							1	4,55%
Es 7					2	9,10%	3	13,64%
Es 8	1	4,55%	6	27,27%			6	27,27%
Es 9	1	4,55%	5	22,73%	3	13,64%	1	4,55%
Es 10	4	18,18%	3	13,64%	6	27,27%	1	4,55%

Figura 2.3: Scelte esercizio più facile e più difficile

Visualizziamo i dati nei seguenti quattro areogrammi che rappresentano le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e di quello più difficile nei due diversi momenti. Da in alto a sinistra a in basso a destra rappresentano rispettivamente le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e più difficile secondo una prima stima, l'esercizio più facile e quello più difficile secondo una seconda stima.

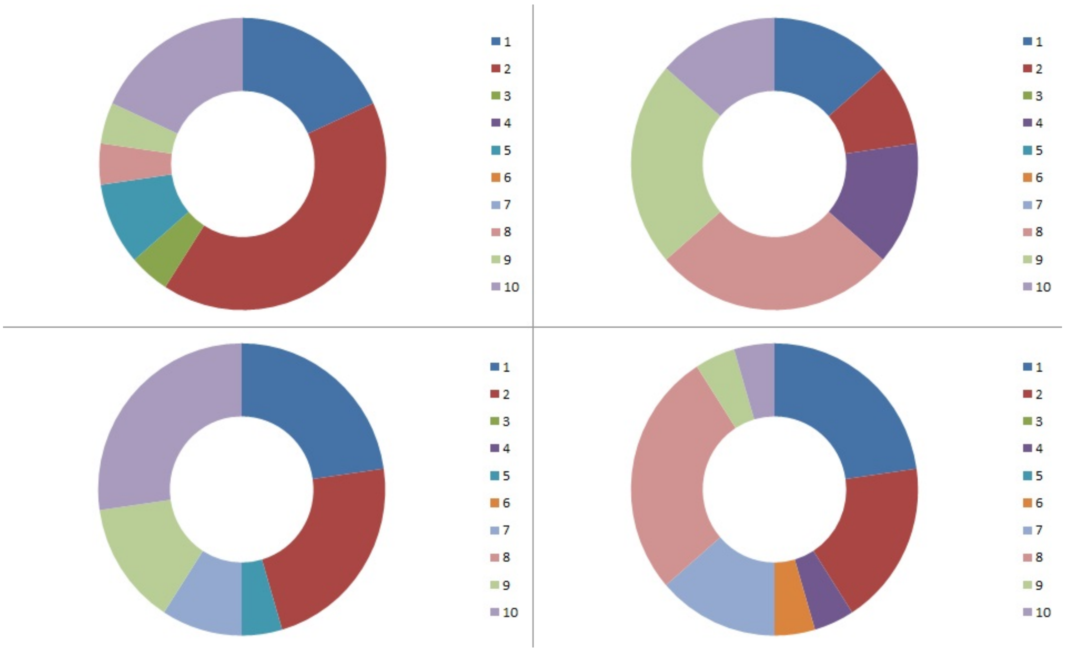


Figura 2.4: Areogrammi

Valutiamo anche la percezione della difficoltà degli studenti. Si è deciso di assegnare da uno a dieci punti agli esercizi a seconda della posizione occupata nella griglia: un punto all'esercizio più facile, 10 all'esercizio più difficile. I punteggi ottenuti dal singolo esercizio sono poi stati sistemati in una tabella. Per ogni esercizio abbiamo sommato i vari punteggi ottenuti nei vari test e abbiamo diviso la somma per 22. Abbiamo ottenuto una media pesata per la difficoltà dell'esercizio. Il dato rivela quanto il singolo esercizio sia risultato difficile per la classe. Riportiamo le tabelle dei punteggi per la prima stima e per la seconda:

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Es 9	Es 10
	10	8	9	3	7	6	4	2	1	5
	2	1	3	4	5	6	7	10	8	9
	2	1	8	7	9	3	4	10	5	6
	4	6	5	8	3	2	9	1	10	7
	1	5	8	7	6	2	3	4	9	10
	2	1	9	7	6	8	4	10	5	3
	3	1	5	2	6	4	7	8	9	10
	1	2	7	3	6	4	5	9	10	8
	1	7	8	10	2	3	5	9	6	4
	10	9	5	4	1	2	3	7	6	8
	9	10	3	6	1	4	5	8	7	2
	8	9	5	10	4	3	2	7	6	1
	6	4	5	7	2	8	9	3	10	1
	2	1	4	7	5	6	8	9	10	3
	4	2	7	9	3	6	5	10	8	1
	9	10	1	8	2	5	4	3	7	6
	2	1	6	10	7	3	9	8	5	4
	10	9	6	4	5	3	2	8	7	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	1	3	4	5	6	9	10	7	8
	3	1	4	6	5	8	7	10	9	2
	5	1	2	6	3	7	8	9	10	4
	8	9	5	10	4	3	2	7	6	1
Media	4,565217	4,391304	5,26087	6,347826	4,434783	4,695652	5,565217	7,391304	7,391304	4,956522

Figura 2.5: Prima stima

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Es 9	Es 10
	10	8	4	9	7	3	1	6	5	2
	1	3	4	2	5	9	10	8	6	7
	2	1	8	7	9	3	4	10	5	6
	10	6	2	5	3	9	4	8	1	7
	1	2	6	8	7	3	4	5	9	10
	2	3	8	5	6	9	4	10	7	1
	1	2	4	3	5	9	10	8	6	7
	2	1	6	5	7	3	4	9	10	8
	1	7	6	10	2	3	5	8	4	9
	10	8	9	6	4	3	7	5	1	2
	9	10	5	2	1	7	8	6	4	3
	7	10	5	9	6	2	3	8	1	4
	10	5	8	7	6	9	2	3	4	1
	1	2	4	8	6	5	7	10	9	3
	10	6	5	9	3	2	7	8	4	1
	9	10	4	3	2	6	1	7	8	5
	1	2	9	8	7	3	6	10	5	4
	9	1	6	4	5	3	2	8	7	1
	8	7	4	6	2	5	10	9	3	1
	2	1	5	3	4	6	7	10	8	9
	6	2	5	4	6	10	3	8	9	1
	7	1	2	5	3	6	8	10	9	4
Media	5,409091	4,454545	5,409091	5,818182	4,818182	5,363636	5,318182	7,909091	5,681818	4,363636

Figura 2.6: Seconda stima

I dati delle tabelle vengono presentati anche in forma di istogramma. Nello stesso grafico poniamo due serie di istogrammi uno per la prima scelta e uno per la seconda, in modo che il confronto risulti immediato.

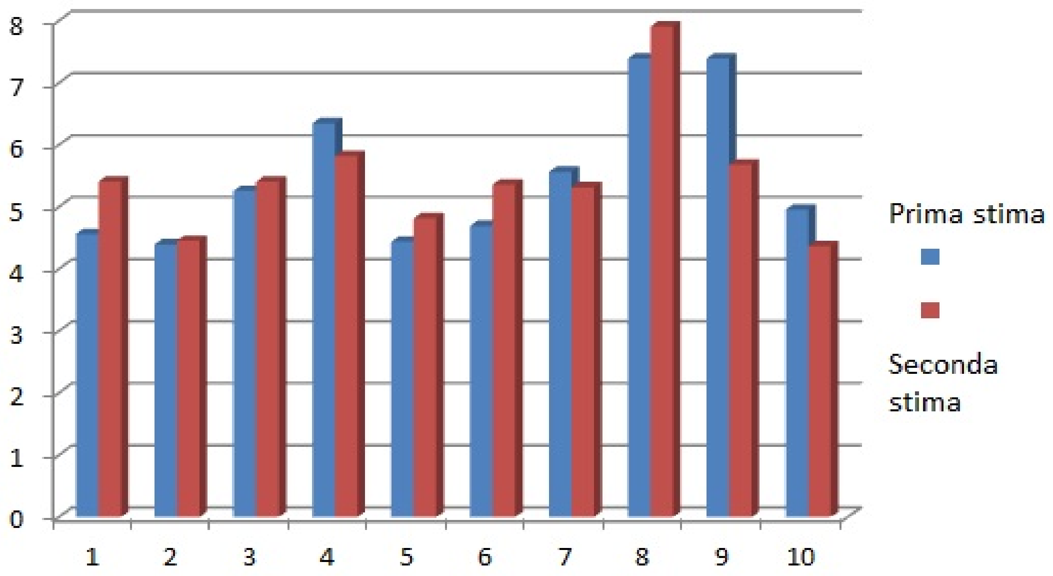


Figura 2.7: Istogramma

In modo analogo, viene assegnato un punteggio anche alla classifica attesa:

10	1	2	4	6	7	9	5	3	8

Figura 2.8: Classifica attesa

I punteggi degli esercizi sono racchiusi nel seguente istogramma azzurro che viene messo a confronto con quelli risultanti dalle prove dei ragazzi.

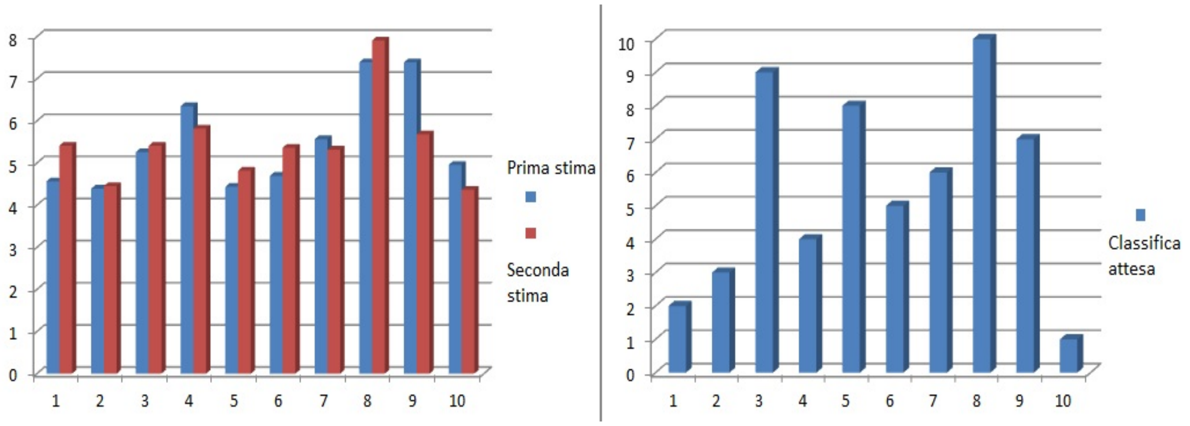


Figura 2.9: Confronto tra istogrammi

2.2.4 Motivazione esercizio più difficile

Nel test viene richiesto esplicitamente di motivare la scelta dell'esercizio più difficile. Un alunno dichiara che per lui l'esercizio più difficile è stato il 7 perchè: "Ho difficoltà con i segni". Un altro motiva con una componente emotiva: "Mi mette ansia dover trovare una frazione equivalente aggiungendo o togliendo il meno". Moltissimi affermano di avere problemi con il segno meno. Chi ha scelto il numero 1 dice che se non ci fosse stata la scelta multipla non avrebbe saputo come fare e che quei tipi di risposte hanno bisogno di troppa logica. Qualcuno dà la colpa al fatto che non era presente in classe quando è stato svolto quell'argomento. Altri motivano dicendo che non si ricordavano (esercizio 2). Altri scelgono l'8 per via della lunghezza.

2.2.5 Correzione esercizi

Esercizio 1 Questo esercizio è stato dato con la stessa ambientazione, ma con richieste adeguate al livello, alla classe terza, in cui ha suscitato grandi perplessità ed è stato considerato tra gli esercizi più difficili. In questo caso gli alunni dovevano solo individuare la struttura matematica necessaria ed erano anche aiutati dalle risposte a scelta multipla. Chi ha sbagliato la prima domanda rispondendo 10, spesso è perchè ha impostato un'equazione: $2x = 20$ e ha anche scelto come nucleo le equazioni. In altri casi invece, i ragazzi hanno impostato l'equazione e poi hanno scelto potenze, creando un'incongruenza nella risposta, non accorgendosi neanche che i conti non tornavano. Per il primo item, chi ha sbagliato ha risposto 10. Per il secondo, invece, il distrattore più forte è stato il D., mentre solo 2 alunni hanno scelto il B.

Esercizio 2 2 studenti hanno chiamato la figura, piramide di Ruffini, confondendo il triangolo di Tartaglia e la scomposizione di Ruffini e l'hanno associata alla scomposizione, 10 studenti hanno completato la piramide, gli hanno dato il nome giusto e hanno saputo spiegare a cosa serve, 9 hanno completato la piramide ma non hanno saputo spiegare a cosa serva, 1 non ha risposto. L'esecizio è risultato complicato anche perchè si componeva di più parti: completamento della piramide, riconoscimento del Triangolo di Tartaglia e spiegazione del suo uso. Solo 10 studenti hanno completato correttamente tutti e tre gli step.

Esercizio 1	
corretti entrambi gli item	4
corretto il primo item	4
corretto il secondo item	6
non date primo item	6
non date secondo item	1
sbagliati entrambi gli item	5
sbagliato il primo item	5
sbagliato il secondo item	8

Figura 2.10: Item

Esercizio 3 E' un classico esercizio. 1 studente non ha risposto, 1 ha proprio sbagliato il calcolo del numeratore, 3 hanno solo scomposto i denominatori, 5 hanno sbagliato i segni del numeratore e 12 hanno svolto correttamente l'esercizio.

Esercizio 4 1 studente non ha risposto, 2 hanno raccolto un meno, sembra proprio per far vedere che qualcosa hanno fatto, 17 hanno risposto correttamente (alcuni hanno lasciato scritta la frazione come era stata data, altri hanno sommato gli addendi simili a numeratore e raccolto un 3), 1 studente ha sbagliato a sommare gli addendi del numeratore. Un solo studente è caduto nella trappola e ha semplificato il denominatore con gli addendi del numeratore. L'esercizio era stato creato apposta per testare quanto gli studenti resistessero a questa difficoltà.

Esercizio 5 5 studenti hanno sbagliato l'esercizio, di cui 1 non si avvicina alla soluzione, i restanti 4 hanno sbagliato a scrivere la soluzione scomponendo $a^2 + b^2$ come prodotto di $(a + b)(a + b)$, o semplificando gli esponenti o sbagliando a moltiplicare nell'ultimo passaggio. Questo esercizio è stato preso dal libro di testo adottato in quella classe. Al momento della valutazione del test da parte dell'insegnante, questa ha riferito di aver svolto la mattina stessa in classe questo esercizio. Nonostante tutto 5 studenti hanno continuato a sbagliarlo.

Esercizio 6 5 studenti hanno cambiato il segno a denominatore ma comunque risposto correttamente, 2 studenti hanno solo tolto il meno, 6 studenti hanno raccolto il meno, ma poi hanno cambiato solo un addendo su due, il resto della classe ha risposto bene. L'esercizio era stato fatto in modo che portasse gli studenti a ragionare sul fatto che con un segno meno si cambia a tutti e due gli addendi il segno e non solo al primo.

Esercizio 7 E' stato usato appositamente il singolare nella domanda anche se 3 delle 4 proposte sono corrette. Si considera risposta corretta anche con una sola individuazione. Si vuole vedere se qualcuno si è reso conto che più di una risposta era corretta. Il distrattore C prende in considerazione l'errore più comune, cioè quello di cambiare il primo segno ma non il secondo. 8 studenti hanno risposto C. Nessuno ha evidenziato tutte e tre le alternative corrette. L'esercizio racchiude alcuni dei dubbi più comuni sulle frazioni algebriche.

Esercizio 8 Questo è stato l'ultimo argomento affrontato dall'insegnante prima del test. 1 solo studente non ha risposto. 10 studenti hanno sbagliato e si sono persi nei passaggi. La classe risulta divisa in 2 gruppi: chi ha capito l'argomento ed è abile nei calcoli e chi non lo è o non ha studiato abbastanza.

Esercizio 9 La docente si rivela preoccupata per quanto riguarda questo esercizio. Crede che non molti studenti sappiano affrontarlo. Solo uno studente ha sbagliato (ha risposto 2.) L'esercizio si è rivelato ottimista rispetto alle aspettative della docente.

Esercizio 10 1 studente non ha capito la domanda e ha riscritto la frazione, 1 ha sbagliato (si annulla in 3), 1 non ha risposto. Tra chi ha risposto correttamente, qualcuno ha voluto ricordare, giustamente, il legame con il campo di esistenza. Questo esercizio è andato bene in generale.

2.2.6 Conclusioni

Il test è stato incentrato sulle frazioni algebriche (per richiesta dell'insegnante), abbiamo ottenuto la conferma che il segno meno è determinante in questa parte della matematica e che è fondamentale per le parti che seguiranno. E' importante che gli studenti imparino ad operare il prima possibile con i segni ed a superare le difficoltà che essi comportano. Il cambiare segno solo al primo addendo e non a tutti è un chiaro esempio di problemi che derivano da questo argomento. E' importante anche che lo studente impari a vedere quali strade sono migliori e lo portano ad una semplificazioni dei calcoli. Nell'esercizio 6 era preferibile raccogliere il segno meno a numeratore in modo da operare con quantità positive. La percezione della difficoltà può aiutare in questo senso a scegliere la strada più facile. Se uno svolgimento sembra molto difficile è meglio tornare indietro e migliorare il più possibile la situazione. In tal senso è utile, almeno agli inizi, vedere molti esercizi ed anche esempi svolti, in modo che il ragazzo si abitui pian piano ad operare con i simboli. Ma per i ragazzi è più facile risolvere un esercizio di un argomento appena visto oppure uno sui pilastri della materia, che dovrebbero essere sempre conosciuti?

Un altro nucleo che emerge dalla correzione di questo test è la componente emotiva. Sicuramente i ragazzi si trovano di fronte ad esercizi diversi rispetto a quelli a cui erano abituati, in più se un ragazzo si pone di fronte all'esercizio in maniera succube, finirà per sbagliarlo: "Ora sbaglio, ora sbaglio." E' importante invece che progressivamente il ragazzo acquisisca sicurezza, in modo che riesca a risolvere anche un esercizio che non ha mai visto, ma che si collega a quello che sa. La guida dell'insegnante in questo processo è importante, ma non è tutto. L'alunno non deve essere il "gattino" dell'insegnante, che aspetta che il padrone gli versi i croccantini, ma deve essere spronato in modo che pian piano riesca a prendere l'iniziativa da solo. La motivazione all'esercizio più difficile: "E' difficile perchè non me lo ricordo" non è il modo giusto di porsi per un test che è stato dato a casa e per cui c'era la possibilità di andare a rivedere le parti non chiare. Il raggiungimento dell'autonomia è collegato anche alla percezione della difficoltà. Più l'alunno sarà autonomo, più riuscirà a cavarsela e meno gli sembreranno difficili gli esercizi. Ma l'emozione e l'autonomia possono entrare nell'astratta matematica?

Figura 2.11: Autonomia o no?

Capitolo 3

Classe seconda liceo scientifico

3.1 Compito

Invalsi 2011 D4

Testo del problema

Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale n, $2n+1$ è un numero primo." Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.

Soluzione Per mostrare che l'affermazione è falsa, basta fornire un controesempio. Es. se $n = 4$ si ha $2 \cdot 4 + 1 = 9$, che non è un numero primo. Ragionamento da seguire: provare per tentativi con i numeri bassi, se non si trova subito un controesempio, provare a capire le proprietà della relazione data.

Invalsi 2011 D15 *Testo del problema*

Dividere un numero per 0.2 è lo stesso che moltiplicarlo per

- A. $\frac{1}{5}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. 2
- D. 5

Soluzione

Risposta esatta D. Ragionamento da seguire: $0.2 = \frac{2}{10}$; $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ Dividere equivale a moltiplicare per il reciproco. Il reciproco di $\frac{1}{5}$ è 5.

Domanda aggiunta *Testo del problema*

Sapendo che se un numero naturale n maggiore di 0 viene moltiplicato per x e per y, numeri reali, con $x < y$, si ottiene $n \cdot x < n \cdot y$, scegliere l'affermazione corretta:

- A. $\frac{n}{x} > \frac{n}{y}$
- B. $\frac{n}{x} < \frac{n}{y}$
- C. $\frac{n}{x} = \frac{n}{y}$

- D. nessuna delle precedenti

Soluzione

Ragionamento da seguire: dividere per x equivale a moltiplicare per $\frac{1}{x}$ se sappiamo che $x < y$ allora $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. Infatti dividendo l'unità per un numero maggiore (qui y) otteniamo un numero minore ($\frac{1}{y}$). Quindi $n \cdot \frac{1}{x} > n \cdot \frac{1}{y}$ dunque è giusta la risposta A.

Invalsi 2011 D16 *Testo del problema*

L'espressione $10^{37} + 10^{38}$ è anche uguale a

- A. 20^{75}
- B. 10^{7}
- C. $11 \cdot 10^{37}$
- D. $10^{37 \cdot 38}$

Soluzione

Risposta esatta: C. Ragionamento da seguire: non possiamo applicare le proprietà delle potenze perché tra i due numeri l'operazione è l'addizione. Raccogliamo $10^{37}(1 + 10)$ cioè $10^{37} \cdot 11$.

Invalsi D22 2011 *Testo del problema*

Il polinomio $x^4 - 16$ è divisibile per

- A. $x^2 - 8$
- B. $x - 4$
- C. $x + 2$
- D. $(x - 2)^2$

Soluzione

Risposta esatta C. Ragionamento da seguire: dividere il polinomio dato per ognuna delle possibilità è un processo dispendioso. Conviene scomporre il polinomio di partenza, considerandolo come una differenza di quadrati e poi iterare il procedimento sul risultato ottenuto: $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$
da cui $(x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$ Abbiamo così scomposto il polinomio iniziale in un prodotto di polinomi.

Ognuno dei tre fattori divide il polinomio di partenza, cerchiamo quindi quale di questi si trova fra le soluzioni proposte.

Invalsi D21 2011 *Testo del problema*

Quale fra le seguenti uguaglianze è corretta, qualunque sia il numero reale che sostituisce la x?

- A. $\sqrt{x^2} = x$
- B. $\sqrt{x^2} = \pm x$

- C. $\sqrt{x^2} = |x|$
- D. $\sqrt{x^2} = \pm |x|$

Soluzione
Risposta esatta: C. Ragionamento da seguire: conviene andare per esclusione nel caso in cui non si ricordi la teoria. La risposta D non ha significato La A è sbagliata in quanto se x fosse uguale a -2 avremmo a sinistra $\sqrt{4} = 2$ e non -2. La B è sbagliata poichè se per controesempio prendiamo $x = -3$, otterremmo a sinistra 3 e non anche -3. Scegliendo la C non ci sono problemi anche per eventuali x negative.

Invalsi D29 2011 *Testo del problema*
L'espressione $\frac{9}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{7}{10^4} + \frac{2}{10^5}$ si può rappresentare mediante il numero decimale

- A. 98.72
- B. 9.8072
- C. 0.9872
- D. 0.98072

Soluzione
Risposta esatta D. Ragionamento da seguire: occorre ricordare come si può scrivere un numero decimale come somma di frazioni, facendo attenzione al fatto che nella somma data manca la potenza di 10^{-3}

Invalsi 2012 D1 *Testo del problema*
Il seguente quesito è enunciato in modo più complesso rispetto agli altri.

La tabella seguente riporta alcune informazioni nutrizionali stampate su tre confezioni di cereali per la prima colazione:

	Confezione 1	Confezione 2	Confezione 3
grammi di cereali	100	200	70
percentuale di zucchero	20%	10%	20%

Sulla base dei dati in tabella, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	La quantità di zucchero contenuta nella confezione 2 è uguale alla quantità di zucchero contenuta nella confezione 3.	☐	☐
b.	La quantità di zucchero contenuta nella confezione 1 è maggiore della quantità di zucchero contenuta nella confezione 2.	☐	☐
c.	La quantità di zucchero contenuta nella confezione 1 è maggiore della quantità di zucchero contenuta nella confezione 3.	☐	☐

Figura 3.1: D1

Soluzione

f, f, v. Ragionamento da seguire: occorre capire il significato della percentuale relativa a totali diversi.

Invalsi 2014 D1

Testo del problema

Se k è un numero intero negativo, qual è il maggiore tra i seguenti numeri?

- 5+k
- 5·k
- 5-k
- 5^k

Soluzione

Soluzione C. Ragionamento da seguire: se k è un numero negativo allora $-k$ è positivo da cui C. Le altre risposte sono da escludere in quanto si può osservare che $5+k$ sarà un numero minore di 5; 5^k è $\frac{1}{5^{-k}}$ che è un numero minore di 1, quindi minore di 5; $5 \cdot k$ è un numero negativo.

Invalsi 2015 D2

Testo del problema

Nell'insieme dei numeri reali la disequazione $x^2 + 1 \geq 0$ è verificata

- Solo per $x \geq 0$
- Solo per $x \geq -1$
- Per ogni x
- Per nessun x

Soluzione

Soluzione C. Ragionamento da seguire: risolvendo la disequazione data come una disequazione di secondo grado scriviamo l'equazione associata:

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$ non ha soluzioni reali ma questo non significa che non abbia soluzioni la disequazione; si richiedeva un $\geq$ per cui vale per ogni x. Se gli alunni non hanno ancora affrontato in modo rigoroso le disequazioni di secondo grado, il ragionamento che porta alla soluzione è: quali x elevati alla seconda sono maggiori o uguali a -1? I numeri reali negativi elevati alla seconda diventano positivi perciò saranno maggiori di -1. In corrispondenza dello 0 si ha $0 \geq -1$ è vero. I numeri reali positivi alla seconda saranno ancora positivi per cui ≥ -1. Ne deriva che la soluzione corretta è la C.

Invalsi 2017 D1

Testo del problema

A una conferenza sono presenti 90 persone. Le donne sono 14 più degli uomini. Quanti sono gli uomini?

- 59
- 38
- 31
- 76

Soluzione Soluzione B. Ragionamento da seguire: per risolvere il quesito occorre impostare l'equazione con i dati del problema e ponendo:

$x =$ numero di uomini
$x + 14 =$ numero di donne

$$x + x + 14 = 90$$

$$2x = 90 - 14$$

$$2x = 76$$

$$x = 38$$

Domanda
Testo del problema
Esercizio creato in analogia a quello precedente. Quali sono le soluzioni della seguente equazione:

$$\frac{x}{3} + \frac{13}{6} = \frac{-x}{6} + \frac{26}{3}$$

Soluzione
x=13

3.2 Presentazione dati

3.2.1 La classe e l'insegnante

La classe è composta da 20 alunni. La docente, che li conosce dalla classe prima e che opera sulla classe sia in matematica che in fisica, riferisce che è una classe difficile che non la segue come lei vorrebbe. Tanto che la classe risulta molto lenta, anche in sede di compito in classe, lei prepara una verifica di una certa durata prevista, ma ai ragazzi non basta mai il tempo. Vi sono due o tre elementi molto intuitivi, che in classe rispondono subito e correttamente alle sue domande, ma che poi non studiano, vi è un gruppetto di ragazze che fa molta fatica, in più queste ragazze tendono a non avere scambi con il resto della classe peggiorando ancora di più la situazione. Il libro adottato è "La matematica a colori" di Leonardo Sasso. La docente ha un metodo di insegnamento tradizionale, ha un tono di voce pacato e rassicurante. Spiega l'argomento alla lavagna, e risolve esercizi di livelli di difficoltà graduali. Le verifiche proposte trattano di argomenti visti in classe ad eccezione di un esercizio più difficile per le eccellenze. La docente ha previsto un'ora settimanale in laboratorio per insegnare ai ragazzi ad usare geogebra o altri programmi di supporto alla didattica. La docente è laureata in matematica, e predilige un approccio astratto alla materia, anche se si aiuta con materiali didattici, per esempio carta, forme geometriche, per poter raggiungere tutta la classe. La professoressa è una delle poche laureate in matematica all'interno della scuola, che annovera per lo più fisici ed anche un ingegnere. Si è creato un buon team di docenti di matematica e fisica aperto al dialogo e al confronto, che si aiuta e cerca consiglio per gli esercizi e per il laboratorio sia di fisica che di informatica. Con la docente ho assistito a due simulazioni delle prove invalsi. Nella prima erano presenti due dei quesiti che avevo già inserito nei test.

3.2.2 Modalità di somministrazione della prova

La prova viene consegnata agli studenti che la dovranno svolgere come compito a casa in modo da prepararsi alle prove invalsi e da riflettere sugli argomenti del biennio. Ai ragazzi è stata lasciata una settimana per non aggravarli troppo. Vengono riconsegnati 20 test. Il test è a scelta multipla. Ai ragazzi non è stata lasciata la calcolatrice.

3.2.3 Esposizione dei dati raccolti

Il test vuole valutare la percezione della difficoltà degli esercizi, che i ragazzi colgono leggendo gli esercizi e poi risolvendoli. Si vuole valutare anche se la percezione della difficoltà cambia dopo che gli esercizi sono stati svolti. I dati sono raccolti tramite le due griglie presenti nei compiti.
Analizziamo inizialmente i due estremi della griglia corrispondenti all'esercizio più facile e a quello più difficile. Dopo aver contato quante volte ogni esercizio viene scelto come il più facile e quante volte come il più difficile, separatamente nella prima classifica e poi nella seconda, calcoliamo le percentuali.

	Prima scelta				Seconda scelta			
	Facile	%	Difficile	%	Facile	%	Difficile	%
Es 1	6	30,00%			8	40,00%	1	5,00%
Es 2	5	25,00%	1	5,00%	7	35,00%		
Es 3	1	5,00%	8	40,00%	1	5,00%	1	5,00%
Es 4			2	10,00%			2	10%
Es 5	1	5,00%	3	15,00%			8	40,00%
Es 6	1	5,00%			4	20,00%		
Es 7			3	15,00%			4	20,00%
Es 8	3	15%						
Es 9								
Es 10			2	10,00%			2	10,00%
Es 11			1	5,00%			2	10,00%
Es 12	3	15,00%						

Figura 3.2: Scelte esercizio più facile e più difficile

Visualizziamo i dati nei seguenti quattro areogrammi che rappresentano le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e di quello più difficile nei due diversi momenti. Da in alto a sinistra a in basso a destra rappresentano rispettivamente le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e più difficile secondo una prima stima, l'esercizio più facile e quello più difficile secondo una seconda stima.

Figura 3.3: Areogrammi

Valutiamo ora la percezione della difficoltà degli studenti. Si è deciso di assegnare da uno a dieci punti agli esercizi a seconda della posizione occupata nella griglia: un punto all'esercizio più facile, 10 all'esercizio più difficile. I punteggi ottenuti dal singolo esercizio sono poi stati sistemati in una tabella. Per ogni esercizio abbiamo sommato i vari punteggi ottenuti nei vari test e abbiamo diviso la somma per 20. Abbiamo ottenuto una media pesata per la difficoltà dell'esercizio. Il dato rivela quanto il singolo esercizio è risultato difficile per la classe.
Riportiamo le tabelle dei punteggi per la prima stima e per la seconda.

I dati delle tabelle vengono presentati anche in forma di istogramma. Nello stesso grafico poniamo due serie di istogrammi uno per la prima scelta e uno per la seconda, in modo che il

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Es 9	Es 10	Es 11	Es 12
	4	5	11	10	7	8	12	1	2	3	6	9
	5	4	11	10	8	6	12	1	2	3	7	9
	5	4	11	10	8	7	12	1	2	3	6	9
	4	2	11	12	10	1	3	8	7	9	5	6
	3	1	12	11	10	2	4	8	7	9	5	6
	3	1	12	11	10	2	4	8	7	9	5	6
	2	1	8	9	6	7	10	11	3	12	5	4
	3	1	8	9	6	7	10	11	2	12	5	4
	6	1	11	10	5	8	9	7	2	12	4	3
	1	2	12	5	11	8	9	3	10	6	4	7
	1	2	12	6	11	8	9	3	10	7	4	5
	11	12	1	6	2	7	3	8	10	9	3	4
	7	6	3	2	12	5	10	8	11	4	9	1
	9	8	5	2	12	7	10	3	11	6	4	1
	9	8	3	2	12	5	10	6	11	4	7	1
	1	4	12	2	11	8	9	5	10	3	6	7
	1	2	12	4	11	8	9	3	10	5	6	7
	1	2	12	4	11	8	9	3	10	5	6	7
	1	2	12	5	11	8	9	3	10	6	4	7
	2	7	8	12	1	4	11	10	3	6	5	8
Media	3,95	3,75	9,35	7,1	8,75	6,2	8,7	5,55	7	6,65	5,3	5,55

Figura 3.4: Prima stima

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Es 9	Es 10	Es 11	Es 12
	1	2	9	11	12	8	10	7	3	4	5	6
	2	1	9	11	12	8	10	7	3	4	5	6
	1	2	10	11	12	7	9	8	3	4	5	6
	1	2	12	11	9	1	5	10	8	4	6	7
	4	1	11	12	9	2	5	10	8	3	6	7
	4	1	11	12	9	2	5	10	8	3	6	7
	2	1	5	7	8	9	12	11	4	10	6	3
	2	1	5	7	8	9	12	11	4	10	6	3
	6	1	3	4	5	10	11	7	8	12	2	9
	1	10	9	5	12	2	6	3	4	11	7	8
	1	10	9	4	12	2	5	3	6	11	7	8
	12	11	1	2	6	8	3	7	10	9	5	4
	7	8	3	2	5	1	11	10	6	9	12	4
	9	3	5	2	7	1	11	10	8	4	12	6
	9	6	3	2	5	1	11	10	8	7	12	4
	1	10	9	2	12	4	3	5	6	11	7	8
	1	10	9	4	12	2	5	3	6	11	7	8
	1	10	9	4	12	2	5	3	6	11	7	8
	1	11	10	5	6	2	12	3	7	4	8	9
	10	1	9	11	2	3	12	8	6	5	4	7
Media	3,8	5,1	7,55	6,45	8,75	4,2	8,15	7,3	6,1	7,35	6,75	6,4

Figura 3.5: Seconda stima

confronto risulti immediato.

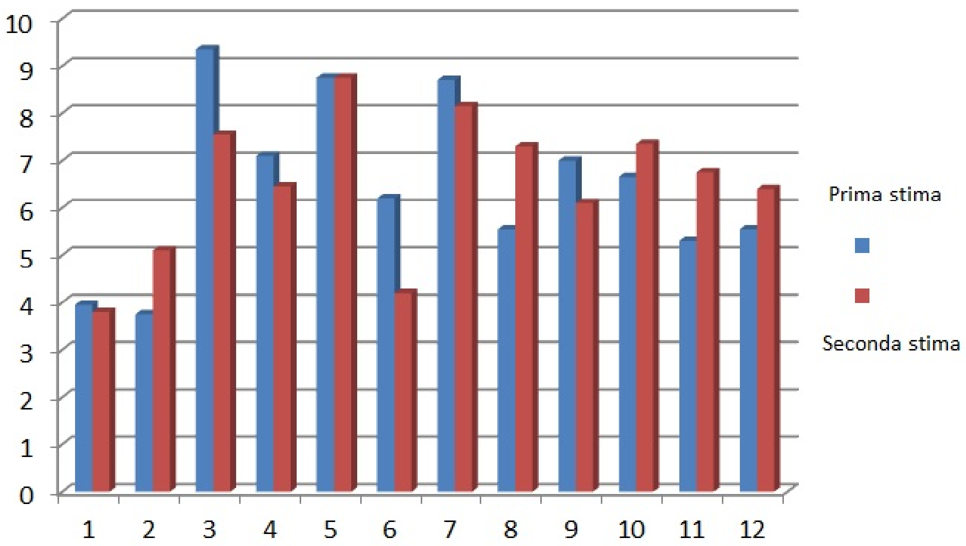


Figura 3.6: Istogramma

In modo analogo, viene assegnato un punteggio anche alla classifica attesa:

10	8	12	4	5	7	3	6	9	11	2	1

Figura 3.7: Classifica attesa

I punteggi degli esercizi sono racchiusi nel seguente istogramma azzurro che viene messo a confronto con quelli risultanti dalle prove dei ragazzi.

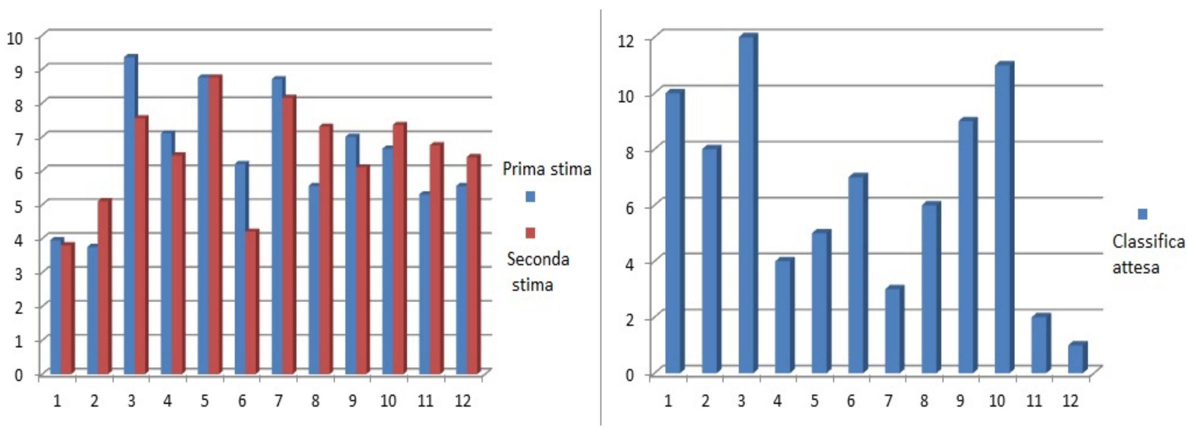


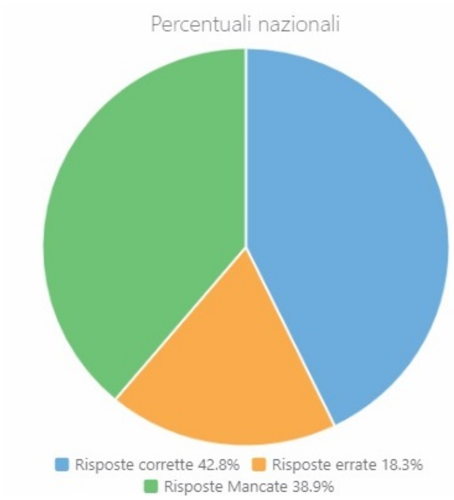
Figura 3.8: Confronto tra istogrammi

3.2.4 Motivazione esercizio più difficile

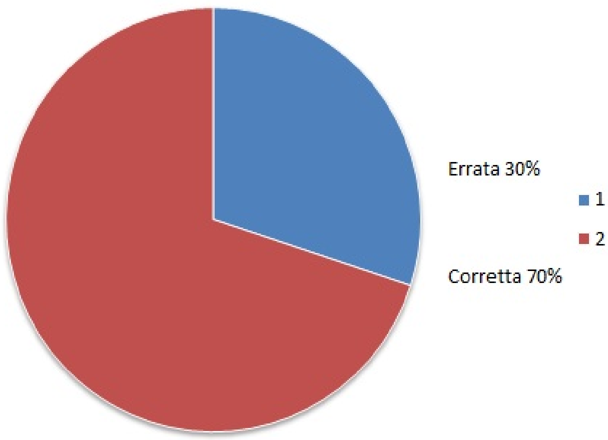
Alla richiesta di motivare l'esercizio più difficile, gli studenti hanno risposto che l'argomento non era ancora stato affrontato in classe.

3.2.5 Correzione esercizi

Esercizio 1 L'esercizio richiama concetti logici che la classe ha visto per la prima volta al primo anno in geometria e che sta continuando a vedere anche nel corso del secondo anno. Solo 2 studenti non hanno risposto, e uno ha scritto: "Perchè non è un numero primo" tralasciando il significato di controesempio. Sembra quindi che nel biennio i concetti di ipotesi, tesi, controesempio siano chiari. Le dimostrazioni di geometria aiutano molto in questo senso, perchè gli alunni sono obbligati a trattare con tali concetti. I compiti di quarta e quinta rivelano che questi argomenti vanno sfumando.

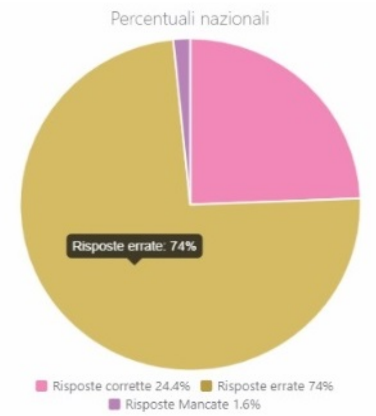


(a) Percentuali nazionali

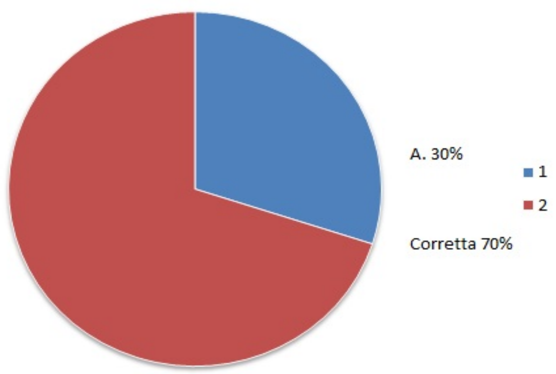


(b) Percentuali ottenute

Esercizio 2 14 alunni hanno risposto correttamente. I 6 studenti che hanno sbagliato, sono stati tutti ingannati dal distrattore $\frac{1}{5}$. Probabilmente nel loro ragionamento il 5 è apparso ma poi non sono riusciti a distingure se il numero corretto fosse 5 oppure $\frac{1}{5}$.



(a) Percentuali nazionali



(a) Percentuali ottenute

Esercizio 3 1 studente non ha risposto, uno ha sbagliato (risposta B.), 7 hanno risposto D. 11 studenti hanno risposto correttamente. Questa domanda si è dimostrata abbastanza discriminante, infatti ha diviso la classe in due gruppi.

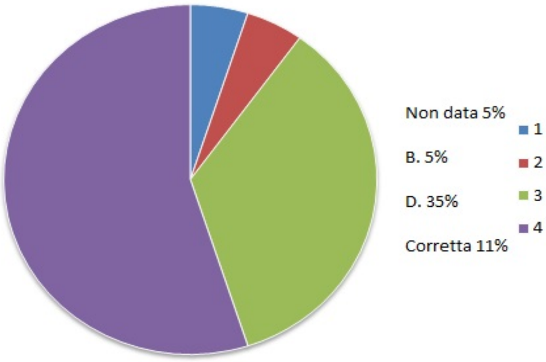
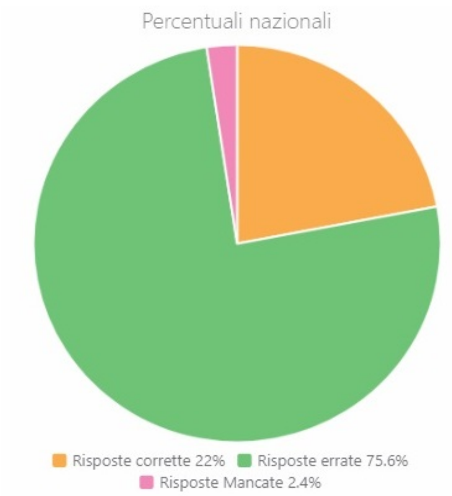
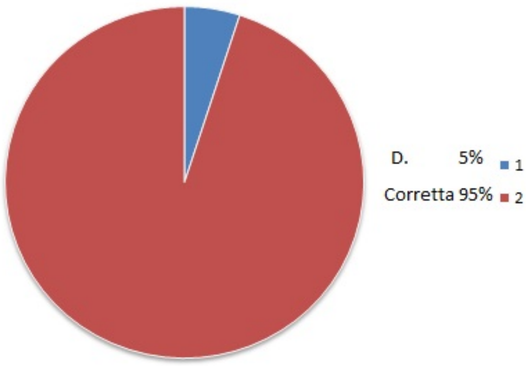


Figura 3.9: domanda 3

Esercizio 4 La domanda è risultata facile, era anche nella simulazione di prova invalsi che i ragazzi hanno fatto. I ragazzi di un liceo scientifico iniziano a raccogliere a fattor comune già dalla prima quindi per loro la domanda è stata facile, anche se i distrattori sono ben fatti. Solo un alunno ha dato come risposta la D.



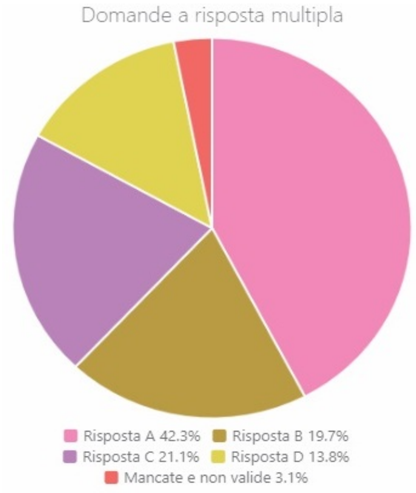
(a) Percentuali nazionali



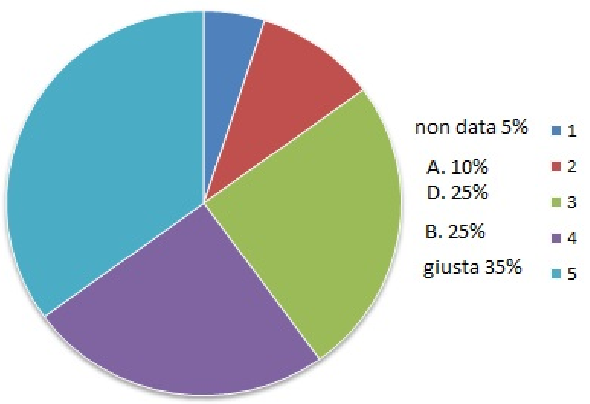
(b) Percentuali ottenute

Esercizio 5 La domanda precedente faceva ben sperare per le abilità della classe nel campo delle scomposizioni e dei raccoglimenti, ma appena l'esercizio diventa un pò più difficile, dai numeri si passa alle incognite, iniziano i problemi. 1 studente non ha risposto, 2 hanno risposto A, scomponendo il polinomio dato così: $(x^2+8)(x^2-8)$ sbagliando i quadrati, 5 hanno risposto

D, 5 hanno risposto B, e solo 7 hanno risposto correttamente. L'esercizio si è dimostrato difficile, rivelando lacune importanti anche in vista degli studi futuri.

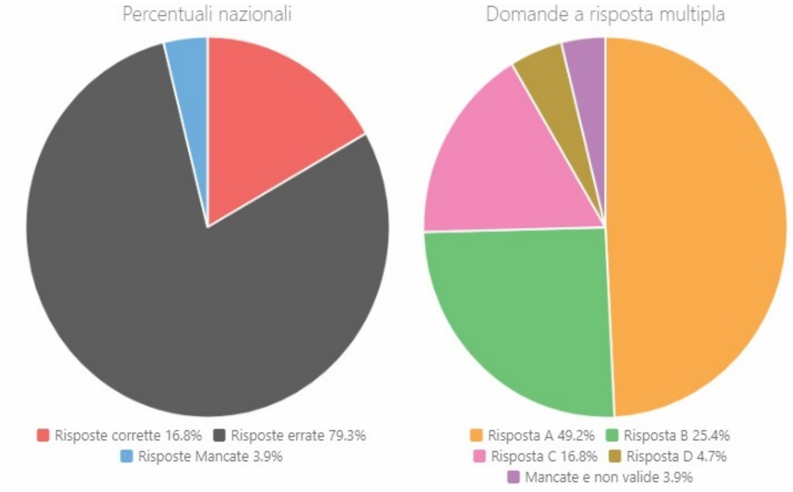


(a) Percentuali nazionali

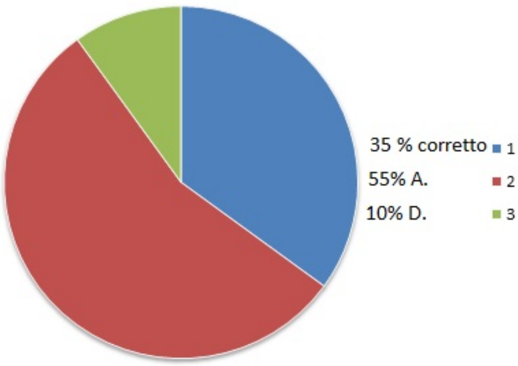


(b) Percentuali ottenute

Esercizio 6 Questa domanda è molto fine, occorre ricordare bene la teoria. Solo 7 studenti hanno risposto bene (interessante notare che più o meno sono i sette dell'esercizio precedente), 11 studenti si sono lasciati ingannare dal distrattore A. che presenta una risposta parziale, 2 studenti hanno scelto D.

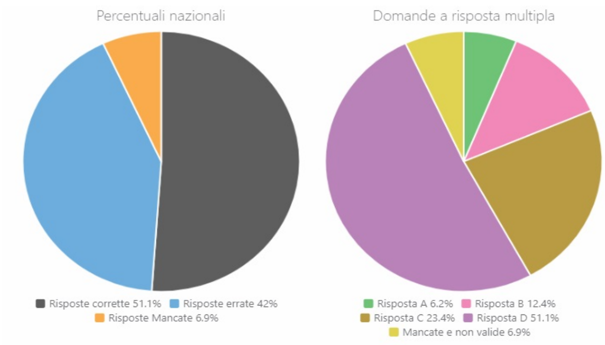


(a) Percentuali nazionali

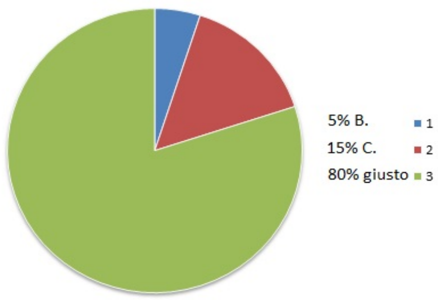


(b) Percentuali ottenute

Esercizio 7 1 studente ha scelto B., 3 C. e 16 studenti hanno dato la risposta corretta. Gli studenti conoscono fin dalla scuola elementare la scrittura polinomiale, ma per numeri maggiori di 0. Il passaggio ai numeri reali è comunque sempre complicato. La gestione della scrittura polinomiale è importante anche per l'informatica, in particolare per il passaggio tra basi diverse. E' importante che gli studenti se ne approprino il prima possibile.

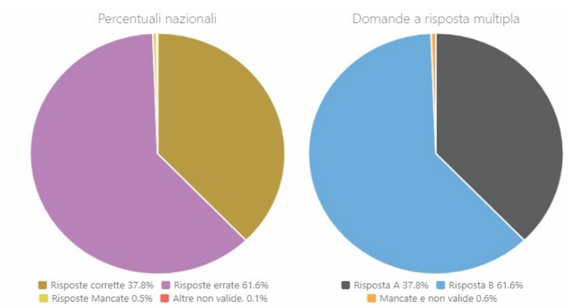


(a) Percentuali nazionali

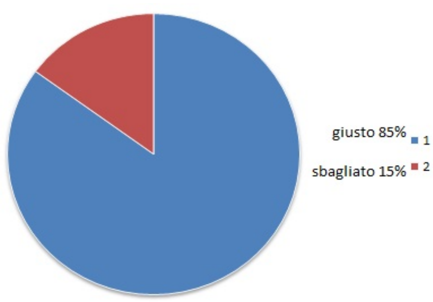


(b) Percentuali ottenute

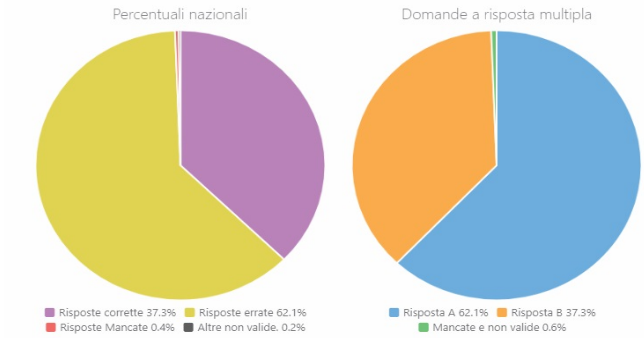
Esercizio 8 12 studenti hanno risposto correttamente a tutte e tre le domande. Solo 3 studenti hanno sbagliato la prima domanda, 5 alunni hanno sbagliato la seconda e 2 hanno sbagliato la terza. La domanda non è risultata di immediata risoluzione.



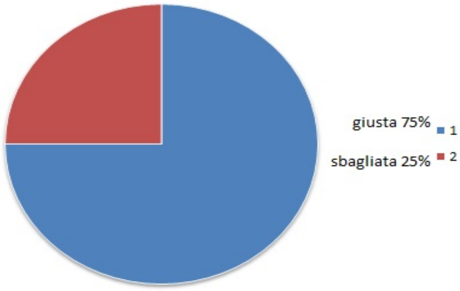
(a) Percentuali nazionali



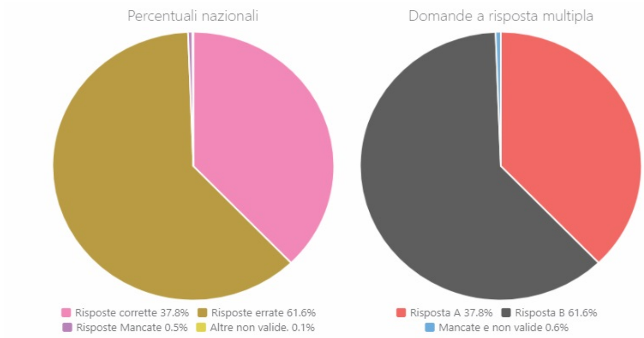
(b) Percentuali ottenute



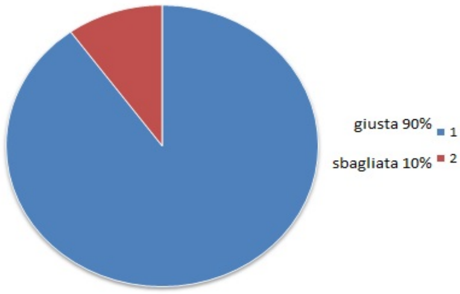
(a) Percentuali nazionali



(b) Percentuali ottenute



(a) Percentuali nazionali



(b) Percentuali ottenute

Esercizio 9 Hanno risposto tutti correttamente. Un alunno ha voluto spiegare il perchè: usando il numero -3. Si confonde il generale con il particolare. Il ragazzo non pensa che potrebbe aver scelto un numero fortunato.

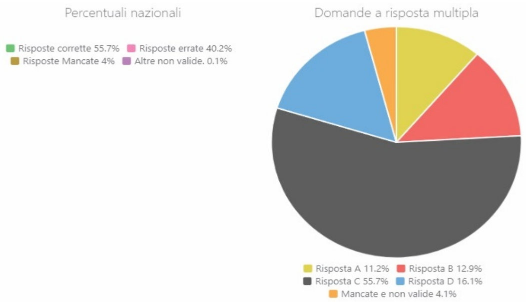
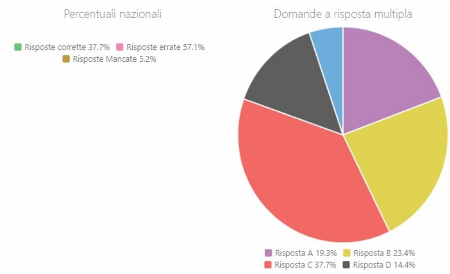
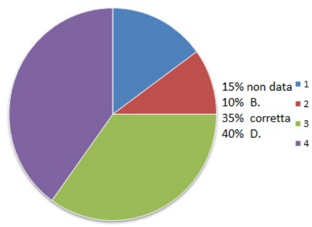


Figura 3.10: D1 2014

Esercizio 10 3 alunni non hanno risposto, 2 hanno scelto B., 7 C., 8 D. La domanda è risultata difficile, anche se la teoria è stata già affrontata dai ragazzi.

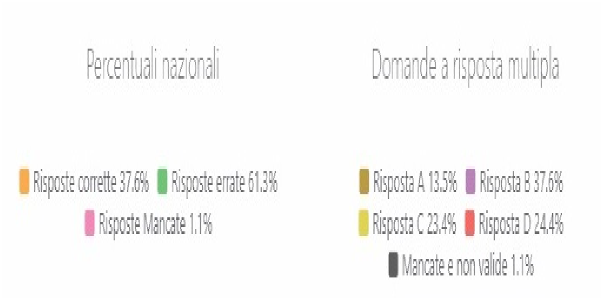


(a) Percentuali nazionali

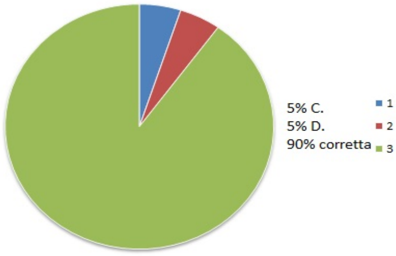


(b) Percentuali ottenute

Esercizio 11 Solo due alunni hanno sbagliato (C. e D.). La domanda non è discriminante.



(a) Percentuali nazionali



(a) Percentuali ottenute

Esercizio 12 Risoluzione di un'equazione. Il metodo è conosciuto dalla terza classe della scuola secondaria di primo grado. Doveva quindi risultare facile, ma così non è stato. Un alunno ha risposto 39, senza completare dividendo per 3; 5 alunni non hanno risposto, forse perchè si aspettavano risposte a scelta multipla. Un altro alunno ha sbagliato il risultato, 13 alunni hanno risposto correttamente.

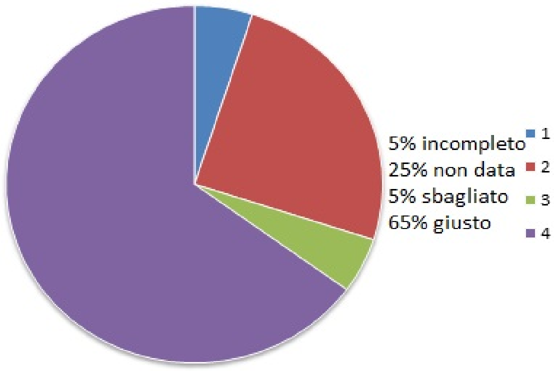


Figura 3.11: Domanda 12

3.2.6 Conclusioni

La comprensione dei costrutti logici risulta essere difficile. La classe dimostra di aver appresso il concetto di controesempio, e del fatto che si può fornire un esempio per confutare un affermazione, ma poi per estensione usa un caso particolare per dimostare un'affermazione generale. In seconda si sono appena affrontati questi concetti, più si allontaneranno più la situazione peggiorerà. E' importante invece che l'argomento venga compreso a fondo, in modo che possa fare da base per i teoremi che i ragazzi incontreranno in futuro.

Il test ha sottolineato il legame che c'è tra teoria e pratica. Gli alunni considerano la teoria al servizio della pratica. Ad esempio sanno fare benissimo la radice di un numero, ma quando gli è richiesta esplicitamente la teoria allora iniziano i dubbi. Se poi gli esercizi riguardano l'applicazione della teoria su aspetti più astratti, come per esempio le scomposizioni e non le radici (eventuamente controllabili con la calcolatrici), la faccenda diventa ancora più seria. La teoria passa in secondo piano. Sembra che pratica e teoria siano avvertiti dagli studenti come due cassetti separati dello stesso mobile. All'occorrenza si apre l'uno o l'altro, ma mai insieme e tra di essi non c'è possibilità di scambio, se non per qualche sforzo fatto insieme al docente. In particolare per gli alunni risultano più facili gli esercizi concreti, che hanno dei numeri espliciti, mentre le incognite spaventano e bloccano. Gli esercizi 11 e 12 sono stati costruiti in modo analogo, ma in uno viene fornita un'ambientazione, nel secondo no. Mentre al primo risponde correttamente la quasi totalità della classe, al secondo alcuni lasciano addirittura in bianco. La pratica e il concreto sono i preferiti dai ragazzi, ma in matematica occorre aprire anche il cassetto della teoria e creare un collegamento fra i due scomparti. In Algebra soprattutto il legame tra teoria-pratica e astratto-concreto è molto importante. Ma quale delle due può aiutare gli studenti ad avere una giusta percezione della difficoltà?

Figura 3.12: Teoria o pratica?

Capitolo 4

Classe terza liceo scientifico

4.1 Compito

I batteri *Testo del problema*

Una colonia di batteri che vive su un substrato gelatinoso, raddoppia la propria superficie ogni mese e ricopre tutta la superficie del gel in 20 mesi. Quanto tempo impiegano a ricoprire il gel 4 colonie? Con quale equazione si può descrivere il problema?

Questo esercizio è un esempio di gioco matematico. E' stato proposto anche alla classe prima ma con una richiesta leggermente diversa. Si vuole indagare come ragazzi un pò più grandi rispondano ad un quesito non standard, infatti, non appartiene ad una tipologia di esercizi che è trattata esplicitamente a scuola, ma al ragazzo si forniscono tutti gli strumenti logici e di calcolo indirettamente. Nonostante questo lo studente potrebbe trovarsi spiazzato, perchè non riconosce immediatamente lo schema logico da seguire. E' anche possibile che lo studente studioso, che conosce bene gli esercizi scolastici, venga superato da uno studente meno ligio ma più incline al ragionamento pratico. Questo esercizio è stato inserito apposta perchè è nettamente in contrasto con gli altri, tutti esercizi sull'ellisse. La classe a cui è stato sottoposto il test, aveva appena terminato il capitolo sull'ellisse. Ci aspettiamo quindi che gli studenti affrontino bene tutti gli esercizi sull'ellisse, ma che davanti a questo si trovino in difficoltà. Vogliamo invitare gli studenti a ragionare anche se si trovano davanti a qualcosa di diverso.

Soluzione

L'estensione della colonia può essere descritta dall'equazione

$$n_x = 2^x \cdot n_0$$

con n_o che indica l'estensione iniziale della colonia e n_x che indica la situazione al mese x e che dipende dall'estensione iniziale della colonia. Possiamo calcolare $2^{20} = 524288$, per cui la superficie finale sarà 524288 volte quella iniziale. Se invece di una colonia ne abbiamo 4, il problema è equivalente a chiedersi quanto tempo impega una colonia a ricoprire un quarto della superficie totale, cioè $131072x_0$. Ricordando l'equazione data, si tratta di trovare quale potenza del due equivalga a 131072. Con la calcolatrice troviamo 18.

Si può notare che il problema era risolvibile anche meccanicamente, cioè partendo da una superficie 1, raddoppiarla ogni volta finchè non si trova $2^{20} = 524288$. Si costruisce poi la tabella che partendo da 4 raddoppi ogni volta il numero, e si ricerca in corrispondenza di quale iterazione si trova 524288. Anche questo metodo porta alla soluzione giusta, ma rivela un ragionamento meno sofisticato e meno matematico del precedente.

Mese	Area ricoperta: unità di misura A	Mese	Area ricoperta: unità di misura A
1	1	11	1024
2	2	12	2048
3	4	13	4096
4	8	14	8192
5	16	15	16384
6	32	16	32768
7	64	17	65536
8	128	18	131072
9	256	19	262144
10	512	20	524288

Mese	Area ricoperta	Mese	Area ricoperta
1	4 A	11	4096
2	8	12	8192
3	16	13	16384
4	32	14	32768
5	64	15	65536
6	128	16	131072
7	256	17	262144
8	512	18	524288
9	1024		
10	2048		

Figura 4.1: Batteri

Punti di intersezione

Testo del problema

Supponi che ti siano date una parabola e un'ellisse e che ti venga chiesto di studiare il numero di punti (punti di intersezione) che queste due curve hanno in comune. In che modo puoi trovare i punti di intersezione? Quanti possono essere? Che relazione c'è tra il numero di punti trovato e il grado del polinomio?

Questo esercizio richiede di riassumere in una sintesi le conoscenze acquisite nell'ambito della geometria analitica e di collegarle all'Algebra. Spesso questi collegamenti restano nascosti e non sono ben chiari nella mente del ragazzo.

Soluzione

Per trovare i punti di intersezione tra due curve, in generale, occorre mettere a sistema le rispettive equazioni. In questo caso mettiamo a sistema le equazioni di un'ellisse, che è rappresentata da un'equazione di secondo grado in x, e di una parabola, anch'essa data come un'equazione di secondo grado in x. Mettendo a sistema otteniamo:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Andando a sostituire si trova un polinomio di quarto grado di cui dobbiamo trovare le soluzioni per trovare una delle due coordinate dei punti di intersezione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(ax^2 + bx + c\right)^2}{b^2} = 1$$

Per un polinomio di quarto grado le soluzioni possono essere: $0, 1, 2, 3, 4$. Nel caso in cui siano 0 le due curve non si intersecano. Nel caso in cui siano 4 le curve si intersecano in 4 punti. La parabola può intersecare l'ellisse in due punti se il vertice della parabola cade dentro l'ellisse, in uno solo se il vertice cade sul bordo dell'ellisse e non la interseca, in tre se il vertice della parabola cade sul bordo ed interseca l'ellisse.

Punti di intersezione; esercizio

Testo del problema

Determina i punti di intersezione tra l'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

e la retta che passa per l'origine e per $P(2, 4)$.

E' un classico esercizio sull'intersezione. Il ragazzo non dovrebbe incontrare difficoltà nel suo svolgimento, dato che l'argomento è appena stato affrontato in classe.

Soluzione

Dobbiamo per prima cosa trovare l'equazione della retta: possiamo usare l'equazione della retta passante per due punti: $A(0, 0)$ e $B(2, 4)$

$$\frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{x - x_a}{x_b - x_a}$$

$$\frac{y - 0}{4 - 0} = \frac{x - 0}{2 - 0}$$

$$\frac{y - 0}{4} = \frac{x - 0}{2}$$

$$y = 2x$$

Ora mettiamo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = 2x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} y = 2x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{4x^2}{16} = 1 \end{cases}$$

Considerando solo la seconda equazione:

$$2x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Ora sostituendo la x nell'altra equazione troviamo le coordinate dei punti: $A = (-1, 41, -2.83)$ e $B = (1.41, 2.83)$

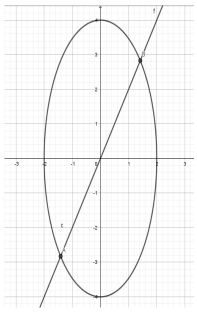


Figura 4.2: Intersezioni

Coniche

Testo del problema

Date le seguenti coniche, scegli se sono rette, circonferenze, ellissi, parabole o nessuna delle precedenti:

- A. $y = \frac{5}{6}x^2 + x$
- B. $5y + 3x - 6 = 0$
- C. $x^2 + y^2 + 3x + 9y + 2 = 0$
- D. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$
- E. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{16} = 1$
- F. $16x^2 + 4y^2 = 64$

Le risposte a scelta multipla sono state create in modo da riprendere tutti gli argomenti di geometria analitica affrontati dalla classe: retta, circonferenza, parabola, ellisse scritta sia in forma canonica che non e in più l'iperbole. L'esercizio vuole essere un riassunto degli argomenti trattati in modo che lo studente ragioni sulle incognite e i loro esponenti.

Soluzione

Le coniche date sono nell'ordine: parabola, retta, circonferenza, ellisse, iperbole (nessuna delle precedenti), ellisse. Per riconoscere le coniche (almeno in questi esercizi di terza liceo) occorre osservare con quali gradi x e y compaiono nell'equazione e, se necessario, cercare di scrivere le equazioni nella forma standard che è più immediata da riconoscere. L'ellisse e l'iperbole si differenziano per un segno meno al membro sinistro delle rispettive equazioni standard.

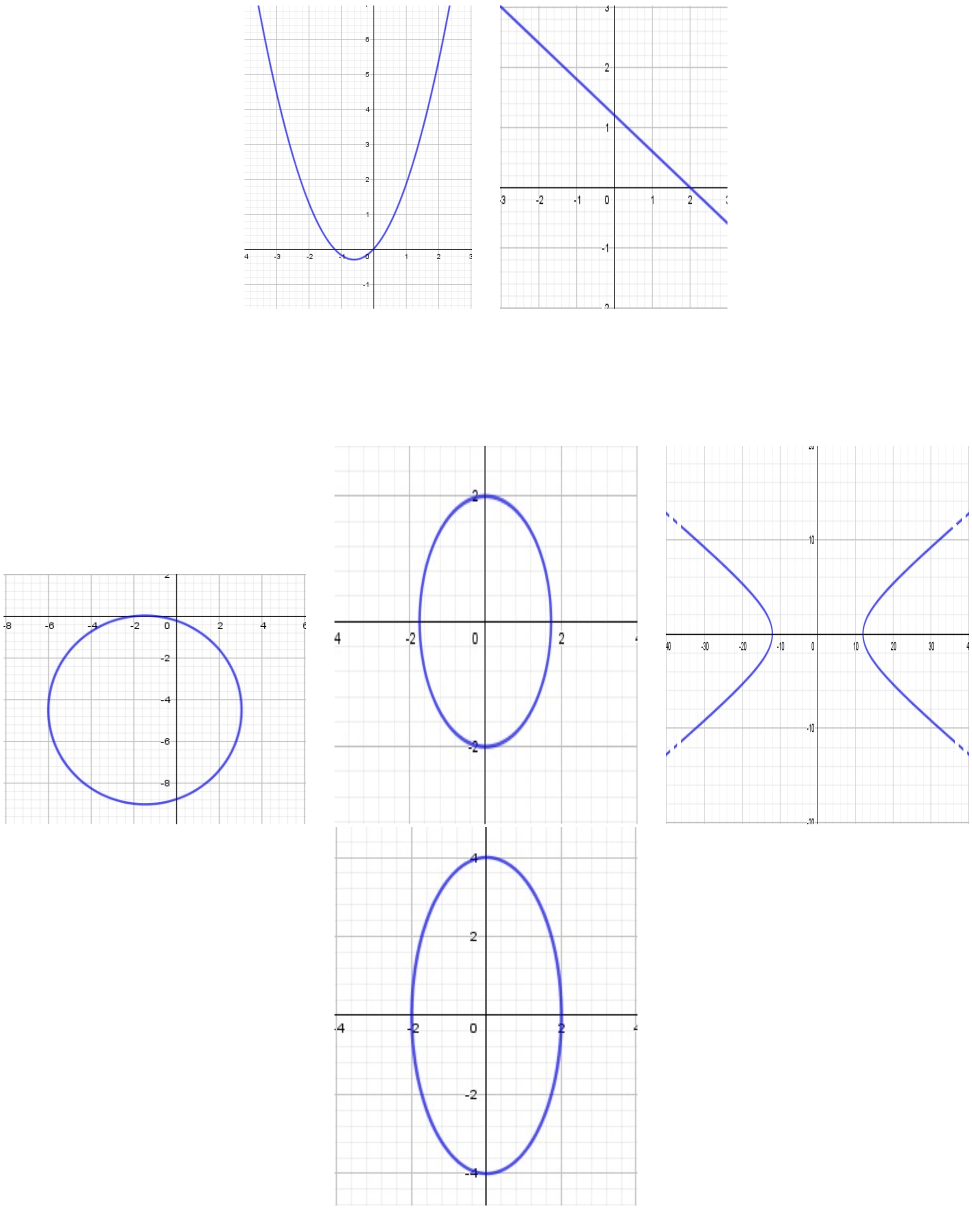


Figura 4.3: Esercizio 4

Coniche

Testo del problema

Scrivi l'equazione dell'ellisse, avente centro nell'origine, tangente alla retta di equazione $y = -\frac{3}{2}x - 3$ e avente un fuoco nel punto di intersezione tra la retta $x = -1$ e l'asse delle x.

Questo esercizio è il più difficile tra quelli proposti perchè richiede una conoscenza approfondita della materia e una certa abilità di calcolo. Come ulteriore difficoltà il fuoco dell'ellisse non viene dato come punto ma come intersezione tra due rette. La risoluzione richiede poi di impostare nella giusta maniera il sistema.

Soluzione

Scriviamo l'equazione dell'ellisse in un modo più comodo per i calcoli: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Ricordiamo che, dati i fuochi di coordinate $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, la semidistanza focale c, a semiasse maggiore e b semiasse minore, sono in relazione grazie a $c^2 = a^2 - b^2$, sapendo che la semidistanza focale vale 1 si ha che $a^2 - 1 \geq 0$. Sostituiamo la relazione nota nell'equazione dell'ellisse:

$$(a^2 - 1)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - 1)$$

Ora intersechiamo con la retta l'ellisse.

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x - 3 \\ (a^2 - 1)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - 1) \end{cases}$$

Sostituiamo la prima equazione nella seconda. Per semplicità scriveremo solo la seconda equazione:

$$a^2x^2 - x^2 + \frac{9}{4}x^2a^2 + 9a^2 + 9xa^2 - a^4 + a^2 = 0$$

$$(\frac{13}{4}a^2 - 1)x^2 + 9xa^2 + 10a^2 - a^4 = 0$$

Imponiamo la condizione di tangenza:

$$81a^4 + 4a^2(\frac{13}{4}a^2 - 1)(a^2 - 10)$$

$$81a^4 + 13a^6 - 130a^4 - 4a^4 + 40a^2$$

$$13a^6 - 53a^4 + 40a^2$$

raccogliendo a^2

$$a^2(13a^4 - 53a^2 + 40) = 0$$

da cui $a = 0$ come prima soluzione e risolvendo $a^2(13a^4 - 53a^2 + 40) = 0$ con un cambiamento di variabile: $a^2 = t$ abbiamo

$$13t^2 - 53t + 40 = 0$$

le cui soluzioni sono: 1 e $\frac{40}{13}$. Per la condizione che avevamo imposto all'inizio, solo $a = \frac{40}{13}$ è accettabile, da cui $b^2 = \frac{40}{13} - 1$ cioè $\frac{27}{13}$

L'equazione dell'ellisse cercata è allora:

$$\frac{13x^2}{40} + \frac{13y^2}{27} = 1$$

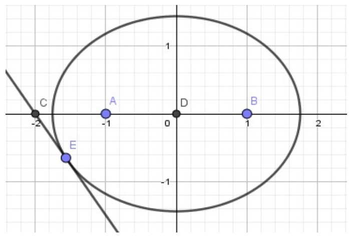


Figura 4.4: Esercizio 5

Ombre

Testo del problema

Supponi di avere un anello posizionato parallelamente al muro, illuminato da una torcia. Quali ombre puoi proiettare sul muro se sposti la torcia ma tieni fisso l'anello?

Questo esercizi vuole stimolare la visione dinamica dei ragazzi. All'inizio potrebbe sembrare difficile ma poi ragionando il tutto si risolve in pochi passi. L'arrivo alla soluzione corretta comprende il capire che la torcia può essere inclianata di varie angolazioni.

Soluzione

Se la torcia è posta perpendicolarmente all'anello l'ombra sarà una circonferenza. Se si inclina la torcia otteniamo un'ellisse, se la incliniamo di molto otteniamo una parabola. Se incliniamo ancora la torcia otteniamo un'iperbole.

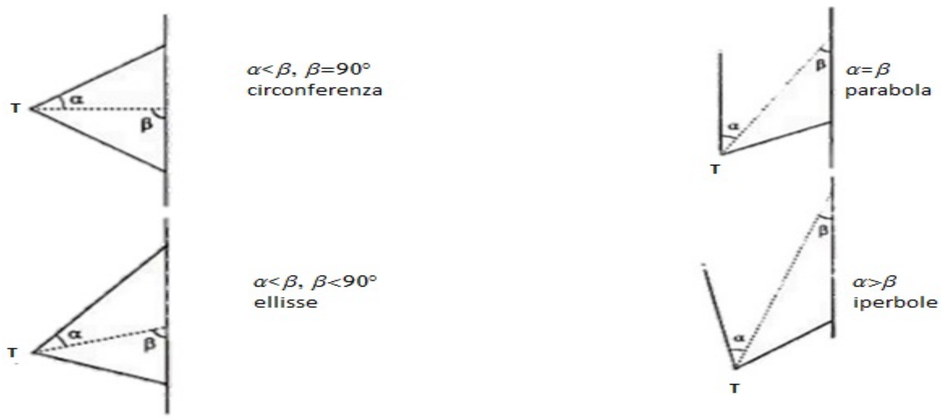


Figura 4.5: Ombre e coniche; T rappresenta la torcia

Fuochi

Testo del problema

Scrivere l'equazione dell'ellisse i cui fuochi sono i punti $F_1 = (6, 1)$ e $F_2 = (2, 1)$ e il cui semiasse maggiore misura 5.

Ecco un altro classico esercizio che si esegue quando si affronta l'ellisse. La classe non dovrebbe trovare alcuna difficoltà nell'eseguirlo.

Soluzione

Per definizione di ellisse, indicato con $P = (x, y)$ un suo generico punto e con a il semiasse maggiore, si ha:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Nel nostro caso $2a = 10$. Quindi:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-1)^2} = 10$$

svolgendo i calcoli si ottiene

$$21x^2 + 25y^2 - 168x - 50y - 164 = 0$$

Tangenti

Testo del problema

Dal punto $P = (3\sqrt{2}, 0)$ condurre le tangenti all'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Questa tipologia di esercizi è stata affrontata in classe. L'esercizio resta comunque di media-alta difficoltà per la presenza di calcoli non immediati e per il collegamento che c'è tra tangenza e il discriminante dell'equazione risolvente.

Soluzione

La generica retta per P ha equazione:

$$y = m\left(x - 3\sqrt{2}\right)$$

Poniamo ora a sistema l'equazione della retta con quella dell'ellisse; l'equazione risolvente il sistema dovrà avere il discriminante nullo (condizione di tangenza):

$$\begin{cases} y = m\left(x - 3\sqrt{2}\right) \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$$

Da cui:

$$\left(9m^2 + 4\right)x^2 - 54\sqrt{2}m^2 x + 162m^2 - 36 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$m = \pm\frac{2}{3}$$

Le due tangenti hanno equazione:

$$y = -\frac{2}{3}\left(x - 3\sqrt{2}\right) y = \frac{2}{3}\left(x - 3\sqrt{2}\right)$$

Disegnare
Testo del problema
Rappresenta l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

L'esercizio è di bassa difficoltà in quanto imparare a disegnare l'ellisse, data la sua equazione, è uno dei primi problemi che si affrontano nello studio della conica.

Soluzione
Dall'equazione dell'ellisse si ricava che: $a = 2$ e $b = 1 \Rightarrow a \geq b$ ha i fuochi sull'asse x e risulta $c^2 = a^2 - b^2$. Punti di intersezione con asse x: $(+2, 0)$ e $(-2, 0)$ Punti di intersezione con asse y: $(+1, 0)$ e $(-1, 0)$. I fuochi hanno coordinate:

$$F_1\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$$

$$F_2\left(+\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$$

Per cui $F_1 = \left(-\sqrt{3}\right)$ e $F_2 = \left(\sqrt{3}\right)$

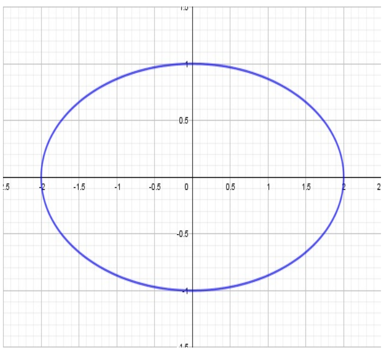


Figura 4.6: Esercizio 9

Ellisse oppure no?
Testo del problema

Cosa rappresenta la seguente equazione? Descrivila brevemente.

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Lo studente non dovrebbe avere difficoltà nel riconoscere che l'equazione rappresenta un'ellisse. Deve però accorgersi che questa ha i fuochi sull'asse delle ordinate.

Soluzione

Siano $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$ le coordinate dei punti di intersezione dell'equazione dell'ellisse con l'asse delle ascisse e $B_1 = (0, -b)$, $B_2 = (0, b)$ le coordinate dei punti di intersezione tra l'equazione dell'ellisse e l'asse delle ordinate, b la lunghezza del semiasse maggiore e a quella del semiasse minore. Dall'equazione data dall'esercizio, risulta $a = 1$ e $b = 4$, $a \leq b$ dunque l'esercizio propone un'ellisse con i fuochi sull'asse delle y.

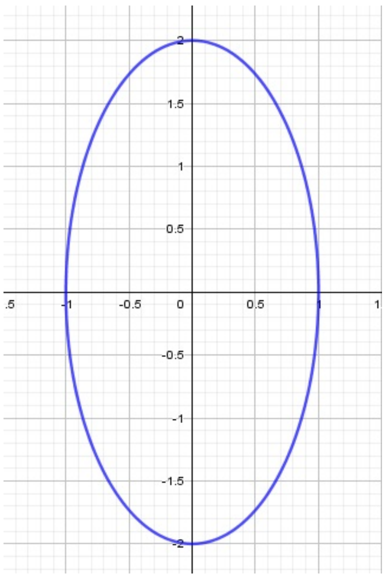


Figura 4.7: Esercizio 10

4.2 Presentazione dati

4.2.1 La classe e l'insegnante

La classe è composta da 25 alunni, di cui 5 maschi e 20 femmine. La docente, che li conosce dalla classe terza e che opera sulla classe sia in matematica che in fisica, riferisce che una parte di studentesse studiano e si applicano, mentre il resto della classe risulta essere poco intuitivo e lavora lentamente, tanto che spesso occorre riprendere concetti appartenenti al biennio. L'insegnante riferisce che, a suo avviso, il fatto di avere una classe molto omogenea e in prevalenza femminile, non favorisce lo scambio tra alunni e la costruzione positiva e competitiva di un gruppo classe. La classe risulta piatta ed omogenea. La prova è stata data agli studenti il

giorno in cui la docente ha riconsegnato le verifiche sul capitolo dell'ellisse. La verifica conferma il giudizio che l'insegnante ha sulla classe. La professoressa riferisce anche che finchè si tratta di risolvere esercizi visti, o comunque familiari agli alunni i problemi sono limitati, ma quando si passa allo studio di parametri, o a quesiti che richiedono un livello più elevato di astrazione, solo uno o due alunni riescono.
Il libro adottato è: "La matematica a colori" di Leonardo Sasso. L'insegnante ha un metodo di insegnamento coinvolgente, in quanto spesso fa domande e richiede l'intervento dei ragazzi. In questo modo cerca di mantenere l'attenzione degli alunni. Durante le lezioni la classe tende ad essere distratta. La docente alterna lezioni tradizionali con lavagna e gesso a lezioni più innovative avvalendosi di video e del computer. Durante le lezioni viene sottolineato più l'aspetto pratico della teoria per la risoluzione degli esercizi, un pò perchè la docente, laureata in fisica, predilige questo approccio, un pò perchè sono gli alunni stessi che lo richiedono.

4.2.2 Modalità di somministrazione della prova

La prova viene consegnata agli studenti il giorno della riconsegna della verifica sull'ellisse. Viene data loro una settimana per svolgere il test a casa. La prova è stata concordata con l'insegnante, in modo che fosse motivo di ripasso per gli alunni che hanno ottenuto buoni voti nella verifica e di recupero per gli alunni che hanno trovato difficoltà. L'interrogazione per gli alunni che proveranno a recuperare si baserà proprio sul test. Dopo aver sentito la descrizione che l'insegnante dà della classe, nel test sono stati inseriti appositamente due esercizi, il primo e il sesto volutamente più di ragionamento. Gli altri esercizi sono standard e simili a quelli che la professoressa ha proposto durante il compito.
Dopo una settimana i compiti sono stati riconsegnati tutti e 25, 2 dei quali non hanno le tabelle sulle difficoltà degli esercizi, quindi per l'analisi dei dati sono stati considerati 23 compiti, scartando i due incompleti. La classe ha eseguito seriamente il test, per cui i dati raccolti si ritengono affidabili.

4.2.3 Esposizione dei dati raccolti

Il test vuole valutare la percezione della difficoltà degli esercizi, che i ragazzi colgono leggendo gli esercizi e poi risolvendoli. Si vuole valutare anche se la percezione della difficoltà cambia dopo che gli esercizi sono stati svolti. I dati sono raccolti tramite le due griglie presenti nei compiti.
Analizziamo inizialmente i due estremi della griglia corrispondenti all'esercizio più facile ed a quello più difficile. Dopo aver contato quante volte ogni esercizio viene scelto come il più facile e quante volte come il più difficile, separatamente nella prima classifica e poi nella seconda, calcoliamo le percentuali.

	Prima scelta					Seconda scelta			
	Facile	%	Difficile	%		Facile	%	Difficile	%
Es 1	2	8,70%	14	60,87%		2	8,70%	10	43,48%
Es 2	1	4,35%	1	4,35%		1	4,35%		
Es 3	4	17,39%				4	17,39%		
Es 4	1	4,35%				1	4,35%		
Es 5			3	13,04%				7	30,43%
Es 6	1	4,35%	2	8,70%		1	4,35%	3	13,04%
Es 7	1	4,35%				1	4,35%		
Es 8			2	8,70%		1	4,35%	2	8,70%
Es 9	11	47,83%				12	52,17%		
Es 10	2	8,70%	1	4,35%				1	4,35%

Figura 4.8: Scelte esercizio più facile e più difficile

Visualizziamo i dati nei seguenti quattro areogrammi che rappresentano le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e di quello più difficile nei due diversi momenti. Da in alto a sinistra a in basso a destra rappresentano rispettivamente le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e più difficile secondo una prima stima, l'esercizio più facile e quello più difficile secondo una seconda stima.

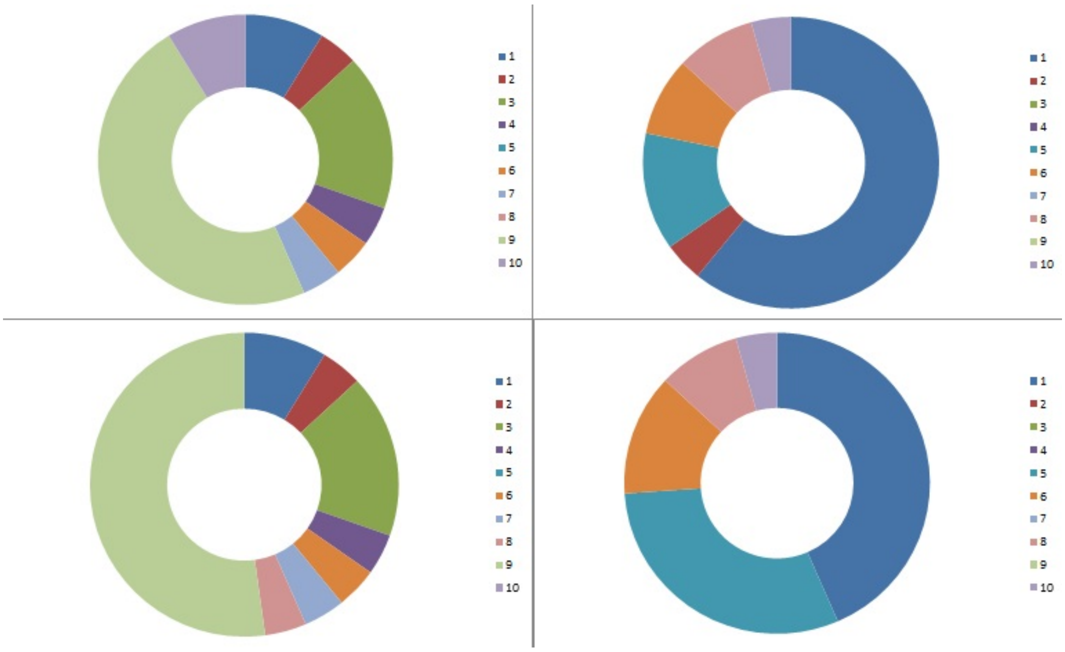


Figura 4.9: Areogrammi

Valutiamo ora la percezione della difficoltà degli studenti. Si è deciso di assegnare da uno a dieci punti agli esercizi a seconda della posizione occupata nella griglia: un punto all'esercizio più facile, 10 all'esercizio più difficile. I punteggi ottenuti dal singolo esercizio sono poi stati sistemati in una tabella. Per ogni esercizio abbiamo sommato i vari punteggi ottenuti nei vari test e abbiamo diviso la somma per 23. Abbiamo ottenuto una media pesata per la difficoltà dell'esercizio. Il dato rivela quanto il singolo esercizio è risultato difficile per la classe. Riportiamo le tabelle dei punteggi per la prima stima e per la seconda.

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Es 9	Es 10
	1	4	8	5	2	3	7	6	9	10
	10	1	2	3	9	8	7	4	5	6
	10	3	4	5	8	9	7	6	1	2
	1	5	2	8	10	3	7	6	4	9
	8	10	4	7	6	9	3	2	5	1
	10	2	1	5	7	8	3	6	4	9
	10	7	4	3	6	9	8	5	1	2
	10	2	3	1	5	6	4	8	7	9
	10	7	4	3	9	8	5	6	1	2
	8	7	4	3	9	5	6	10	1	2
	8	9	1	4	7	10	2	6	5	3
	10	8	7	6	5	9	3	4	1	2
	10	2	6	7	3	1	4	9	5	8
	10	9	3	5	4	7	2	6	1	8
	5	4	7	2	10	3	6	9	1	8
	10	3	4	7	9	8	5	6	1	2
	3	6	5	7	8	4	9	10	2	1
	10	4	5	6	7	9	1	8	2	3
	7	2	1	9	10	4	3	5	6	8
	10	6	3	4	9	7	5	8	1	2
	10	2	1	7	9	8	3	4	5	6
	10	3	6	2	9	8	5	2	1	4
	2	9	8	5	6	10	4	3	1	3
Media	7,95652	5	4,04348	4,95652	7,26087	6,78261	4,73913	6,04348	3,04348	4,78261

Figura 4.10: Prima stima

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Es 9	Es 10
	1	3	6	4	2	8	7	5	9	10
	10	4	3	5	9	8	6	6	1	2
	10	8	5	3	6	9	7	4	1	2
	1	9	5	7	6	10	2	8	4	3
	8	6	5	4	10	7	9	1	3	2
	10	4	1	6	7	8	2	5	3	7
	10	5	3	4	8	7	6	9	1	2
	3	6	4	7	8	10	5	9	1	2
	10	3	5	4	8	6	7	9	1	2
	8	7	4	3	9	5	6	10	1	2
	9	8	1	3	7	10	2	6	4	5
	10	8	6	2	7	9	5	4	1	3
	10	2	3	4	8	1	5	8	6	7
	8	1	4	5	10	9	3	7	2	6
	5	4	7	2	10	3	6	9	1	8
	9	3	5	4	10	6	7	8	1	2
	10	6	5	4	8	7	3	9	1	2
	4	6	7	8	9	3	1	10	2	5
	9	7	1	8	10	6	2	3	4	5
	10	5	3	4	9	6	8	7	1	2
Media	7,75	5,25	4,15	4,55	8,05	6,9	4,95	6,85	2,4	3,95

Figura 4.11: Seconda stima

I dati delle tabelle vengono presentati anche in forma di istogramma. Nello stesso grafico poniamo due serie di istogrammi uno per la prima scelta e uno per la seconda, in modo che il confronto risulti immediato.

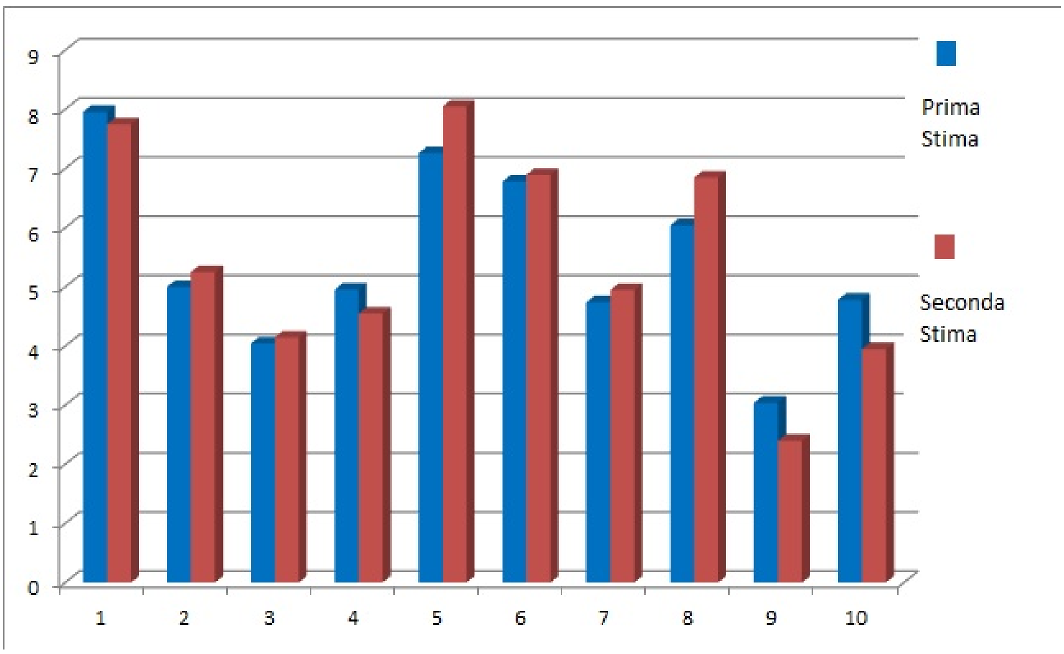


Figura 4.12: Istogramma

In modo analogo, viene assegnato un punteggio anche alla classifica attesa:

10	9	1	2	6	4	3	7	8	5

Figura 4.13: Classifica attesa

I punteggi degli esercizi sono racchiusi nel seguente istogramma azzurro che viene messo a confronto con quelli risultanti dalle prove dei ragazzi.

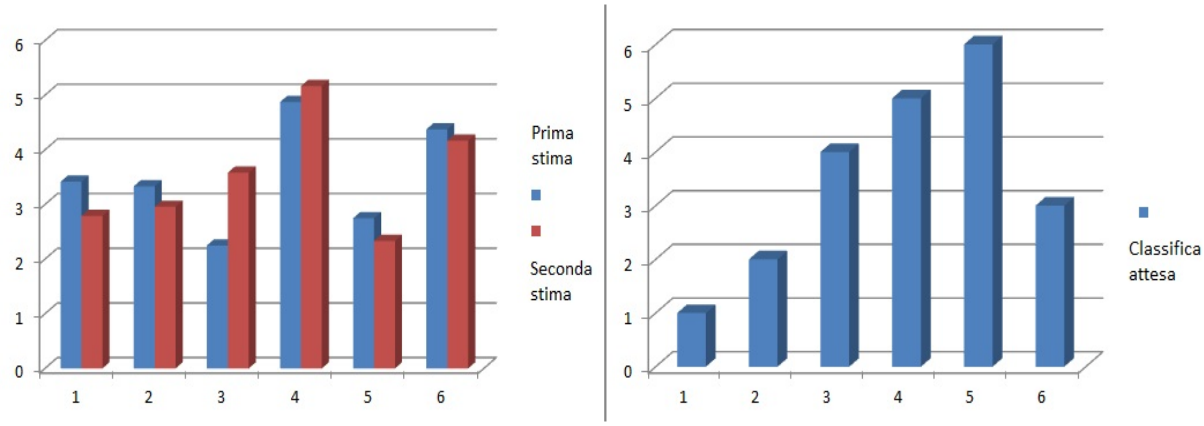


Figura 4.14: Confronto tra istogrammi

4.2.4 Motivazione esercizio più difficile

Nel test viene richiesto esplicitamente di motivare la scelta dell'esercizio più difficile. Chi ha scelto l'esercizio 1 come il più difficile motiva affermando che l'argomento non è ancora stato affrontato in classe. Qualcuno afferma di non essere riuscito ad impostarlo. Chi ha scelto l'esercizio 5 come il più difficile invece asserisce che sia il più difficile per via dei lunghi e complessi calcoli a più incognite in cui ci si può confondere. Alla richiesta di motivare la scelta hanno risposto 9 studenti su 23.

4.2.5 Correzione esercizi

Esercizio 1 Il primo esercizio è sicuramente quello che ha suscitato più perplessità. Per buona parte gli studenti ritengono di non avere le capacità per affrontarlo.
Durante la correzione del primo esercizio sono emerse alcuni nuclei. Gli alunni non riconoscono che l'ncognita x possa essere all'esponente, per loro all'esponente ci sono solo numeri. Anche se alcuni si accorgono che si tratta di un'esponenziale, poi non scrivono l'equazione come tale. La classe ha affrontato nel corso dell'anno lo studio degli esponenziali e dei logaritmi. Compare inoltre il contratto didattico. Il test è stato presentato all'interno del capitolo delle coniche, quindi, secondo lo studente la soluzione comprenderà, in qualche modo, l'equazione di una conica; qualcuno scrive l'equazione $2^{20}x = 4xy$ in cui y indica il numero di mesi e x la colonia. Altri hanno semplicemente fatto $20/4 = 5$. In generale le soluzioni appaiono disconnesse e apparentemente senza un filo logico. Sembra che la soluzione sia arrivata da internet e in parte ricopiata o che si arrivi alla soluzione per fortuna. 5 o 6 ragazzi risolvono il problema impostando un sistema:

$$\begin{cases} y = x2^{20} \\ y = 4x2^{k} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema i ragazzi presentano la giusta soluzione, ma nessuno ha scritto l'equazione che descrive il problema. 4 studenti non hanno neanche iniziato il quesito e altri 4 lo hanno proprio sbagliato: impostando proporzioni o sbagliando le proprietà delle potenze. Nessuno ha usato il metodo meccanico, si rivela quindi il cammino verso un pensiero più astratto.

Esercizio 2 Gli alunni hanno capito che per trovare i punti di intersezione tra due coniche occorre mettere a sistema le rispettive equazioni. Spiegano anche con formule e passaggi che il polinomio che ne deriva è di quarto grado e ne deducono che al massimo ci saranno 4 soluzioni. 11 alunni riconoscono che il numero di soluzioni sarà uguale al grado del polinomio.

Esercizio 3 L'esercizio è stato svolto correttamente da quasi tutta la classe. Solo 3 alunni hanno dato un solo punto di intersezione dimenticando il secondo.

Esercizio 4 La maggioranza degli alunni risponde correttamente al quesito (8 negativi.) Qualcuno esplicita i passaggi di scrittura delle coniche nella forma standard. Tra i negativi solo 1 ha sbagliato la prima terzina, mentre gli altri hanno sbagliato la seconda terzina, in particolare la penultima risposta non è stata riconosciuta come non appartenente alle categorie precedenti. Nella prima terzina erano state sistemate coniche che i ragazzi conoscevano da più tempo: parabola, retta e circonferenza. Sono state sbagliate molto meno rispetto a quelle più recenti.

Esercizio 5 Come atteso l'esercizio risulta essere il più difficile. E' stato inserito dopo esplicita richiesta dell'insegnante, la quale avendo già constatato nel compito la difficoltà degli alunni ad operare con i parametri, ha voluto un esercizio di ripasso in tal senso. La prova è risultata molto discriminante. Infatti solo 7 alunni l'hanno svolta correttamente, 3 non l'hanno neanche iniziata, 7 non l'hanno terminata e 6 hanno impostato bene l'esercizio ma si sono persi nei calcoli. L'esercizio richiedeva sia di aver capito bene la teoria sia di avere abilità nei calcoli. Per migliorare l'abilità di calcolo occorre fare molti esercizi, in modo da prendere sicurezza e da velocizzarsi.

Esercizio 6 Questo esercizio è risultato complicato da visualizzare e da capire: 1 alunno non ha svolto l'esercizio, 1 ha visto solo la circonferenza, 3 hanno visto lo zoom di una circonferenza, non capendo lo spostamento della torcia, 3 solo un'ellisse. 2 hanno visto anche un segmento, ma in quel caso l'ombra cadrebbe su un altro muro e non in quello descritto dall'esercizio. Solo uno studente ha parlato di una parabola. Il resto della classe ha descritto una circonferenza e un'ellisse con diverse eccentricità a seconda dell'inclinazione della torcia. Quindi solo uno studente si è avvicinato alla soluzione, ma nessuno ha fornito la soluzione completa.

Esercizio 7 8 studenti hanno sbagliato l'esercizio perchè non hanno impostato l'equazione corretta. L'esercizio è risultato abbastanza discriminante, chi ha compiuto uno studio esclusivamente mnemonico dell'ellisse ha sbagliato ad impostare l'equazione perchè si è affidato a formule già date, il resto della classe ha invece saputo tradurre i dati nell'equazione risolvente.

Esercizio 8 L'esercizio è stato portato a termine dalla maggioranza degli studenti (15). E' un tipo di esercizio a cui i libri riservano molto spazio ed anche esercizi svolti. Lo studente si abitua pian piano a questa tipologia di esercizi. Tra chi ha sbagliato, alcuni hanno compiuto errori di calcolo, altri hanno riportato solo l'equazione di una retta, altri ancora hanno dato una risposta parziale non portando a termine i calcoli.

Esercizio 9 E' uno dei primi esercizi che gli studenti imparano a fare. E' risultato un esercizio poco discriminante. Infatti tutti gli studenti lo hanno eseguito correttamente. Gli alunni avrebbero potuto anche disegnare l'ellisse tramite Geogebra o con un programma simile, e confrontare i disegni. Essendo una classe che ha appena concluso il capitolo sull'ellisse l'esercizio non è risultato difficile. L'esercizio è stato eseguito anche da chi ha riscontrato difficoltà negli altri.

Esercizio 10 Quasi tutta la classe ha capito che si trattava di un'ellisse con i fuochi sull'asse delle ordinate. Qualcuno (6 studenti) però non ha scritto correttamente le coordinate dei fuochi, che non erano esplicitamente richiesti. Alcuni studenti hanno voluto rappresentare l'ellisse anche se non richiesto esplicitamente.

4.2.6 Conclusioni

In generale è interessante notare che a commettere errori di calcolo, a completare bene l'esercizio, a non riuscire ad impostare il procedimento siano più o meno sempre gli stessi studenti. Si rivela così lo stile di apprendimento che divide la classe in principalmente tre gruppi: chi studia ed è capace di applicare le conoscenze (risulta essere il gruppo dei più bravi), chi studia ma non ha la capacità di gestire le nuove informazioni assimilate e le vecchie conoscenze di base (per esempio commette ripetutamente errori di calcolo), chi non ha studiato e ha capito davvero poco dell'argomento e non inizia neanche l'esercizio.

Spesso si avverte che gli studenti hanno la necessità di rappresentare graficamente gli oggetti matematici con cui stanno lavorando. Da un lato questa necessità e il disegnare almeno i dati del problema aiuta a trovare la soluzione, dall'altro li lega molto ad una rappresentazione concreta. In matematica però non è sempre facile (o possibile) rappresentare gli oggetti con cui si sta lavorando. Gli studenti risultano molto attaccati alla visualizzazione. Per loro l'ellisse non è l'equazione che la rappresenta e da cui si possono ricavare tutte le informazioni che servono, ma principalmente il disegno della conica stessa. Il dover rappresentare a tutti i costi gli oggetti di lavoro, allontana i ragazzi dalla capacità di visualizzare astrattamente quanto richiesto.

L'esercizio sulle ombre rivela che è difficile per loro andare appena al di là di quello che hanno studiato nell'immediato. Fanno fatica a ragionare su qualcosa che non possono vedere concretamente, qualcuno addirittura confonde il muro su cui si proietta l'ombra. L'ottavo esercizio è significativo anche per quanto riguarda il contratto didattico secondo cui lo studente risponde quello che crede che il professore voglia sentirsi dire. "Non so bene cosa rispondere, ma il test tratta dell'ellisse, quindi per forza l'ombra sarà un'ellisse."

La matematica sembra allora essere un insieme di tacite convenzioni e compromessi che si instaurano tra il docente e il discente. In questo modo però si mette da parte l'intuito e le conoscenze fanno fatica ad affiorare. L'esercizio 1 è significativo in tal senso.

Anche se durante l'anno la classe ha studiato gli esponenziale, in molti tentano di descrivere l'equazione con una potenza che nei vari step della matematica si trova più indietro come concetto. Dopo tanto lavoro, quello che rimane sono i concetti più vecchi e non quelli più nuovi. Sembra che la matematica nella mente dei ragazzi sia come un mare in burrasca: appena viene spiegato un nuovo argomento vi è una gran confusione, ma poi lo studio, l'esercizio, ma soprattutto il tempo contribuiscono a schiarire le idee nuove nel mare di quelle acquisite, riportando la calma. Gli argomenti hanno bisogno di un tempo più o meno lungo di decantazione.

Gli esercizi sono essenziali per capire i concetti presentati, ma occorre che essi varino e spronino sempre lo studente verso nuovi orizzonti, contro un appiattimento asettico della materia.

Le difficoltà in matematica sono sempre in agguato, al di là della comprensione dei nuovi argomenti, spesso ci si trova a dover gestire contemporaneamente incognite, segni, parametri... Ne risulta una materia sfaccettata e complicata che spesso gli studenti rifiutano a priori. La matematica è costruttiva si impara un passo alla volta e si costruisce pian piano il grattacielo.

Figura 4.15: Dopo la burrasca

Capitolo 5

Classe quarta liceo scientifico

5.1 Compito

Il compito contiene 6 quesiti sul calcolo delle probabilità. La classe ha appena affrontato questo argomento, e si vuole testare la percezione della difficoltà su esercizi che sono stati risolti in classe e non solo. Si vuole studiare la differenza di percezione della difficoltà che si crea tra un argomento nuovo e il fatto che è appena stato studiato, con un argomento vecchio ma che il ragazzo usa da più tempo. Meglio un argomento nuovo che magari non è ancora stato ben consolidato o un argomento vecchio che si rischia di dimenticare?

Quesito 7 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2006 *Testo del problema*

Bruno de Finetti (1906 – 1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, alla domanda: "Cos'è la probabilità" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a questa risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Si richiede la conoscenza della teoria e di una definizione di probabilità che non è quella che di solito si usa negli esercizi. L'esercizio è considerato il più facile in quanto basta aver studiato per rispondere a questa domanda.

Soluzione

Tra le varie definizioni di probabilità proposte storicamente vi è quella soggettiva che si usa per gli eventi per i quali non è possibile calcolare teoricamente il numero dei casi favorevoli e possibili o non si può sottoporre l'evento a prove sperimentali ripetute nelle stesse condizioni. Essa viene applicata in vari casi reali, ad esempio se si vuole calcolare la probabilità di vittoria di una squadra di calcio ad un torneo. La valutazione soggettiva porta a considerare il calcolo delle probabilità come una scommessa, essa è definita come la misura del grado di fiducia che una persona attribuisce al verificarsi di un evento, secondo la sua opinione. Il valore si ottiene effettuando il rapporto tra la somma P che si è disposti a pagare in una scommessa e la somma V che si riceverà nel caso in cui l'evento si verifichi: $p(E)=\frac{P}{V}$. Bruno de Finetti è il matematico italiano che ha fissato i fondamenti della concezione soggettiva della probabilità; affermando che la probabilità non esiste intendeva dire che non esiste un modo oggettivo di interpretare un evento, poichè spesso è possibile solo darne valutazioni soggettive.

Quesito 6 prova d'esame corso ordinamento 2005 *Testo del problema*

Come si definisce n! e qual è il suo significato nel calcolo combinatorio? Qual è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?

Questo quesito è puramente teorico, è considerato il secondo più facile perchè richiede la conoscenza del fattoriale.

Soluzione

Per n intero positivo, n! è definito come il prodotto di tutti gli interi tra 1 e n. Inoltre 0!=1!=1. Nel calcolo combinatorio è il numero di permutazioni di un insieme di n elementi. Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è il numero di sottinsiemi di k elementi, di cui non importa l'ordine, di un insieme di n elementi (combinazioni semplici). Le disposizioni semplici, sono $n \cdot (n-1)...(n-k+1)$. Dividendo per le permutazioni di un insieme di k elementi e moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)!$ di ottiene:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1)...(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Quesito 9 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2008

Testo del problema

In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

Occorre ricordare la definizione di probabilità che di solito si usa negli esercizi, e fare attenzione all'avverbio esattamente. Si tratta quindi di contare i casi favorevoli attraverso la scelta tra disposizioni o combinazioni.

Soluzione

La probabilità P è espressa dal rapporto tra il numero f dei casi favorevoli e il numero u dei casi possibili. I casi possibili, cioè tutti i gruppi possibili di 8 studenti scelti su un totale di 20 studenti sono:

$$u = \binom{20}{8} = \frac{20!}{8! \cdot 12!} = 125970$$

I casi favorevoli si possono calcolare come prodotto tra il numero dei gruppi possibili di 4 studenti maschi sui 12 totali per il numero dei gruppi possibili di 4 studentesse su 8 totali:

$$f = \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 495 \cdot 70 = 34650$$

Quindi la probabilità richiesta risulta essere:

$$\frac{34650}{125970} = \frac{1155}{4199} \cong 27.5\%$$

Quesito 2 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2009

Testo del problema

Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biettive?

Rispetto a un semplice esercizio combinatorio, il quesito ha anche la difficoltà di ricordare le definizioni dei vari tipi di funzioni. *Soluzione*

Una funzione $f : A \to B$ si dice suriettiva quando ogni elemento del codominio B è immagine di almeno un elemento di A. Si dice iniettiva quando ogni elemento di B è immagine al più di un elemento di A. E' biettiva quando è sia iniettiva che suriettiva.

Suriettività:
le possibili coppie non ordinate di A sono:

$$\binom{4}{2} = 6$$

Ogni coppia può essere associata ai tre elementi di B con un totale di $6 \cdot 3 = 18$ associazioni. Per ogni associazione i due elementi di A non utilizzati (che hanno quindi immagine distinta in B) possono essere accoppiati in due modi diversi con i due elementi di B rimasti. In questo modo sia f una funzione da A a B: $f : A \longrightarrow B$, $\forall$ b$\in$ B $\exists$ almeno un a$\in$A tale che $f(a) = b$. Perciò un esempio di funzione suriettiva è data da: $f(1) = a$; $f(2) = a$; $f(3) = b$; ed infine $f(4) = c$; in questo modo abbiamo definito f e $\forall$ b$\in$ B $\exists$ almeno un a$\in$ A tale che $f(a) = b$.

Iniettvità:
Poichè il numero di elementi di A è maggiore di quello di B, non esistono funzioni iniettive

Biettività:
Dato che non esistono funzioni iniettive non esistono neanche funzioni biettive.

Quesito 5 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2009

Testo del problema

Si considerino le seguenti espressioni:$\frac{0}{1}$; $\frac{0}{0}$; $\frac{1}{0}$; 0^0; $0!$;

A quali di esse è possibile dare un valore numerico? Si motivi la risposta

L'esercizio potrebbe sembrare facile, ma richiede di ricordare varie proprietà, che a volte passano implicitamente nel corso degli anni di studio. Si ritiene che l'esercizio sia discriminante tra i ragazzi bravi che lo troveranno facile e quelli deboli che invece cadranno nell'errore.
Soluzione $\frac{0}{1}$ equivale al numero 0
$\frac{1}{0}$ è privo di significato, non esiste alcun numero che moltiplicato per 0 dia 1 $\frac{0}{0}$ e 0^0 non corrisponde a nessun valore numerico e sono forme indeterminate 0! è per definizione 1.

Quesito 7 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2009

Testo del problema

Si dimosti l'identità:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

con n e k numeri naturali e $n \geq k$

l'esercizio è ritenuto il più difficile perchè richiede una conoscenza formale della materia, in quanto non si tratta nè di un esercizio concreto, nè dell'esposizione di una definizione. Occorre aver capito bene la formula dei coefficienti binomiali.

Soluzione

Primo membro:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)}{(k+1) \cdot k!}$$

Secondo membro:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{(k+1)} = \frac{n!}{(k)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)}{(k+1) \cdot k!}$$

5.2 Presentazione dati

5.2.1 La classe e l'insegnante

La classe è composta da 26 alunni, di cui 10 maschi e 16 femmine. Il docente, che li conosce dalla classe prima e che opera sulla classe sia in matematica che in fisica, riferisce che la classe, ad eccezione di due o tre elementi, non segue le lezioni, e non si impegna finchè non è obbligata a farlo da una verifica o da un'interrogazione. Durante le lezioni vi è un brusio costante, e anche se richiamata la classe non cambia atteggiamento. Il docente riferisce anche che dalla correzione delle verifiche risulta spesso che la classe è divisa in due gruppi: chi studia ed ottiene dei buoni voti, e chi non studia e raggiunge dei scarsissimi risultati. Manca un gruppo di studenti che sia sul 6 o 7. Si presentano solo i due picchi estremi. Quest'andamento è condiviso anche da colleghi di altre materie. Il libro adottato è "La matematica a colori" di Leonardo Sasso. Il docente ha un metodo di insegnamento tradizionale. Spiega l'argomento alla lavagna, e risolve esercizi di livelli di difficoltà graduali. Le verifiche proposte trattano di argomenti visti in classe ad eccezione di un esercizio più difficile per le eccellenze. Il docente usa il proiettore come supporto per le parti più teoriche delle lezioni. Il docente è laureato in fisica ed ha un approccio molto pratico alla materia.

5.2.2 Modalità di somministrazione della prova

Su proposta dell'insegnante il test è stato sottoposto come verifica formativa in preparazione alla verifica sulla probabilità e calcolo combinatorio, dopo che l'insegnante ha concluso il capitolo. Il test ha avuto la durata di un'ora ed a differenza dei test proposti nelle altre classi, contiene solo 6 esercizi, proprio per permettere agli studenti di svolgerlo nel tempo stabilito. Le prove sono poi state corrette secondo una griglia, concordata con l'insegnante, secondo cui ad ogni esercizio vengono assegnati 18 punti, tranne al quarto a cui ne vengono assegnati 10. Inizialmente l'idea era quella di partire dal 9 ed assegnare 15 punti ad ogni esercizio. Ma il giorno della prova la classe ha sostenuto di non conoscere i termini del quarto esercizio, così è stata apportata la modifica alla correzione, altrimenti i voti sarebbero risultati troppo bassi. Il docente ha poi deciso di inserire sul registro solo i voti che non abbassavano la media ai ragazzi e solo se questi volevano. Il giorno della prova erano presenti 24 alunni, 14 dei quali hanno raggiunto la sufficienza.

5.2.3 Esposizione dei dati raccolti

Il test vuole valutare la percezione della difficoltà degli esercizi, che i ragazzi colgono leggendo gli esercizi e poi risolvendoli. Si vuole valutare anche se la percezione della difficoltà cambia dopo che gli esercizi sono stati svolti. Per una classe quarta la percezione inizia a diventare importante in vista della maturità. Tutti gli esercizi del test sono stati presi da vecchi compiti d'esame. I dati sono raccolti tramite le due griglie presenti nei compiti.
Analizziamo inizialmente i due estremi della griglia corrispondenti all'esercizio più facile e a quello più difficile. Dopo aver contato quante volte ogni esercizio viene scelto come il più facile e quante volte come il più difficile, separatamente nella prima classifica e poi nella seconda, calcoliamo le percentuali.

	Prima scelta				Seconda scelta			
	Facile	%	Difficile	%	Facile	%	Difficile	%
Es 1	3	12,50%	4	16,67%	6	25,00%	2	8,33%
Es 2	3	12,50%	5	20,83%	3	12,50%	3	12,50%
Es 3	8	33,33%			2	8,33%	3	12,50%
Es 4							3	13%
Es 5	9	37,50%	5	20,83%	9	37,50%	2	8,33%
Es 6	1	4,17%	10	41,67%	4	16,67%	11	45,83%

Figura 5.1: Scelte esercizio più facile e più difficile

Visualizziamo i dati nei seguenti quattro areogrammi che rappresentano le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e di quello più difficile nei due diversi momenti. Da in alto a sinistra a in basso a destra rappresentano rispettivamente le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e più difficile secondo una prima stima, l'esercizio più facile e quello più difficile secondo una seconda stima.

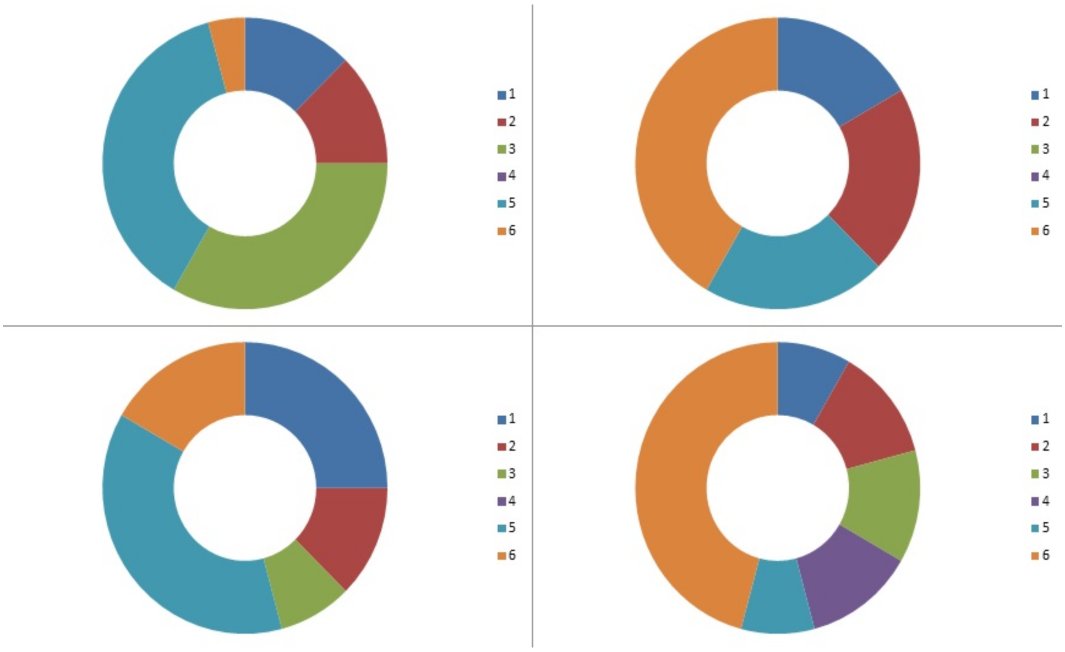


Figura 5.2: Areogrammi

Valutiamo ora la percezione della difficoltà degli studenti. Dal conto delle percentuali dell'esercizio più difficile è stato tolto il numero 4 perchè molti avevano scelto quello dato che non conoscevano i termini. Negli istogrammi si considera anche l'esercizio 4. Si è deciso di assegnare da uno a sei punti agli esercizi a seconda della posizione occupata nella griglia: un punto all'esercizio più facile, 6 all'esercizio più difficile. I punteggi ottenuti dal singolo esercizio sono poi stati sistemati in una tabella. Per ogni esercizio abbiamo sommato i vari punteggi ottenuti nei vari test e abbiamo diviso la somma per 24. Abbiamo ottenuto una media pesata per la difficoltà dell'esercizio. Il dato rivela quanto il singolo esercizio è risultato difficile per la classe. Riportiamo le tabelle dei punteggi per la prima stima e per la seconda:

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6
	2	4	3	6	1	5
	3	4	2	6	1	5
	4	5	1	6	3	2
	4	5	2	6	1	3
	5	4	2	6	1	3
	6	5	4	3	1	2
	6	5	2	3	4	1
	4	3	2	5	1	6
	6	4	2	5	1	3
	4	3	1	6	2	5
	3	2	1	4	6	5
	2	1	3	4	6	5
	4	5	1	6	3	2
	4	5	3	2	1	6
	3	2	5	4	1	6
	1	2	3	5	4	6
	6	1	2	5	4	3
	1	2	3	5	4	6
	2	5	1	4	3	6
	3	2	1	4	6	5
	2	3	4	6	1	5
	4	3	1	6	2	5
	2	3	1	4	6	5
	1	2	4	6	3	5
Media	3,416667	3,333333	2,25	4,875	2,75	4,375

Figura 5.3: Prima stima

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6
	3	4	1	6	2	5
	4	3	2	6	1	5
	1	4	3	6	2	5
	4	2	3	6	1	5
	3	2	4	6	1	5
	3	1	4	6	2	5
	4	1	3	6	2	5
	5	4	3	6	2	1
	4	3	2	5	1	6
	4	5	2	6	3	1
	3	2	1	4	6	5
	3	2	5	4	1	6
	4	5	3	6	2	1
	2	6	3	4	1	5
	2	4	6	3	1	5
	1	5	2	4	3	6
	3	2	5	6	1	4
	1	2	5	3	6	4
	1	4	5	6	3	2
	3	2	6	5	4	1
	2	1	6	3	5	4
	5	2	4	6	1	3
	1	3	4	5	2	6
	1	2	4	6	3	5
Media	2,791667	2,958333	3,583333	5,166667	2,333333	4,166667

Figura 5.4: Seconda stima

I dati delle tabelle vengono presentati anche in forma di istogramma. Nello stesso grafico poniamo due serie di istogrammi uno per la prima scelta e uno per la seconda, in modo che il

confronto risulti immediato.
In modo analogo, viene assegnato un punteggio anche alla classifica attesa.

1	2	6	3	4	5

Figura 5.5: Classifica attesa

I punteggi degli esercizi sono racchiusi nell' istogramma azzurro che viene messo a confronto con quelli risultanti dalle prove dei ragazzi.

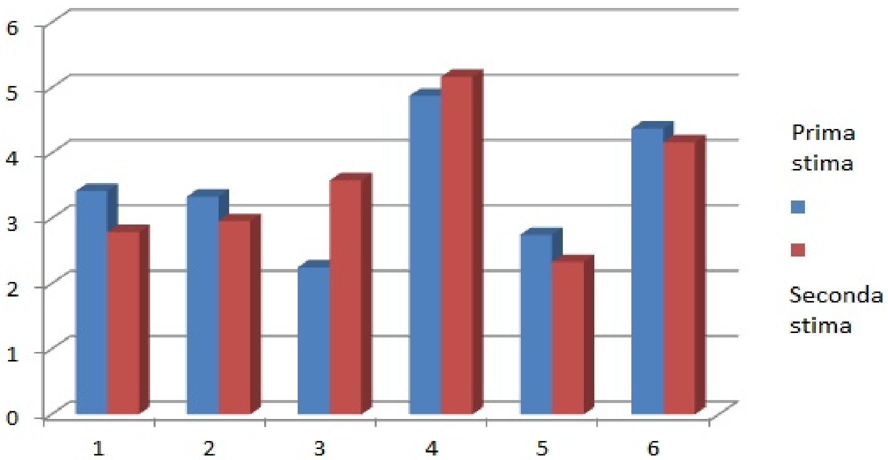


Figura 5.6: Istogramma

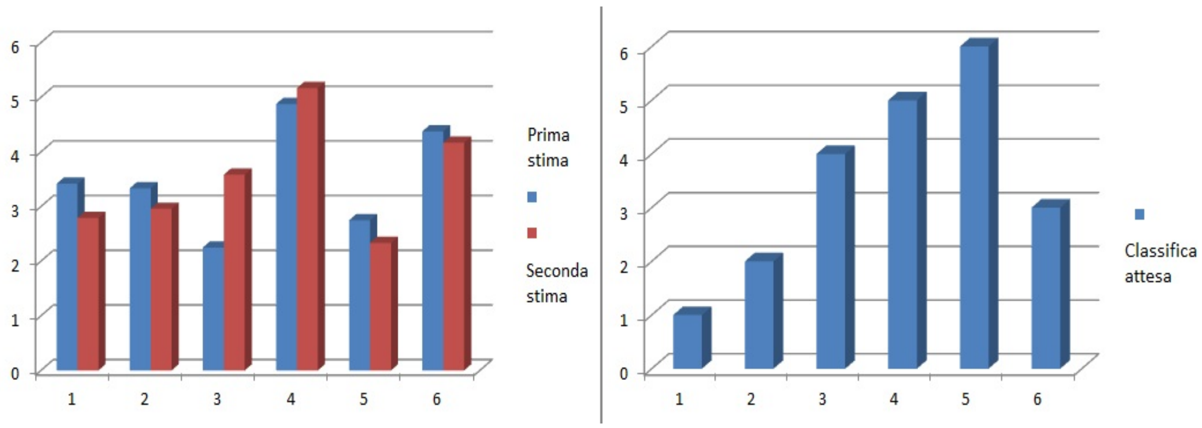


Figura 5.7: Confronto tra istogrammi

5.2.4 Motivazione esercizio più difficile

Alla richiesta di motivare l'esercizio più difficile, gli studenti hanno risposto che non conoscevano i termini dell'esercizio. Chi ha trovato l'esercizio 6 il più difficile, ha giustificato dicendo che in classe erano stati svolti esercizi più facili.

5.2.5 Correzione esercizi

Esercizio 1 Solo 6 studenti hanno capito il collegamento con la definizione soggettiva di probabiltà. 14 studenti hanno solo parlato del fatto che il futuro non si può conoscere con certezza. A questi studenti sono stati assegnati 9 punti su 18. Due studenti hanno ottenuto dei risultati parziali (17 e 13) perchè si sono solo avvicinati alla soluzione. In realtà l'esercizio era di semplice applicazione della teoria studiata, e veniva fatto esplicito riferimento alle tre definizioni di probabilità, ma è risultato un esercizio difficile.

Esercizio 2 Molti studenti rispondono con una definizione operativa, tramite le permutazioni e i modi in cui si possono contare k oggetti in un insieme di k elementi. Un alunno ha sbagliato completamente la definizione, confondendola con quella di disposizioni semplici. Solo 6 alunni hanno fornito la formula che lega coefficienti binomiali e n!.

Esercizio 3 15 alunni hanno completato in modo giusto l'esercizio. Il docente aveva svolto molto esercizi come questo in classe e ne erano stati assegnati molti anche per casa. Qualcuno ha contato solo i casi favorevoli. Durante il compito i ragazzi hanno chiesto alcune conferme. Un ragazzo ha chiesto se in questo caso doveva usare le disposizioni o le combinazioni, ha poi proseguito illustrando il perchè avrebbe usato l'una o l'altra. Mentre spiegava perchè avrebbe usato le disposizioni, dopo avere detto che "suonavano meglio" si è bloccato e non sapeva più come continuare. A quel punto gli è stato risposto che se non sapeva più come proseguire forse si era già risposto da solo. Correggendo il compito, ho avuto la conferma che il ragazzo avesse capito, infatti ha totalizzato 18 punti.

Esercizio 4 E' stato senza dubbio l'esercizio che ha suscitato più perplessità. Gli studenti riferiscono di non sapere il significato dei termini espressi nella domanda. Il docente dice che l'argomento funzioni è stato affrontato sia in prima che in terza, ma che per la sua esperienza, gli studenti iniziano ad avere una percezione di cosa siano le funzioni solo al quinto anno con l'analisi. Prima per loro resta una definizione molto astratta. Vedendo la perplessità suscitata si è deciso di partire dal 10 e assegnare solo 10 punti per questo esercizio in modo che fosse per le eccellenze. Un solo studente ha tentato di rispondere. Ha sbagliato la risposta della suriettività, ma ha usato la cardinalità degli insiemi per l'iniettività e per la biettività, ha affermato che non essendo la funzione iniettiva, non poteva essere neanche biettiva. Lo studente che ha tentato non era tra quelli più bravi in matematica, e la cosa ha stupito anche il professore stesso.

Esercizio 5 Questo esercizio, riprende concetti che i ragazzi sanno da molto tempo (ogni numero moltiplicato per zero dà come risultato zero) ed anticipa aspetti dell'analisi e dell'infinito. La calcolatrice è stata lasciata ai ragazzi quindi eventualemente potevano provare anche meccanicamente. La cosa interessante è che con questo esercizio si è palesato il "contratto didattico." Una ragazza ha alzato la mano e ha chiesto se gli esercizi fossero tutti di probabilità. La domanda conteneva anche una parte di calcolo combinatorio (0!), probabilmente non sapendo bene cosa rispondere stava ripassando nella sua mente tutto il capitolo alla ricerca di qualcosa che potesse aiutarla. Nessuno ha affermato che $0! = 1$ per definizione, chi si è avvicinato di più ha detto che era così per convenzione. Alla risposta convenzionale (con le altri parti della domanda corrette) sono state assegnati 18 punti.

Esercizio 6 Questo esercizio non era complicato se si riconosceva il significato di binomiale. Era di una difficoltà leggermente più elevata rispetto a quelli che gli alunni avevano visto in classe, ma comunque fattibile con un pò di ragionamento. E' più facile se si parte a sviluppare il secondo membro. Molti però non hanno scritto adeguatamente la formula del binomiale.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6
18	2	0	1	18	0
17	17	18	0	18	0
9	18	18	1	18	18
0	18	18	15	18	7
18	16	18	0	18	16
0	9	18	0	18	18
9	9	0	2	18	2
9	16	0	0	18	5
9	4	18	0	14,4	0
9	18	18	1	18	0
9	0	0	12	18	15
18	18	18	1	18	10
9	9	0	1	18	2
18	18	18	0	18	0
18	18	18	0	18	18
9	17	18	0	18	1
0	18	16	0	18	16
9	17	9	1	18	18
9	17,5	0	0	18	2
13	1	18	0	18	0
9	14	9	0	10,8	0
9	8	18	0	14,4	9
9	9	18	0	18	0
9	9	18	0	18	15

Figura 5.8: Punteggi

5.2.6 Conclusioni

Pur conoscendo i contenuti della materia sembra che alla classe manchino alcuni concetti logici di fondo e trasversali. Per esempio la differenza che c'è tra convenzione e definizione (esercizio 5) non è stata colta dalla classe. Anche quando viene richiesto di definire n! moltissimi alunni invece di presentare la definizione, lo fanno attraverso l'uso delle disposizioni o delle permutazioni. Questo modo di spiegare i concetti praticamente potrebbe essere passato tacitamente dal modo di agire e pensare dell'insegnante, che essendo un fisico della materia, nelle sue lezione, tende a dare una sfumatura pratica. In realtà questo approccio ha un lato positivo: gli alunni capiscono più velocemente, ma dall'altro lato della medaglia sono meno incoraggiati all'astrazione. La relazione tra matematica e fisica può essere vantaggiosa per entrambe le materie. La matematica può fornire gli strumenti di calcolo ed aprire nuovi orizzonti, la fisica dal canto suo dà concretezza ai risultati matematici ed apre nuovi problemi. La relazione tra matematica e fisica è più evidente se lo stesso professore insegna entrambe le materie e sarà tanto più sbilanciata quanto più il docente predilige l'una o l'altra. Matematica e fisica hanno una relazione molto stretta quasi come se fossero due lati di una stessa medaglia. Può la relazione tra matematica e fisica influenzare la percezione che gli studenti hanno della difficoltà? La forma mentis più astratta o concreta è collegata a saper risolvere i problemi?

Il contratto didattico ha regnato sovrano. Infatti, vedendo una prova somministrata da un estraneo, i ragazzi sono stati spinti a chiedere esplicitamente se si trattasse di probabilità, e dalle domande e dall'atteggiamento che hanno adottato, sembrava proprio che cercassero di capire cosa ci si aspettasse da loro. Il docente prepara le verifiche in base a quello che ha spiegato in classe, gli alunni si sono quindi trovati davanti a qualcosa di nuovo per la prima volta, dato che hanno lo stesso professore dalla prima. Cambiare tipologia di prova può aiutarli a non adagiarsi ma a tenere sempre la mente attiva. Una mente attiva è la base per poter risolvere problemi. Più il ragazzo riuscirà a fare collegamenti tra le cose che ha imparato, a ricordarsi esercizi visti ed ad adattarli alla situazione, più gli esercizi gli sembreranno facili.

La percezione della difficoltà può essere influenzata anche dal modo di studiare. In generale per tutte le materie, ma in particolare per la matematica, a cui serve più tempo, lo studio all'ultimo minuto non giova. Anche se magari la verifica riesce ad andare bene, nella memoria non restano impressi a lungo i concetti. Sicuramente questo fatto influenza la percezione della difficoltà. Se a una ragazzo viene presentata una domanda su un argomento che ha studiato velocemente, che quindi non si ricorda più, a lui sembrerà più difficile, rispetto ad un ragazzo che invece ha dedicato più tempo alla materia. La matematica risulta allora una materia per i pazienti, è come la costruzione di un grande puzzle. Servono tutti gli argomenti, studiati a fondo, senza trascurare niente per riuscire a comporre il disegno, altrimenti restano dei buchi.

Figura 5.9: La matematica come un puzzle

Capitolo 6

Classe quinta liceo scientifico

6.1 Compito

Quesito 9 prova d'esame sessione ordinaria 2015
Testo del problema

Risolvere il seguente problema posto nel 1547 da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia: "Si divida il numero 8 in due numeri reali non negativi in modo che sia massimo il prodotto di uno per l'altro e per la loro differenza."

Il quesito presenta la difficoltà di essere scritto in un italiano antico, questo rende il processo dell'interpretazione delicato. Si tratta di capire il problema e tradurlo in linguaggio matematico. Occorre poi ragionare sul concetto di derivata.

Soluzione

Scegliamo l'incognita x e di conseguenza $8 - x$. Supponiamo che x sia maggiore uguale a $8 - x$, quindi $(4 \leq x \leq 8)$
Chiamiamo $f(x)$ la funzione che descrive la richiesta di Ferrari.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(8-x)(x-8+x) \\ &= x(8-x)(2x-8) \\ &= (8x-x^2)(2x-8) \\ &= 16x^2 - 64x - 2x^3 + 8x^2 \\ &= -2x^3 + 24x^2 - 64x \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata prima e vediamo dove questa si annulla in modo da trovare il massimo della funzione:

$$f(x)' = -6x^2 + 48x - 64$$

si annulla in:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 384}}{-6} \\
&= \frac{-24 \pm \sqrt{192}}{-6} \\
&= \frac{24 \pm 8\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}
$$

da cui

$$x_1 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3} \cong 1.7 \tag{6.1}$$

oppure

$$x_2 = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{3} \cong 6.3 \tag{6.2}$$

Solo la soluzione x_2 è accettabile perchè si ha $4 \leq x \leq 8$.
Inoltre x_1 è un punto di massimo perchè:

- $f' \geq 0$ e p(x) è crescente per $4 \leq x < x_2$
- $f' \leq 0$ e p(x) è decrescente per $x_2 < x \leq 8$

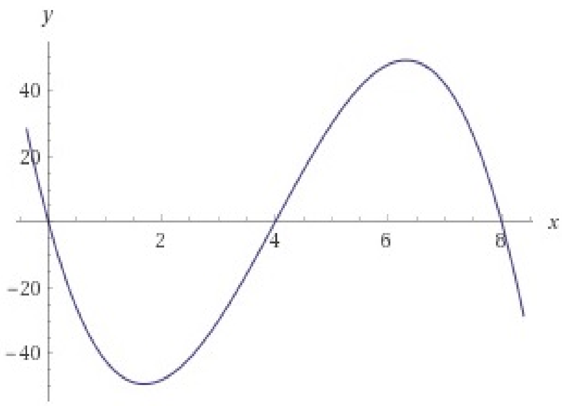


Figura 6.1: $-2x^3 + 24x^2 - 64x$

In definitiva il numero 8 è diviso in due numeri $4 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$ e $8 - 4 + \frac{4}{3}\sqrt{3} = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Quesito 9 prova d'esame sessione ordinaria 2017
Testo del problema

Dimostrare che l'equazione:

$$\arctan x + x^3 + e^x = 0 \tag{6.3}$$

ha una e una sola soluzione reale.

Soluzione
Il grafico della funzione è:

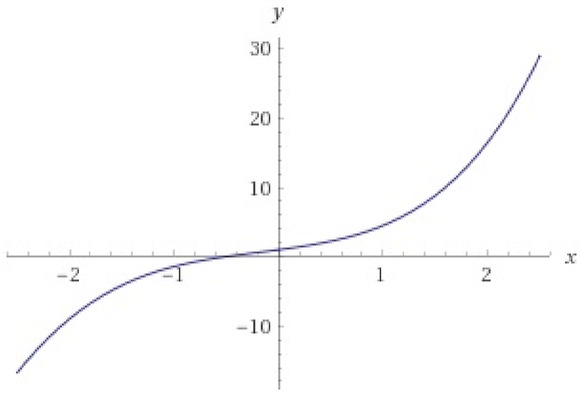


Figura 6.2: $arctanx + x^3 + e^x$

Se studiamo la funzione data, gli zeri della funzione corrispondono alle soluzioni dell'equazione data. $f(x)$ è continua e strettamente crescente su tutto $\Re$. Inoltre è illimitata sia inferiormente che superiormente, infatti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2} - \infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \infty + \infty = +\infty$$

quindi $f(x)$ è iniettiva e suriettiva su $\Re$. La biettività implica che la funzione assume tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$, in particolare esiste esattamente un valore reale in cui la funzione si annulla.

Quesito 4 prova d'esame sessione ordinaria 2015

Testo del problema

Sia $P(x) = x^2 + bx + c$. Si suppone che $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ e che $P(1) \neq P(2)$. Calcolare P(0).

L'esercizio risulta essere il più difficile, in quanto occorre aver capito bene il concetto di funzione. Se non si usasse la scorciatoia della somma e della differenza tra radici, i calcoli verrebbero molto più lunghi e più difficili. La somma e differenza delle radici è un argomento però che lo studente ha affrontato nel secondo anno di scuola secondaria di secondo grado, ma che non viene incontrato molto spesso negli anni di scuola successivi. E' difficile che se lo ricordi.

Soluzione

Dall'uguaglianza $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ implica che $P(1)$ e $P(2)$ sono radici del polinomio $P(x)$ con:

$P(1) = 1 + b + c$

$P(2) = 4 + 2b + c$

le radici di un'equazione di secondo grado sono date dalla formula (con $a = 1$):

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \tag{6.4}$$

La differenza delle radici è:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \sqrt{b^2 - 4c} \tag{6.5}$$

La differenza, in valore assoluto, tra $P(1)$ e $P(2)$ allora:

$$\begin{gathered}
|P(2) - P(1)| = \sqrt{b^2 - 4c} \\
|4 + 2b + c - 1 - b - c| = \sqrt{b^2 - 4c} \\
|3 + b| = \sqrt{b^2 - 4c} \\
(3 + b)^2 = b^2 - 4c \\
9 + b^2 + 6b = b^2 - 4c \\
9 + 6b + 4c = 0
\end{gathered} \tag{6.6}$$

La somma delle radici è invece uguale $a - b$ quindi:

$$P(2) - P(1) = -b$$

$$4 + 2b + c + 1 + b + c = -b$$

$$5 + 4b + 2c = 0$$

Mettendo a sistema le due condizioni trovate:

$$\begin{cases} 9 + 6b + 4c = 0 \\ 5 + 4b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 - 2b = 0 \\ 5 + 4b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{-1}{2} \\ c = -2b - \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sostituendo i coefficienti nel polinomio si ottiene $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Quesito 3 prova d'esame corso di ordinamento 2002

Testo del problema

Considerati i numeri reali a,b,c,d, comunque scelti, se $a > b$ e $c > d$ allora:

- $a + d > b + c$
- $a - d > b - c$
- $ad > bc$
- $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

Questo quesito è il più facile perchè considera argomenti (disequazioni) che lo studente conosce da molto tempo e che incontra molto spesso negli esercizi.

Soluzione

Date le disuguaglianze $a > b$ e $c > d$, per la proprietà dell'addizione di disuguaglianze dello stesso senso vale:

$$a + c > b + d$$

da cui

$$a - d > b - c$$

La risposta esatta è la seconda

Quesito 10 prova d'esame corso di ordinamento 2003

Testo del problema

Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e mostrare i passaggi.

L'esercizio non risulta difficile. Lo studente conosce l'argomento dalla classe quarta (o terza) della scuola secondaria di secondo grado. Inoltre se lo studente non ricorda la formula di cambiamento di base, è possibile risolvere l'esercizio anche usando la definizione di logaritmo, che invece dovrebbe essere sempre chiara.

Soluzione
Per definizione di logaritmo:

$$2 = 3^{\log_3 2}$$

$$3^{\log_3 2} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$$

$$\left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2} = 2^{\log_2 3 \cdot \log_3 2}$$

da cui

$$1 = \log_2 3 \cdot \log_3 2$$

Soluzione alternativa
Si può anche usare la formula del cambiamento di base:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \frac{\log_3 3}{\log_3 2} \cdot \log_3 2$$

che è 1.

Quesito 10 prova d'esame corso di ordinamento 2004

Testo del problema
Considerati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$, quanti sono le applicazioni (le funzioni) di A in B.

Il calcolo delle probabilità è ormai un argomento molto richiesto anche a livello universitario e fa parte delle vita di tutti i giorni. E' importante quindi che lo studente ne conosca almeno le basi. Il calcolo delle probabilità è affrontato generalmente al quarto anno di studi. E' un argomento che non è sempre facile per i ragazzi. In questo esercizio occorre anche ricordare la definizione di funzione, in modo da non associare a uno stesso elemento dell'insieme A nessuno, due o più elementi dell'insieme B. In realtà per questo esercizio basta conoscere le disposizioni, che generalmente sono il primo argomento del calcolo delle probabilità, quindi, il quesito è considerato come il terzo meno difficile.

Soluzione
Dobbiamo associare ad ogni elemento di A uno dei tre elementi di B, si ottengono 3^4 diverse applicazioni, tutte le possibili disposizioni con ripetizione di 3 elementi presi a gruppi di 4.

Quesito 9 prova d'esame corso di ordinamento 2005

Testo del problema

Calcola, senza l'uso della calcolatrice, il valore di:
$sin^2(35°) + sin^2(55°)$ considerando le misure degli angoli in gradi sessagesimali.

L'esercizio si classifica circa a metà classifica nella scala di difficoltà, perchè gli studenti affrontano quest'argomento al terzo o quarto anno, e spesso in quinta ricordano le definizioni base della trigonometria e sanno usare le funzioni base della trigonometria con la calcolatrice. Non ricordano però le formule degli angoli associati. Spesso in quinta si dà più importanza ad argomenti come derivate ed integrali e si rischia di considerare la matematica degli anni precedenti come secondaria e quindi dimenticabile.

Soluzione

Dobbiamo tenere conto della relazione fondamentale e della seguente formula:
$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$
risulta:

$$\sin^2 35° + \sin^2 55° = \sin^2 35° + \cos^2 35°$$

che è uguale a uno.

Quesito 4 prova d'esame corso di ordinamento 2008

Testo del problema

Si applichi la regola del marchese de L'Hospital per dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$$

L'esercizio richiede la conoscenza della regola di de L'Hospital e delle derivate, argomento studiato al quinto anno. In più si richiede l'iterazione del procedimento. L'esercizio è considerato di media difficoltà.

Soluzione

Sia $f(x) = x^{2008}$ che $g(x) = 2^x$, esse soddisfano le condizioni per applicare la regola richiesta, vale:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La derivata di x^n è $nx^{(n-1)}$ La derivata di $2^x = 2^x \ln 2$

Se applichiamo 2008 volte il teorema di de L'Hospital abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2008!}{(\ln 2)^{2008}\, 2^x}$$

da cui si ha 0.

Quesito 9 prova d'esame corso di ordinamento 2006

Testo del problema

Della funzione f(x) si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Si può determinare f(x)?

L'esercizio richiede di aver compreso bene la teoria sulle derivate e di saper tradurre informazioni date in un grafico e quindi di riconoscere il grafico di una funzione nota.

Soluzione

Una funzione reale f, diversa da zero in ogni punto del suo campo di esistenza, che soddisfa la condizione $f'(x) = f(x)$ è la funzione esponenziale $f(x) = ke^x$, con k reale. Imponendo che $f(0) = 1$ risulta k=1 e $f(x) = e^x$ con x numero reale.

Quesito 9 prova d'esame corso di ordinamento 2008

Testo del problema

In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

L'esercizio è sul calcolo delle probabilità. Non è un esercizio difficile, occorre solo ricordare la teoria affrontata l'anno precedente.

Soluzione

La soluzione è data dalla frazione con a numeratore il numero di casi favorevoli e a denominatore il numero di casi totali:

$$\frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}}{\binom{20}{8}}$$

da cui la probabilità è $\frac{1155}{4199}$

6.2 Presentazione dati

6.2.1 La classe e l'insegnante

La classe è composta da 23 alunni, di cui 9 maschi e 14 femmine. Il docente, che li conosce dalla classe quarta e che opera sulla classe sia in matematica che in fisica, riferisce che mediamente è una classe che si impegna e studia ma che in matematica ha avuto una storia molto travagliata. In particolare durante il terzo anno. L'insegnante riferisce che le competenze matematiche per affrontare la seconda prova dell'esame di Stato non sono ritenute da tutta la classe. In particolare vi sono 2 o 3 elementi molto bravi e 4 o 5 che fanno molta fatica. Anche la classe stessa si accorge di avere delle lacune dovute al travagliato percorso. In generale la classe segue le lezioni e il docente. Il libro adottato è "La matematica a colori" di Leonardo Sasso. Il docente ha un metodo di insegnamento tradizionale. Spiega l'argomento alla lavagna, e risolve esercizi di livelli di difficoltà graduali. Le verifiche proposte trattano di argomenti visti in classe ad eccezione di un esercizio più difficile per le eccellenze. Il docente usa il proiettore come supporto per le parti più teoriche delle lezioni. Il professore è laureato in fisica ed ha un approccio molto pratico alla materia.

6.2.2 Modalità di somministrazione della prova

La prova viene consegnata agli studenti che la dovranno svolgere come compito a casa in modo da prepararsi alla simulazione della seconda prova. Insieme ai ragazzi è stato deciso di lasciare 10 giorni per completarla. Tutti gli esercizi del test sono stati presi da vecchi compiti di maturità. Alla data di consegna della prova il programma era pressochè terminato, fatta eccezione per la parte di probabilità. Su 23 compiti consegnati ne vengono restituiti 15. Si è comunque deciso di non insistere oltre poichè per la classe si avvicina l'esame di Stato e quindi è caricata di molto lavoro. Chi ha consegnato il test lo ha svolto seriamente per cui i dati raccolti si ritengono affidabili. Viene scartata una prova in quanto è stata consegnata solo la griglia senza la risoluzione degli esercizi.

6.2.3 Esposizione dei dati raccolti

Il test vuole valutare la percezione della difficoltà degli esercizi, che i ragazzi colgono leggendo gli esercizi e poi risolvendoli. Si vuole valutare anche se la percezione della difficoltà cambia dopo che gli esercizi sono stati svolti. Per una classe quinta la capacità di individuare subito gli esercizi più difficili sarà essenziale in sede d'esame. Infatti gli studenti dovranno scegliere tra due problemi quello che secondo loro è il più fattibile, ma in particolare devono scegliere 5 quesiti fra 10. La scelta dei quesiti è fondamentale in quanto 5 quesiti corretti garantiscono la sufficienza. Saper individuare i quesiti più semplici a seconda delle proprie abilità diventa in quinta fondamentale. I dati sono raccolti tramite le due griglie presenti nei compiti.
Analizziamo inizialmente i due estremi della griglia corrispondenti all'esercizio più facile ed a quello più difficile. Dopo aver contato quante volte ogni esercizio viene scelto come il più facile e quante volte come il più difficile, separatamente nella prima classifica e poi nella seconda, calcoliamo le percentuali.

	Prima scelta				Seconda scelta			
	Facile	%	Difficile	%	Facile	%	Difficile	%
Es 1	4	28,57%						
Es 2			2	14,29%			3	21,43%
Es 3			1	7,14%			3	21,43%
Es 4	2	14,29%	1	7,14%	1	7,14%		
Es 5	5	35,71%			3	21,43%	2	14,29%
Es 6	1	7,14%	4	28,57%	3	21,43%	1	7,14%
Es 7			2	14,29%			1	7,14%
Es 8								
Es 9	1	7,14%	1	7,14%	7	50,00%		
Es 10	1	7,14%	3	21,43%			4	28,57%

Figura 6.3: Scelte esercizio più facile e più difficile

Visualizziamo i dati nei seguenti quattro areogrammi che rappresentano le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e di quello più difficile nei due diversi momenti. Da in alto a sinistra a in basso a destra rappresentano rispettivamente le percentuali di scelta dell'esercizio più facile e più difficile secondo una prima stima, l'esercizio più facile e quello più difficile secondo una seconda stima.

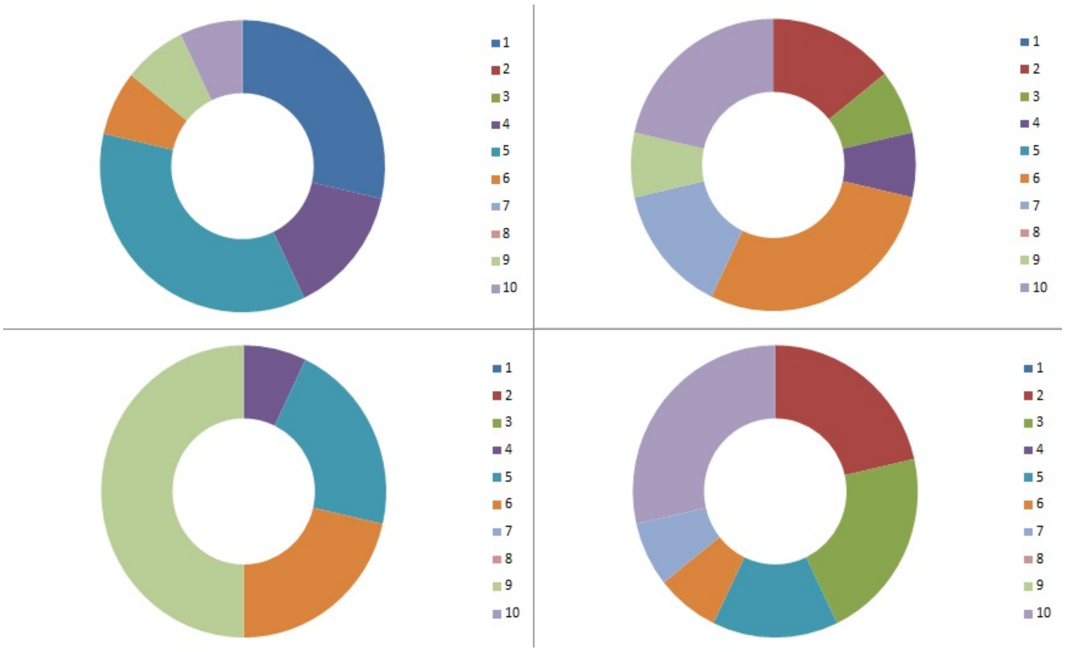


Figura 6.4: Areogrammi

Valutiamo ora la percezione della difficoltà degli studenti. Si è deciso di assegnare da uno a dieci punti agli esercizi a seconda della posizione occupata nella griglia: un punto all'esercizio più facile, 10 all'esercizio più difficile. I punteggi ottenuti dal singolo esercizio sono poi stati sistemati in una tabella. Per ogni esercizio abbiamo sommato i vari punteggi ottenuti nei vari test e abbiamo diviso la somma per 14. Abbiamo ottenuto una media pesata per la difficoltà dell'esercizio. Il dato rivela quanto il singolo esercizio sia risultato difficile per la classe. Riportiamo le tabelle dei punteggi per la prima stima e per la seconda.

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Es 9	Es 10
	8	9	2	5	1	6	10	4	3	7
	6	3	2	10	9	5	7	8	4	1
	4	10	2	3	1	9	6	5	8	7
	5	6	10	7	8	1	2	9	4	3
	1	9	6	2	7	8	3	4	5	10
	8	9	2	5	1	10	5	7	3	4
	1	4	5	8	9	10	2	3	7	6
	8	9	2	5	1	10	6	7	3	4
	2	8	6	1	7	3	4	9	10	5
	1	6	2	3	5	9	8	4	7	10
	4	8	3	5	1	2	9	7	6	10
	8	7	5	2	6	10	3	4	1	9
	5	6	8	1	4	2	10	9	3	7
	1	10	6	7	4	8	5	3	2	9
Media	4,428571	7,428571	4,357143	4,571429	4,571429	6,642857	5,714286	5,928571	4,714286	6,571429

Figura 6.5: Prima stima

	Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Es 9	Es 10
	3	4	2	5	1	7	10	9	6	8
	6	2	10	9	3	1	8	7	4	5
	2	10	8	3	1	5	6	4	9	7
	3	2	7	9	10	1	8	6	5	4
	3	9	7	4	2	8	5	6	1	10
	2	10	6	5	3	4	8	7	1	9
	4	7	6	5	2	9	3	8	1	10
	2	10	6	5	3	4	8	7	1	9
	7	6	10	4	2	3	5	8	1	9
	4	9	7	6	2	3	8	5	1	10
	9	8	7	2	1	6	4	5	3	10
	4	7	8	2	5	10	6	3	1	9
	5	9	6	4	10	1	3	8	2	7
	5	7	10	6	1	8	3	4	2	9
Media	4,214286	7,142857	7,142857	4,928571	3,285714	5	6,071429	6,214286	2,714286	8,285714

Figura 6.6: Seconda stima

I dati delle tabelle vengono presentati anche in forma di istogramma. Nello stesso grafico poniamo due serie di istogrammi uno per la prima scelta e uno per la seconda, in modo che il confronto risulti immediato.

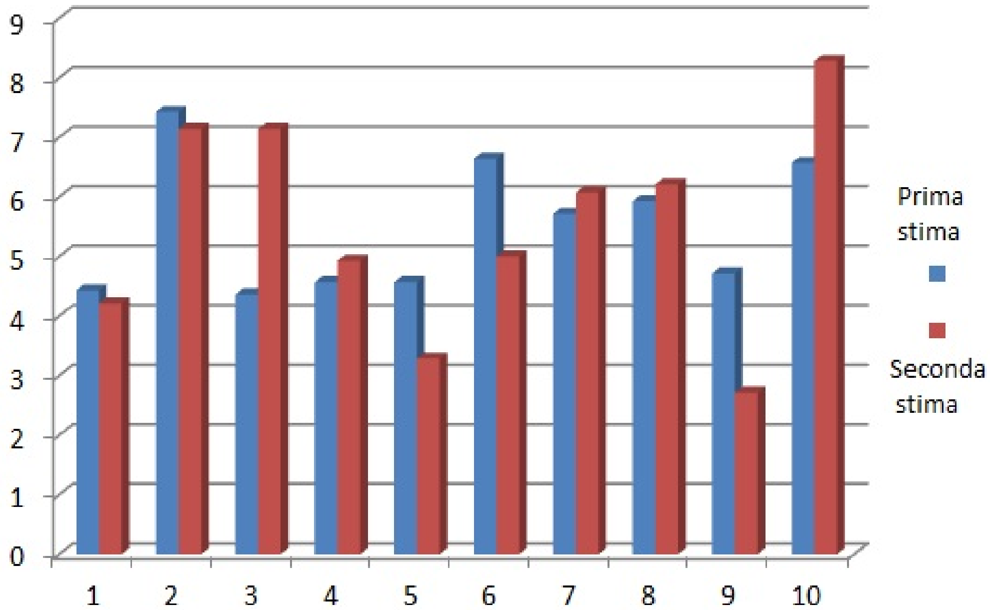


Figura 6.7: Istogramma

In modo analogo, viene assegnato un punteggio anche alla classifica attesa.

4	5	6	10	7	9	8	1	2	3

Figura 6.8: Classifica attesa

I punteggi degli esercizi sono racchiusi nell'istogramma azzurro che viene messo a confronto con quelli risultanti dalle prove dei ragazzi.

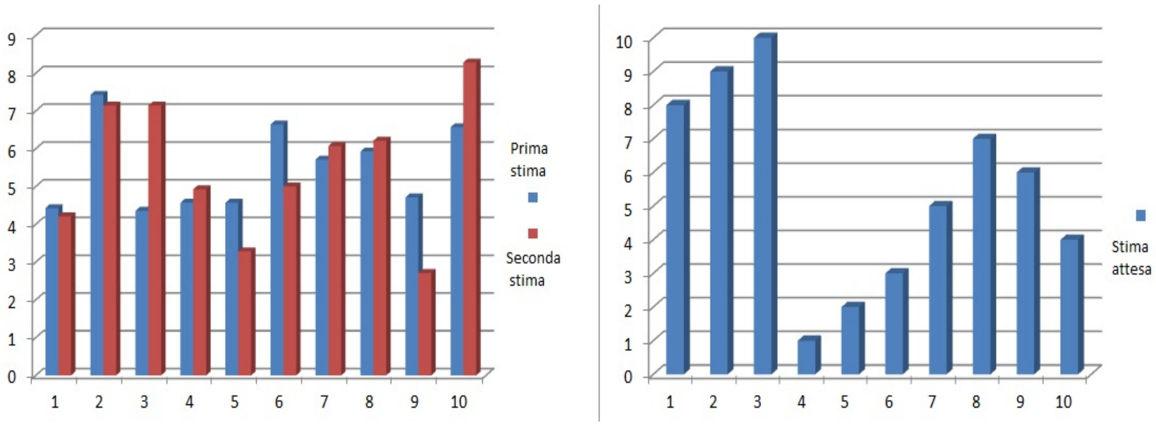


Figura 6.9: Confronto tra istogrammi

6.2.4 Motivazione esercizio più difficile

Alla richiesta di motivare l'esercizio più difficile, gli studenti hanno risposto che l'argomento non era ancora stato affrontato in classe.

6.2.5 Correzione esercizi

Esercizio 1 1 alunno ha interpretato male il testo ed ha risolto (sbagliando) l'esercizio senza l'uso delle incognite. Ha impostato una serie di somme e di moltiplicazioni senza una logica. Giunge al risultato di 48 senza accorgersi di essere completamente fuori strada. 2 alunni non hanno neanche iniziato il problema. 3 alunni lo hanno impostato bene ma non lo hanno completato: non sono arrivati a dire che una soluzione fosse accettabile e l'altra no. 8 alunni hanno svolto correttamente l'esercizio. L'abilità dello studente in questo caso comprendeva sia il tradurre in un'equazione il testo, sia capire che lo strumento da usare era la derivata, oltre a saper svolgere correttamente i calcoli.

Esercizio 2 1 alunno cerca di trovare la soluzione dell'equazione per tentativi, il problema è che in quel modo non si dimostra che è unica, si dimostra l'esistenza. 3 alunni forniscono la spiegazione corretta, mentre i rimanenti non hanno neanche iniziato l'esercizio. L'esercizio è risultato difficile, anche se gli alunni hanno già tutte le conoscenze che servono.

Esercizio 3 L'esercizio è risultato comprensibile nel capire cosa si chiedeva, ma nel come raggiungere l'obiettivo si è trovata la difficoltà. Un solo alunno è riuscito ad arrivare alla soluzione, 9 alunni hanno impostato il problema senza riuscire, però, a portare in fondo i calcoli e 4 alunni hanno rinunciato da subito.

Esercizio 4 Per trovare la soluzione un alunno ha assegnato dei valori numerici alle lettere date e ha ragionato in un caso concreto. Il ragionamento funziona, ma non assume validità generale. Si rivela un approccio ancora poco astratto ai problemi matematici. 3 alunni provano a dare una spiegazione della disuguglianza anche se spiegandola solo a parole: "Ad una quantità più grande di b viene sottratta una quantità minore", si ragiona in termini di quantità e non di proprietà della disequazione. 3 alunni arrivano alla soluzione sottraendo ad entrambi i membri $-c-d$. 6 alunni forniscono la soluzione corretta ma non spiegano il perchè, 2 alunni non provano l'esercizio.

Esercizio 5 1 alunno ha sbagliato l'esercizio e ha forzato il risultato: ha impostato una formula di cambiamento di base errata. 1 solo alunno ha risolto l'esercizio usando gli esponenziali, tutti gli altri hanno usato la formula del cambiamento di base. La classe ha affrontato gli esponenziali e i logaritmi durante il terzo anno. E' interessante notare come più che i concetti (avrebbero portato a risolvere l'esercizio con il metodo esponenziale), siano rimaste le formule. Tale comportamento è da collegare alla storia della classe. Dato che il terzo anno si è rivelato essere il peggiore, matematicamente parlando, probabilmente per sopravvivere gli alunni hanno imparato a memoria quello che potevano: le formule. I concetti infatti possono essere solo trasmessi e non imparati a memoria. Il comportamento dell'insegnante si riversa sugli alunni e crea solchi durevoli nel tempo.

Esercizio 6 La probabilità e il calcolo combinatorio sono stati affrontati nell'ultima parte del quarto anno. Il docente riferisce di dover ancora spiegare le distribuzioni discrete di probabilità, ma di volerle iniziare con un ripasso degli argomenti già visti l'anno precedente. In data di somministrazione della prova, l'insegnante non aveva ancora ripreso l'argomento. Il docente, probabilmente avvalendosi della sua esperienza, sa bene che la probabilità è un argomento ostico per i ragazzi, ed ha deciso di ripassare anche il programma di quarta. Ha ragione, infatti solo 6 alunni rispondono correttamente al quesito. 1 dichiara onestamente di non capire il senso della domanda, a meno che la risposta non sia nessuno. Gli altri 7 alunni non iniziano il problema. Più della metà degli alunni non sa rispondere alla domanda. La probabilità è per i ragazzi un terreno scivoloso, ma è bene che questi la imparino in quanto in ambito universitario riveste sempre più importanza in molte discipline e anche i test di accesso all'università la cosiderano sempre più importante.

Esercizio 7 Trigonometria. Affrontata nel corso del quarto anno. Più volte ho sentito dire da alcuni studenti che per loro era molto difficile e che avrebbero rinunciato in partenza a risolvere un quesito sulla trigonometria. I dati confermano questo pensiero. Un alunno riferisce di non poter risolvere l'esercizio perchè non sa la formula, non prova neanche a ragionare. Un altro imposta le equazioni, riconosce gli angoli associati ma non arriva in fondo. 1 forza il risultato compiendo passaggi sensa un filo logico. 7 alunni arrivano alla soluzione giusta, di cui 2 utilizzano (inutilmente) anche le formule di sottrazione degli angoli, 1 usa direttamente la calcolatrice (passando dai gradi ai radianti.) 1 alunno sbaglia l'esercizio e 4 alunni non iniziano neanche. Solo la metà degli alunni risponde correttamente.

Esercizio 8 6 alunni hanno risposto correttamente, 3 alunni hanno impostato bene l'esercizio ma non sono riusciti ad arrivare in fondo , i rimanenti non hanno proprio iniziato l'esercizio. Anche se non si riesce ad arrivare in fondo, gli alunni dovrebbero almeno impostare la regola di de L'Hospital, anche perchè limiti e derivate sono programma di quinta ed essenziale per l'esame di Stato. Tra chi non è riuscito a completare l'esercizio, tutti hanno dimentico il logaritmo naturale al denominatore.

Esercizio 9 Si tratta di saper interpretare le informazioni date sottoforma di derivate e di valori della funzione in un punto. 1 solo alunno ha interpretato male e ha dato come soluzione una funzione sbagliata $(x+c)$, 3 alunni non hanno risposto e i rimanenti hanno dato la soluzione giusta. L'esercizio non è risultato particolarmente difficile per gli alunni.

Esercizio 10 L'esercizio è stato dato identico anche alla classe quarta che però aveva appena completato l'argomento probabilità. Vediamo invece come risponde una classe che ha affrontato l'argomento l'anno precedente. Male. Solo 2 alunni hanno risposto correttamente. Dei rimanenti sono interessanti 2 compiti. Uno studente scrive la formula in questo modo:

numero di casi in cui ci sono quattro femmine/numero di casi possibili totali=probabilita'
qualche concetto è rimasto ma mancano gli strumenti per affrontare l'esercizio. L'altro alunno dichiara: "Non abbiamo fatto bene la probabilità." Avendo seguito però lo stesso professore che spiegava probabilità nell'attuale quarta, so che questa frase non è vera. E anche se lo fosse alle porte della maturità sarebbe meglio cercare di colmare i vuoti. Probabilmente il docente sa che c'è questo problema perchè ha in programma un ripasso sulla probabilità.

6.2.6 Conclusioni

Dalla correzione dei compiti di quinta sono emersi alcuni nuclei.

Non sono stati assimilati correttamente alcuni concetti logici: gli alunni confondono il generale e il particolare, per esempio affermano che se vale un caso particolare da loro trovato, allora la proprietà che volevano dimostrare vale (esercizio 4.) Non è chiaro il concetto di dimostrare (esercizio 5 e 7), sembra che se riescano ad ottenere il valore ottenuto con la calcolatrice, allora l'esercizio sia completo. Ma in quel caso potrei al massimo parlare di verifica e non di dimostrazione. La classe si destreggia bene quando le vengono presentati esercizi di calcolo, meno quando è il ragionamento ad avere la parte preponderante. Risulta una classe molto incentrata sul calcolo, molto più pratica e tecnica che teorica. In parte questo aspetto può essere dovuto alla formazione del professore, che è un fisico, dall'altro potrebbe essere dovuta alla storia travagliata della classe, che in un qualche modo ha dovuto imparare a sopravvivere puntando più sulla buona riuscita degli esercizi che sulla teoria e i passaggi logici dietro essa. La percezione della difficoltà per le classi quinte è fondamentale, è strano constatare che molti alunni pur non riuscendo a svolgere l'esercizio non lo inseriscano tra i più difficili. Se l'esercizio richiede la gestione di vari concetti gli alunni tendono a dimenticarsi o sbagliare quelli fondamentali, che, in teoria, conoscono da più tempo (esercizio 8.) In quinta sembra che la matematica sia l'analisi e che la probabilità o la trigonometria non esistano più. Non c'è una percezione di una materia unica, ma di qualcosa di suddiviso in tanti capitoli, e se per caso questi dovessero collegarsi, allora iniziano i problemi. La matematica è allora vista come l'insieme di tanti mattoncini che non sono collegati tra loro, se non per qualche caso raro, e i pezzettini non costruiscono insieme un edificio ma hanno valore solo di per sè. La classe risulta anche molto legata all'insegnante, tra le motivazioni più frequenti compare, infatti, "argomento non ancora svolto in classe." Ma essendo a maggio e alla fine della quinta, con i programmi che devono essere chiusi entro il 15, perchè gli alunni si aspettano che l'insegnante debba ancora svolgere l'argomento? Pare che nessuno si chieda se magari l'argomento sia stato affrontato ed è stato l'alunno stesso a non averlo colto. La classe non risulta autonoma, di fronte ad un esercizio che non sa fare, perchè ha dimenticato i concetti (esercizio 10), non riprende in mano il libro autonomamente per cercare di colmare i vuoti, ma aspetta. L'esercizio 10 apre anche un'altra riflessione che verrà sviluppata in seguito: meglio presentare il prima possibile un argomento alla classe in modo che conoscendolo da più tempo ci sia più speranza che possa decantare nella mente ed essere assimilato o presentarlo in un secondo momento in modo che sia più fresco in prossimità dell'esame di Stato? E' più utile presentare la probabilità in quinta, in modo che sia fresca per l'esame e per i test universitari o in quarta in modo che decanti? Meglio presentare la trigonometria in fisica al primo anno, in modo che gli studenti ne imparino subito un'applicazione pratica, o aspettare di aver svolto tutta la teoria (tramite la circonferenza goniometrica) e presentarla in quarta?

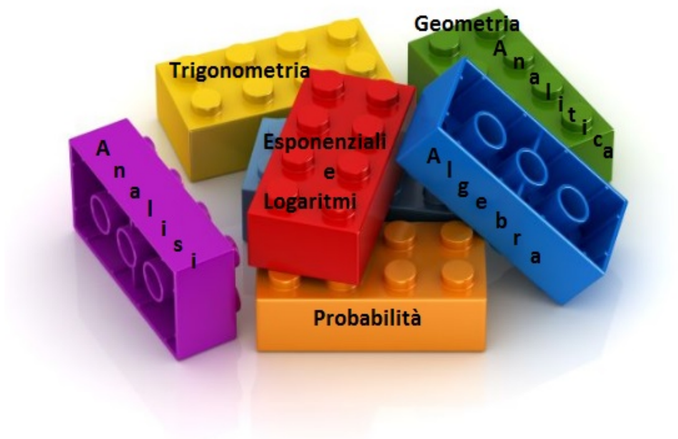


Figura 6.10: Visione discreta della Matematica

Capitolo 7

La percezione delle difficoltà in Algebra

La presente tesi vuole indagare la diversa percezione delle difficoltà che gli alunni hanno prima e dopo aver risolto un esercizio con focus algebrico. Dopo aver preparato, corretto ed elaborato cinque test, uno per ogni classe di un liceo scientifico, possiamo rispondere alla domanda: "I ragazzi mantengono la stessa scala di difficoltà degli esercizi stilata a priori dopo aver risolto gli esercizi stessi? La risposta è no. A parte uno o due alunni, tutti gli altri cambiano, a volte anche notevolmente la loro classifica. La seconda classifica è più oggettiva della prima in quanto è stilata sulla base dei dati che lo studente ha raccolto elaborando la soluzione. Indaghiamo allora il perché di tale differenza evidenziando gli aspetti che sono emersi dalla correzione dei test. Studiamo i fattori che entrano in gioco alla prima lettura dell'esercizio, che saranno chiamati *fattori a priori*.

I fattori a priori che influenzano la percezione delle difficoltà possono essere divisi in tre gruppi tematici:
Fattori sull'individuo
Fattori sulla materia
Fattori sulle relazioni

Fattori sull'individuo
Nel primo gruppo si collocano tutti i fattori che hanno a che fare con lo studente stesso. In primo luogo vi è la componente emotiva. Molto spesso lo studente si pone davanti alla matematica in uno stato d'ansia e percepisce la materia come qualcosa di lontano da lui. In questo caso la difficoltà dell'esercizio verrà sovrastimata. Anche la paura di sbagliare sovrastima la difficoltà, infatti chi ha paura dell'errore prima o poi ne commetterà uno perché è distratto dalla paura. Al contrario uno studente che non sente la paura tenderà a sottostimare la difficoltà di un esercizio.

Il secondo fattore è l'autonomia: più uno studente ha acquisito negli anni una certa autonomia e si è slegato dalla materia prettamente scolastica ed ampia le sue conoscenze ed abilità, più sarà capace di destreggiarsi tra gli esercizi, anche tra quelli che trattano di argomenti a prima vista sconosciuti. Più uno studente sarà autonomo più tenderà a sottostimare la difficoltà degli esercizi. Chi si ferma a constatare che l'argomento non è stato fatto in classe, non inizierà neanche a considerare l'esercizio e dunque ne sovrastimerà la difficoltà.

Il terzo fattore è la capacità di astrazione. Gli alunni tendono in maniera perseverante ad attaccarsi a delle immagini e le ricercano anche quando queste non vengono esplicitamente date, fanno fatica a ragionare in astratto od ad immaginarsi i concetti in questione. In matematica non è sempre possibile avere un riscontro grafico (in Algebra in particolare) e più lo studente sarà capace di staccarsi dal mondo pratico, più riuscirà a gestire un insieme più grande di situazioni e tenderà a sottostimare la difficoltà dell'esercizio che gli viene presentato. Al contrario uno studente che vuole a tutti i costi rapportarsi ad una rappresentazione grafica, prima o poi si troverà nell'impossibilità di poterlo fare e non saprà risolvere l'esercizio.

Il quarto fattore è la modalità di studio dello studente. Lo studio di tutto un argomento il giorno prima della verifica non fa ritenere in memoria i concetti che si tendono a dimenticare più in fretta mentre uno studio costante aiuta a trattenere i concetti acquisiti. Questo aspetto diventa rilevante quando vengono presentati dei test che spaziano tra i vari argomenti (pur rimanendo all'interno dell'Algebra nel nostro caso), chi ricorda nozioni e collegamenti perché gli ha studiati più a fondo sottostimerà l'esercizio, al contrario chi ha sempre studiato in fretta tenderà a sovrastimare.

Fattori sulla materia

Fanno parte di questo gruppo i fattori che riguardano l'Algebra stessa. In primo luogo vi sono gli argomenti. Se un argomento non è mai stato svolto in classe dal docente e neanche mai accennato come possibile collegamento, l'esercizio che lo include, avrà una difficoltà sovrastimata dalla classe.

In secondo luogo esistono alcuni argomenti che in generale fanno più paura di altri: un'equazione che si riconosce immediatamente risolvibile con una radice di un quadrato perfetto non comporterà sovrastime, mentre invece una scritta a più frazioni con dei segni meno, che non si riconosce immediatamente come facile, anche se alla fine magari si semplifica parecchio, porterà ad una sovrastima della difficoltà.

Vi è poi il fattore che considera la differenza tra un esercizio di un argomento appena svolto e uno sui fondamenti della materia. Questa relazione è complicata e dipende molto dal percorso scolastico che ogni singolo alunno ha avuto. Se un argomento fondamentale era stato compreso bene l'alunno sottostimerà la difficoltà, al contrario lo sovrastimerà nel caso in cui abbia confusione su quell'aspetto. Gli argomenti nuovi hanno il vantaggio di essere stati appena spiegati, ma dall'altro lato la matematica ha bisogno dei suoi tempi per essere capita, quindi l'esercizio sarà sovrastimato oppure no in base all'esperienza individuale.

Fattori sulle relazioni.

Questo gruppo prende in esame i fattori che nascono dal fatto che la matematica è assimilata dallo studente tramite un insieme di relazioni (triangolo dell'insegnamento.) Al primo posto vi è sicuramente il contratto didattico: lo studente risponde quello che si aspetta che il docente si voglia sentir dire. Più le richieste e il modo di fare dell'insegnante risultano essere chiari in questo senso, più lo studente sottostimerà l'esercizio, al contrario un docente criptico che non esplicita bene le richieste avrà come conseguenza una sovrastima della difficoltà dell'esercizio.

In secondo luogo vi è la relazione, non sottovalutabile in un liceo scientifico che si instaura tra matematica e fisica e tra matematica e i suoi vari rami. Più i docenti riusciranno a creare collegamenti tra gli aspetti più la mente dei ragazzi sarà aperta nel vedere la matematica in vari ambiti e in diverse forme, più le difficoltà saranno minori. Più il ragazzo viene abituato a ragionare a compartimenti stagni, più le difficoltà cresceranno.

In terzo luogo vi sono le competenze che uno studente dovrebbe acquisire: comprensione del significato di definizione, convenzione, uso dei costrutti logici per poter dimostrare ed uso di una matematica formale. Più l'allievo avrà competenze in questi aspetti meglio riuscirà a risolvere i test.

Risolvendo gli esercizi gli alunni hanno poi toccato con mano la vera difficoltà presentatagli e hanno modificato la scala. Entrano quindi in gioco, nella compilazione della seconda classifica delle difficoltà, alcuni fattori che influenzano questa graduatoria, che per il fatto che si presentano in un secondo momento saranno chiamati *fattori a posteriori*.

I fattori a posteriori che influenzano la percezione della difficoltà possono essere divisi in due gruppi:
Fattori innati
Fattori acquisiti

Fattori innati
Sono i fattori appartenenti al ragazzo che sono impossibili da insegnare e da trasmettere, ma che piuttosto nascono con l'alunno. Ne fanno parte l'intuito e la capacità di capire la situazione, la capacità di creare collegamenti tra argomenti ed esercizi visti e qualcosa di nuovo che si ha davanti, e la capacità di trovare strade più semplici per la risoluzione di un esercizio. Lo studente in grado di trovare tra i modi di soluzione quello più semplice evidenzia anche una padronanza della materia. Più l'alunno possiede queste doti, più tenderà a sottostimare la difficoltà degli esercizi.

Fattori acquisiti
Sono i fattori che si possono acquisire con lo studio e il lavoro costante. Ne fanno parte la conoscenza approfondita della materia e l'abilità nei calcoli acquisita negli anni. Più uno studente lavora seriamente meno si troverà in difficoltà di fronte ad un test.

Dopo un'analisi dei fattori che influenzano la percezione, esponiamo alcuni suggerimenti, che sono emersi dall'analisi dei test, per rendere la differenza tra la graduatoria a priori e quella a posteriori meno marcata. Avere una percezione delle difficoltà più oggettiva può aiutare a gestire meglio i tempi di un compito in classe ed anche nella scelta dei quesiti dell'esame di stato.

Evidenziare la parità tra pratica e teoria ed incoraggiare il fatto di non vedere la teoria al servizio della pratica incrementa la capacità di ragionamento che si svincola da esercizi svolti. Gli studenti tendono a non considerare affatto la teoria a meno che il docente non interroghi esplicitamente su quell'aspetto.

Incoraggiare l'autonomia degli studenti ed abituarli ad approfondire e migliorarsi sempre di più.

Creare i tempi giusti tra la presentazione di un argomento e la verifica di quest'ultimo, in modo che lo studente abbia il tempo per assimilare i concetti e farli decantare nella propria mente.

Cambiare spesso la tipologia di prova, in modo che lo studente non si abitui ad uno standard ma sia spronato a tenere la mente attiva ed abile in diversi contesti.

Creare collegamenti tra i vari aspetti della matematica stessa (in particolare dell'Algebra) e tra la matematica e le altre discipline. In questo modo, ritenendo un concetto in più materie, sarà più difficile dimenticarlo.

Promuovere una visione di insieme della materia e non presentarla come fatta di compartimenti a sé stanti: Algebra, Geometria..., ma dare un'immagine di unione, in modo che le tecniche imparate in un ramo possano essere sfruttate anche in altri.

Capitolo 8

Conclusione

Il rapporto tra l'Algebra e l'uomo ha radici molto antiche e complesse, passa attraverso ostacoli epistemologici e personali ed è molto sfaccettato. Ne risulta però una preziosa collaborazione, di cui l'uomo si serve da diversi secoli per risolvere problemi. Una di queste facce è la percezione della difficoltà che gli studenti hanno nel momento in cui devono risolvere un esercizio. La percezione a priori ed a posteriori è influenzata da diversi fattori che abbiamo indagato attraverso la somministrazione di test.

Ne emerge un'immagine dell'Algebra complessa che a fatica riesce ad introdursi nella mente dei ragazzi. E' una materia che richiede pazienza, lavoro e studio. Le difficoltà e gli errori sono comunque sempre dietro l'angolo e basta poco per sbagliare un segno. Occorre però che lo studente non si lasci abbattere dalle difficoltà, ma che colga l'occasione per migliorarsi e per creare relazioni con il docente e l'Algebra. L'Algebra è una materia per pazienti e perseveranti, richiede di creare collegamenti tra i suoi vari aspetti e si pone come una materia costruttiva. Solo ponendo buone basi, salendo gradatamente nella difficoltà degli esercizi e collegando il tutto si può costruire mentalmente il grattacielo dell'Algebra.

Figura 8.1: Algebra come un grattacielo

Capitolo 9

Appendice: le prove

9.1 Compito prima

I batteri

Una colonia di batteri che vive su un substrato gelatinoso, raddoppia la propria superficie ogni mese e ricopre tutta la superficie del gel in 20 mesi. Quanto tempo impiega a ricoprire metà gel?

Quale struttura matematica hai usato per rispondere al quesito?

- A. Potenze
- B. Proprietà dell'addizione
- C. Aree delle figure piane
- D. Equazioni di primo grado

La piramide

Riempi le caselle con il numero giusto. Cosa ti ricorda? A cosa serve?

Il meno *Testo del problema*

Semplifica la seguente frazione algebrica:

$$\frac{x}{y-x}+\frac{x}{x+y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Frazione Algebrica *Testo del problema*

Semplifica la seguente frazione algebrica:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}$$

Frazione Algebrica *Testo del problema*

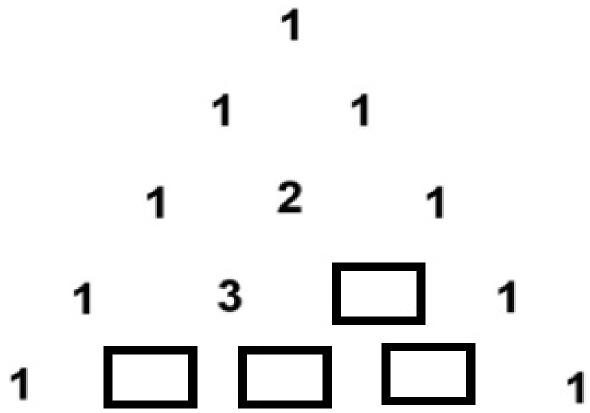


Figura 9.1: La piramide

Scrivi in altro modo la frazione algebrica togliendo il primo meno

$$-\frac{-x-2}{(x+2)}$$

Frazione Algebrica *Testo del problema*
A quale frazione è equivalente la frazione seguente:

$$-\frac{-x-4}{(x+4)}$$

- A. $\frac{x+4}{(x+4)}$
- B. 1
- C. $\frac{x-4}{(x+4)}$
- D. $+\frac{-x-4}{-(x+4)}$

Divisione *Testo del problema*
Semplifica la seguente frazione algebrica:

$$\left[1-\frac{3}{2(a-1)}-\frac{5}{2(a+1)}\right]:\frac{a^2-4a}{a+1}$$

Esponenti *Testo del problema*
A quale esponente devi elevare

$$-\frac{2x}{3+x}$$

per ottenere:

$$\frac{(3+x)^2}{4x^2}$$

Ancora frazioni *Testo del problema*
Determina per quali valori la frazione algebrica non è definita e per quale si annulla:

$$\frac{a-9}{a-4}$$

9.2 Compito seconda

Invalsi 2011 D4

Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale n, $2n+1$ è un numero primo." Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.

Invalsi 2011 D15
Dividere un numero per 0.2 è lo stesso che moltiplicarlo per

- A. $\frac{1}{5}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. 2
- D. 5

Domanda aggiunta
Sapendo che se un numero naturale n maggiore di 0 viene moltiplicato per x e per y, numeri reali, con $x < y$, si ottiene $n \cdot x < n \cdot y$, scegliere l'affermazione corretta:

- A. $\frac{n}{x} > \frac{n}{y}$
- B. $\frac{n}{x} < \frac{n}{y}$
- C. $\frac{n}{x} = \frac{n}{y}$
- D. nessuna delle precedenti

Invalsi 2011 D16
L'espressione $10^{37} + 10^{38}$ è anche uguale a

- A. 20^{75}
- B. 10^{7}

- C. $11 \cdot 10^{37}$
- D. $10^{37 \cdot 38}$

Invalsi D22 2011
Il polinomio $x^4 - 16$ è divisibile per

- A. $x^2 - 8$
- B. $x - 4$
- C. $x + 2$
- D. $(x - 2)^2$

Invalsi D21 2011
Quale fra le seguenti uguaglianze è corretta, qualunque sia il numero reale che sostituisce la x?

- A. $\sqrt{x^2} = x$
- B. $\sqrt{x^2} = \pm x$
- C. $\sqrt{x^2} = |x|$
- D. $\sqrt{x^2} = \pm |x|$

Invalsi D29 2011 *Testo del problema*
L'espressione $\frac{9}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{7}{10^4} + \frac{2}{10^5}$ si può rappresentare mediante il numero decimale

- A. 98.72
- B. 9.8072
- C. 0.9872
- D. 0.98072

Invalsi 2012 D1
Figura pagina seguente
Invalsi 2014 D1
Se k è un numero intero negativo, qual è il maggiore tra i seguenti numeri?

- 5+k
- 5·k
- 5-k
- 5^k

La tabella seguente riporta alcune informazioni nutrizionali stampate su tre confezioni di cereali per la prima colazione:

	Confezione 1	Confezione 2	Confezione 3
grammi di cereali	100	200	70
percentuale di zucchero	20%	10%	20%

Sulla base dei dati in tabella, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	La quantità di zucchero contenuta nella confezione 2 è uguale alla quantità di zucchero contenuta nella confezione 3.	☐	☐
b.	La quantità di zucchero contenuta nella confezione 1 è maggiore della quantità di zucchero contenuta nella confezione 2.	☐	☐
c.	La quantità di zucchero contenuta nella confezione 1 è maggiore della quantità di zucchero contenuta nella confezione 3.	☐	☐

Figura 9.2: D1 2012

Invalsi 2015 D2
Testo del problema
Nell'insieme dei numeri reali la disequazione $x^2 + 1 \geq 0$ è verificata

- Solo per $x \geq 0$
- Solo per $x \geq -1$
- Per ogni x
- Per nessun x

Invalsi 2017 D1
A una conferenza sono presenti 90 persone. Le donne sono 14 più degli uomini. Quanti sono gli uomini?

- 59
- 38
- 31
- 76

Domanda
Quali sono le soluzioni della seguente equazione:

$$\frac{x}{3} + \frac{13}{6} = \frac{-x}{6} + \frac{26}{3}$$

9.3 Compito terza

I batteri

Una colonia di batteri che vive su un substrato gelatinoso, raddoppia la propria superficie ogni mese e ricopre tutta la superficie del gel in 20 mesi. Quanto tempo impiegano a ricoprire il gel 4 colonie? Con quale equazione si può descrivere il problema?

Punti di intersezione

Supponi che ti siano date una parabola e un'ellisse e che ti venga chiesto di studiare il numero di punti (punti di intersezione) che queste due curve hanno in comune. In che modo puoi trovare i punti di intersezione? Quanti possono essere? Che relazione c'è tra il numero di punti trovato e il grado del polinomio?

Punti di intersezione; esercizio

Determina i punti di intersezione tra l'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

e la retta che passa per l'origine e per $P(2,4)$.

Coniche

Date le seguenti coniche, scegli se sono rette, circonferenze, ellissi, parabole o nessuna delle precedenti:

- A. $y = \frac{5}{6}x^2 + x$
- B. $5y + 3x - 6 = 0$
- C. $x^2 + y^2 + 3x + 9y + 2 = 0$
- D. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$
- E. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{16} = 1$
- F. $16x^2 + 4y^2 = 64$

Coniche

Scrivi l'equazione dell'ellisse, avete centro nell'origine, tangente alla retta di equazione $y = -\frac{3}{2}x - 3$ e avente un fuoco nel punto di intersezione tra la retta $x = -1$ e l'asse delle x.

Ombre

Supponi di avere un anello posizionato parallelamente al muro, illuminato da una torcia. Quali ombre puoi proiettare sul muro se sposti la torcia ma tieni fisso l'anello?

Fuochi

Scrivere l'equazione dell'ellisse i cui fuochi sono i punti $F_1 = (6,1)$ e $F_2 = (2,1)$ e il cui semiasse maggiore misura 5.

Tangenti

Dal punto $P = (3\sqrt{2}, 0)$ condurre le tangenti all'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Disegnare
Rappresenta l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Ellisse oppure no?
Cosa rappresenta la seguente equazione? Descrivila brevemente.

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

9.4 Compito quarta

Quesito 7 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2006
Bruno de Finetti $(1906 - 1985)$, tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, alla domanda: "Cos'è la probabilità" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a questa risposta? E' possibile collegarla a una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Quesito 6 prova d'esame corso ordinamento 2005
Come si definisce n! e qual è il suo significato nel calcolo combinatorio? Qual è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?

Quesito 9 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2008
In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

Quesito 2 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2009
Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biettive?
Quesito 5 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2009
Si considerino le seguenti espressioni: $\frac{0}{1}$; $\frac{0}{0}$; $\frac{1}{0}$; 0^0; $0!$;
A quali di esse è possibile dare un valore numerico? Si motivi la risposta

Quesito 7 prova d'esame corso sperimentale p.n.i. 2009
Si dimostri l'identità:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

con n e k numeri naturali e $n \geq k$

9.5 Compito quinta

Quesito 9 prova d'esame sessione ordinaria 2015

Risolvere il seguente problema posto nel 1547 da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia: "Si divida il numero 8 in due numeri reali non negativi in modo che sia massimo il prodotto di uno per l'altro e per la loro differenza."

Quesito 9 prova d'esame sessione ordinaria 2017

Dimostrare che l'equazione:

$$\arctan x + x^3 + e^x = 0 \tag{9.1}$$

ha una e una sola soluzione reale.

Quesito 4 prova d'esame sessione ordinaria 2015

Sia $P(x) = x^2 + bx + c$. Si suppone che $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ e che $P(1) \neq P(2)$. Calcolare P(0).

Quesito 3 prova d'esame corso di ordinamento 2002

Considerati i numeri reali a,b,c,d, comunque scelti, se $a > b$ e $c > d$ allora:

- $a + d > b + c$
- $a - d > b - c$
- $ad > bc$
- $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

Quesito 10 prova d'esame corso di ordinamento 2003

Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e mostrare i passaggi.

Quesito 10 prova d'esame corso di ordinamento 2004

Considerati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$, quanti sono le applicazioni (le funzioni) di A in B.

Quesito 9 prova d'esame corso di ordinamento 2005

Calcola, senza l'uso della calcolatrice, il valore di:
$sin^2(35°) + sin^2(55°)$ considerando le misure degli angoli in gradi sessagesimali.

Quesito 4 prova d'esame corso di ordinamento 2008

Usa la regola di de L'Hospital per dimostrare che il

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x}$$

Quesito 9 prova d'esame corso di ordinamento 2006
Della funzione f(x) si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Si può determinare f(x)?

Quesito 9 prova d'esame corso di ordinamento 2008
In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

Bibliografia e sitografia

L.Sasso, 2016, “La matematica a colori 1”, Petrini

L.Sasso, 2016, “La matematica a colori 2”, Petrini

L.Sasso, 2016, “La matematica a colori 3”, Petrini

L.Sasso, 2016, “La matematica a colori 4”, Petrini

L.Sasso, 2016, “La matematica a colori 5”, Petrini

M. Bergamini, A.Trifone, G. Barozzi, 2012, “La seconda prova di matematica”, Zanichelli

D. Lucangeli, 2012, “La discalculia e le difficoltà in aritmetica”, Giunti

R.Zan, 2007, “Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire”, Springer

L. Radford, L.Puig, 2007, “Syntax and meaning as sensuous, visual, historical, forms of algebraic thinking”

X.Wang, 2015, “The literature Review of Algebra Learning: focusing on the contributions to students’ difficulties”

C.B.Boyer, 2011, “Storia della matematica”, Mondadori

https://www.gestinv.it
https://corsi.deascuola.it
http://www.progettoaral.it

Elenco delle figure