

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

EFFETTO MEMORIA NELLE ONDE GRAVITAZIONALI

Relatore:
Dott. Roberto Casadio

Presentata da:
Luigi Scurto

Anno Accademico 2017/2018

Abstract

L'effetto memoria delle onde gravitazionali consiste nella presenza nell'equazione d'onda di termini non oscillatori, che fanno sì che almeno una delle polarizzazioni dell'onda assuma valori diversi per $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$. Questo comporta, nel caso di particelle di prova in caduta libera situate nella regione attraversata dall'onda, uno spostamento permanente rispetto alla posizione iniziale dopo il passaggio dell'onda, da cui il termine "memoria".

L'estrema importanza di questo fenomeno è legata a due aspetti. Il primo è che la rivelazione dell'effetto memoria di un'onda gravitazionale andrebbe a costituire un'ulteriore prova del corretto funzionamento della relatività generale. Il secondo consiste nel fatto che lo studio della memoria potrebbe consentire di rivelare il passaggio di onde gravitazionali senza la necessità di compiere la misura nell'istante del passaggio dell'onda, o addirittura di rivelare il passaggio di onde con caratteristiche tali da non essere rivelabili direttamente.

In questa trattazione, dopo un'introduzione generale sulle onde gravitazionali, si procederà ad analizzare le due tipologie di effetto memoria: l'effetto lineare e l'effetto non lineare. In entrambi i casi si andranno ad analizzare applicazioni a casi particolari. Nel caso dell'effetto lineare si andrà a studiare l'effetto della memoria lineare su particelle in caduta libera. Nel caso della memoria non lineare si andranno a ricavare le equazioni della memoria per le varie tipologie di sistemi binari con orbite Kepleriane. Inoltre si tratterà brevemente la possibilità di rivelare la memoria attraverso interferometri come LIGO e LISA.

Indice

1	Introduzione	4
1.1	Gravità Linearizzata e Trasformazioni di Gauge	4
1.2	Gradi di Libertà	5
1.3	Onde Gravitazionali	7
1.4	Produzione di Onde Gravitazionali	11
1.5	Onde generate da un sistema binario	15
1.6	Rilevazione delle Onde Gravitazionali	16
2	Effetto Memoria delle Onde Gravitazionali	20
2.1	Effetto Memoria Lineare	20
2.2	Effetto Lineare su Particelle Libere	23
2.3	Effetto Memoria non Lineare	27
2.4	Rilevazione dell'Effetto Memoria non Lineare	28
3	Memoria non Lineare di Sistemi Binari	31
3.1	Orbite Quasi-Circolari Spiraleggianti	32
3.2	Orbite Ellittiche	33
3.3	Orbite Iperboliche e Paraboliche	36
3.4	Orbite Radiali	40
4	Conclusione	43
A	Modi d'Onda e Memoria Non-Lineare	44
B	Polarizzazioni h_{lm}^N e $h_{lm}^{(mem)(1)}$ per Binarie Newtoniane	46
	Bibliografia	48

1 Introduzione

In questo primo capitolo si ricava l'equazione delle onde gravitazionali attraverso il limite di campo debole nell'equazione di Einstein. Vengono inoltre introdotte alcune trasformazioni di gauge utili alla trattazione delle onde. Infine vengono studiate le onde gravitazionali e la loro generazione, al fine di comprendere meglio la trattazione dell'effetto memoria nei capitoli seguenti.

1.1 Gravità Linearizzata e Trasformazioni di Gauge

Al fine di ricavare l'equazione delle onde gravitazionali, è necessario lavorare in approssimazione di campo debole, ovvero assumere che il campo gravitazionale nella posizione dell'osservatore sia debole, e che quindi la metrica si discosti di poco dalla metrica Minkowskiana dello spazio piatto.

Questo consente di scrivere la metrica come la somma della metrica di Minkowski e di una piccola perturbazione:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1.1.1)$$

Il fatto che la perturbazione sia piccola permette di trascurare tutti i termini di ordine superiore al primo nella perturbazione stessa. In questa maniera è possibile interpretare la versione linearizzata della relatività generale come una teoria che descrive la propagazione in uno spazio-tempo piatto di un tensore simmetrico $h_{\mu\nu}$.

Per ricavare la versione linearizzata dell'equazione di Einstein è innanzitutto necessario ricavare i simboli di Christoffel, che assumono la forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}). \quad (1.1.2)$$

Da questi otteniamo il tensore di Riemann

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma}) \quad (1.1.3)$$

e il tensore di Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h + \square h_{\mu\nu}) \quad (1.1.4)$$

dove il simbolo \square indica il d'Alambertiano nello spazio piatto, $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Contraendo il tensore di Ricci possiamo trovare l'ultimo elemento necessario per trovare l'espressione del tensore di Einstein, lo scalare di Ricci

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h. \quad (1.1.5)$$

Adesso possiamo ricavare l'espressione del tensore di Einstein, da andare a sostituire nell'equazione di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h). \quad (1.1.6)$$

Tuttavia, è importante notare che il limite di campo debole non definisce in maniera univoca il sistema di coordinate; possono esistere altri sistemi di coordinate in cui la metrica può essere espressa come la somma della metrica Minkowskiana e di una perturbazione, ma con una perturbazione diversa.

Per questo definiamo le trasformazioni di Gauge del tensore $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = h_{\mu\nu} + 2\epsilon\partial_\mu\xi_\nu \quad (1.1.7)$$

in cui ξ_ν è un generico campo vettoriale e ϵ è assunto essere piccolo. Si può dimostrare che tutti i tensori ottenuti tramite queste trasformazioni forniscono lo stesso tensore di curvatura del tensore di partenza:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu\partial_\mu\xi_\sigma + \partial_\rho\partial_\nu\partial_\sigma\xi_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\rho\xi_\nu + \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho \\ - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\rho\xi_\mu - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\mu\xi_\rho - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\sigma\xi_\nu - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\nu\xi_\sigma) = 0. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

1.2 Gradi di Libertà

Per poter trattare nella maniera più conveniente le onde gravitazionali è prima opportuno analizzare il tensore $h_{\mu\nu}$ e i suoi gradi di libertà. Per cominciare è conveniente fissare un sistema di riferimento inerziale nello spazio-tempo Minkowskiano su cui si propaga la perturbazione.

Il tensore $h_{\mu\nu}$ è un tensore (0,2) simmetrico. Sotto rotazioni spaziali, la componente 00 si comporta come uno scalare, le componenti $0i$ formano un vettore mentre le componenti ij formano un tensore. Le rappresentazioni irriducibili del tensore sono quindi

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2\Phi \\ h_{0i} &= w_i \\ h_{ij} &= 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

dove Ψ indica la traccia del tensore h_{ij} e il tensore s_{ij} è un tensore a traccia nulla detto *sforzo*. Usando questa notazione la metrica assume la forma

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + w_i(dt dx^i + dx^i dt) + [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j. \quad (1.2.2)$$

Al fine di poter stabilire quali siano i veri gradi di libertà del campo gravitazionale è necessario esprimere il tensore di Einstein in funzione delle rappresentazioni del tensore di perturbazione della metrica

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 2\nabla^2\Psi + \partial_k\partial_l s^{kl} \\
G_{0j} &= -\frac{1}{2}\nabla^2 w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k w^k + 2\partial_0\partial_j\Psi + \partial_0\partial_k s_j^k \\
G_{ij} &= (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\Phi - \Psi) + \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k - \partial_0\partial_i w_j + 2\delta_{ij}\partial_0^2\Psi \\
&\quad - \square s_{ij} + 2\partial_k\partial_i s_j^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl}
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Grazie a queste equazioni è possibile utilizzare le equazioni $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ per determinare le componenti indipendenti di $h_{\mu\nu}$. Utilizzando l'equazione 00 si ottiene

$$\nabla^2\Psi = 4\pi GT_{00} - \frac{1}{2}\partial_k\partial_l s^{kl} \tag{1.2.4}$$

che, non contenendo derivate di Ψ rispetto al tempo, fornisce la sua dipendenza da T_{00} e da s_{ij} . Guardando l'equazione $0j$ si ottiene invece la seguente relazione:

$$(\delta_{jk}\nabla^2 - \partial_j\partial_k)w^k = -16\pi GT_{0j} + 4\partial_0\partial_j\Psi + 2\partial_0\partial_k s_j^k. \tag{1.2.5}$$

Anche in questa il fatto che non ci siano derivate di w^i rispetto al tempo fornisce una relazione tra il vettore e le grandezze nella parte destra dell'equazione. Infine, considerando l'equazione ij , la relazione

$$\begin{aligned}
(\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\Phi &= 8\pi GT_{ij} + (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j - 2\delta_{ij}\partial_0^2)\Psi - \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k + \partial_0\partial_i w_j \\
&\quad + \square s_{ij} - 2\partial_k\partial_i s_j^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl}
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

fornisce la relazione per lo scalare Φ . In questo modo si arriva alla conclusione che gli unici gradi di libertà dell'equazione di Einstein siano quelli del tensore s_{ij} .

Infine, prima di introdurre le onde gravitazionali, è utile introdurre una specifica trasformazione di gauge, detto gauge trasversale, che consiste nel trovare un sistema in cui valgano le due seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
\partial_i s^{ij} &= 0 \\
\partial_i w^i &= 0.
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Per ottenere ciò è sufficiente imporre le due seguenti relazioni:

$$\nabla^2\xi^j + \frac{1}{3}\partial_j\partial_i\xi^i = -2\partial_i s^{ij} \qquad \nabla^2\xi^0 = \partial_i w^i + \partial_0\partial_i\xi^i. \tag{1.2.8}$$

Utilizzando questo gauge, le equazioni di Einstein assumono la seguente forma, che verrà usata per ricavare l'equazione delle onde gravitazionali.

$$G_{00} = 2\nabla^2\Psi = 8\pi GT_{00} \quad (1.2.9)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2}\nabla^2 w_j + 2\partial_0\partial_j\Psi = 8\pi GT_{0j}$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\Phi - \Psi) - \partial_0\partial_i w_j + 2\delta_{ij}\partial_0^2\Psi - \square s_{ij} = 8\pi GT_{ij}$$

1.3 Onde Gravitazionali

Volendo studiare le onde gravitazionali nel vuoto e lontano dalla sorgente, è necessario imporre il limite di campo debole, il gauge trasversale e inoltre è necessario porre $T_{\mu\nu} = 0$. In queste condizioni, la prima delle equazioni (1.2.9) diventa

$$\nabla^2\Psi = 0 \quad (1.3.1)$$

che implica $\Psi = 0$. Grazie a questo risultato, la seconda equazione (1.2.9) diventa

$$\nabla^2 w_j = 0 \quad (1.3.2)$$

che implica $w_j = 0$. Infine, dati i due risultati precedenti, la traccia della terza equazione (1.2.9) assume la forma

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (1.3.3)$$

che ancora una volta implica $\Phi = 0$. Di conseguenza la componente a traccia nulla della terza equazione (1.2.9) diventa un'equazione d'onda per il tensore s_{ij}

$$\square s_{ij} = 0. \quad (1.3.4)$$

Da adesso in poi sarà più conveniente lavorare con il tensore $h_{\mu\nu}$ piuttosto che con il tensore s_{ij} , ma imponendo che tutti gli altri gradi libertà siano nulli e che s_{ij} sia trasversale. Questa condizione è nota come *gauge trasversale a traccia nulla*, in cui il tensore $h_{\mu\nu}$ assume la forma

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

e la (1.3.4) diventa

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (1.3.6)$$

Le onde piane costituiscono un set particolarmente utile di soluzioni di quest'equazione, e sono date da

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (1.3.7)$$

dove $C_{\mu\nu}$ è un tensore $(2,0)$ costante, simmetrico, puramente spaziale e a traccia nulla. Per quanto riguarda $e^{ik_\sigma x^\sigma}$, considerato che ovviamente si tratta di una quantità complessa, è conveniente considerare durante i calcoli sia la parte reale che quella immaginaria, per poi prendere in considerazione la parte reale dei risultati. Imponendo che l'onda piana soddisfi la (1.3.6) si ottiene

$$0 = \square h_{\mu\nu}^{TT} = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} = -\eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} = -k_\sigma k^\sigma h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (1.3.8)$$

Considerato che si è interessati a soluzioni non banali, e quindi in cui non tutte le componenti di $h_{\mu\nu}^{TT}$ siano nulle, la relazione precedente implica

$$k_\sigma k^\sigma = 0 \quad (1.3.9)$$

il che implica che l'onda si propaga alla velocità della luce. Resta da verificare che la perturbazione sia trasversale, ovvero

$$0 = \partial_\mu h_{\mu\nu}^{TT} = iC^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}. \quad (1.3.10)$$

Ciò implica che il tensore $C^{\mu\nu}$ deve essere ortogonale al vettore d'onda

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0. \quad (1.3.11)$$

Per rendere più chiari i risultati ottenuti, si prenderà ora in considerazione un'onda piana con vettore d'onda diretto come l'asse x^3 . In questo caso il vettore d'onda assumerà la forma

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k^3) = (\omega, 0, 0, \omega). \quad (1.3.12)$$

In queste condizioni le uniche componenti non nulle del tensore $C_{\mu\nu}$ sono le componenti $C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{21}$, e considerando che il tensore deve essere simmetrico e a traccia nulla, si ottiene

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.13)$$

Per comprendere meglio l'effetto del passaggio di un'onda gravitazionale si prenda un insieme di particelle di prova vicine, con quadri-velocità descritte da un campo

vettoriale $U^\mu(x)$ e con vettore di separazione S^μ . In questo caso si ha la seguente equazione della deviazione geodetica

$$\frac{d^2}{d\tau^2}S^\mu = R^\mu_{\nu\rho\sigma}U^\nu U^\rho S^\sigma. \quad (1.3.14)$$

Se si assume che le particelle si muovano a velocità bassa, è possibile esprimere la quadri-velocità come un vettore unitario nel tempo più una correzione di ordine $h_{\mu\nu}^{TT}$ o superiore. Considerato che il tensore di Riemann è di primo ordine nella perturbazione, è possibile ignorare la correzione della quadri-velocità in quanto genererebbero soltanto termini di ordine superiore al primo. Non rimane quindi che esprimere il tensore di Riemann in funzione del tensore $h_{\mu\nu}^{TT}$, ottenendo la formula

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_0\partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} + \partial_\mu\partial_\sigma h_{00}^{TT} - \partial_\sigma\partial_0 h_{\mu 0}^{TT} - \partial_\mu\partial_0 h_{\sigma 0}^{TT}) \quad (1.3.15)$$

che, considerato che $h_{\mu 0}^{TT} = 0$ diventa

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2}\partial_0\partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT}. \quad (1.3.16)$$

Il fatto che le particelle si muovano lentamente permette di porre $\tau = x^0 = t$, e quindi la (1.3.14) diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}S^\mu = \frac{1}{2}S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2}h^{TT\mu}{}_\sigma \quad (1.3.17)$$

Considerando ancora un'onda piana che viaggia lungo la direzione di x^3 , solo le componenti S^1 e S^2 subiscono variazioni, quindi solo le direzioni perpendicolari al vettore d'onda vengono modificate. Per convenienza si andrà adesso a rinominare le componenti non nulle del tensore ampiezza dell'onda nel seguente modo

$$h_+ = C_{11} \quad h_\times = C_{12} \quad (1.3.18)$$

così da avere

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.19)$$

Se si considera separatamente l'effetto di h_+ , ponendo $h_\times = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}S^1 &= \frac{1}{2}S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}S^2 &= -\frac{1}{2}S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

che ammette come soluzione

$$\begin{aligned} S^1 &= \left(1 + \frac{1}{2}h_+e^{ik_\sigma x^\sigma}\right)S^1(0) \\ S^2 &= \left(1 - \frac{1}{2}h_+e^{ik_\sigma x^\sigma}\right)S^2(0). \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

Questo implica che un cerchio di particelle di prova libere, se investito da un'onda con vettore d'onda normale al piano su cui giace il cerchio e con polarizzazione +, si dilaterà in maniera alternata orizzontalmente e verticalmente lungo la forma di un +.

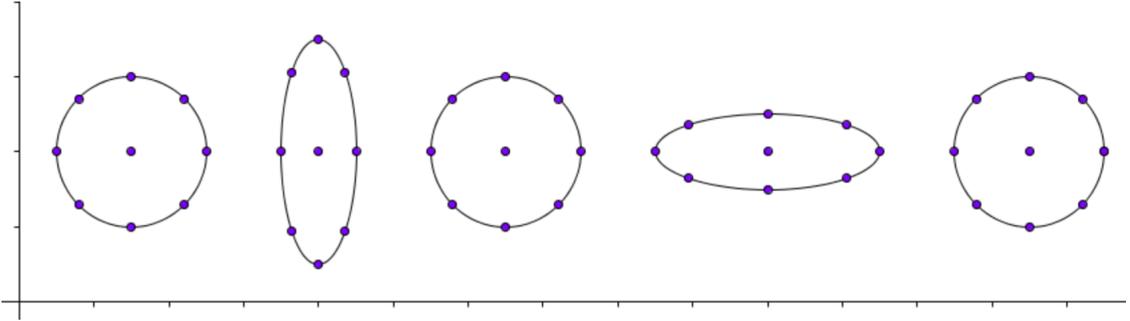


Figura 1: Effetto di un'onda gravitazionale con polarizzazione + su particelle di prova inizialmente disposte in cerchio.

Ripetendo lo stesso procedimento per h_\times , ponendo $h_+ = 0$, si ottengono le seguenti soluzioni

$$\begin{aligned} S^1 &= S^1(0) + \frac{1}{2}h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^2(0) \\ S^2 &= S^2(0) + \frac{1}{2}h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^1(0). \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

In questo caso il cerchio di particelle si deforma lungo la forma di un \times .

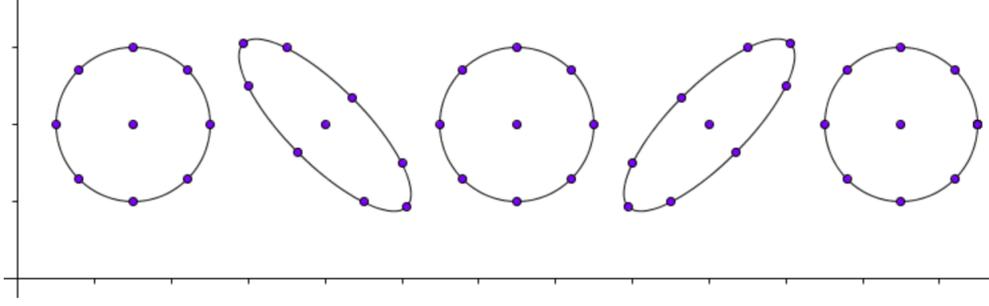


Figura 2: Effetto di un'onda gravitazionale con polarizzazione \times su particelle di prova inizialmente disposte in cerchio.

Inoltre è possibile definire le due polarizzazioni circolari dell'onda. La polarizzazione destrorsa h_R e quella sinistrorsa h_L , date dalle formule

$$h_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_+ + ih_\times) \quad (1.3.23)$$

$$h_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_+ - ih_\times).$$

In questo caso il cerchio di particelle ruoterà rispettivamente in verso destrorso o sinistrorso.

1.4 Produzione di Onde Gravitazionali

Dopo aver studiato la soluzione delle onde gravitazionali, rimane da studiare la generazione di onde gravitazionali da parte di una sorgente. Partendo dall'equazione $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, stavolta non è possibile porre il tensore $T_{\mu\nu} = 0$, di conseguenza il tensore di sforzo non è necessariamente l'unica componente non nulla della perturbazione e di conseguenza non è possibile assumere che la soluzione sia in forma trasversale a traccia nulla. Tuttavia è possibile introdurre alcune semplificazioni.

Per cominciare è utile definire la perturbazione a traccia invertita

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}. \quad (1.4.1)$$

Il nome del tensore deriva dalla seguente proprietà

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -h. \quad (1.4.2)$$

Un'ulteriore semplificazione può essere effettuata scegliendo un'opportuno gauge, che in questo caso è il gauge di Lorenz, che consiste nello scegliere un vettore ξ_μ tale da rispettare la relazione

$$\square \xi_\mu = -\partial_\lambda \bar{h}^\lambda{}_\mu, \quad (1.4.3)$$

in modo da avere

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.4.4)$$

Utilizzando queste semplificazioni, l'equazione di Einstein assume la forma

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.4.5)$$

La soluzione a quest'equazione può essere trovata usando una funzione di Green. La funzione di Green per l'operatore d'Alambertiano è definita come

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma), \quad (1.4.6)$$

dove il simbolo \square_x indica l'operatore d'Alambertiano rispetto alle coordinate x^σ . Adesso è possibile esprimere la soluzione dell'equazione (1.4.5) nella forma

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y. \quad (1.4.7)$$

Come soluzione della (1.4.6) è opportuno prendere in considerazione la funzione di Green ritardata, che rappresenta l'effetto cumulativo di segnali dal passato del punto preso in considerazione

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta[|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0).^1 \quad (1.4.8)$$

Inserendo l'equazione (1.4.8) nella (1.4.7) è possibile integrare su y^0 , ottenendo così la formula

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}) d^3 y \quad (1.4.9)$$

La quantità $t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ viene spesso chiamata *tempo ritardato* e indicato con t_r . L'equazione ottenuta indica che la variazione del campo gravitazionale è dato dalla somma delle influenze delle sorgenti nei punti del cono-luce del passato del punto di osservazione.

¹Nella formula il grassetto indica i vettori spaziali $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$. La funzione $\theta(x^0 - y^0)$ è uguale a 1 se $x^0 > y^0$ e zero altrimenti.

Si andrà adesso a considerare un caso particolare, quello di una sorgente isolata, lontana dal punto di osservazione e composta da materia non relativistica.

Per cominciare, è utile ricordare la definizione di trasformata di Fourier rispetto al tempo di una funzione $\phi(t, \mathbf{x})$ e della sua anti-trasformata

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \phi(t, \mathbf{x}), \\ \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}).\end{aligned}\tag{1.4.10}$$

Calcolando la trasformata della perturbazione della metrica si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt d^3y e^{i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r d^3y e^{i\omega t_r} e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= 4G \int d^3y e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\end{aligned}\tag{1.4.11}$$

Si consideri adesso una sorgente (isolata, lontana e non relativistica) centrata a una distanza spaziale r e con sue le componenti a una distanza $r + \delta r$ con $\delta r \ll r$. La bassa velocità della sorgente fa sì che la maggior parte della radiazione emessa abbia una frequenza ω tale da avere $\delta r \ll \omega^{-1}$. Con questa approssimazione il termine $e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ può essere sostituito dal termine $e^{i\omega r}/r$ e portato fuori dall'integrale, in modo da avere

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}).\tag{1.4.12}$$

Il gauge di Lorenz precedentemente usato garantisce la relazione

$$\tilde{h}^{0\nu} = -\frac{i}{\omega} \partial_i \tilde{h}^{i\nu}\tag{1.4.13}$$

e consente quindi di calcolare unicamente le componenti spaziali del tensore di perturbazione e di ricavare le rimanenti tramite la relazione (1.4.13). Non resta quindi che ricavare le componenti spaziali del tensore $\tilde{h}_{\mu\nu}$ a partire dalle componenti spaziali del tensore $\tilde{T}_{\mu\nu}$ e dalla relazione (1.4.12).

Per cominciare si integri per parti

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = \int \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) d^3y - \int y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}) d^3y.\tag{1.4.14}$$

Il primo integrale è nullo poiché la sorgente è isolata, mentre il secondo può essere espresso in funzione di \tilde{T}^{0j} tramite la relazione

$$-\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu}. \quad (1.4.15)$$

Quindi la (1.4.14) diventa

$$\begin{aligned} \int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) &= i\omega \int y^i \tilde{T}^{0j} d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int \left[\partial_l (y^i y^j \tilde{T}^{0l}) - y^i y^j (\partial_l \tilde{T}^{0l}) \right] d^3y \\ &= -\frac{\omega}{2} \int y^i y^j \tilde{T}^{00} d^3y. \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Convenzionalmente si definisce il *tensore di momento di quadrupolo* della densità di energia della sorgente

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}) d^3y. \quad (1.4.17)$$

Con questa definizione, l'equazione (1.4.12) diventa

$$\tilde{h}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2G\omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega). \quad (1.4.18)$$

Da questa formula può quindi essere ricavata la formula nota come *formula di quadrupolo* ,

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r). \quad (1.4.19)$$

1.5 Onde generate da un sistema binario

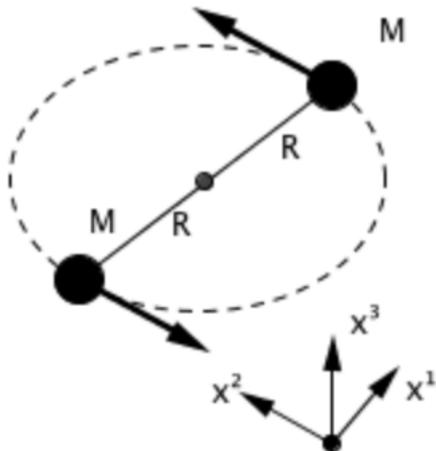


Figura 3: Sistema binario di due stelle di massa M , orbitanti sul piano $x^1 - x^2$ con raggio orbitale R

Prima di concludere questa introduzione, si andrà a trattare un altro caso di generazione di onde gravitazionali di particolare interesse, quello di un sistema binario di stelle. Per semplificare il problema, verranno considerate due stelle di massa M , in orbita circolare su piano $x^1 - x^2$, a una distanza R dal centro di massa del sistema. Inoltre il moto delle stelle verrà trattato nell'approssimazione Newtoniana.

L'orbita circolare implica la seguente relazione tra attrazione gravitazionale e forza centrifuga

$$\frac{GM^2}{(2R)^2} = \frac{Mv^2}{R}, \quad (1.5.1)$$

che implica

$$v = \left(\frac{GM}{4R}\right)^{1/2}. \quad (1.5.2)$$

Il tempo necessario per completare un'orbita è dato dalla formula

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \quad (1.5.3)$$

mentre la frequenza angolare è data da

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{GM}{4R^3} \right). \quad (1.5.4)$$

Risulta conveniente esprimere le posizioni delle due stelle (a e b) nella seguente maniera

$$\begin{aligned} x_a^1 &= R \cos \Omega t, & x_a^2 &= R \sin \Omega t, \\ x_b^1 &= -R \cos \Omega t, & x_b^2 &= -R \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

La densità di energia è data da

$$\begin{aligned} T^{00}(t, \mathbf{x}) &= M\delta(x^3)[\delta(x^1 - R \cos \Omega t)\delta(x^2 - R \sin \Omega t) \\ &\quad + \delta(x^1 + R \cos \Omega t)\delta(x^2 + R \sin \Omega t)]. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Le delta permettono di integrare in modo da ottenere le equazioni delle componenti del tensore del momento di quadrupolo

$$\begin{aligned} I_{11} &= 2MR^2 \cos^2 \Omega t = MR^2(1 + \cos 2\Omega t) \\ I_{22} &= 2MR^2 \sin^2 \Omega t = MR^2(1 - \cos 2\Omega t) \\ I_{12} = I_{21} &= 2MR^2(\cos \Omega t)(\sin \Omega t) = MR^2 \sin 2\Omega t \\ I_{i3} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Finalmente, è possibile ricavare la formula per la perturbazione

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{8GM}{r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.8)$$

Le componenti rimanenti possono essere ricavate imponendo la condizione del gauge di Lorenz.

1.6 Rilevazione delle Onde Gravitazionali

Negli ultimi decenni, la rivelazione delle onde gravitazionali è stata uno dei principali obiettivi della fisica, fino al suo raggiungimento nel settembre del 2015. Per riuscire a misurare delle onde con ampiezza così piccola come quella delle onde gravitazionali si è deciso di utilizzare un interferometro laser come quello utilizzato da Michelson e Morley nel loro celebre esperimento del 1887. Negli ultimi anni sono stati avviati

svariati progetti per la costruzione di interferometri in grado di misurare le onde gravitazionali: di questi verranno descritti i due più importanti, LIGO e LISA.

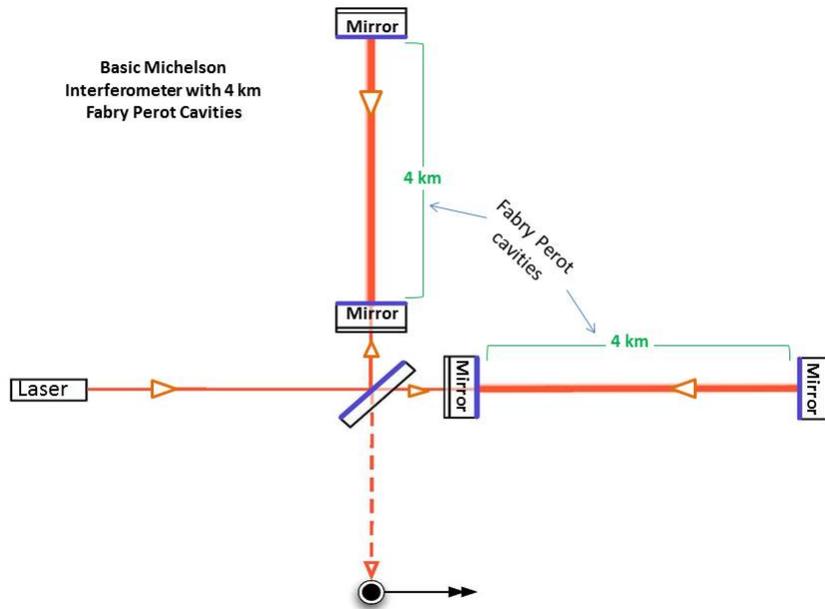


Figura 4: Schema dell'interferometro LIGO, con evidenziate le cavità di Fabry Perot.

LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) è un progetto che consiste in due interferometri laser identici, situati rispettivamente a Livingston e Hanford. Gli interferometri hanno una forma a L come quello usato da Michelson e Morley, ma con bracci 360 volte più lunghi (4 km) a causa della piccola ampiezza del segnale da rilevare. Inoltre, al fine di aumentare la sensibilità dello strumento, sono state aggiunte due "cavità di Fabry Perot", ovvero due specchi aggiuntivi situati in prossimità del separatore di fascio, in modo da ottenere una lunghezza effettiva dei bracci di 1120 km.

Sebbene LIGO sia già in funzione, è stato avviato un progetto di miglioramento per aumentarne la sensibilità al fine di poter rilevare eventi sempre più lontani. Si andrà quindi a realizzare l'Advanced LIGO, un interferometro con un'ottima sensibilità nel range di frequenze che va dai 10 ai 10^3 Hz.

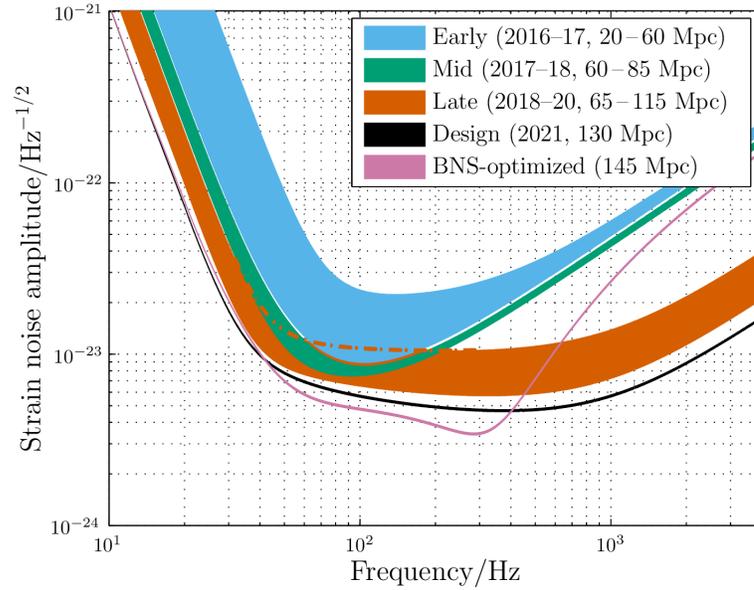


Figura 5: Sensibilità di Advanced LIGO in funzione della frequenza.

Tuttavia, nonostante LIGO funzioni molto bene in quel range di frequenze, la sua sensibilità a basse frequenze non è sufficiente per misurare eventi gravitazionali. Ciò ha portato alla progettazione di LISA (Laser Interferometer Space Antenna), un interferometro laser costituito da satelliti orbitanti intorno alla Terra.

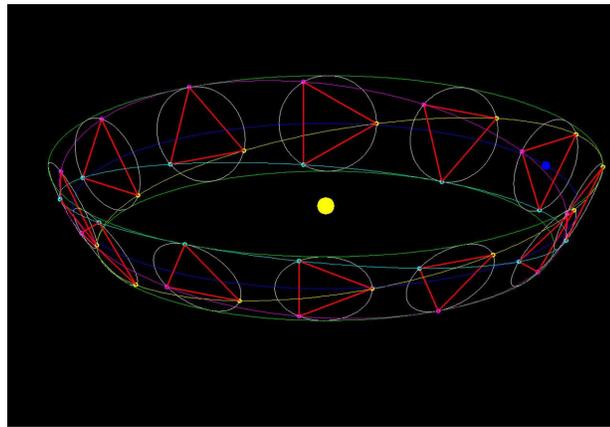


Figura 6: Schema dei satelliti di LISA orbitanti intorno alla Terra.

I tre satelliti orbiterranno intorno alla Terra formando un interferometro laser a forma di triangolo equilatero con lati di 2.5 milioni di chilometri, a una distanza costante di 50×10^6 km e con un'inclinazione di 60° rispetto all'eclittica. Le grandi dimensioni consentono uno studio migliore degli eventi gravitazionali a basse frequenze. Infatti, il range di frequenze in cui LISA opera parte da 10^{-4} Hz e quindi consente di studiare eventi di natura molto diversa da quelli studiati da LIGO, o eventi molto lontani dalla Terra.

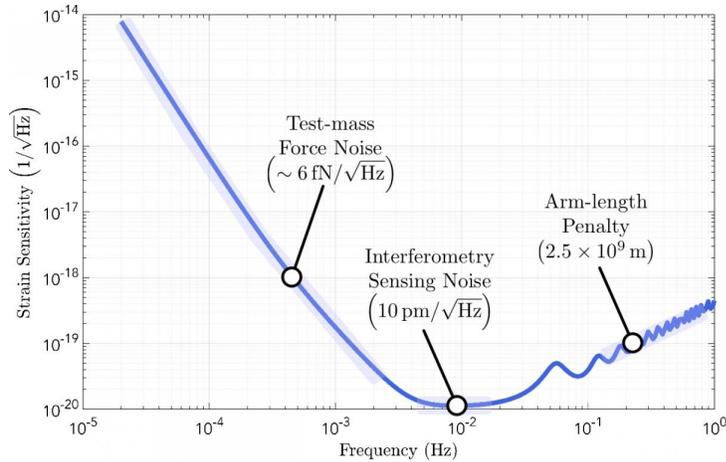


Figura 7: Grafico della sensibilità di LISA in funzione della frequenza.

2 Effetto Memoria delle Onde Gravitazionali

L'effetto memoria di un'onda gravitazionale consiste in una componente non oscillatorio dell'ampiezza dell'onda. Ciò fa sì che, per almeno una delle polarizzazioni dell'onda, il valore per $t \rightarrow -\infty$ e quello per $t \rightarrow \infty$ differiscano di una quantità

$$\Delta h_{+,\times}^{mem} = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{+,\times}(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} h_{+,\times}(t), \quad (2.0.1)$$

in cui t è il tempo dell'osservatore. Ciò si traduce in uno spostamento permanente di particelle libere di prova che occupino la regione di spazio attraversata dall'onda. Si noti che è necessario che le particelle siano libere affinché l'effetto sia apprezzabile, in quanto eventuali forze di natura elettromagnetica o forte renderebbero trascurabile l'effetto e riporterebbero le particelle nella posizione iniziale.

Esistono due forme di effetto memoria, l'effetto memoria lineare e l'effetto memoria non lineare. L'effetto lineare è conosciuto dagli anni 1970, e sorge principalmente in sistemi con componenti libere, come i burst di raggi gamma o i neutrini emessi da una supernova. L'effetto memoria non lineare fu scoperto negli anni 1990 in maniera indipendente da Blanchet e Damour e da Christodoulou, e sorge dal contributo delle stesse onde gravitazionali al momento di quadrupolo.

Per introdurre le due tipologie di effetto memoria è prima opportuno sfruttare lo sviluppo in serie di armoniche sferiche per esprimere le polarizzazioni delle onde gravitazionali nella seguente maniera

$$h_+ - ih_\times = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h^{lm} {}_{-2}Y^{lm}(\Theta, \Phi), \quad (2.0.2)$$

dove il termine ${}_{-2}Y^{lm}$ indica un'armonica sferica spin-pesata. Utilizzando l'espansione multipolare dell'onda gravitazionale, si ha che il termine h^{lm} è legato ai multipoli di massa radiativa (U^{lm}) e di corrente radiativa (V^{lm}) nella seguente maniera

$$h^{lm} = \frac{1}{\sqrt{2}R} [U^{lm}(T_R) - iV^{lm}(T_R)], \quad (2.0.3)$$

dove T_R indica il tempo ritardato. I due momenti radiativi sono legati ai momenti di multipolo della sorgente, e all'ordine dominante sono proporzionali all' l -esima derivata del tensore I_{lm} .

2.1 Effetto Memoria Lineare

L'effetto memoria lineare si verifica solo per alcune sorgenti, tra cui sistemi binari, neutrini emessi da supernove e burst di raggi gamma. In questo scritto si tratterà

unicamente il caso di effetto lineare di un'onda generata da un sistema binario iperbolico. Il contributo multipolare di ordine dominante alle polarizzazioni dell'onda è dato da

$$h_+ - ih_\times \approx \sum_{m=-2}^2 \frac{I_{2m}^{(2)}}{R\sqrt{2}} {}_{-2}Y^{lm}(\Theta, \Phi), \quad (2.1.1)$$

dove la notazione $I_{2m}^{(2)}$ indica la derivata seconda del tensore I_{2m} rispetto al tempo.

Prendendo in considerazione una binaria Kepleriana sul piano $x - y$, con separazione orbitale $r(t)$, massa totale $M = m_1 + m_2$, massa ridotta $\eta \equiv m_1 m_2 / M^2$ e angolo di fase orbitale $\varphi(t)$, il quadrupolo di massa è dato da

$$I_{2m} = \frac{16\pi}{5\sqrt{3}} \eta M r(t)^2 Y_{2m}^*(\pi/2, \varphi(t)). \quad (2.1.2)$$

In un'orbita Kepleriana di semi-lato retto p , eccentricità e_0 e anomalia vera $v = \varphi - \omega_p$, il moto è descritto dalle equazioni

$$r = \frac{p}{1 + e_0 \cos v}, \quad \dot{v} = \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{pM}}{r^2}. \quad (2.1.3)$$

Dalle equazioni (2.1.2) e (2.1.3) si ottiene

$$I_{20}^{(2)} = -8\sqrt{\frac{\pi}{15}} \eta \frac{M^2}{p} e_0 (e_0 + \cos v), \quad (2.1.4)$$

$$I_{2\pm 2}^{(2)} = -4\sqrt{\frac{2\pi}{5}} \eta \frac{M^2}{p} e^{\mp 2i\varphi(t)} [1 - e_0^2 + (1 + e_0 \cos v)(1 + 2e_0 e^{\pm iv})]. \quad (2.1.5)$$

Per orbite con $0 \leq e_0 < 1$ i due termini sono oscillatori, ma per un'orbita iperbolica, ovvero con $e_0 > 1$ e ω_p , abbiamo che $\varphi_- = v_- = -\arccos(-e_0^{-1})$ per $t \rightarrow -\infty$ mentre $\varphi_+ = v_+ = \arccos(-e_0^{-1})$ per $t \rightarrow \infty$. Di conseguenza avremo una variazione tra prima e dopo il passaggio dell'onda data da

$$\Delta I_{20}^{(2)} = 0, \quad (2.1.6)$$

$$\Delta I_{2\pm 2}^{(2)} = \pm i 16 \sqrt{\frac{2\pi}{5}} \eta \frac{M^2}{p} \frac{(e_0^2 - 1)^{3/2}}{e_0^2}, \quad (2.1.7)$$

e quindi si verifica una memoria nell'ampiezza dell'onda. In generale si osserva che la memoria lineare è sempre dovuta a una variazione delle derivate dei momenti di massa o di corrente della sorgente $\Delta I_{lm}^{(lm)}$ o $\Delta J_{lm}^{(l)}$ per $l \geq 2$.

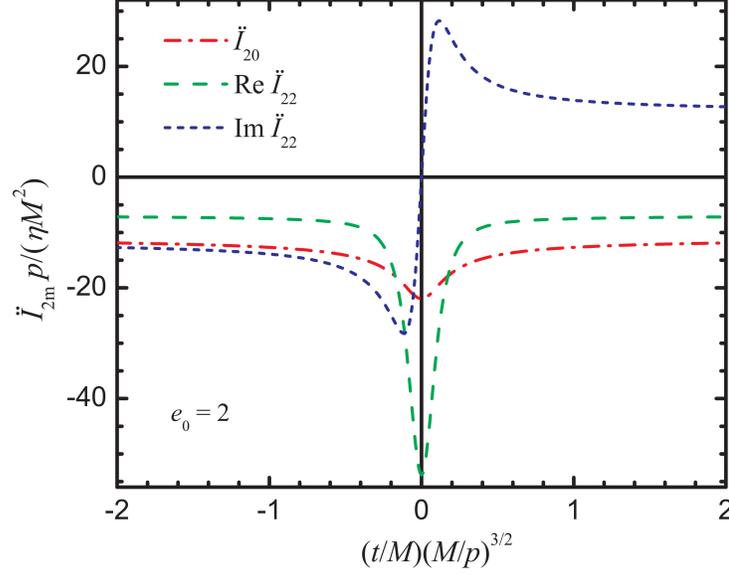


Figura 8: Il grafico mostra i modi \ddot{I}_{2m} dell'onda in funzione del tempo per un'orbita iperbolica di eccentricità $e_0 = 2$. Si noti la memoria lineare presente nella parte immaginaria di \ddot{I}_{22}

Un ulteriore metodo per derivare la memoria di un sistema libero è quello di risolvere le equazioni di campo di Einstein linearizzato, imponendo il gauge armonico, per la parte spaziale della perturbazione

$$\square \bar{h}_{jk}^{TT} = -16\pi T_{jk}. \quad (2.1.8)$$

In questo caso il tensore T_{jk} è il tensore energia-sforzo di N particelle gravitazionalmente libere di massa M_A e velocità costanti \mathbf{v}_A . Risolvendo le (2.1.8) si ottiene

$$\Delta h_{jk}^{TT} = \Delta \sum_{A=1}^N \frac{4M_A}{R\sqrt{1-v_A^2}} \left[\frac{v_A^j v_A^k}{1 - \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{N}} \right]^{TT}, \quad (2.1.9)$$

dove \mathbf{N} punta dalla sorgente verso l'osservatore e Δ indica la differenza tra il valore per $t \rightarrow \infty$ e il valore per $t \rightarrow -\infty$.

2.2 Effetto Lineare su Particelle Libere

In questa sezione si andrà ad osservare come l'effetto memoria lineare vada a causare una variazione nella distanza relativa di particelle libere di prova, andando a studiare il comportamento di quest'ultime al passaggio di un segnale di breve durata.

Siano l e λ_g rispettivamente la distanza iniziale tra le particelle e la lunghezza d'onda dell'onda gravitazionale, si andranno ad analizzare separatamente il caso in cui $l \ll \lambda_g$ e quello in cui $l \gg \lambda_g$, dato che nel primo caso è conveniente porsi in un sistema di riferimento localmente inerziale, mentre nel secondo caso è più semplice studiare direttamente la metrica dello spazio-tempo al passaggio dell'onda.

Per un'onda piana debole che si propaga nella direzione x^1 la metrica assume la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^{1^2} - (1 - a)(dx^2)^2 - (1 + a)(dx^3)^2 + sbdx^2 dx^3 \quad (2.2.1)$$

dove

$$\begin{aligned} a &= a(u), \\ b &= b(u), \\ u &= x^0 - x^1. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Nel caso di un'onda monocromatica, a e b sono funzioni armoniche proporzionali a e^{iqu} .

Considerato che il tensore di curvatura risulta dipendere da d^2a/du^2 e da d^2b/du^2 , la regione di spazio-tempo occupata da un impulso di durata finita $u_1 \leq u \leq u_2$ è ristretto ai soli valori di u per cui le due derivate seconde non si annullano, mentre la metrica risulta essere quello dello spazio-tempo piatto altrove.

Si consideri il caso $l \ll \lambda_g$. L'origine del sistema di riferimento localmente inerziale $x = y = z = 0$ viene posta in corrispondenza di una delle particelle, e viene preso in considerazione soltanto il moto all'ordine dominante, trascurando anche la componente del moto lungo l'asse x . In questa maniera il moto delle particelle vicine all'origine si riduce alle equazioni di deviazione geodesica

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= -\frac{1}{2}(\ddot{a}y + \ddot{b}z), \\ \ddot{z} &= -\frac{1}{2}(\ddot{a}y + \ddot{b}z), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Si noti che le derivate di a e b sono prese lungo la linea di mondo dell'origine del sistema di riferimento.

Le tre equazioni precedenti possono essere riassunte nell'equazione

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}, \quad (2.2.4)$$

dove \mathbf{F} è determinata dal valore del tensore di curvatura all'origine e dalla posizione della particella in esame, e può essere espresso in termini di un potenziale Newtoniano φ nella seguente maniera:

$$\mathbf{F} = -m\nabla\varphi, \quad (2.2.5)$$

con

$$\varphi = -\frac{1}{4}\ddot{a}(z^2 - y^2) + \frac{1}{2}\ddot{b}yz. \quad (2.2.6)$$

Sia $(x, y, z) = (l^1, l^2, l^3)$ la posizione iniziale della particella, se si assume che la sua velocità rimanga sempre abbastanza piccola da avere $\Delta l \ll l = (l^1 + l^2 + l^3)^{1/2}$, allora è possibile sostituire la terna x, y, z con l^1, l^2, l^3 nell'equazione (2.2.6), ottenendo così una forza che dipende unicamente dalla coordinata temporale e che assumiamo diversa da zero soltanto per $t_1 \leq t \leq t_2$.

Il problema si riduce quindi, formalmente, alla risoluzione della ben nota equazione $m\dot{\xi} = F(t)$, dalla quale seguono le seguenti relazioni tra velocità iniziale e finale

$$v_2 - v_1 = \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad (2.2.7)$$

e tra posizione iniziale e finale

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^t F(\tau) d\tau \right) dt + v_1(t_2 - t_1). \quad (2.2.8)$$

Si prenda in considerazione il caso specifico in cui

$$\frac{1}{m}F(t) = \frac{1}{2}h\omega^2 l \sin \omega t + \psi, \quad 0 \leq t \leq \hat{\tau}. \quad (2.2.9)$$

In questo caso le equazioni (2.2.7) e (2.2.8) diventano rispettivamente

$$v_2 - v_1 = h\omega l \sin \left(\frac{\omega \hat{\tau}}{2} + \psi \right) \sin \frac{\omega \hat{\tau}}{2} \quad (2.2.10)$$

e

$$\xi_2 - \xi_1 = hl \left[\frac{\omega \hat{\tau}}{2} \cos \psi - \cos \left(\frac{\omega \hat{\tau}}{2} + \psi \right) \sin \frac{\omega \hat{\tau}}{2} \right] + v_1 \hat{\tau}. \quad (2.2.11)$$

Per semplicità è conveniente supporre che la particella si trovasse in quiete prima del passaggio dell'onda, e porre quindi $v_1 = 0$.

Dalle due relazioni si osserva che se la forza agisce per un numero intero di periodi, cioè se $\omega\hat{\tau} = 2n\pi$, allora la variazione di velocità tra prima e dopo il passaggio risulta nulla, in quanto $\sin \omega\hat{\tau}/2 = 0$. Invece lo spostamento risulta essere non nullo grazie al primo termine del secondo membro dell'equazione (2.2.11). Si ha quindi uno spostamento relativo rispetto alla posizione iniziale dato da

$$\frac{\xi_2 - \xi_1}{l} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2}h\omega\hat{\tau} \cos \psi. \quad (2.2.12)$$

Questo risultato può essere generalizzato al caso di una polarizzazione qualsiasi dell'onda e una qualsiasi posizione iniziale della particella in esame. Poniamo che la particella sia in quiete nel sistema di riferimento localmente inerziale per $t = 0$ e si trovi nel punto (l^1, l^2, l^3) . Di conseguenza, dall'equazione (2.2.3) otteniamo le seguenti equazioni per le coordinate

$$\begin{aligned} x(t) &= l^1, \\ y(t) &= l^2 - \frac{1}{2}[a(t) - a(0)]l^2 - \frac{1}{2}[b(t) - b(0)]l^3 + \frac{1}{2}t[\dot{a}(0)l^2 + \dot{b}(0)l^3], \\ z(t) &= l^3 - \frac{1}{2}[b(t) - b(0)]l^2 + \frac{1}{2}[a(t) - a(0)]l^3 + \frac{1}{2}t[\dot{b}(0)l^2 + \dot{a}(0)l^3]. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Ponendo $a(t) \equiv 0$ e $b(t) \equiv 0$ prima del passaggio dell'onda si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= l^2 - \frac{1}{2}a(t)l^2 - \frac{1}{2}b(t)l^3, \\ z(t) &= l^3 - \frac{1}{2}b(t)l^2 + \frac{1}{2}a(t)l^3. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

La dipendenza di $a(t)$ e $b(t)$ dal tempo è determinata dalla natura della sorgente, e nell'approssimazione di quadrupolo si ha

$$h_{ik} \propto \frac{D_{ik}(t-r)}{r}, \quad (2.2.15)$$

dove D_{ik} è il momento di quadrupolo ridotto della sorgente, esprimibile in funzione del momento di quadrupolo in formula (1.4.17) attraverso la relazione

$$D_{ik} = I_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}I^j_j. \quad (2.2.16)$$

Di conseguenza gli integrali nelle equazioni (2.2.7) e (2.2.8) dipendono dalla differenza tra il valore iniziale e finale rispettivamente di \ddot{D}_{ik} e \ddot{D}_{ik} . Queste differenze non sono

sempre non nulle, ma nel caso, ad esempio, di un Bremsstrahlung gravitazionale si ha un valore diverso da zero.

Per esempio, considerando la collisione di due corpi in movimento sul piano yz e prendendo in esame l'onda in propagazione lungo x , le componenti rilevanti di D_{ik} sono $D_{22} - D_{33}$ e D_{23} . I loro valori asintotici in questo caso sono

$$\begin{aligned} D_{22} - D_{33} &\propto (2 - e^2)t^2, & D_{23} &\propto (e^2 - 1)^{1/2}t^2, & t &\rightarrow -\infty, \\ D_{22} - D_{33} &\propto (2 - e^2)t^2, & D_{23} &\propto -(e^2 - 1)^{1/2}t^2, & t &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

dove e dipende dal parametro di impatto; ad esempio $e = 1$ per una collisione frontale. Si può facilmente vedere che la differenza tra i due valori di \ddot{D}_{23} è non nulla e di conseguenza lo è anche $\xi_2 - \xi_1$.

Si andrà adesso invece a studiare il caso in cui $l \gg \lambda_g$.

In questo caso, come già detto precedentemente, è più conveniente studiare direttamente la metrica della formula (2.2.1). Come ben noto, le particelle libere hanno come linee di mondo le geodesiche della metrica, tra le quali le linee $x^1 = const$, $x^2 = const$ e $x^3 = const$. Per particelle che seguono le geodesiche l'andamento prima dell'arrivo dell'onda ($u < u_1$) e dopo il suo passaggio ($u > u_2$) dipende dalle due funzioni $a(u)$ e $b(u)$. Considerando che al di fuori dell'onda la metrica è quella dello spazio-tempo piatto, le due funzioni devono avere un andamento lineare in u , quindi

$$\begin{aligned} a(u) &= a_1u + a_2, \\ b(u) &= b_1u + b_2, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

con a_1, a_2, b_1 e b_2 costanti.

Sulle iper-superfici $u = u_1$ e $u = u_2$ sia le funzioni che le loro derivate prime devono essere continue, mentre le loro derivate seconde possono presentare delle discontinuità. Imponendo $a(u) = 0$ e $b(u) = 0$ sia per $u < u_1$ che per $u > u_2$ si otterrebbe che lo spostamento dopo il passaggio dell'onda rispetto alla condizione iniziale sia nullo. Tuttavia le condizioni imposte sono troppo restrittive.

Si prendano particelle le cui linee di mondo siano $x^i = const$ e per cui $a(u) = 0$ e $b(u) = 0$ per $u < u_1$. Lo stato delle particelle dopo il passaggio dell'onda dipende dai valori di $a(u)$ e $b(u)$ e delle loro derivate prime per $u = u_2$, valori che determinano le costanti nelle equazioni (2.2.18). In particolare, per un segnale gravitazionale impulsivo le costanti a_2 e b_2 risultano essere non nulle e quindi si osserva uno spostamento proporzionale alla distanza iniziale tra le particelle.

Ad esempio, date due particelle situate lungo l'asse x^2 e inizialmente distanziate di una quantità l_0 , dopo il passaggio dell'onda la distanza tra le due particelle sarà

dato da

$$l = l_0 \left(1 - \frac{1}{2} a_2 \right). \quad (2.2.19)$$

2.3 Effetto Memoria non Lineare

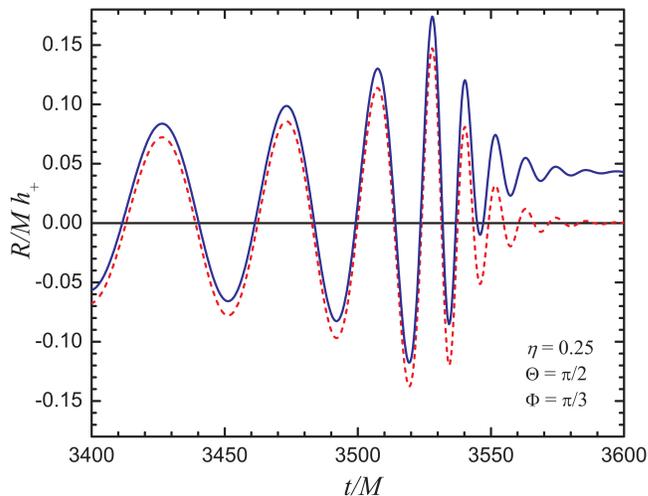


Figura 9: Il grafico mostra la polarizzazione h_+ per una coalescenza binaria di buchi neri di egual massa con (linea blu) e senza (linea rossa) memoria non lineare

L'*effetto memoria non lineare*, o memoria di Christodoulou, consiste in un contributo non oscillatorio all'onda, derivante dalle onde gravitazionali generate dall'onda gravitazionale stessa. Infatti questo effetto nasce dal tensore di energia-sforzo dell'onda gravitazionale

$$T_{jk}^{gw} = \frac{1}{R^2} \frac{dE^{gw}}{dt d\Omega} n_j n_k, \quad (2.3.1)$$

dove $\frac{dE^{gw}}{dt d\Omega}$ indica il flusso di energia dell'onda e n_j e n_k sono vettori unitari radiali. Questo tensore compare nello pseudo-tensore di Landau-Lifshitz, e influisce sulla metrica con il seguente termine di memoria non lineare

$$\delta h_{jk}^{TT} = \frac{4}{R} \int_{-\infty}^{T_R} dt' \left[\int \frac{dE^{gw}}{dt' d\Omega'} \frac{n'_j n'_k}{(1 - \mathbf{n}' \cdot \mathbf{N})} d\Omega' \right]^{TT}, \quad (2.3.2)$$

dove T_R indica il tempo ritardato.

Dalla precedente equazione risulta immediatamente evidente una delle principali proprietà della memoria non lineare, ovvero la sua ereditarietà, in quanto il contributo dovuto all'effetto memoria, in ogni istante T_R dipende dall'intero passato della sorgente.

Nel 1992 Kip Thorne ha mostrato come l'effetto memoria non lineare può essere accorpato a quello lineare attraverso l'equazione (2.1.9). La memoria non lineare può infatti essere vista come il contributo alla sommatoria presente in formula dei gravitoni emessi nel burst gravitazionale, ognuno dotato di massa M_A ed energia $E_A = M_A/\sqrt{1-v_A^2}$. Se si espande l'onda gravitazionale come in equazione (2.0.2), si può dimostrare che l'effetto memoria non lineare porta una correzione al momento di multipolo di massa radiativa all'ordine 2.5 post-newtoniano data da

$$U_{lm}^{(nonlinmem)} = 32\pi \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} \int_{-\infty}^{T_R} dt \int d\Omega \frac{dE^{gw}}{dt d\Omega}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega). \quad (2.3.3)$$

Il flusso di energia, inoltre, può essere espresso in termini della funzione d'onda nella seguente maniera

$$\frac{dE^{gw}}{dt d\Omega} = \frac{R^2}{16\pi} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle = \frac{R^2}{16\pi} \sum_{l', l'', m', m''} \langle \dot{h}_{l', m'} \dot{h}_{l'', m''}^* \rangle {}_{-2}Y^{l' m'}(\Omega) {}_{-2}Y^{l'', m''*}(\Omega). \quad (2.3.4)$$

In questa maniera la memoria può essere calcolata in maniera iterativa, trascurando nel calcolo del flusso i modi h_{lm} in cui compare la memoria.

2.4 Rilevazione dell'Effetto Memoria non Lineare

Così come per le onde gravitazionali, la comunità scientifica ha mostrato molto interesse nel riuscire a rilevare la memoria di un'onda gravitazionale. Tuttavia questo compito si è rivelato più arduo del previsto a causa di alcune caratteristiche dell'effetto memoria. Innanzitutto, fatta eccezione per alcuni tipi particolari di sorgenti, la componente di memoria dell'onda ha un'intensità molto minore della componente oscillatoria. Inoltre la memoria ha ampiezza maggiore alle basse frequenze, e quindi soltanto un rivelatore che operi bene a basse frequenze, come LISA, è in grado di rivelarla con successo.

Tuttavia la costruzione della memoria porta ad una distribuzione di potenza non solo alle basse energie, ma in un range più ampio.

Per stimare la rivelabilità della memoria di un'onda è necessario stimare il rapporto Segnale-Rumore (SNR) per un un detector con densità spettrale di rumore

$S_n(f)$, che è dato da

$$SNR = \left[\int_0^\infty \frac{h_c^2(f) df}{h_n^2(f) f} \right]^{1/2}, \quad (2.4.1)$$

dove $h_n(f)$ indica l'ampiezza di rumore ed è data da $h_n(f) = \sqrt{\alpha f S_n(f)}$, con $\alpha = 5$ per un detector come LIGO e $\alpha = 20/3$ per LISA. L'ampiezza caratteristica della memoria è

$$h_c(f) = 2(1+z)f \langle |\tilde{h}_+^{(mem)}[(1+z)f]|^2 \rangle^{1/2} |_{R \rightarrow D_L/(1+z)}, \quad (2.4.2)$$

dove $\tilde{h}_+^{(mem)}$ è la trasformata di Fourier di $h_+^{(mem)}$, D_L è la distanza di luminosità e le parentesi angolari indicano una media sulla posizione nel cielo e sull'angolo di polarizzazione. Nell'analisi delle onde gravitazionali con memoria, per non perdere informazioni sulla memoria, si è soliti usare il modello di equazione d'onda minimale (MWM), un modello in grado di sfruttare i risultati della relatività numerica senza perdere le informazioni sulla memoria, come invece accadrebbe con i metodi classici. Per il MWM la trasformata di Fourier per $f > 0$ può essere espressa analiticamente nella forma

$$\tilde{h}_+^{(mem, MWM)}(f) = \frac{\eta M}{384\pi R} s_\Theta^2 (17 + c_\Theta^2) \frac{iF}{2\pi f} \left\{ \frac{8\pi M}{r_m} [1 - 2\pi i f \tau_{rr} U(1, 7/4, 2\pi i f \tau_{rr})] - \frac{1}{\eta M} \sum_{n, n'=0}^{n_{max}} \frac{\sigma_{22n} \sigma_{22n'}^* A_{22n} A_{22n'}^*}{2\pi i f - (\sigma_{22n} + \sigma_{22n'}^*)} \right\}, \quad (2.4.3)$$

dove U è la funzione ipergeometrica confluyente di Kummer di secondo tipo.

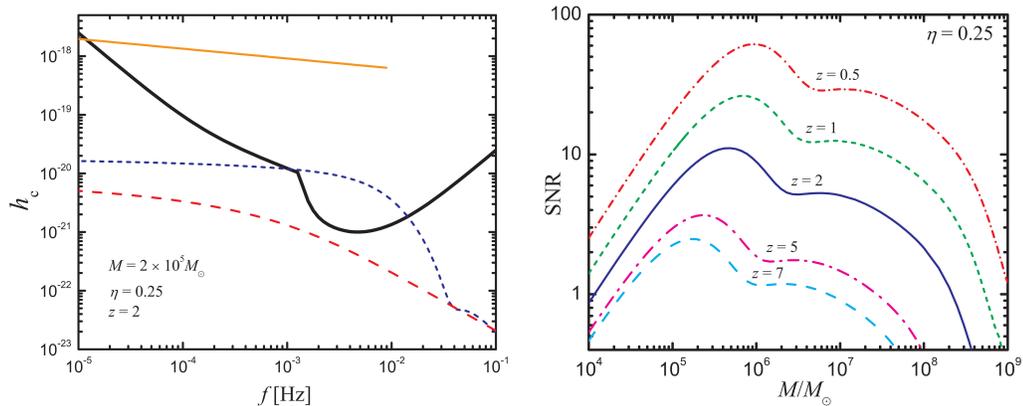


Figura 10: Possibilità di rilevare la memoria con LISA. Il grafico sulla sinistra mostra l'ampiezza di rumore di LISA (linea nera), l'ampiezza caratteristica di un'onda gravitazionale (linea arancione), e la memoria non lineare per un sistema binario di buchi neri i cui parametri sono indicati nel grafico. La linea blu indica la memoria calcolata con il MWM, mentre la linea rossa utilizza un modello troncato non trattato in questo testo. Il grafico di destra mostra il SNR della memoria non lineare per binarie in funzione della massa totale e del redshift.

Dalla stima del SNR si ottiene che il LIGO iniziale è in grado di rilevare soltanto la memoria derivante da merger di buchi neri del gruppo locale. LIGO avanzato potrà rilevare la memoria di eventi fino a una distanza di circa 20 Mpc, mentre invece LISA potrà osservare la memoria di merger di buchi neri supermassivi fino ad un redshift $z \leq 2$.

3 Memoria non Lineare di Sistemi Binari

In questa sezione verranno computati i contributi dovuti all'effetto memoria non lineare nel caso di sistemi binari di varia tipologia. Verranno prima trattate binarie quasi circolari, nel cui caso il contributo non lineare entra nell'onda già all'ordine dominante. Successivamente verrà trattato il caso di binarie con orbite Newtoniane con eccentricità arbitraria.

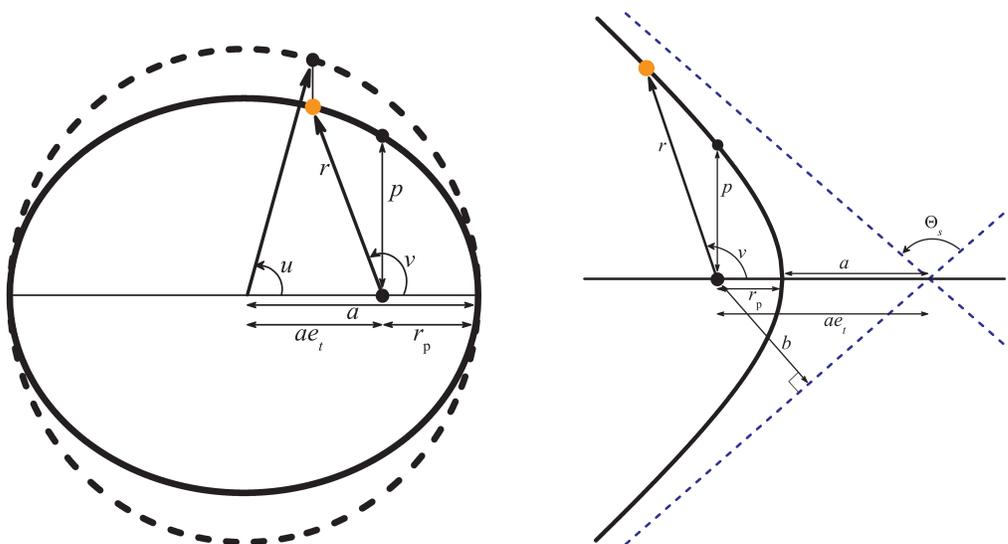


Figura 11: Notazione e parametri utilizzati nella trattazione di orbite ellittiche e iperboliche. L'immagine di sinistra mostra una particella che si muove su un'ellisse, a distanza r dal fuoco e con un angolo v (l'anomalia vera) rispetto al pericentro. L'ellisse ha un'eccentricità e_t , un semiasse maggiore a , una distanza fuoco-pericentro r_p e un semi-lato retto p . Viene rappresentata anche l'anomalia eccentrica u . L'immagine di destra mostra una particella che si muove su un'iperbole dove, oltre ai parametri già nominati, vengono mostrati anche gli asintoti (linee tratteggiate), il parametro d'impatto b e l'angolo di scattering Θ_s . In entrambi i casi si suppone che l'argomento di pericentro ϖ sia nullo.

3.1 Orbite Quasi-Circolari Spiraleggianti

Per stimare il contributo della memoria non lineare per binarie quasi-circolari è innanzitutto necessario andare a sostituire l'equazione (2.3.4) nella (2.3.3), per poi andare a risolvere l'integrale angolare nella (2.3.3). Successivamente è necessario sostituire i termini h_{lm} , che nel caso in esame risultano essere proporzionali a $h_{lm} \propto e^{im\phi(t)}$. Nella soluzione dell'integrale, gli unici termini non lineari risultano essere i termini $U_{l0}^{(nonlinmem)}$, che consistono in integrali rispetto al tempo di polinomi in $x \equiv (M\omega)^{2/3}$ dati da termini del tipo

$$\int_{-\infty}^{T_R} [x(t)]^n dt = \int_0^{x(T_R)} \frac{x^n}{\dot{x}} dx. \quad (3.1.1)$$

Per risolverli è necessario avere un'espressione per l'evoluzione della binaria. L'evoluzione adiabatica della frequenza può essere ottenuta dalla relazione tra luminosità dell'onda gravitazionale e la variazione di energia orbitale ($L_{GW} = -\dot{E}$) e dalla relazione $\dot{x} = -L_{GW}/(dE/dx)$.

Otteniamo così un'evoluzione della frequenza data da

$$\frac{dx}{dt} = \frac{64}{5} \frac{\eta}{M} x^5 [1 + O(x) + O(x^{3/2}) + \dots + O(x^{7/2}) + O(4PN)] \quad (3.1.2)$$

che può essere usata per calcolare gli integrali. Svolgendo i calcoli si ottiene che in questo caso i contributi di memoria non lineare intervengono solamente nella polarizzazione + dell'onda, nella forma

$$h_+^{(mem)} = \frac{2\eta M x}{R} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n/2} H_+^{n/2, mem}. \quad (3.1.3)$$

I termini $H_+^{n/2, mem}$ sono dati da

$$H_+^{0, mem} = \frac{1}{96} s_\Theta^2 (17 + c_\Theta^2), \quad (3.1.4a)$$

$$H_+^{0.5, mem} = 0 = H_+^{1.5, mem}, \quad (3.1.4b)$$

dove $c_\Theta = \cos \Theta$ e $s_\Theta = \sin \Theta$. Si ottiene così finalmente che all'ordine Newtoniano (0PN), la funzione d'onda è data da

$$h_+^{(0PN)} = 2 \frac{\eta M}{R} x \left[- (1 + c_\Theta^2) \cos 2(\varphi + \Phi) + \frac{1}{96} s_\Theta^2 (17 + c_\Theta^2) + O(x^{1/2}) \right], \quad (3.1.5a)$$

$$h_\times^{(0PN)} = 2 \frac{\eta M}{R} x [-2c_\Theta \sin 2(\varphi - \Phi) + O(x^{1/2})]. \quad (3.1.5b)$$

Questo dimostra come, nonostante la memoria nasca ad un ordine post-Newtoniano più alto, entra nella funzione d'onda all'ordine dominante.

3.2 Orbite Ellittiche

Si andrà adesso a trattare il caso di un'orbita ellittica, ovvero un'orbita con eccentricità $0 \leq e_t < 1$. Al fine di questa trattazione è conveniente ricordare la definizione di media su un periodo orbitale P_{orb}

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{P_{orb}} \int_0^{P_{orb}} dt F(t) = \frac{(1 - e_t^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} dv \frac{F(v)}{(1 + e_t \cos v)^2}, \quad (3.2.1)$$

con

$$P_{orb} = \frac{2\pi}{(1 - e_t^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{p^3}{M}}. \quad (3.2.2)$$

Applicando queste medie alle espressioni (B.5) riportate nell'appendice B, queste assumono la forma

$$h_{20}^{(mem)(1)} = \frac{256}{7R} \sqrt{\frac{\pi}{30}} \eta^2 \left(\frac{M}{p}\right)^5 (1 - e_t^2)^{3/2} \left(1 + \frac{145}{48} e_t^2 + \frac{73}{192} e_t^4\right), \quad (3.2.3a)$$

$$h_{2\pm 2}^{(mem)(1)} = \frac{52}{21R} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \eta^2 \left(\frac{M}{p}\right)^5 e_t^2 (1 - e_t^2)^{3/2} \left(1 + \frac{2}{13} e_t^2\right) e^{\mp 2i\varpi}, \quad (3.2.3b)$$

$$h_{40}^{(mem)(1)} = \frac{64}{315R} \sqrt{\frac{\pi}{10}} \eta^2 \left(\frac{M}{p}\right)^5 (1 - e_t^2)^{3/2} \left(1 + \frac{99}{32} e_t^2 + \frac{51}{128} e_t^4\right), \quad (3.2.3c)$$

$$h_{4\pm 2}^{(mem)(1)} = \frac{13\sqrt{pi}}{315R} \eta^2 \left(\frac{M}{p}\right)^5 e_t^2 (1 - e_t^2)^{3/2} \left(1 + \frac{2}{13} e_t^2\right) e^{\mp 2i\varpi}, \quad (3.2.3d)$$

$$h_{4\pm 4}^{(mem)(1)} = -\frac{5}{72R} \sqrt{\frac{\pi}{7}} \eta^2 \left(\frac{M}{p}\right)^5 e_t^4 (1 - e_t^2)^{3/2} e^{\mp 4i\varpi}. \quad (3.2.3e)$$

Quest'operazione di media permette di rimuovere la struttura ad alta frequenza dalla funzione d'onda senza modificare sensibilmente il risultato finale.

Successivamente è necessario calcolare l'integrale rispetto al tempo delle equazioni appena riportate. Al fine di ciò è conveniente operare il seguente cambio di variabile

$$h_{lm}^{(mem)} = \int_{-\infty}^{T_R} h_{lm}^{(mem)(1)} dt = \int_{e_-}^{e_+} \frac{h_{lm}^{(mem)(1)}}{de_t/dt} de_t. \quad (3.2.4)$$

Per il calcolo di questi integrali è necessario utilizzare le seguenti equazioni di evoluzione temporale di p e e_t :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{8}{5}\eta\left(\frac{M}{p}\right)^3 (1 - e_t^2)^{3/2}(8 + 7e_t^2), \quad (3.2.5a)$$

$$\frac{de_t^2}{dt} = -\frac{\eta}{15M}\left(\frac{M}{p}\right)^4 e_t(1 - e_t^2)^{3/2}(304 + 121e_t^2). \quad (3.2.5b)$$

Da queste si può facilmente ricavare la seguente relazione tra p ed e_t

$$p(e_t) = \frac{p_0}{C_0} e_t^{12/19} (304 + 121e_t^2)^{870/2299}, \quad (3.2.6)$$

con

$$C_0 \equiv e_0^{12/19} (304 + 121e_0^2)^{870/2299}, \quad (3.2.7)$$

e dove p_0 è il valore di p al tempo in cui $e_t = e_0$.

Attraverso questa relazione possiamo eliminare i termini $p(t)$ dall'integrale. Risolvendo gli integrali riportati in (3.2.4) si ottiene che i modi dell'onda $h_{lm}^{(mem)}$ sono dati da equazioni nella forma

$$h_{lm}^{(mem)} = A_{lm} C_0(e_0) e^{\mp im\varpi} [F_{lm}(e_t) - F_{lm}(e_-)], \quad (3.2.8)$$

dove A_{lm} sono costanti e F_{lm} è una somma di funzioni ipergeometriche.

I modi possono essere però calcolati in maniera esatta molto più facilmente nell'approssimazione di piccola eccentricità e_t , ottenendo le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} h_{20}^{(mem)} &= \frac{2}{7} \sqrt{\frac{10\pi}{3}} \frac{\eta M^2}{R p_0} \left[\left(\frac{e_0}{e_t}\right)^{12/19} - \left(\frac{e_0}{e_-}\right)^{12/19} \right] \\ &= \frac{2}{7} \sqrt{\frac{10\pi}{3}} \frac{\eta M^2}{R p} \left[1 - \left(\frac{e_t}{e_-}\right)^{12/19} \right], \end{aligned} \quad (3.2.9a)$$

$$\begin{aligned} h_{2\pm 2}^{(mem)} &= -\frac{\sqrt{5\pi}}{56} \frac{\eta M^2}{R p_0} e^{\mp 2i\varpi} e_0^2 \left[\left(\frac{e_t}{e_0}\right)^{26/19} - \left(\frac{e_-}{e_0}\right)^{26/19} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{5\pi}}{56} \frac{\eta M^2}{R p} e^{\mp 2i\varpi} e_t^2 \left[1 - \left(\frac{e_-}{e_t}\right)^{26/19} \right], \end{aligned} \quad (3.2.9b)$$

$$h_{40}^{(mem)} = \frac{1}{63} \sqrt{\frac{\pi}{10}} \frac{\eta M^2}{R p_0} \left[\left(\frac{e_0}{e_t}\right)^{12/19} - \left(\frac{e_0}{e_-}\right)^{12/19} \right]$$

$$= \frac{1}{63} \sqrt{\frac{\pi}{10}} \frac{\eta M^2}{Rp} \left[1 - \left(\frac{e_t}{e_-} \right)^{12/19} \right], \quad (3.2.9c)$$

$$\begin{aligned} h_{4\pm 2}^{(mem)} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{672} \frac{\eta M^2}{Rp_0} e^{\mp 2i\varpi} e_0^2 \left[\left(\frac{e_t}{e_0} \right)^{26/19} - \left(\frac{e_-}{e_0} \right)^{26/19} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{672} \frac{\eta M^2}{Rp} e^{\mp 2i\varpi} e_t^2 \left[1 - \left(\frac{e_-}{e_t} \right)^{26/19} \right], \end{aligned} \quad (3.2.9d)$$

$$\begin{aligned} h_{4\pm 4}^{(mem)} &= -\frac{25\sqrt{7\pi}}{172032} \frac{\eta M^2}{Rp_0} e^{\mp 4i\varpi} e_0^4 \left[\left(\frac{e_t}{e_0} \right)^{64/19} - \left(\frac{e_-}{e_0} \right)^{64/19} \right] \\ &= -\frac{25\sqrt{7\pi}}{172032} \frac{\eta M^2}{Rp} e^{\mp 4i\varpi} e_t^4 \left[1 - \left(\frac{e_-}{e_t} \right)^{64/19} \right], \end{aligned} \quad (3.2.9e)$$

dove è stata usata l'approssimazione $C_0 \approx e_0^{12/19} 304^{870/2299}$.

Nel caso in cui l'eccentricità sia uguale a zero i termini con $m \neq 0$ diventano nulli e i termini con $m = 0$ diventano gli stessi ricavati nello studio delle orbite circolari. Nel caso ellittico, sebbene i termini $m \neq 0$ non diventino nulli, questi non contribuiscono alla memoria per una serie di ragioni. Innanzi tutto i termini sono soppressi dai fattori e_t^m , visto che l'eccentricità è compresa tra zero e uno. Inoltre, il termine $e^{\mp im\varpi}$ non è realmente costante nel tempo, al contrario di quanto assunto fin'ora. Infatti la variazione dell'argomento di pericentro rispetto al tempo è data da

$$\dot{\varpi} = \frac{2\pi k}{P_{orb}} = \frac{3}{M} \left(\frac{M}{p} \right)^{5/2} (1 - e_t^2)^{3/2}. \quad (3.2.10)$$

Se si vuole trovare la relazione tra l'argomento di pericentro e l'eccentricità è necessario risolvere l'equazione

$$\frac{d\varpi}{de_t} = -\frac{45}{\eta} \left(\frac{p_0}{M} \right)^{3/2} \frac{C_0^{-3/2} e_t^{-1/19}}{(304 + 121e_t^2)^{994/2299}}. \quad (3.2.11)$$

Nell'approssimazione di piccola eccentricità la soluzione di quest'equazione diventa

$$\varpi = \varpi_0 + \frac{5}{32\eta} \left(\frac{p_0}{M} \right)^{3/2} \left[1 - \left(\frac{e_t}{e_0} \right)^{18/19} \right], \quad (3.2.12)$$

dove ϖ_0 è il valore di ϖ quando $e_t = e_0$.

Il fatto che l'eccentricità vari da e_0 a 0 comporta una variazione dell'argomento di pericentro $\Delta\varpi \sim (1/\eta)(p_0/M)^{3/2}$, che causa delle oscillazioni nelle equazioni delle derivate di $h_{lm}^{(mem)}$ rispetto all'eccentricità che fanno sì che i termini con $m \neq 0$ vengano ulteriormente soppressi.

Adesso è finalmente possibile ricavare le due polarizzazioni della onda di memoria non lineare ottenendo le seguenti equazioni

$$h_+^{(mem)} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{30}{\pi}} s_\Theta^2 \left[h_{20}^{(mem)} + \frac{\sqrt{3}}{2} h_{40}^{(mem)} (7c_\Theta^2 - 1) \right], \quad (3.2.13a)$$

$$h_\times^{(mem)} = 0. \quad (3.2.13b)$$

Nel caso di eccentricità piccola la prima equazione diventa

$$h_+^{(mem)} = \frac{\eta}{48} \frac{M^2}{Rp_0} s_\Theta^2 (17 + c_\Theta^2) \left[\left(\frac{e_0}{e_t} \right)^{12/19} - \left(\frac{e_0}{e_-} \right)^{12/19} \right] \quad (3.2.14)$$

$$= \frac{\eta}{48} \frac{M^2}{Rp} s_\Theta^2 (17 + c_\Theta^2) \left[1 - \left(\frac{e_t}{e_-} \right)^{12/19} \right]. \quad (3.2.15)$$

Si noti che nel limite circolare si ottiene lo stesso risultato ottenuto nella sezione precedente.

3.3 Orbite Iperboliche e Paraboliche

Nella trattazione delle orbite iperboliche e paraboliche si fisserà la direzione del periastro lungo la parte positiva dell'asse x . In questa maniera si ha che la massa ridotta del sistema oscilla intorno all'origine in senso antiorario e si ottiene che l'angolo di scattering Θ_s è dato dall'equazione

$$\Theta_s = 2 \arccos(-1/e_t) - \pi. \quad (3.3.1)$$

Nel caso di orbite iperboliche è anche conveniente definire due nuovi parametri, ovvero la velocità asintotica V_∞ e il parametro d'impatto b . La velocità asintotica è data dall'equazione

$$V_\infty^2 = 2 \frac{E}{\mu} = \frac{M}{p} (e_t^2 - 1). \quad (3.3.2)$$

Il parametro d'impatto invece è definito come la distanza tra il centro di massa e l'asintoto uscente o entrante dell'iperbole ed è dato dalla formula

$$b = \frac{p}{\sqrt{e_t^2 - 1}}. \quad (3.3.3)$$

Prima di proseguire con la trattazione è opportuno ricordare che, nel caso delle orbite iperboliche, è presente anche un contributo di memoria lineare, che porta ad una variazione dei modi dell'onda tra $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$ data da

$$h_{20}^{(lin.mem)} = 0, \quad (3.3.4a)$$

$$h_{20}^{(lin.mem)} = \pm i 16 \sqrt{\frac{\pi}{5}} \eta \frac{M^2 (e_t^2 - 1)^{3/2}}{Rp e_t^2}. \quad (3.3.4b)$$

Queste comportano una variazione delle polarizzazioni dell'onda data da

$$\Delta h_+^{(lin.mem)} = -4\eta \frac{M^2 (e_t^2 - 1)^{3/2}}{Rp e_t^2} (1 + c_\Theta^2) \sin 2\Phi, \quad (3.3.5a)$$

$$\Delta h_\times^{(lin.mem)} = -8\eta \frac{M^2 (e_t^2 - 1)^{3/2}}{Rp e_t^2} c_\Theta \cos 2\Phi. \quad (3.3.5b)$$

Invece nel caso dell'orbita parabolica il contributo dell'effetto lineare è nullo poiché la direzioni asintotiche entrante e uscente sono uguali ($v_- = -\pi, v_+ = \pi$). Per calcolare il contributo della memoria non lineare partiamo, come nel caso delle orbite ellittiche, dalle equazioni (B.5). Tuttavia in questo caso le orbite non sono periodiche e quindi non è possibile fare una media su un periodo come nella sezione precedente.

In questo caso è invece conveniente usare come variabile l'anomalia vera ottenendo

$$h_{lm}^{(mem)} = \int_{v_-}^{v(T_R)} \frac{h_{lm}^{(mem)(1)}}{\dot{v}} dv. \quad (3.3.6)$$

Per semplicità in questa trattazione ci si limiterà a calcolare la variazione tra il valore di $h_{lm}^{(mem)}$ per $t \rightarrow -\infty$ e quello per $t \rightarrow \infty$, piuttosto che calcolare la dipendenza di $h_{lm}^{(mem)}$ dal tempo. Si andrà quindi a calcolare

$$\Delta h_{lm}^{(mem)} = \int_{v_-}^{v_+} \frac{h_{lm}^{(mem)(1)}}{\dot{v}} dv. \quad (3.3.7)$$

I risultati, comunque presa $e_t \geq 1$, sono dati da

$$\Delta h_{20}^{(mem)} = \frac{8}{63} \sqrt{\frac{\pi}{30}} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p}\right)^{7/2} \left[3(73e_t^4 + 580e_t^2 + 192)(\pi - \arccos e_t^{-1}) \right]$$

$$+ (1333e_t^2 + 1202)\sqrt{e_t^2 - 1} \Big], \quad (3.3.8a)$$

$$\Delta h_{2\pm 2}^{(mem)} = \frac{8}{63} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p} \right)^{7/2} \left[3e_t^2(2e_t^2 + 13)(\pi - \arccos e_t^{-1}) \right. \\ \left. + (34e_t^2 + 13 - 2e_t^{-2})\sqrt{e_t^2 - 1} \right], \quad (3.3.8b)$$

$$\Delta h_{40}^{(mem)} = \frac{1}{945} \sqrt{\frac{\pi}{10}} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p} \right)^{7/2} \left[3(51e_t^4 + 396e_t^2 + 128)(\pi - \arccos e_t^{-1}) \right. \\ \left. + (919e_t^2 + 806)\sqrt{e_t^2 - 1} \right], \quad (3.3.8c)$$

$$\Delta h_{4\pm 2}^{(mem)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{945} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p} \right)^{7/2} \left[3e_t^2(2e_t^2 + 13)(\pi - \arccos e_t^{-1}) \right. \\ \left. + (34e_t^2 + 13 - 2e_t^{-2})\sqrt{e_t^2 - 1} \right], \quad (3.3.8d)$$

$$\Delta h_{4\pm 4}^{(mem)} = -\frac{1}{2700} \sqrt{\frac{\pi}{7}} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p} \right)^{7/2} \left[375e_t^4(\pi - \arccos e_t^{-1}) \right. \\ \left. + (1001e_t^2 - 1178 + 728e_t^{-2} - 176e_t^{-4})\sqrt{e_t^2 - 1} \right]. \quad (3.3.8e)$$

Nel caso di orbite paraboliche, ovvero orbite con $e_t = 1$, queste equazioni possono essere semplificate notevolmente ottenendo le seguenti equazioni

$$\Delta h_{20, e_t=1}^{(mem)} = \frac{676\pi\sqrt{30\pi}}{63} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p} \right)^{7/2}, \quad (3.3.9a)$$

$$\Delta h_{2\pm 2, e_t=1}^{(mem)} = \frac{3\sqrt{6}}{169} \Delta h_{20, e_t=1}^{(mem)}, \quad (3.3.9b)$$

$$\Delta h_{40, e_t=1}^{(mem)} = \frac{23\sqrt{3}}{4056} \Delta h_{20, e_t=1}^{(mem)}. \quad (3.3.9c)$$

$$\Delta h_{4\pm 2, e_t=1}^{(mem)} = \frac{\sqrt{30}}{3380} \Delta h_{20, e_t=1}^{(mem)}, \quad (3.3.9d)$$

$$\Delta h_{4\pm 4, e_t=1}^{(mem)} = -\frac{\sqrt{210}}{16224} \Delta h_{20, e_t=1}^{(mem)}. \quad (3.3.9e)$$

Le corrispondenti polarizzazioni dell'onda sono

$$\Delta h_{+, e_t=1}^{(mem)} = \frac{\pi\eta^2}{2} \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p}\right)^{7/2} \left\{ (3 + 2c_\Theta^2 + c_\Theta^4) \cos 2\Phi + \frac{5}{48} s_\Theta^2 [766 + 46c_\Theta^2 - (1 + c_\Theta^2) \cos 4\Phi] \right\}, \quad (3.3.10a)$$

$$\Delta h_{\times, e_t=1}^{(mem)} = \frac{\pi\eta^2}{2} \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p}\right)^{7/2} c_\Theta \left[\frac{5}{24} s_\Theta^2 \sin 4\Phi - (5 + c_\Theta^2) \sin 2\Phi \right]. \quad (3.3.10b)$$

Si ottiene quindi che per le orbite paraboliche, a differenza della memoria lineare, la memoria non lineare è non nulla, in quanto, sebbene il sistema sia vincolato, le onde gravitazionali che esso emette non lo sono.

Per quanto riguarda il caso delle orbite iperboliche è possibile studiare il limite $e_t \gg 1$. In questo caso le equazioni (3.3.8) assumono la forma

$$\Delta h_{20, e_t \gg 1}^{(mem)} = \frac{292\pi}{21} \sqrt{\frac{\pi}{30}} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{p}\right)^{7/2} e_t^4, \quad (3.3.11a)$$

$$\Delta h_{2\pm 2, e_t \gg 1}^{(mem)} = \frac{2\sqrt{6}}{73} \Delta h_{20, e_t \gg 1}^{(mem)}, \quad (3.3.11b)$$

$$\Delta h_{40, e_t \gg 1}^{(mem)} = \frac{17\sqrt{3}}{2920} \Delta h_{20, e_t \gg 1}^{(mem)}, \quad (3.3.11c)$$

$$\Delta h_{4\pm 2, e_t \gg 1}^{(mem)} = \frac{\sqrt{30}}{2190} \Delta h_{20, e_t \gg 1}^{(mem)} \quad (3.3.11d)$$

$$\Delta h_{4\pm 4, e_t \gg 1}^{(mem)} = -\frac{5\sqrt{210}}{7008} \Delta h_{20, e_t \gg 1}^{(mem)} \quad (3.3.11e)$$

Utilizzando la relazione

$$\left(\frac{M}{p}\right)^{7/2} e_t^4 \approx \left(\frac{M}{b}\right)^3 V_\infty \quad (3.3.12)$$

possiamo ricavare le espressioni per le polarizzazioni dell'onda, ovvero

$$\begin{aligned} \Delta h_{+,e_t \gg 1}^{(mem)} = \frac{\pi}{960} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{b}\right) V_\infty [192 \cos 2\Phi + s_\Theta^2 (1756 - 128 \cos 2\Phi - 50 \cos 4\Phi) \\ - s_\Theta^4 (102 - 32 \cos 2\Phi - 25 \cos 4\Phi)], \end{aligned} \quad (3.3.13a)$$

$$\begin{aligned} \Delta h_{\times,e_t \gg 1}^{(mem)} = -\frac{\pi}{480} \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{b}\right) V_\infty c_\Theta [96 \sin 2\Phi - s_\Theta^2 (16 \sin 2\Phi \\ + 25 \sin 4\Phi)]. \end{aligned} \quad (3.3.13b)$$

Si può quindi notare la differenza tra l'andamento del contributo di memoria lineare e quello di memoria non lineare

$$\Delta h_{+, \times, e_t \gg 1}^{lin.mem} \propto \eta \frac{M}{R} \frac{M}{b}, \quad (3.3.14a)$$

$$\Delta h_{+, \times, e_t \gg 1}^{nonlin.mem} \propto \eta^2 \frac{M}{R} \left(\frac{M}{b}\right)^3 V_\infty. \quad (3.3.14b)$$

Questa sottolinea come il termine di memoria non lineare sia tipicamente molto minore del termine di memoria lineare, in contrasto con quanto accade nel caso delle orbite ellittiche e circolari, in cui la memoria lineare è nulla mentre quella non lineare è $\propto \eta$. Ciò è dovuto alla differenza tra i tempi in cui la memoria non lineare si forma nei due casi.

3.4 Orbite Radiali

Si andrà infine a studiare il caso di un'orbita radiale, ovvero il caso di un impatto frontale o l'allontanamento in linea retta di due corpi.

In questo caso le equazioni del moto e della conservazione dell'energia diventano

$$\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{r} = -\frac{M}{r^2}, \quad (3.4.1a)$$

$$\tilde{E} \equiv \frac{E}{\mu} = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{M}{r}. \quad (3.4.1b)$$

Di conseguenza le polarizzazioni dell'onda all'ordine dominante assumono una forma semplificata data da

$$h_+^N = \frac{\eta M}{R} \left\{ \left(\dot{r}^2 - \frac{M}{r} \right) [(1 + c_\Theta^2) \cos 2\Phi - s_\Theta^2] \right\}, \quad (3.4.2a)$$

$$h_\times^N = -\frac{2\eta M}{R} \left(\dot{r}^2 - \frac{M}{r} \right) c_\Theta \sin 2\Phi. \quad (3.4.2b)$$

Si ha quindi che se la velocità tende a v_∞ per una separazione infinita, allora si presenta una memoria lineare dipendente da v_∞ e dalla differenza tra il valore iniziale e finale di M/r .

Nel misurare la memoria non lineare, il fatto che $\varphi = 0$ permette di ricavare che all'ordine dominante i modi della funzione d'onda di memoria assumono la forma

$$h_{lm}^{(mem)(1)} = C_{lm} \frac{\eta^2}{R} \left(\frac{M}{r} \right)^4 \dot{r}^2, \quad (3.4.3)$$

dove C_{lm} sono delle costanti. Usando la relazione

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2} \sqrt{\tilde{E} + M/r}, \quad (3.4.4)$$

dove il segno $+$ indica una separazione radiale mentre il segno meno indica una collisione frontale, è possibile convertire l'integrale temporale in un integrale radiale. I modi $h_{lm}^{(mem)}$ possono quindi essere espressi nella seguente maniera

$$h_{lm}^{(mem)} = \pm \sqrt{2} C_{lm} \frac{\eta^2}{R} \int_{r_-}^{r_+} \left(\frac{M}{r} \right)^4 \sqrt{\tilde{E} + \frac{M}{r}} dr, \quad (3.4.5)$$

dove r_\pm indicano rispettivamente il valore di r per $t \rightarrow \pm\infty$. Svolgendo l'integrale si ottiene

$$h_{lm}^{(mem)} = \mp \frac{2\sqrt{2}}{105} C_{lm} \frac{\eta^2 M}{R} \left\{ \left(\tilde{E} + \frac{M}{r} \right)^{3/2} \left[8\tilde{E}^2 - 12\tilde{E} \frac{M}{r} + 15 \left(\frac{M}{r} \right)^2 \right] \right\} \Big|_{r_-}^{r_+}. \quad (3.4.6)$$

Nel caso di una caduta radiale con partenza a riposo da distanza infinita quest'equazione si semplifica ottenendo

$$h_{lm}^{(mem)} = \frac{2\sqrt{2}}{7} C_{lm} \frac{\eta^2 M}{R} \left[\frac{M}{r(t)} \right]^{7/2}. \quad (3.4.7)$$

Un altro caso interessante è quello di una rottura radiale, che può anche essere utilizzato nel caso di una stella che emette radialmente frammenti di materia. In questo caso lo shift di memoria assume la forma

$$\Delta h_{lm}^{(mem)} = -\frac{2}{105} C_{lm} \frac{\eta^2 M}{R} \left[v_\infty^7 - \sqrt{2} \left(\frac{v_\infty^2}{2} + \frac{M}{r_-} \right)^{3/2} \right. \\ \left. \times \left(2v_\infty^4 - 6v_\infty^2 \frac{M}{r_-} + 15 \frac{M^2}{r_-^2} \right) \right]. \quad (3.4.8)$$

Si noti che in entrambi i casi la memoria non lineare comporta una correzione di ordine 2.5 Post Newtoniano.

Nel caso generale di una collisione o di un allontanamento radiale, le polarizzazioni della memoria dell'onda assumono la forma

$$h_+^{(mem)} = \hat{h}^{(mem)} \left[\frac{s_\Theta^2}{420} (79 + 7c_\Theta^2) - \frac{1}{15} (3 + 2c_\Theta^2 + c_\Theta^4) \cos 2\Phi + \frac{1}{60} (c_\Theta^4) \cos 4\Phi \right], \quad (3.4.9a)$$

$$h_\times^{(mem)} = \hat{h}^{(mem)} \left[\frac{c_\Theta}{15} (5 + c_\Theta^2) \sin 2\Phi - \frac{1}{30} s_\Theta^2 c_\Theta \sin 4\Phi \right], \quad (3.4.9b)$$

dove $\hat{h}^{(mem)} \equiv h_{lm}^{(mem)} / C_{lm}$

4 Conclusione

In conclusione, come visto in questa trattazione, le onde gravitazionali danno luogo a un fenomeno peculiare detto effetto memoria, che consiste in una differenza tra il limite per $t \rightarrow -\infty$ e il limite per $t \rightarrow \infty$ della funzione d'onda, e che si traduce in una differenza tra la configurazione iniziale e quella finale di particelle di prova soggette al passaggio dell'onda.

Questo fenomeno si divide in realtà in due fenomeni apparentemente distinti, l'effetto lineare e l'effetto non lineare. Il primo si verifica soltanto in determinati casi, in quanto dipende dalle caratteristiche del sistema, mentre il secondo si verifica in tutti i casi. Tuttavia l'effetto non lineare si presenta con caratteristiche e ordini di grandezza diversi a seconda del sistema che genera l'onda, e ciò è dovuto alla natura ereditaria dell'effetto memoria non lineare. Sebbene questi due fenomeni siano apparentemente molto diversi, K.Thorne nel 1992 ha dimostrato che l'effetto non lineare può essere visto come un effetto lineare generato dai gravitoni che compongono l'onda stessa.

Infine, sebbene l'effetto memoria non sia ancora stato osservato sperimentalmente, le simulazioni numeriche suggeriscono che l'interferometro spaziale LISA potrà essere in grado di rivelare segnali gravitazionali nel range di frequenze in cui opera l'effetto memoria. Potrà quindi fornire conferme sperimentali di questo effetto, fornendo un'ulteriore conferma del funzionamento della teoria della relatività e permettendo lo studio di fenomeni astrofisici altrimenti non affrontabili, fino ad avvicinarci allo studio dell'origine dell'universo.

A Modi d'Onda e Memoria Non-Lineare

Come si è già visto nella sezione 2, l'onda gravitazionale può essere scomposta nella maniera

$$h_+ - ih_\times = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h^{lm} {}_{-2}Y^{lm}(\Theta, \Phi), \quad (\text{A.1})$$

dove

$$h^{lm} = \frac{1}{\sqrt{2}R} [U^{lm}(T_R) - iV^{lm}(T_R)]. \quad (\text{A.2})$$

Le ${}_{-2}Y^{lm}(\Theta, \Phi)$ sono le armoniche sferiche spin-pesate, le cui formule per i valori di l ed m necessari a questa trattazione sono :

$${}_{-2}Y^{20} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} s_\Theta^2, \quad (\text{A.3a})$$

$${}_{-2}Y^{2\pm 2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (1 \pm c_\Theta)^2 e^{\pm 2i\Phi}, \quad (\text{A.3b})$$

$${}_{-2}Y^{40} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} s_\Theta^2 (7c_\Theta^2 - 1), \quad (\text{A.3c})$$

$${}_{-2}Y^{4\pm 2} = \frac{3}{8} \frac{1}{\pi} (1 \pm c_\Theta)^2 (1 \mp 7c_\Theta + 7c_\Theta^2) e^{\pm 2i\Phi}, \quad (\text{A.3d})$$

$${}_{-2}Y^{4\pm 4} = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{7}{\pi}} s_\Theta^2 (1 \pm c_\Theta)^2 e^{\pm 4i\Phi}, \quad (\text{A.3e})$$

dove la notazione utilizzata per c_Θ e s_Θ è la stessa utilizzata nella sezione 3.1.

All'ordine dominante i momenti U_{lm} e V_{lm} si riducono ai momenti della sorgente I_{lm} e J_{lm} . In questa trattazione verranno trascurati tutti i termini di ordine maggiore, fatta eccezione ovviamente per il termine di memoria non lineare $U_{lm}^{(mem)}$. Questo permette di approssimare la funzione d'onda nel seguente modo

$$h_{lm} \approx \frac{1}{\sqrt{2}R} I_{lm}^{(l)} + h_{lm}^{(mem)}. \quad (\text{A.4})$$

I termini $h_{lm}^{(mem)}$ sono dati dall'espressione

$$\begin{aligned}
h_{lm}^{(mem)} &= \frac{16\pi}{R} \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \int_{-\infty}^{T_R} dt \int d\Omega \frac{dE_{gw}}{dt d\Omega}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega) \\
&= R \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \sum_{l'=2}^{\infty} \sum_{l''=2}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m''=-l''}^{l''} (-1)^{m+m''} \\
&\quad \times G_{l_1 l_2 l_3 m_1 m_2 m_3}^{s_1 s_2 s_3} \int_{-\infty}^{T_R} dt \langle \dot{h}_{l'm'} \dot{h}_{l''m''}^* \rangle,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

dove il termine $G_{l_1 l_2 l_3 m_1 m_2 m_3}^{s_1 s_2 s_3}$ indica un integrale angolare proporzionale al prodotto di tre armoniche sferiche e le parentesi angolari indicano un valor medio su varie lunghezze d'onda dell'onda gravitazionale.

Sviluppando gli integrali angolari si ottiene che le uniche componenti di memoria non nulle sono $h_{2m}^{(mem)}$, $h_{3m}^{(mem)}$ e $h_{4m}^{(mem)}$.

Le componenti non di memoria, come detto prima, possono essere approssimate nel modo

$$h_{lm}^N \equiv \frac{I_{lm}^{(l)}}{R\sqrt{2}}, \tag{A.6}$$

e se l'orbita giace sul piano $x - y$ si ottengono i seguenti risultati

$$h_{20}^{N*} = h_{20}^N, \quad h_{2\pm 2}^{N*} = h_{2\mp 2}^N, \quad h_{2\pm 1}^{N*} = h_{2\pm 1}^N = 0. \tag{A.7}$$

Definendo $h_{lm}^{(mem)(1)} \equiv dh_{lm}^{(mem)}/dT_R$, dalla (A.5) si ottengono le seguenti equazioni

$$h_{2\pm 1}^{(mem)(1)} = h_{3m}^{(mem)(1)} = h_{4\pm 1}^{(mem)(1)} = h_{4\pm 3}^{(mem)(1)} = 0, \tag{A.8a}$$

$$h_{20}^{(mem)(1)} = \frac{R}{42} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \langle 2|\dot{h}_{22}^N|^2 - |\dot{h}_{20}^N|^2 \rangle, \tag{A.8b}$$

$$h_{2\pm 2}^{(mem)(1)} = \frac{R}{21} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \langle \dot{h}_{20}^N \dot{h}_{2\pm 2}^N \rangle, \tag{A.8c}$$

$$h_{40}^{(mem)(1)} = \frac{R}{1260} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \langle |\dot{h}_{22}^N|^2 + 3|\dot{h}_{20}^N|^2 \rangle, \tag{A.8d}$$

$$h_{4\pm 2}^{(mem)(1)} = \frac{R}{252} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \langle \dot{h}_{20}^N \dot{h}_{2\pm 2}^N \rangle, \tag{A.8e}$$

$$h_{4\pm 4}^{(mem)(1)} = \frac{R}{504} \sqrt{\frac{14}{2\pi}} \langle (\dot{h}_{2\pm 2}^N)^2 \rangle, \tag{A.8f}$$

B Polarizzazioni h_{lm}^N e $h_{lm}^{(mem)(1)}$ per Binarie Newtoniane

Si andranno per prima cosa a calcolare le espressioni esplicite di h_{lm}^N .

Le espressioni delle componenti del momento di quadrupolo per una binare sono date da

$$I_{20}^N = -4\sqrt{\frac{\pi}{15}}\eta Mr(t)^2 \quad (\text{B.1a})$$

$$I_{2\pm 2}^N = 2\sqrt{\frac{2\pi}{5}}\eta Mr(t)^2 e^{\mp 2i\varphi(t)}, \quad (\text{B.1b})$$

dove $M = m_1 + m_2$, $\eta = m_1 m_2 / M^2$, $r(t)$ è la separazione orbitale relativa e $\varphi(t)$ è la fase orbitale relativa.

Nel calcolare le derivate rispetto al tempo del momento di quadrupolo, possiamo eliminare le derivate seconde di r e φ utilizzando le equazioni Newtoniane del moto

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{M}{r^2}, \quad (\text{B.2a})$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}. \quad (\text{B.2b})$$

Si ottengono così le seguenti derivate

$$I_{20}^{(1)} = -8\sqrt{\frac{\pi}{15}}\eta Mr\dot{r}, \quad (\text{B.3a})$$

$$I_{2\pm 2}^{(1)} = 4\sqrt{\frac{2\pi}{5}}\eta Mr(\dot{r} \mp ir\dot{\varphi})e^{\mp 2i\varphi}, \quad (\text{B.3b})$$

$$I_{20}^{(2)} = -8\sqrt{\frac{\pi}{15}}\eta M \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{M}{r} \right), \quad (\text{B.3c})$$

$$I_{2\pm 2}^{(2)} = 4\sqrt{\frac{2\pi}{5}}\eta M e^{\mp 2i\varphi} \left(\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{M}{r} \mp 2ir\dot{r}\dot{\varphi} \right), \quad (\text{B.3d})$$

$$I_{20}^{(3)} = 8\sqrt{\frac{\pi}{15}}\eta \left(\frac{M}{r} \right)^2 \dot{r}, \quad (\text{B.3e})$$

$$I_{2\pm 2}^{(3)} = -4\sqrt{\frac{2\pi}{5}}\eta \left(\frac{M}{r} \right)^2 e^{\mp 2i\varphi} (\dot{r} \mp 4ir\dot{\varphi}). \quad (\text{B.3f})$$

Si noti che queste espressioni sono valide per qualsiasi orbita che rispetti le equazioni Newtoniane del moto riportate in precedenza.

Di conseguenza le polarizzazioni dell'onda all'ordine Newtoniano sono date da

$$h_+^N = \frac{\eta M}{R} \left\{ (1 + c_\Theta^2) \left[\left(\dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{M}{r} \right) \cos 2(\varphi - \Phi) - 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin 2(\varphi - \Phi) \right] - s_\Theta^2 \left(\dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{M}{r} \right) \right\}, \quad (\text{B.4a})$$

$$h_\times^N = 2 \frac{\eta M}{R} c_\Theta \left[2\dot{r}r\dot{\varphi} \cos 2(\varphi - \Phi) + \left(\dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{M}{r} \right) \sin 2(\varphi - \Phi) \right]. \quad (\text{B.4b})$$

Infine è adesso possibile trovare le espressioni per le componenti non nulle della memoria, ottenendo le seguenti espressioni

$$h_{20}^{(mem)(1)} = \frac{16}{21R} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \eta^2 \left\langle \left(\frac{M}{r} \right)^4 (\dot{r}^2 + 24r^2 \dot{\varphi}^2) \right\rangle, \quad (\text{B.5a})$$

$$h_{2\pm 2}^{(mem)(1)} = -\frac{16}{21R} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \eta^2 \left\langle \left(\frac{M}{r} \right)^4 \dot{r} e^{\mp 2i\varphi} (\dot{r} \mp 4ir\dot{\varphi}) \right\rangle, \quad (\text{B.5b})$$

$$h_{40}^{(mem)(1)} = \frac{2}{315R} \sqrt{\frac{2\pi}{5}} \eta^2 \left\langle \left(\frac{M}{r} \right)^4 (3\dot{r}^2 + 16r^2 \dot{\varphi}^2) \right\rangle, \quad (\text{B.5c})$$

$$h_{4\pm 2}^{(mem)(1)} = -\frac{4}{315R} \sqrt{\pi} \eta^2 \left\langle \left(\frac{M}{r} \right)^4 \dot{r} e^{\mp 2i\varphi} (\dot{r} \mp 4ir\dot{\varphi}) \right\rangle, \quad (\text{B.5d})$$

$$h_{4\pm 4}^{(mem)(1)} = \frac{2}{45R} \sqrt{\frac{\pi}{7}} \eta^2 \left\langle \left(\frac{M}{r} \right)^4 e^{\mp 4i\varphi} (\dot{r} \mp 4ir\dot{\varphi})^2 \right\rangle. \quad (\text{B.5e})$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*, Pearson Education Limited (2014).
- [2] Bernard Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press (2009).
- [3] Marc Favata 2010, "*The gravitational-wave memory effect*", *Class. Quantum Grav.* **27** 084036.
- [4] Marc Favata 2011, "*The gravitational-wave memory form eccentric binaries*", *Phys. Rev D*, **84**, 124013.
- [5] M.V.Braginskii e L.P.Grishchuk 1985,"Kinematic resonance and memory effect in free-mass gravitational antennas", *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **89**, 744-750.
- [6] K.S.Thorne 1992, "Gravitational-wave bursts with memory: The Christodoulou effect", *Phys. Rev. D*, **45**, 2.
- [7] L.Blanchet 2006, "Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries", *Living Rev. Relativity* **9**, 4.
- [8] <https://www.ligo.caltech.edu>.
- [9] <https://www.elisascience.org>.