

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

---

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA**

*SEDE DI BOLOGNA*

*CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ENERGETICA*

**TESI DI LAUREA MAGISTRALE**

In

Termofluidodinamica e Trasmissione del Calore

**ANALISI DELL'INSTABILITA' CONVETTIVA DI FLUIDI  
NON NEWTONIANI IN MEZZI POROSI**

**CANDIDATO:**  
Andrea Natale Impiombato

**RELATORE:**  
Chiar.mo Prof. Antonio Barletta

**CORRELATORE:**  
Michele Celli

Anno Accademico 2017/2018

Sessione I



*Quanto è bella giovinezza  
che si fugge tuttavia  
chi vuol esser lieto sia  
non si iscriva a ingegneria.  
(Scritta su un muro)*



## Sommario

Lo studio delle instabilità nei fluidi risulta importante quando si è interessati a conoscere per quali modi di perturbazione del sistema ha inizio il fenomeno di convezione a celle. Questo fenomeno varia i parametri di scambio termico e, di conseguenza, lo scambio di calore non segue più le leggi note per la conduzione termica, ma sono necessarie correlazioni di natura empirica o numerica.

L'instabilità termica di Rayleigh-Bénard in un mezzo poroso saturato da un fluido Newtoniano è stata ampiamente studiata negli ultimi decenni. L'analisi è stata estesa al caso in cui il fluido è soggetto a un flusso orizzontale stazionario e parallelo. È stato dimostrato che il flusso orizzontale non altera le condizioni di innesco dell'instabilità convettiva, che si verifica quando il numero d'onda adimensionale della perturbazione è  $\pi$  e il numero di Darcy-Rayleigh è  $4\pi^2$ . Va menzionato che, mentre la maggior parte della letteratura esistente su questo argomento è relativa ai fluidi Newtoniani che saturano mezzi porosi, alcuni studi hanno esteso l'indagine anche a fluidi non Newtoniani. Alcuni autori hanno studiato fluidi viscoelastici, mentre altri hanno analizzato fluidi puramente viscosi modellati con legge di potenza, oppure fluidi di Bingham. Questo lavoro di ricerca vuole espandere ulteriormente le conoscenze sull'insorgere dell'instabilità convettiva innescata dal galleggiamento termico in strati porosi saturati da un fluido non Newtoniano.

Nella prima parte della tesi viene effettuato uno studio preliminare per capire in che modo un fluido non Newtoniano si caratterizza rispetto ad un fluido Newtoniano. In particolare vengono studiati i diversi modelli che descrivono il comportamento del fluido sotto l'azione di forze di taglio e come questi possono essere racchiusi in una certa tipologia di famiglie.

Tali fluidi vengono poi studiati quando si trovano a saturare un solido poroso, di conseguenza vengono introdotte le considerazioni che portano alla modifica dell'equazione della quantità di moto dei fluidi Newtoniani a quella dei fluidi non Newtoniani in mezzi porosi.

La parte finale della tesi riguarda lo studio numerico dell'instabilità. Da uno studio preliminare dei diversi articoli scientifici pubblicati su riviste del settore, viene studiata l'instabilità convettiva di un fluido non Newtoniano che satura uno strato poroso, il quale strato viene riscaldato nella superficie inferiore a flusso di calore costante mentre lo strato superiore è una superficie libera. Grazie alle tecniche matematiche studiate in diversi articoli scientifici, viene fatta un'analisi perturbativa di tipo lineare considerando i modi normali. Dallo studio si riescono a ricavare dei parametri adimensionali che descrivono le instabilità per i diversi tipi di fluidi non Newtoniani.



# Indice

<b>I</b>	<b>Caratteristiche dei Fluidi Newtoniani e Non Newtoniani in Mezzi Porosi</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Fluidi Newtoniani e Non Newtoniani</b>	<b>3</b>
1.1	Fluidi Newtoniani . . . . .	4
1.2	Fluidi Non Newtoniani . . . . .	5
1.2.1	Fluidi Tempo Indipendenti . . . . .	6
	Fluido Pseudoplastico . . . . .	7
	Fluido Viscoplastico . . . . .	9
	Fluido Dilatante . . . . .	11
1.2.2	Fluidi Tempo Dipendenti . . . . .	12
	Fluidi Tissotropici . . . . .	13
	Fluidi Reopèctici . . . . .	13
1.2.3	Fluidi Viscoelastici . . . . .	15
	Modello di Maxwell . . . . .	16
	Modello di Kelvin-Voigt . . . . .	18
	Confronto tra i Modelli di Maxwell e di Kelvin-Voigt	19
	Altri Modelli . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Convezione in Mezzi Porosi di Fluidi Newtoniani</b>	<b>25</b>
2.1	Solido Poroso . . . . .	27
2.1.1	Porosità . . . . .	27
2.1.2	Bilancio di Massa . . . . .	28
2.1.3	La Legge di Darcy . . . . .	28
2.1.4	Bilancio di Energia . . . . .	32
2.2	Problema di Horton-Rogers-Lapwood . . . . .	33
2.3	Estensione del Problema HRL . . . . .	39
2.4	Problema di Prats . . . . .	43
2.5	Effetto della Dissipazione Viscosa . . . . .	46

<b>II</b>	<b>Instabilità Convettiva di un Fluido non-Newtoniano</b>	<b>47</b>
<b>3</b>	<b>Instabilità in un Fluido con Legge di Potenza</b>	<b>49</b>
3.1	Definizione del Problema . . . . .	51
3.2	Stato Base . . . . .	54
3.3	Analisi di Stabilità Lineare . . . . .	55
3.4	Considerazioni sui Risultati . . . . .	65
3.5	Codice Numerico . . . . .	70
<b>III</b>	<b>Appendici</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Equazioni di Bilancio dei Fluidi Newtoniani</b>	<b>81</b>
A.1	Approssimazione di Boussinesq . . . . .	83
<b>B</b>	<b>Problema di Rayleigh–Bénard</b>	<b>87</b>
<b>C</b>	<b>Shooting Method</b>	<b>97</b>
<b>D</b>	<b>Metodi Numerici per ODE ai Valori Iniziali</b>	<b>99</b>
D.1	Metodi a Due Livelli . . . . .	99
D.2	Metodi Predictor-Corrector e Metodi a Multipunti . . . . .	100
D.3	Metodi Runge-Kutta . . . . .	101
	<b>Bibliografia</b>	<b>103</b>



# Parte I

## Caratteristiche dei Fluidi Newtoniani e Non Newtoniani in Mezzi Porosi



# Capitolo 1

## Fluidi Newtoniani e Non Newtoniani

I fluidi possono essere caratterizzati in base o alla risposta ad una variazione di **pressione** o ad una di **forza di taglio**.

Se si considera la pressione come variabile di controllo si definiscono fluidi **compressibili** e fluidi **incompressibili**.

L'effetto della pressione, però, non è rilevante tanto quanto lo sforzo di taglio, infatti generalmente un fluido viene considerato incompressibile, mentre per un sistema gassoso questa approssimazione non si può fare. Allora ci si riferisce allo sforzo di taglio per classificare il fluido.

In questo modo si distingue tra **fluidi Newtoniani** e **fluidi non Newtoniani**.

## 1.1 Fluidi Newtoniani

Considerando un fluido compreso tra due lamine, una fissa e una mobile, come in figura 1.1, si nota che la lamina superiore una volta che è stata messa in moto, è soggetta ad una forza lungo la direzione del moto che tende a frenarla, ovvero una forza di attrito parallela alla direzione di moto detta forza di taglio.

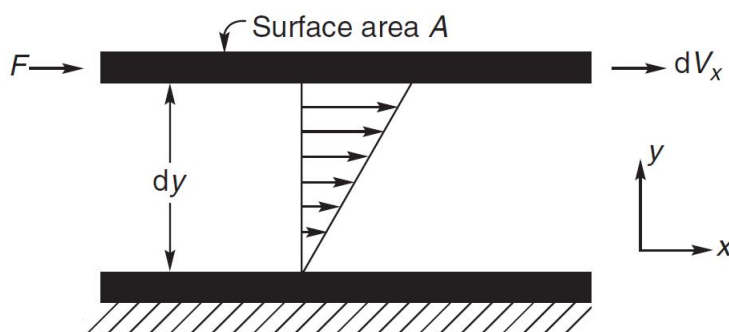


Figura 1.1: Rappresentazione del taglio [6]

Tale forza di taglio, per un fluido newtoniano, si può esprimere come [6]

$$\frac{F}{A} = \tau_{xy} = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu \dot{\gamma}_{x,y} \quad (1.1)$$

Dove: il coefficiente  $\mu$  è la viscosità dinamica misurata in  $[Pa \cdot s]$  nel SI,  $u_x$  è la velocità del fluido parallela all'asse x misurata in  $[m \cdot s^{-1}]$  nel SI.

Un fluido Newtoniano è un fluido descritto da una legge lineare tra la forza  $\tau_{xy}$  di taglio (Shear stress) e il rateo di variazione della velocità  $\partial u_x / \partial y = \dot{\gamma}_{x,y}$  (Shear rate).

La curva caratteristica  $(\tau_{xy}, \dot{\gamma}_{xy})$  è chiamata **curva di flusso** o **reogramma**.

Quest'ultima mostra, appunto, la dipendenza lineare tra shear stress e shear rate come in figura 1.2.

Un fatto caratteristico è che la curva passa per l'origine e ha una inclinazione, cioè una viscosità, che rimane costante per qualsiasi valore di velocità, cosa non ovvia per gli altri tipi di fluidi.

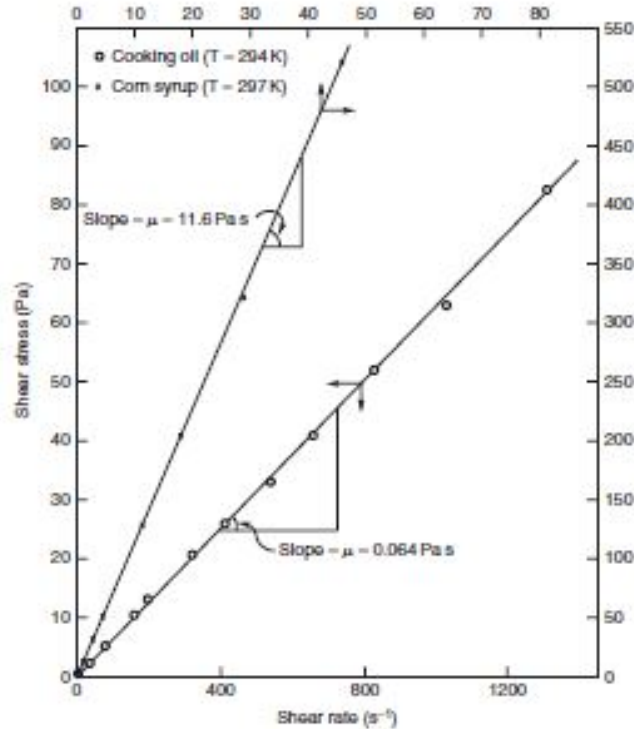


Figura 1.2: Curva di Flusso di un fluido Newtoniano [6]

## 1.2 Fluidi Non Newtoniani

I fluidi non Newtoniani sono quelli la cui curva di flusso si discosta dalla linearità o non passa per l'origine.

In genere la viscosità di tali fluidi varia col variare della velocità. Se ne individuano tre classi:

- **Fluidi tempo indipendenti:** sono quei fluidi per i quali lo sforzo di taglio in ogni punto è determinato solo dallo sforzo di taglio in quel punto e in quell'istante. Sono anche detti fluidi puramente viscosi, inelastici o fluidi generalizzati Newtoniani.
- **Fluidi tempo dipendenti:** sono quei fluidi in cui lo sforzo di taglio dipende anche dalla durata di tale sforzo e dalla storia termica del fluido.
- **Fluidi viscoelastici:** Sono tutte quelle sostanze in cui avviene un recupero parziale della deformazione.

Tuttavia i fluidi possono anche essere una combinazione di tutte le classi appena descritte.

### 1.2.1 Fluidi Tempo Indipendenti

Per questa tipologia di fluidi si ha che il valore della forza di taglio è una funzione del gradiente di velocità, oppure è il gradiente di velocità ad essere una funzione dello sforzo di taglio [6].

$$\dot{\gamma}_{xy} = f_1(\tau_{xy}) \quad (1.2)$$

o in alternativa

$$\tau_{xy} = f_2(\dot{\gamma}_{xy}) \quad (1.3)$$

dove  $f_2$  è la funzione inversa di  $f_1$ .

Questa classe di fluidi, a sua volta, si suddivide in tre categorie:

1. **Fluido Pseudoplastico**
2. **Fluido Viscoplastico**
3. **Fluido Dilatante**

Il comportamento qualitativo delle tre tipologie di fluidi è mostrati in figura 1.3, in cui è indicata la differenza con un fluido Newtoniano.

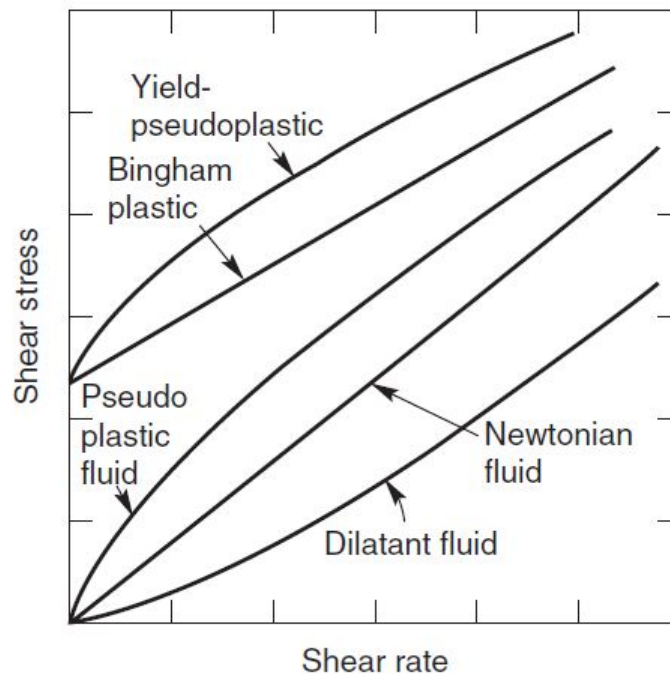


Figura 1.3: Curve di Flusso dei fluidi tempo indipendenti [6]

**Fluido Pseudoplastico**

In un fluido pseudoplastico si identifica una viscosità apparente, la quale, come lo sforzo di taglio, dipende dalla variazione di velocità del fluido.

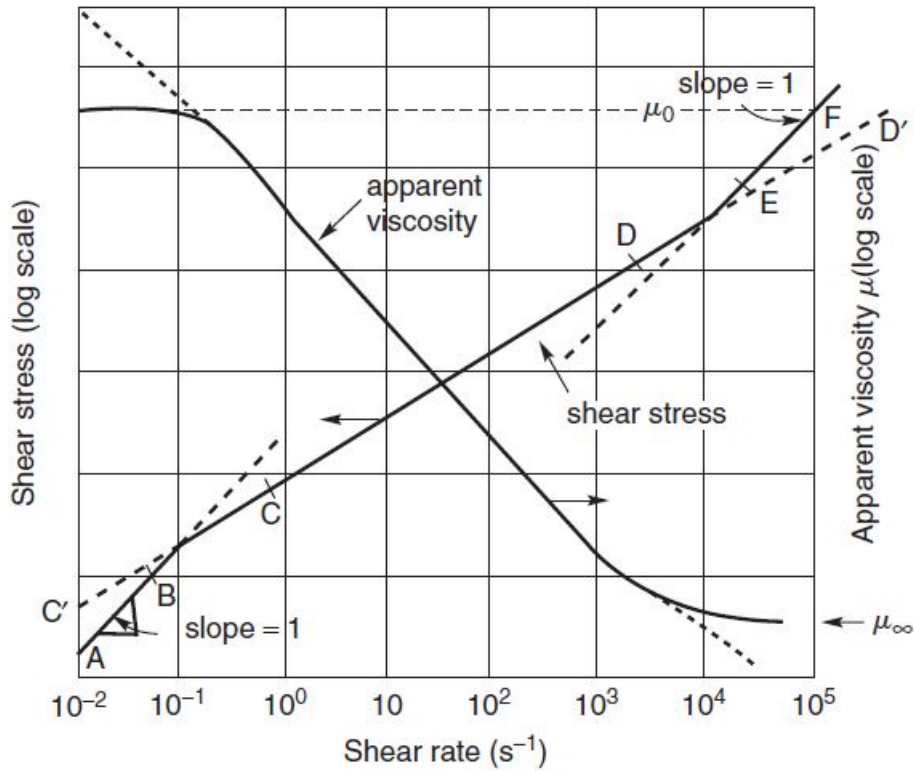


Figura 1.4: Comportamento fluido pseudoplastico [6]

In figura 1.4 si nota che il comportamento della viscosità per velocità basse equivale a  $\mu_0$ ; questo valore va via via diminuendo con l'aumentare dello shear rate  $\dot{\gamma}_{xy}$  fino a stabilizzarsi a  $\mu_\infty$  per valori molto elevati di velocità. Perciò è necessario definire dei modelli per le regioni appena indicate al fine di determinare  $\mu$ .

**Modello di fluido con legge di potenza [6].**

Questo modello impone che

$$\tau_{xy} = m(\dot{\gamma}_{xy})^n \tag{1.4}$$

Dove  $m$  è la viscosità apparente ed  $n$  è l'indice di potenza. Considerando l'equazione (1.1), si vede facilmente che

$$\mu = \frac{\tau_{xy}}{\dot{\gamma}_{xy}} = m(\dot{\gamma}_{xy})^{n-1} \quad (1.5)$$

dove si ha:

- $n < 1$ : comportamento pseudoplastico.
- $n = 1$ : comportamento Newtoniano.
- $n > 1$ : comportamento dilatante.

Gli indici  $n$  ed  $m$  sono numeri empirici e per lo più si trovano tabulati per le diverse sostanze e condizioni operative.

Quando ci si discosta dalla legge di potenza, cioè a bassi e alti valori di shear rate (vedi figura 1.4), si deve cambiare modello e tenere conto dei limiti  $\mu_0$  e  $\mu_\infty$ .

**Modello di Carreau** [6].

questo modello vuole appunto descrivere gli andamenti di  $\mu$  nella zona in cui il modello di fluidi con legge di potenza non riesce a farlo.

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left(1 + (\lambda \dot{\gamma}_{xy})^2\right)^{(n-1)/2} \quad (1.6)$$

dove  $n < 1$  e  $\lambda$  sono coefficienti che adattano la curva.

Viene riprodotto il modello Newtoniano quando  $\mu = \mu_0$  e  $n=1$  o  $\lambda = 0$  o entrambi.

Un ulteriore modello è quello di **Viscosità Trasversale**:

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + k(\dot{\gamma}_{xy})^n} \quad (1.7)$$

dove  $n < 1$  e  $k$  sono parametri per l'adattamento della curva.

Il modello Newtoniano viene riprodotto se  $k \rightarrow 0$ . Per  $\mu \ll \mu_0$  o  $\mu \gg \mu_\infty$  il modello si riduce al modello di potenza.

**Modello di Ellis** [6].

Quando il discostamento dal modello di potenza è significativo a bassi valori di shear rate si può usare questo modello.

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{1/2}}\right)^{\alpha-1}} \quad (1.8)$$

Dove  $\alpha > 1$  e  $\tau_{1/2}$  sono due parametri.



## Fluido Viscoplastico

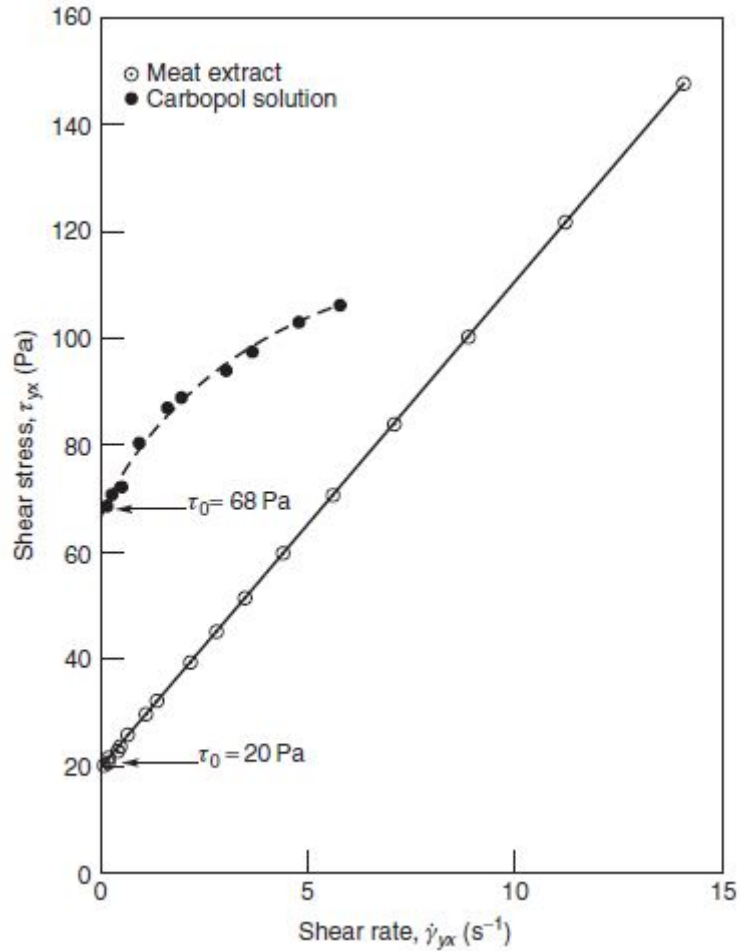


Figura 1.5: Comportamento fluido viscoplastico: fluido plastico di Bingham (retta) e Yield-pseudoplastico [6]

Un fluido viscoplastico è un fluido per il quale si deve avere un valore di shear stress minimo, prima che tutto il fluido venga messo in moto. Una volta messo in moto, si può avere una comportamento lineare o non lineare del fluido, ma la curva non passa per l'origine, come mostrato in figura 1.5. Se la curva di flusso è una retta si tratta di **fluidi plastici di Bingham**, altrimenti di **Yield-plastici**.

**Modello del fluido plastico di Bingham [6].**

Questo modello è simile a quello Newtoniano ma modificato, in quanto la curva non passa per l'origine.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_0^B + \mu_B(\dot{\gamma}_{xy}) & \text{per } |\tau_{xy}| > |\tau_0^B| \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 0 & \text{per } |\tau_{xy}| < |\tau_0^B| \end{aligned} \quad (1.9)$$

**Modello di Herschel-Bulkley [6].**

Questo modello rappresenta la generalizzazione del modello di Bingham per i fluidi non lineari.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_0^H + m(\dot{\gamma}_{xy})^n & \text{per } |\tau_{xy}| > |\tau_0^H| \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 0 & \text{per } |\tau_{xy}| < |\tau_0^H| \end{aligned} \quad (1.10)$$

**Modello di Casson [6].**

Molti materiali biologici sono interpretabili attraverso tale modello e non solo.

$$\begin{aligned} |\tau_{xy}|^{1/2} &= |\tau_0^C|^{1/2} + (\mu_C |\dot{\gamma}_{xy}|)^{1/2} & \text{per } |\tau_{xy}| > |\tau_0^C| \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 0 & \text{per } |\tau_{xy}| < |\tau_0^C| \end{aligned} \quad (1.11)$$

### Fluido Dilatante

Questa tipologia di fluidi è simile a quella dei fluidi pseudoplastici, con la differenza che la loro viscosità apparente aumenta con l'aumentare dello shear rate  $\dot{\gamma}_{xy}$ .

Il fluido dilatante è caratteristico delle sospensioni molto concentrate (oltre il 50% in peso) di particelle solide sufficientemente piccole e non flocculate. Le particelle allo stato di quiete sono impacchettate in modo da ridurre al minimo gli spazi interparticellari e la quantità di liquido trattenuta in essi. Quest'ultima, però, è appena sufficiente ad assicurare una lubrificazione tale da permettere, a bassa velocità di taglio, un certo scorrimento. Quando il sistema viene agitato rapidamente, diventa più viscoso, in quanto il moto delle particelle determina un aumento di volume del sistema. Perciò la limitata quantità di veicolo liquido, non essendo sufficiente a riempire gli spazi vuoti, non può più assicurare la lubrificazione necessaria a ridurre l'attrito fra particelle (responsabile dell'aumento di viscosità).

Un esempio grafico di come cambia la disposizione del fluido è rappresentato in figura 1.6.

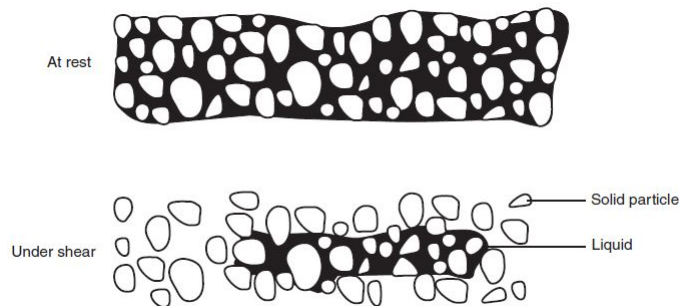


Figura 1.6: Esempio di variazione di lubrificazione in base alla velocità [6]

Il comportamento dei fluidi dilatanti è controllato da fattori quali: la dimensione delle particelle, la loro forma e distribuzione, la frazione volumetrica delle particelle, l'interazione particella-particella e fluido-particella, il tipo di velocità e la durata della deformazione.

Si può modellizzare tale comportamento tramite una **legge di potenza** [6]

$$\tau_{xy} = m(\dot{\gamma}_{xy})^{n-1} \tag{1.12}$$

dove per  $n > 1$  si descrive il comportamento dilatante.

Per quanto riguarda la viscosità  $m$  descritta nella legge, le più comuni sono state tabulate in funzione dello shear rate.

### 1.2.2 Fluidi Tempo Dipendenti

I fluidi tempo indipendenti non hanno memoria delle sollecitazioni alle quali sono stati sottoposti, dunque, una volta cessata l'azione delle forze di taglio, riprendono la struttura iniziale, quindi il percorso nel reogramma è reversibile.

Nei fluidi tempo dipendenti, invece, non è detto che ciò accada, cioè non è detto che la curva di ritorno coincida con quella di andata.

Tali fluidi dovrebbero essere rappresentati in un diagramma tridimensionale  $(\tau, \dot{\gamma}, t)$  in cui compare la variabile temporale.

Costruendo però un diagramma bidimensionale  $(\tau, \dot{\gamma})$ , si tiene conto che la fase di andata e quella di ritorno sono completate in tempi differenti.

Si distingue tra

- Fluidi tissotropici
- Fluidi non tissotropici o reopèctico

Il comportamento tipico di questi fluidi in funzione del tempo, è mostrato in figura 1.7.

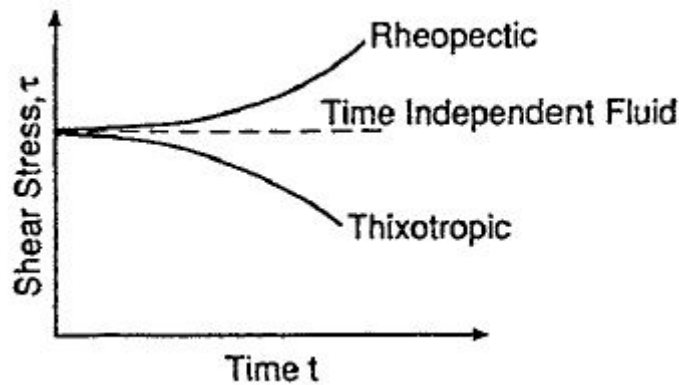


Figura 1.7: Andamento tipico nel tempo dei fluidi non Newtoniani tempo dipendenti [10]

## Fluidi Tissotropici

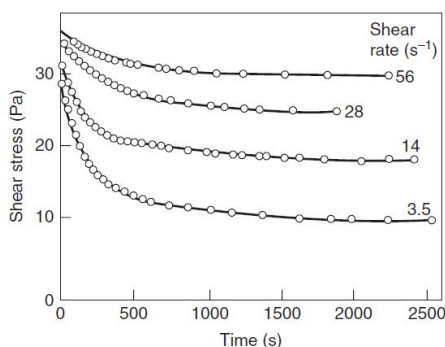


Figura 1.8: Esempio di dipendenza dal tempo dello stress di taglio [6]

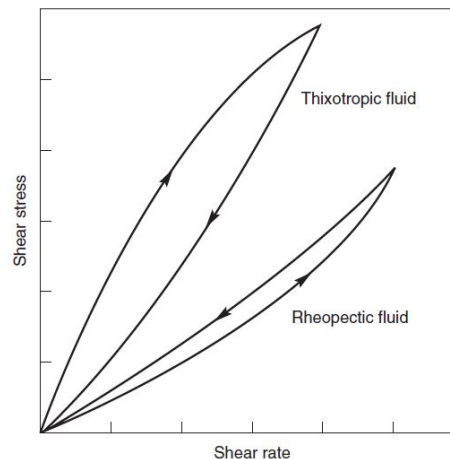


Figura 1.9: Confronto tra fluido tissotropico e reopèctico [6]

Generalmente questi fluidi contengono particelle asimmetriche che costituiscono una struttura reticolare poco stabile. La struttura, una volta messa in moto, si rompe perdendo le proprietà iniziali.

Tale meccanismo porta a non avere una curva di ritorno uguale a quella di andata come mostrato nel diagramma reologico di figura 1.9.

Il comportamento appena descritto rappresenta una isteresi del materiale, caratterizzata dall'energia spesa per la dissociazione dei legami per unità di tempo e di volume.

In figura 1.8 si vede la dipendenza dal tempo della viscosità che influisce sullo stress di taglio.

## Fluidi Reopèctici

Questi fluidi hanno un comportamento opposto ai tissotropici e un comportamento caratteristico è visto in figura 1.9 in cui si nota che nel tratto di andata la viscosità aumenta il suo valore con l'aumentare dello shear rate, mentre il tratto di ritorno avviene quasi a viscosità costante delineando una isteresi.

Modellare questi fluidi non è banale in quanto dipendono da diverse variabili che riguardano anche la struttura chimica.

I modelli più usati sono quelli basati su considerazioni cinetico-strutturali i quali fanno riferimento a un parametro scalare,  $0 \leq \xi \leq 1$ , dove 0 indica la struttura completamente spezzata e 1 la struttura completamente accumulata.

Questa famiglia di modelli consiste in due equazioni, la prima collega gli sforzi tangenziali  $\tau$  allo shear rate  $\dot{\gamma}$  a  $\xi$  fissato, la seconda descrive la variazione nel tempo del parametro  $\xi$ .

Tra i vari modelli proposti nella letteratura quello più indicato per descrivere un comportamento tissotropico è il **modello di Houska** [6] il quale rappresenta una generalizzazione del modello di Herschel–Bulkley.

$$\tau_{xy} = (\tau_{y1} + \tau_{y2}) + (m_0 + \xi m_1) \dot{\gamma}_{xy}^n \quad (1.13)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = a(1 - \xi) - b\xi \dot{\gamma}_{xy}^\epsilon \quad (1.14)$$

i coefficienti  $\tau_{y0}$  e  $m_0$  sono chiamati rispettivamente Permanent yield-stress e consistency coefficient, mentre  $\tau_{y1}$  e  $m_1$  sono contributi che servono ad indicare la dipendenza dal tempo e risultano lineari per quella data struttura istantanea.

La seconda equazione invece da un equilibrio dinamico tra il rateo di costruzione e di distruzione della struttura dando così il rateo di cambio della struttura (cioè il termine  $\xi$ ).

I parametri che compaiono nelle due equazioni ( $\tau_{y0}, \tau_{y1}, m_0, m_1, a, b, \epsilon$ ) sono determinati in maniera empirica e dipendono dal tipo di materiale e dalla cinetica.

Esistono modelli basati sulle microstrutture, ma questi necessitano di conoscere a priori le forze d'interazione tra particelle-particelle e particelle-fluido. Questo significa che l'applicabilità di tali modelli è limitata.

### 1.2.3 Fluidi Viscoelastici

Molti materiali di uso industriale come i polimeri, presentano dei comportamenti sia elastici che viscosi. Col termine viscoelasticità si indica il comportamento di un materiale intermedio tra solido elastico e liquido viscoso. I casi limite di un materiale viscoelastico sono o un flusso completamente viscoso, o una deformazione perfettamente elastica.

Questi materiali sono tempo dipendenti perché la loro storia di deformazione o la loro storia di tensione variano le caratteristiche.

Il comportamento di solido elastico è perfettamente modellato dalla **legge di Hooke**

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.15}$$

dove viene descritta la deformazione  $\varepsilon$  di una molla in funzione dello sforzo applicato  $\sigma$  e del tipo di materiale  $E$  (modulo elastico).

In figura 1.10 è mostrato il modello e il tipo di risposta della molla ad un carico costante.

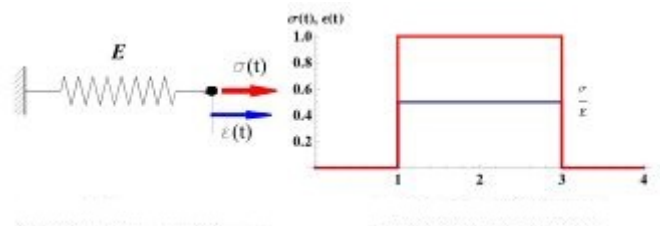


Figura 1.10: Modellazione di un elemento elastico a sinistra, carico costante e risposta a destra [7]

Come si nota dalla figura 1.10 una volta cessato il carico si ritorna allo stato iniziale se tale carico non è stato sufficiente a snervare/rompere la molla. ciò significa che il lavoro speso durante la fase di carico, viene integralmente recuperato durante la fase di scarico a spese dell'energia potenziale accumulata dall'elemento di volume durante la fase di carico.

Per il modello viscoso invece è valido il **modello di Newton-Petroff**, descritto da una legge del tipo

$$\sigma(t) = \mu\dot{\varepsilon}(t) \tag{1.16}$$

dove  $\sigma(t)$  è la tensione funzione del tempo,  $\dot{\varepsilon}(t)$  è la velocità di deformazione e  $\mu$  è la viscosità dinamica definita nei capitoli precedenti.

In figura 1.11 è mostrato il modello dell'elemento viscoso dove è inserito

in un pistoncino un olio di viscosità  $\mu$  e la risposta ad una sollecitazione costante di tale elemento.

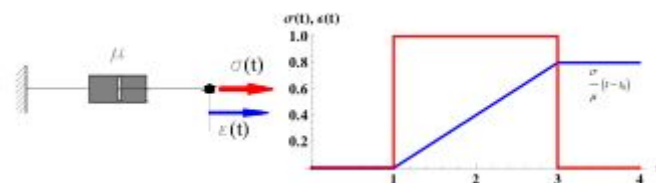


Figura 1.11: Modellazione di un elemento viscoso a sinistra, carico costante e risposta a destra [7]

La  $\sigma(t)$  non dipende dallo spostamento  $\varepsilon$ , ma dalla sua variazione nel tempo.

Si nota dal grafico in figura 1.11 che al termine della sollecitazione, l'elemento non ritorna alla configurazione iniziale. Cioè l'energia spesa non viene accumulata dal fluido e dunque viene trasformata integralmente in calore.

I modelli che si usano per descrivere i fluidi viscoelastici usano una combinazione dei modelli sopra citati.

### Modello di Maxwell

Il modello consiste nel porre in serie un elemento elastico, di rigidezza  $E$ , e un elemento viscoso di viscosità  $\mu$  come descritto in figura 1.12.

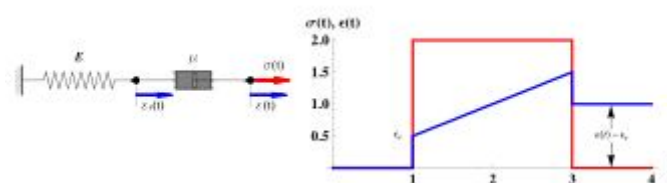


Figura 1.12: Modellazione elemento di maxwell a sinistra, carico costante e risposta a destra [7]

Lo spostamento totale  $\varepsilon$  è dato dalla somma tra lo spostamento della molla  $\varepsilon_m$  e lo spostamento dell'elemento viscoso  $\varepsilon_v$ ;

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_m}{dt} + \frac{d\varepsilon_v}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu}$$

definendo  $\lambda = \frac{\mu}{E}$  (tempo di rilassamento)



$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\lambda}\sigma = E\dot{\varepsilon} \quad (1.17)$$

Rappresenta l'equazione che descrive il modello.

A tale equazione va aggiunta la condizione della tensione all'istante  $t=0$  ( $\sigma(0) = \sigma_0$ ). L'insieme della condizione iniziale e della (1.17) consente di trovare la storia di tensione a seguito della storia di deformazione impressa  $\varepsilon(t)$ .

La soluzione è composta dalla somma della soluzione dell'omogenea associata e dell'integrale particolare; l'omogenea associata sarà

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\lambda}\sigma = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\lambda}$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\lambda}dt$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma(t)} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\lambda} \int_0^t dt$$

$$\log\left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0}\right) = -\frac{t}{\lambda}$$

$$\sigma_{om}(t) = \sigma_0 e^{-t/\lambda} \quad (1.18)$$

L'integrale generale della (1.17) è quindi

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\lambda} + \sigma_p(t) \quad (1.19)$$

La soluzione omogenea si ottiene imponendo uno spostamento  $\varepsilon$  costante, in modo che  $\dot{\varepsilon} = 0$ . Si nota che si ha un andamento esponenziale decrescente di tale risposta. Ciò significa che se la sollecitazione avviene in tempi molto brevi, il primo elemento a rispondere di tale sollecitazione è la molla; la forza viscosa entra in gioco in un secondo istante ed infatti si risente del suo effetto in tempi lunghi.

### Modello di Kelvin-Voigt

In questo modello molla e elemento viscoso sono posti in parallelo come mostrato in figura 1.13.

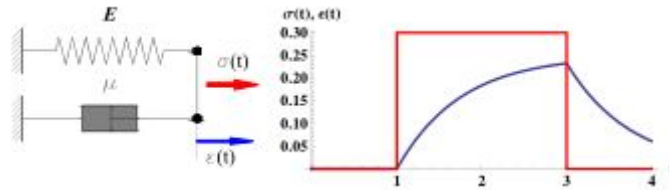


Figura 1.13: Modellazione elemento di Kelvin-Voigt a sinistra, carico costante e risposta a destra [7]

Questa volta è la tensione nei due elementi ad essere differente, quindi la tensione totale è data dalla loro somma.

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v$$

$$\sigma = E\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}$$

definendo  $\lambda = \frac{\mu}{E}$  si ottiene

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda}\varepsilon = \frac{\sigma}{\mu} \quad (1.20)$$

Rappresenta l'equazione che descrive il modello.

La condizione iniziale è  $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$ .

La (1.20) ha la stessa forma della (1.17), quindi la soluzione dell'omogenea sarà

$$\varepsilon_{om}(t) = \varepsilon_0 e^{-t/\lambda} \quad (1.21)$$

mentre l'integrale generale sarà

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-t/\lambda} + \varepsilon_p(t) \quad (1.22)$$

**Confronto tra i Modelli di Maxwell e di Kelvin-Voigt**

Ci si pone la domanda di quale tra i modelli sopra descritti sia il più rappresentativo della realtà. **L'esperimento di Creep** dimostra che un materiale sottoposto ad una sollecitazione costante nel tempo ( $\sigma = \sigma_0$  e  $\dot{\sigma} = 0$ ) cambia il suo stato tensionale col passare del tempo come mostrato nell'immagine 1.14.

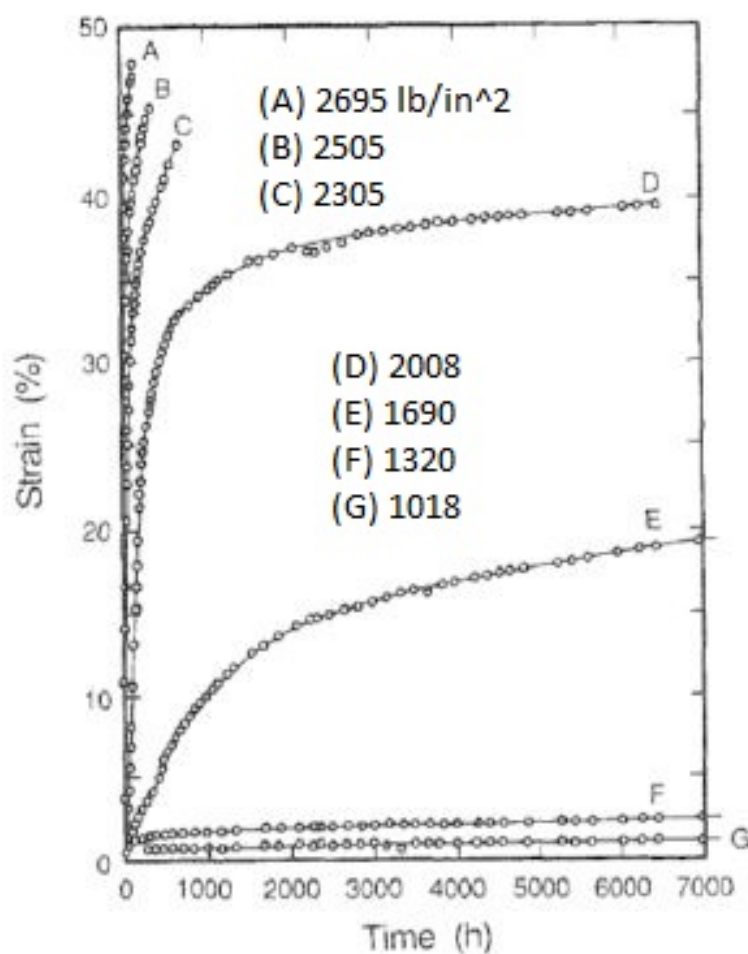


Figura 1.14: Acetato di cellulosa a 298 K per diversi valori di carico [9]

In tale figura si vede che per carichi troppo elevati il materiale si rompe entro le 1000 ore, diminuendo il carico invece, ciò che accade, è che l'allungamento si stabilizza ad un certo valore senza rompere il materiale.

Facendo l'esperimento di Creep per un modello Maxwelliano, si ottiene la risposta riportata in 1.15.

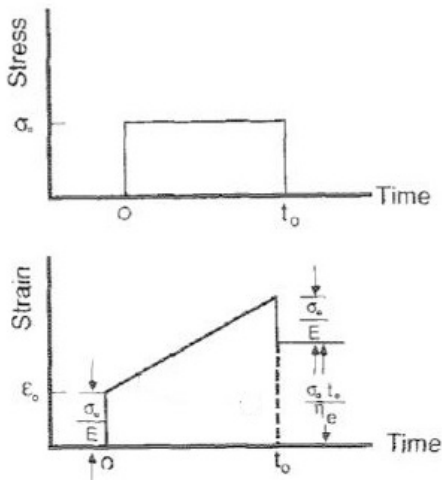


Figura 1.15: Risposta dell'elemento di Maxwell all'esperimento di Creep [9]

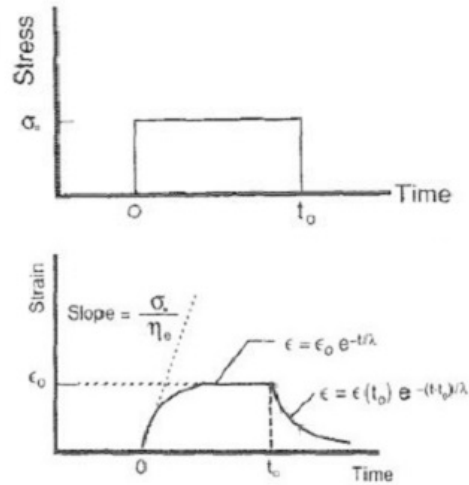


Figura 1.16: Risposta dell'elemento di Kelvin-Voigt all'esperimento di Creep [9]

In figura 1.15 si vede che quando il carico viene rilasciato, solo la molla recupera la deformazione, quindi l'elemento rimane deformato. Ciò non descrive bene il comportamento reale.

Facendo il medesimo esperimento nel modello Kelvin-Voigt invece si ottiene il risultato di figura 1.16. Cioè il modello riproduce in maniera più fedele la realtà.

Un altro esperimento per la caratterizzazione dei modelli è quello dello **stress relaxation**; ovvero si vuole vedere come si comportano gli stress interni nel tempo per una data deformazione iniziale. Un esempio è riportato in figura 1.17. Applicando l'esperimento ai due modelli in esame si nota dalla figura 1.18 e 1.19 che il modello di Maxwell descrive bene il rilassamento, mentre il modello di Kelvin-Voigt no.

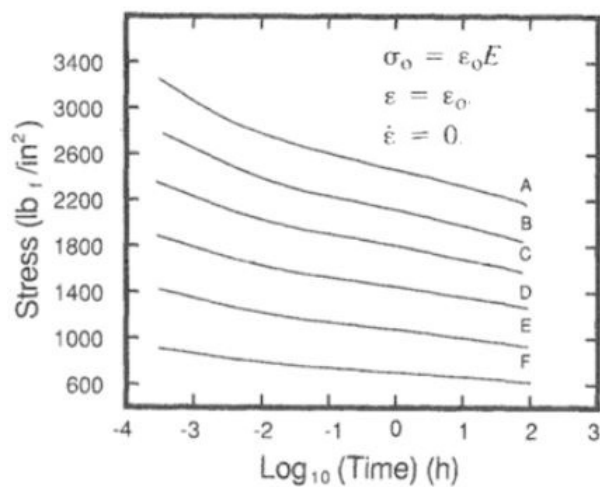


Figura 1.17: Esperimento di stress relaxation su Unfilled PTFE [9]

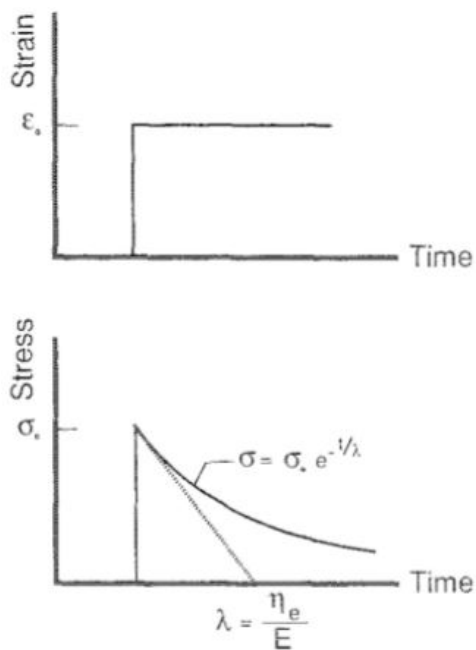


Figura 1.18: Risposta dell'elemento di Maxwell all'esperimento stress relaxation [9]

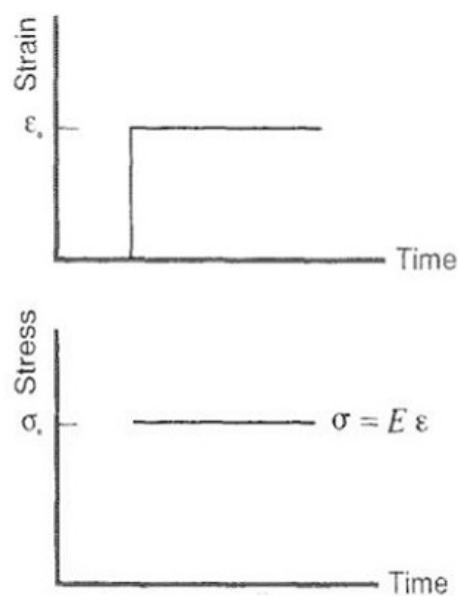


Figura 1.19: Risposta dell'elemento di Kelvin-Voigt all'esperimento di stress relaxation [9]

Ultimo esperimento caratterizzante è quello in cui si deve **applicare una trazione a velocità costante**. Un esempio di applicazione è riportato nel grafico 1.20. Applicando tale esperimento ai due modelli, si ottengono i risultati 1.21 e 1.22. Si nota che l'elemento di Kelvin-Voigt non descrive la realtà, mentre quello di Maxwell si.

Ulteriori approfondimenti che si trovano in letteratura riguardano la sottomissione dei modelli a carichi ciclici e studiarne quindi la risposta.

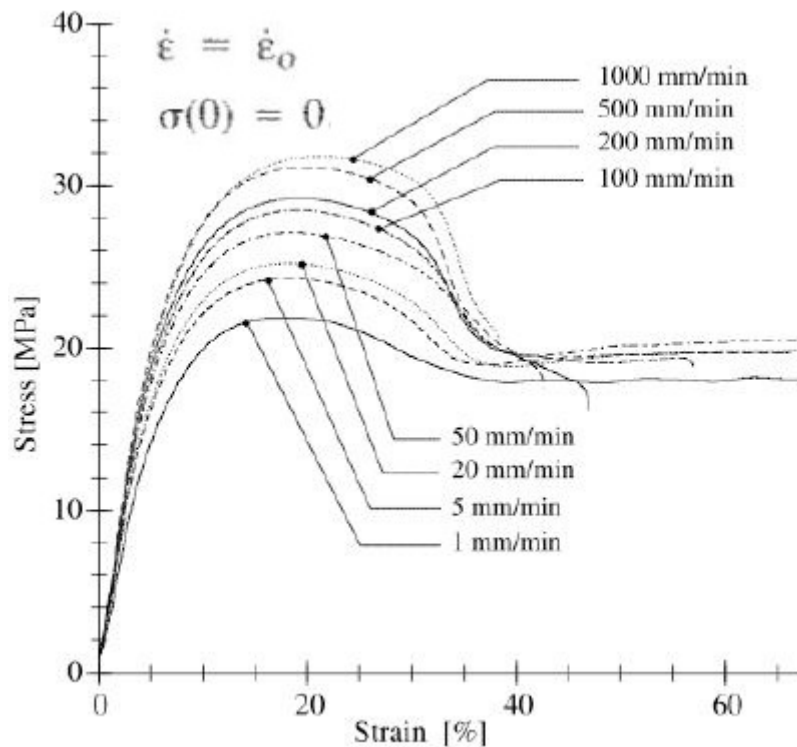


Figura 1.20: Esperimento di trazione su materiale PP-R naturale [9]

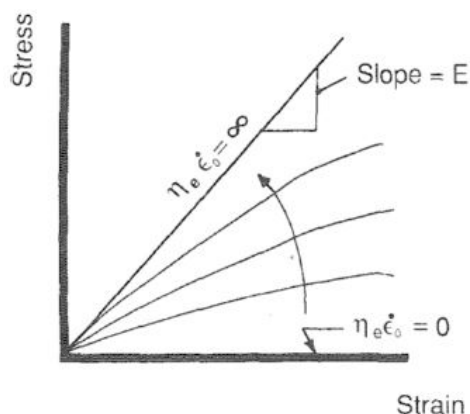


Figura 1.21: Risposta dell'elemento di Maxwell all'esperimento di trazione a velocità costante [9]

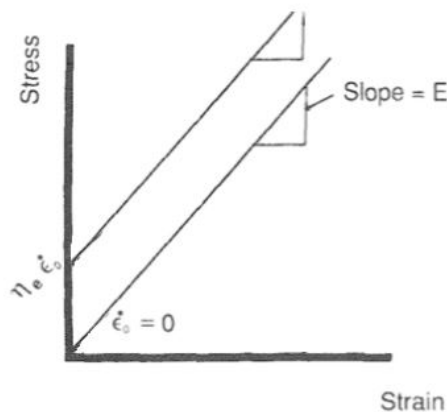


Figura 1.22: Risposta dell'elemento di Kelvin-Voigt all'esperimento di trazione a velocità costante [9]

### Altri Modelli

Esistono altri modelli che descrivono in modo migliore il comportamento dei fluidi viscoplastici rispetto ai modelli sopra studiati.

Questi modelli risultano una combinazione dei modelli di Maxwell e di Kelvin-Voigt e vanno sotto il nome di modelli SLS(Standard Linear Solid) o modelli di Zuber.

Tali modelli sono illustrati in letteratura e se ne riportano qui alcuni schemi.

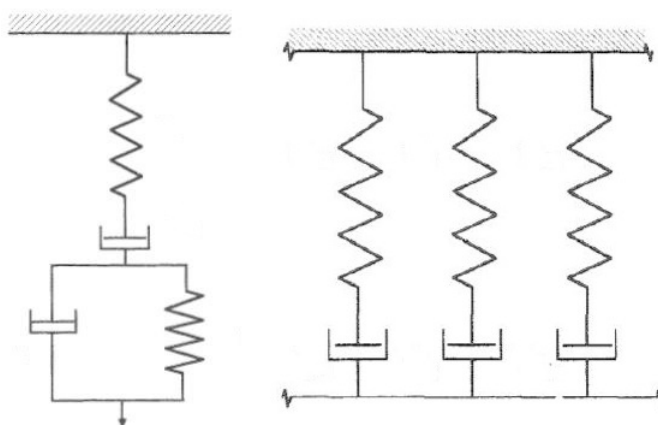


Figura 1.23: Modello di Burger a sinistra, modello Maxwell-Weichert a destra [9]





## Capitolo 2

# Convezione in Mezzi Porosi di Fluidi Newtoniani

I materiali porosi sono quei materiali che presentano nella loro struttura macroscopica una variazione tra parti vuote e parti solide. La presenza dei vuoti (pori) interconnessi permette il passaggio attraverso il materiale di un fluido, il quale può essere sia monofase che bifase.

In natura e non solo, si trovano diversi materiali porosi come mostrati in figura 2.1. Si può capire facilmente che la disposizione degli spazi vuoti è puramente casuale e questo porta a dover fare considerazioni particolari per determinare lo stato di moto del fluido in esame.

Se si considera la velocità su scala pari a quella dei pori (microscopica), si ha un moto altamente turbolento del fluido, ma guardando il sistema su di una scala più grande (macroscopica), si può trovare una velocità mediata e usare questa per descrivere il moto del fluido (vedi figura 2.2).

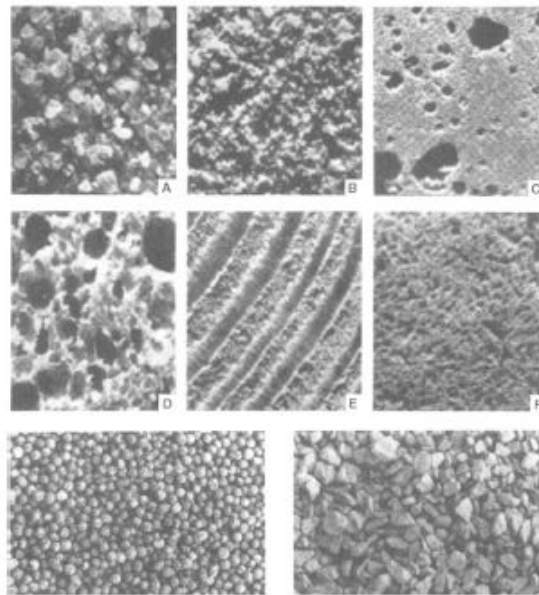


Figura 2.1: In alto: esempi di materiali porosi:(**A**) sabbia, (**B**) sabbia arenaria, (**C**) calcare, (**D**) pane di segale, (**E**) legna, (**F**) polmone umano. In basso: a sinistra materiale granulare usato in edilizia, a destra pietre di calcare. [8]

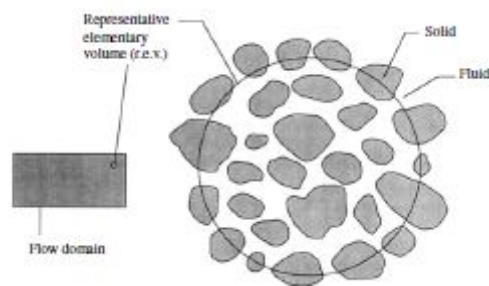


Figura 2.2: Rappresentazione delle due scale, macroscopica e microscopica [8]

## 2.1 Modello di Un Flusso che Saturava un Solido Poroso

### 2.1.1 Porosità

Riferendosi alla figura 2.2, si ha che il volume infinitesimo  $\delta V$ , contiene la parte di volume occupata dal solido  $\delta V_s$  e la parte di volume occupata dal fluido  $\delta V_f$ ; quindi:

$$\delta V = \delta V_s \cup \delta V_f$$

Dunque si definisce la frazione volumetrica di vuoti rispetto al volume infinitesimo totale (porosità)[4]:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\delta V_f}{\delta V} \\ 0 \leq \varphi \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

se  $\varphi = 0$  significa che non c'è la presenza di pori; se  $\varphi = 1$  allora non è presente il materiale solido; se  $\varphi = 0.5$  allora si è in presenza di una regione in cui metà volume è occupato dal solido e l'altra metà è occupata dal liquido.

Riferendosi alla scala microscopica (come esempio illustrativo si può considerare la figura 2.2) si definisce una velocità microscopica  $\bar{u}^*$  [4], grazie alla quale vengono definite:

- **Velocità intrinseca**

$$\bar{U} = \frac{1}{\delta V_f} \int_{\delta V_f} \bar{u}^* \delta V \quad (2.2)$$

- **Velocità media su  $\delta V$**

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \bar{u}^* \delta V \quad (2.3)$$

La (2.3) è anche detta **velocità di filtrazione**, o **velocità di Darcy**.

I due integrali hanno lo stesso valore, in quanto il fluido non può occupare il posto del solido; allora richiamando la definizione di porosità (2.1), si nota facilmente che:

$$\bar{u} = \varphi \bar{U} \quad (2.4)$$

Tale relazione è detta relazione di Dupuit-Forchheimer.

### 2.1.2 Bilancio di Massa

Considerando un volume infinitesimo (esempio di figura 2.2) si ha l'equazione di bilancio della massa in un materiale poroso [4]:

$$\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad (2.5)$$

Dove  $\bar{u}$  è la velocità di filtrazione;  $\rho$  è la densità del fluido e  $t$  è il tempo.

### 2.1.3 La Legge di Darcy

Darcy, grazie al suo lavoro, formulò un'equazione di bilancio locale della quantità di moto per un fluido in un materiale poroso.

La legge di Darcy è una legge empirica proposta da una interpolazione di dati, che lega la velocità di filtrazione al gradiente di pressione:

$$\frac{\mu}{k} \bar{u} = -\bar{\nabla} p + \bar{f} \quad (2.6)$$

dove:

- $\mu$  è la viscosità dinamica del fluido misurata in  $[Pa \cdot s]$  nel SI.
- $k$  è la permeabilità del mezzo poroso misurata in  $[m^2]$  nel SI.
- $p$  è la pressione all'interno del mezzo misurata in  $[Pa]$  nel SI.
- $\bar{f}$  è l'insieme delle forze volumetriche per unità di volume misurata in  $[N \cdot m^{-3}]$  nel SI. Una forza volumetrica è la forza di gravità ( $\bar{f} = \rho \bar{g}$ ).

Nella formulazione originaria non era presente il termine  $\bar{f}$ , in quanto le forze di volume non erano state considerate perchè trascurabili rispetto al gradiente di pressione  $\bar{\nabla} p$ .

Darcy aveva il problema, quindi, di misurare il valore di permeabilità  $k$  del mezzo che aveva in esame, cioè sabbia.

Se si considera un blocco di materiale con tanti fori circolari passanti, come mostrati in figura 2.3, si ha che all'interno dei singoli fori si sviluppa un profilo di velocità alla Poiseuille (non considerando quindi le forze di volume) se il moto è laminare, ovvero si ha che la velocità media sarà

$$u_m^* = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \quad (2.7)$$

considerando un volume elementare (sempre riferendosi alla figura 2.3) si ha che  $U = u_m^*$ , ma  $u = \varphi U$ , quindi sostituendo nella (2.7) si ha

$$u = -\frac{\varphi r_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dz}$$

$$\frac{8\mu}{\varphi r_0^2} u = -\frac{dp}{dz}$$

allora si ottiene per questo mezzo:

$$\begin{cases} \frac{\mu}{k} u = -\frac{dp}{dz} \\ k = \frac{\varphi r_0^2}{8} \end{cases} \quad (2.8)$$

L'ordine di  $k$  in generale è molto piccolo ( $10^{-15} \div 10^{-12}$ ).

Valori di  $k$  per diversi materiali e per porosità  $\varphi$  differenti sono tabulati; un esempio è riportato nella tabella di figura 2.4.

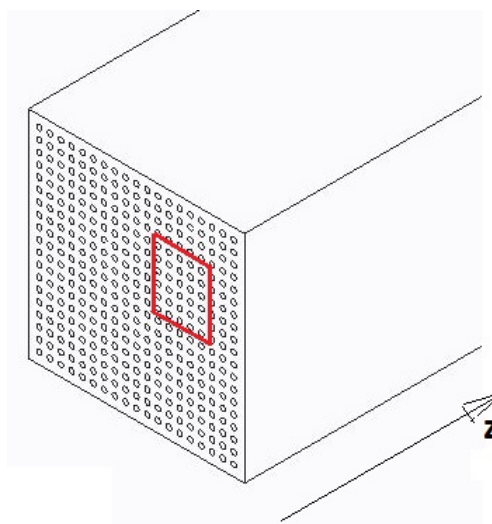


Figura 2.3: Blocco di materiale con serie di fori passanti

Material	Porosity ( $\varphi$ )	Permeability ( $K[\text{cm}^2]$ )	Surface per unit (volume [ $\text{cm}^{-1}$ ])
Agar-agar		$2 \times 10^{-10}$ – $4.4 \times 10^{-9}$	
Black slate powder	0.57–0.66	$4.9 \times 10^{-10}$ – $1.2 \times 10^{-9}$	$7 \times 10^3$ – $8.9 \times 10^3$
Brick	0.12–0.34	$4.8 \times 10^{-11}$ – $2.2 \times 10^{-9}$	
Catalyst (Fischer-Tropsch, granules only)	0.45		$5.6 \times 10^5$
Cigarette		$1.1 \times 10^{-5}$	
Cigarette filters	0.17–0.49		
Coal	0.02–0.12		
Concrete (ordinary mixes)	~0.1		
Concrete (bituminous)		$1 \times 10^{-9}$ – $2.3 \times 10^{-7}$	
Copper powder (hot-compacted)	0.09–0.34	$3.3 \times 10^{-6}$ – $1.5 \times 10^{-5}$	
Cork board		$2.4 \times 10^{-7}$ – $5.1 \times 10^{-7}$	
Fiberglass	0.88–0.93		560–770
Granular crushed rock	0.45		
Hair (on mammals)	0.95–0.99		
Hair felt		$8.3 \times 10^{-6}$ – $1.2 \times 10^{-5}$	
Leather	0.56–0.59	$9.5 \times 10^{-10}$ – $1.2 \times 10^{-9}$	$1.2 \times 10^4$ – $1.6 \times 10^4$
Lime stone (dolomite)	0.04–0.10	$2 \times 10^{-11}$ – $4.5 \times 10^{-10}$	
Sand	0.37–0.50	$2 \times 10^{-7}$ – $1.8 \times 10^{-6}$	150–220
Sandstone (oil sand)	0.08–0.38	$5 \times 10^{-12}$ – $3 \times 10^{-8}$	
Silica grains	0.65		
Silica powder	0.37–0.49	$1.3 \times 10^{-10}$ – $5.1 \times 10^{-10}$	$6.8 \times 10^3$ – $8.9 \times 10^3$
Soil	0.43–0.54	$2.9 \times 10^{-9}$ – $1.4 \times 10^{-7}$	
Spherical packings (well shaken)	0.36–0.43		
Wire crimps	0.68–0.76	$3.8 \times 10^{-5}$ – $1 \times 10^{-4}$	29–40

Figura 2.4: Tabella dei diversi valori di porosità, permeabilità di diversi materiali [8]

Si capisce che la porosità dipende dal numero di fori che si hanno e quanto questi sono distanti tra loro.

Quando la velocità di filtrazione è elevata, si verificano delle discrepanze in quanto è stata fatta l'ipotesi di moto laminare all'interno dei fori.

Dal momento in cui si ha un moto altamente turbolento, la legge di Darcy non vale più. E' stata quindi introdotta una generalizzazione.

#### Legge di Darcy-Forchheimer:

$$\frac{\mu}{k} \bar{u} (1 + C_f Re_k) = -\bar{\nabla} p + \bar{f} \quad (2.9)$$

Dove:

- $C_f$  è il coefficiente di Forchheimer, il quale ha generalmente un valore di circa 0.5.
- $Re_k = \frac{|\bar{u}| \sqrt{k}}{\nu}$ , con  $\nu$  viscosità cinematica.

La legge appena espressa, presenta una non linearità.

Quando il prodotto  $C_f Re_k$  diventa trascurabile, si ritrova la legge di Darcy (2.6).

Dato che generalmente  $C_f \simeq 0.5$ , quando  $Re_k$  ha un valore prossimo ad 1 o superiore, allora si hanno grossi scostamenti dalla legge di Darcy. Nel momento in cui  $C_f Re_k \gg 1$ , il gradiente di pressione  $\bar{\nabla}p$  è legato al quadrato della velocità  $\bar{u}$ , cioè si è nel regime di moto idraulico.

Nelle leggi di Darcy (2.6) e di Darcy-Forchheimer (2.9), non sono presenti le derivate né spaziali, né temporali, della velocità  $\bar{u}$ . Nell'equazione di Navier-Stokes (si veda appendice A) è proprio grazie alle derivate della velocità che si possono definire le condizioni al contorno di aderenza alla parete e impermeabilità.

Dato però che nella legge di Darcy si considera la velocità di filtrazione calcolata come una media volumetrica della velocità microscopica, non è detto che tale valore si annulli alla parete come si considera nell'equazione di Navier-Stokes.

Cosa succede se progressivamente aumenta il valore della porosità  $\varphi$ ?

Ci si aspetterebbe che queste leggi empiriche tendano all'equazione di Navier-Stokes; ma dato che la velocità  $\bar{u}$  in esame è diversa da quella definita in Navier-Stokes, pensare a questo limite non è proponibile.

E' stata formulata comunque una generalizzazione della legge di Darcy-Forchheimer valida per valori di  $\varphi$  prossimi a 1.

**Legge di Brinkmann:**

$$\frac{\mu}{k}\bar{u} - \mu'\nabla^2\bar{u} = -\bar{\nabla}p + \bar{f} \quad (2.10)$$

Dove  $\mu'$  è la viscosità effettiva misurata in  $[Pa\ s]$  nel SI e calcolata tramite la formula di Einstein (dalla teoria delle soluzioni diluite)  $\mu' = \mu[1+2.5(1-\varphi)]$ .

Se  $\varphi \rightarrow 1$  e  $k \rightarrow \infty$ , si è nel caso di moto libero e si ottiene un'equazione simile a quella di Navier-Stokes ma con termini inerziali trascurabili.

Nei casi pratici questa legge è di difficile utilizzo in quanto raramente la porosità  $\varphi$  supera i valori di  $0.5 \div 0.7$ .

### 2.1.4 Bilancio di Energia

L'equazione di bilancio dell'energia assume la forma [4]:

$$(\rho c)_f \left( \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T \right) = k' \nabla^2 T + q_g + \mu \Phi \quad (2.11)$$

Dove:

- $\sigma = \frac{(\rho c)_m}{(\rho c)_f}$  è il rapporto tra la capacità termica volumetrica media del mezzo poroso e del fluido. La capacità termica del mezzo poroso può essere calcolata tramite una media pesata sulla porosità:

$$(\rho c)_m = \varphi(\rho c)_f + (1 - \varphi)(\rho c)_s$$

- $k'$  è la conducibilità termica effettiva del mezzo poroso saturato dal fluido. Spesso viene calcolata con la formula:

$$k' = \varphi k_f + (1 - \varphi) k_s$$

- $q_g$  è calore generato o dal solido o dal fluido o da entrambi.
- $\mu \Phi$  è il termine di dissipazione viscosa.

Per un fluido libero, l'effetto di  $\mu \Phi$  è importante vicino alla parete, cioè nello strato limite. In un materiale poroso si intuisce che tale effetto non può essere trascurato.

La funzione  $\Phi$  cambia a seconda del tipo di legge della quantità di moto che viene considerata. Qualsiasi sia tale legge, il tutto è sorretto dal **criterio di Nield**:

$$\mu \Phi = \bar{F}_d \cdot \bar{u} \quad (2.12)$$

Dove  $\bar{F}_d$  è la forza di trascinamento ("Drag Force") che agisce sul fluido e ne genera il moto. ovvero è dato da:

$$\bar{F}_d = -\bar{\nabla} p + \bar{f} \quad (2.13)$$

La (2.12) è la potenza generata dalla forza  $\bar{F}_d$ .

A seconda del modello utilizzato, per descrivere la quantità di moto, si possono avere diverse definizioni della drag force. Ad esempio se vale la legge di Darcy si ottiene:

$$\mu \Phi = \frac{\mu}{k} \bar{u} \cdot \bar{u}$$



## 2.2 Problema di Horton-Rogers-Lapwood

Una estensione del problema di Rayleigh–Bénard descritto in appendice B, è il caso in cui un fluido satura un solido poroso, ovvero il problema di Horton-Rogers-Lapwood (HRL), o anche detto di Darcy-Benard. Tale problema riguarda la convezione naturale causata da un gradiente di temperatura.

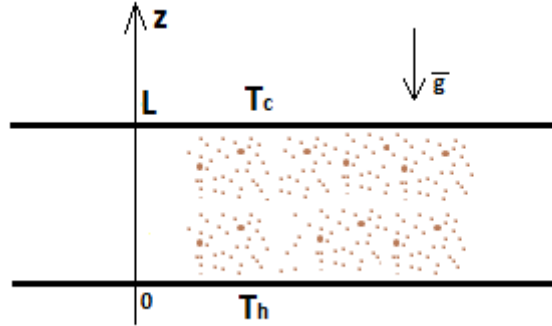


Figura 2.5: Schematizzazione del problema HLR

Come mostrato in figura 2.5, si considerano due pareti impermeabili mantenute a temperatura costante, con  $T_h > T_c$ .

Le equazioni per lo studio del comportamento del fluido sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\nu}{k} u_i = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \beta (T - T_0) \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\nu}{kc} u_j u_j \end{cases} \quad (2.14)$$

Le condizioni al contorno si scrivono come:

$$\begin{cases} z = 0 : & T = T_h, \quad w = u_z = 0 \\ z = L : & T = T_c, \quad w = u_z = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

La stessa soluzione base del problema di Rayleigh–Bénard, è una soluzione per tale problema; ovvero il fluido non è in moto e il calore viene trasportato per conduzione.

$$\begin{cases} u_{B_i} = 0 \\ T_B = T_h - \frac{T_h - T_c}{L} z \end{cases} \quad (2.16)$$

La domanda che ci si pone è: fino a che punto tale soluzione è stabile? Considerando una perturbazione dello stato base si identificano:

$$\begin{cases} u_i = u_{B_i} + \epsilon \tilde{u}_i \\ T = T_B + \epsilon \tilde{T} \\ p = p_B + \epsilon \tilde{p} \end{cases} \quad (2.17)$$

dove i termini  $(\tilde{\phantom{x}})$  sono gli scostamenti dalla soluzione base  $(\phantom{x})_B$  e  $\epsilon$  è un coefficienti variabile in modulo che moltiplica la parte oscillante (indica la volontà di voler affrontare un'analisi lineare).

Sostituendo le (2.17) nelle equazioni (2.14) e considerando le condizioni al contorno (2.15) si ottiene linearizzando:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\nu}{k} \tilde{u}_i = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - g_i \beta \tilde{T} \Rightarrow \text{scompare il contributo della soluzione base} \\ \sigma \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial T_B}{\partial x_j} = \alpha \nabla^2 \tilde{T} \Rightarrow \text{scompare il contributo della dissipazione viscosa} \\ z = 0, L : \quad \tilde{T} = 0, \quad \tilde{w} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Nella terza equazione del sistema (2.18), il secondo termine prima dell'uguale, è l'unico in cui compare la soluzione base della temperatura accoppiata a un termine di scostamento della velocità; questo è dovuto alla non linearità e in tale modo la soluzione dipende dalla soluzione base.

Ricordando che l'espressione di  $T_B$  è una funzione di  $z$  come descritto nella (2.16), si ha che il termine appena descritto diventa:

$$\tilde{u}_j \frac{\partial T_B}{\partial x_j} = \tilde{w} \frac{dT_B}{dz} = -\frac{T_h - T_c}{L} w \quad (2.19)$$

Volendo adimensionalizzare il problema, vengono definiti i parametri adimensionali:

$$\frac{x_i}{L} \rightarrow x_i \quad (2.20)$$

$$\frac{t}{\frac{\sigma}{\alpha}} \rightarrow t \quad (2.21)$$

$$\frac{\tilde{u}_i}{\frac{\nu}{k}} \rightarrow \tilde{u}_i \quad (2.22)$$

$$\frac{\tilde{T}}{T_h - T_c} \rightarrow \tilde{T} \quad (2.23)$$

$$\frac{\tilde{p}}{\rho_0 \frac{\nu \alpha}{k}} \rightarrow \tilde{p} \quad (2.24)$$

e le equazioni (2.18) diventano:

- $$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.25)$$

- considerando che  $g_i = -gk_i$

$$\frac{\nu \alpha}{k L} \tilde{u}_i = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0 \nu \alpha}{k L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - g_i \beta \tilde{T} (T_h - T_c) k_i \quad (2.26)$$

dividendo il tutto per  $\frac{\nu \alpha}{k L}$  si ottiene:

$$\tilde{u}_i = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + R \tilde{T} k_i \quad (2.27)$$

dove si è indicato con  $R$  il **numero di Darcy-Rayleigh** definito come:

$$R = \frac{g \beta (T_h - T_c) k L}{\nu \alpha} \quad (2.28)$$

Questa quantità è un qualcosa di simile al numero di Rayleigh definito nell'appendice B:

$$Ra = \frac{g \beta (T_h - T_c) L^3}{\nu \alpha} \quad (2.29)$$

Si ha che  $R < Ra$ .

- 

$$\sigma \frac{T_h - T_c}{L^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{T_h - T_c}{L^2} \alpha \tilde{w} = \alpha \frac{T_h - T_c}{L^2} \nabla^2 \tilde{T} \quad (2.30)$$

dividendo il tutto per  $\alpha \frac{T_h - T_c}{L^2}$  si ottiene:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \tilde{w} = \nabla^2 \tilde{T} \quad (2.31)$$

- Le condizioni al contorno quindi diventano:

$$z = 0, L : \quad \tilde{T} = 0, \quad \tilde{w} = 0 \quad (2.32)$$

Per togliere la dipendenza dalla pressione della (2.27), se ne fa il rotore e si vede che

$$\bar{\nabla} \times \tilde{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

cioè vi sono tre equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = R \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = -R \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Si deriva la prima rispetto ad  $y$ , la seconda rispetto ad  $x$  e si sottrae la seconda dalla prima:

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) = R \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \right)$$

Sommando e sottraendo al primo membro  $\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2}$ , si ottiene:

$$\nabla^2 \tilde{w} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \tilde{u})}_{=0} = R \nabla_z^2 \tilde{T}$$

$$\nabla^2 \tilde{w} = R \nabla_z^2 \tilde{T}$$

In definitiva, le equazioni che si studiano sono:

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{w} = R \nabla_z^2 \tilde{T} \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \tilde{w} = \nabla^2 \tilde{T} \\ z = 0, L : \quad \tilde{T} = 0, \quad \tilde{w} = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

La soluzione è una qualsiasi combinazione lineare di modi normali, i quali sono onde piane che si propagano lungo una direzione (non c'è nessuna direzione privilegiata).

Considerando un generico asse  $x$  si può scrivere:

$$\tilde{T} = h(z) e^{i(kx - \lambda t)} \quad (2.34)$$

$$\tilde{w} = f(z)e^{i(kx-\lambda t)} \quad (2.35)$$

dove  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda = \omega + i\eta$ ,  $\omega$  **frequenza angolare** e  $\eta$  **tasso di crescita della perturbazione**.

In questo modo, volendo studiare la stabilità, si ha che:

- $\eta > 0 \Rightarrow$  INSTABILE.
- $\eta = 0 \Rightarrow$  STABILITA' NEUTRALE o MARGINALE.
- $\eta < 0 \Rightarrow$  STABILE.

Sostituendo quindi le (2.34) e (2.35) nel sistema (2.33) e definendo le quantità

$$\nabla^2 = D^2 - K^2; \quad \nabla_2^2 = -K^2; \quad \frac{\partial}{\partial t} = -i\lambda$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} (D^2 - K^2)f + RK^2h = 0 \\ -i\lambda h - f = (D^2 - K^2)h \Rightarrow (i\lambda + D^2 - K^2)h + f = 0 \\ z = 0, 1 : f = 0, \quad h = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Volendo compattare le due equazioni del sistema appena scritto, si ricava  $f$  dalla seconda e si sostituisce nella prima:

$$\begin{cases} (D^2 - K^2)(i\lambda + D^2 - K^2)h - RK^2h = 0 \\ z = 0, 1 : h = 0, \quad D^2h = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Una soluzione per  $h$  è:

$$h(z) = \sin(n\pi z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.38)$$

Sostituendo tale risultato nella (2.37), si ricava la **relazione di dispersione** in campo complesso:

$$(-n^2\pi^2 - K^2)(i\lambda - n^2\pi^2 - K^2) - RK^2 = 0 \quad (2.39)$$

esplicitando i termini

$$(-n^2\pi^2 - K^2)(i\omega - \eta - n^2\pi^2 - K^2) - RK^2 = 0 \quad (2.40)$$

Considerando la parte immaginaria:

$$\omega(n^2\pi^2 + K^2) = 0 \quad (2.41)$$

la quale risulta vera se e solo se  $\omega = 0$  (**principio di sovrapposizione delle stabilità**).

Considerando invece la parte reale:

$$(-n^2\pi^2 - K^2)(-\eta - n^2\pi^2 - K^2) - RK^2 = 0 \quad (2.42)$$

ottenendo cioè:

$$R = \frac{(n^2\pi^2 + K^2)(\eta + n^2\pi^2 + K^2)}{K^2} \quad (2.43)$$

Allora si ha:

- Stabilità:  $\eta < 0 \Rightarrow R < \frac{(n^2\pi^2 + K^2)^2}{K^2}$
- Stabilità neutrale:  $\eta = 0 \Rightarrow R = \frac{(n^2\pi^2 + K^2)^2}{K^2}$
- Instabilità:  $\eta > 0 \Rightarrow R > \frac{(n^2\pi^2 + K^2)^2}{K^2}$

Graficando l'andamento di  $R$  si ottiene il grafico 2.6.

Come si può vedere è presente un punto di minimo del numero d'onda  $K$ ;  $K_{cr} = \pi$ ;  $R_{cr} = 4\pi^2$ .

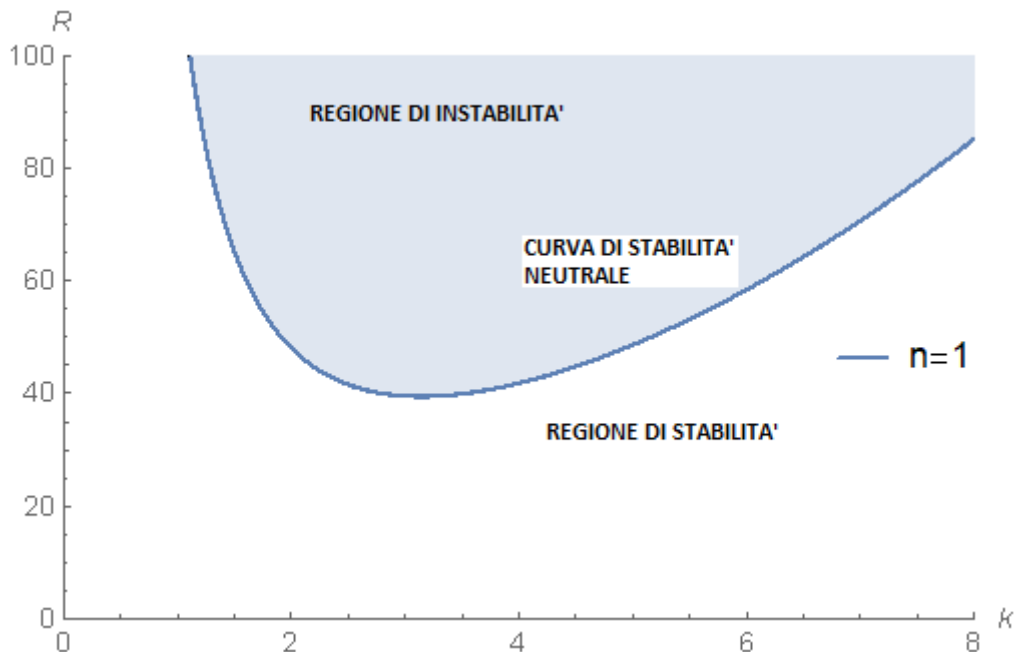


Figura 2.6: Curva di stabilità

## 2.3 Estensione del Problema HRL

Il problema HRL, descritto nella sezione precedente, si basa sul fatto che l'equazione di governo della quantità di moto è descritta dalla legge di Darcy. Si è visto che tale legge può essere sostituita dal modello di Darcy-Forchheimer quando l'effetto della drag force diventa non trascurabile, oppure dal modello di Brinkman quando la permeabilità del mezzo poroso è molto grande [4].

In Queste trattazioni si effettua una analisi lineare dell'instabilità, ovvero tale assunzione porta ad eliminare tutti i termini non lineari. Di conseguenza il modello di Darcy-Forchheimer si semplifica ritornando alla forma del modello di Darcy.

Considerando perciò il modello di Brinkman (2.10) qui' richiamato:

$$\frac{\mu}{k}\bar{u} - \mu'\nabla^2\bar{u} = -\bar{\nabla}p + \rho\beta g_i(T - T_c)$$

si procede con l'adimensionalizzazione imponendo:

- $\frac{(x, y, z)}{L} \rightarrow (x, y, z)$
- $t \frac{\tilde{\alpha}}{\sigma L^2} \rightarrow t$
- $\bar{u} \frac{L}{\tilde{\alpha}} \rightarrow \bar{u}$
- $\frac{T - T_c}{T_h - T_c} \rightarrow T$
- $P \frac{k}{\tilde{\alpha}\mu} \rightarrow P$

Allora sostituendo tali condizioni all'equazione di Brinkman si ottiene:

$$\frac{\mu}{k} \frac{\tilde{\alpha}}{L} \bar{u} - \mu' \frac{\tilde{\alpha}}{L^3} \nabla^2 \bar{u} = -\frac{\tilde{\alpha}\mu}{Lk} \bar{\nabla}p + \rho\beta g_i(T_h - T_c)T$$

Moltiplicando il tutto per  $\frac{kL}{\nu\tilde{\alpha}}$ :

$$\frac{\mu}{\nu} \bar{u} - \frac{\mu'k}{L^2\nu} \nabla^2 \bar{u} = \frac{\mu}{\nu} \bar{\nabla}p + \rho \frac{\beta g(T_h - T_c)Lk}{\nu\tilde{\alpha}} T k_i$$

e dividendo per  $\rho$ :

$$\bar{u} - \frac{\mu'k}{\mu L^2} \nabla^2 \bar{u} = \bar{\nabla}p + \frac{\beta g(T_h - T_c)Lk}{\nu\tilde{\alpha}} T k_i$$

Riconoscendo il numero di Darcy-Rayleigh  $R$  definito nella (2.28) e definendo il numero di Darcy modificato

$$Da_m = \frac{\mu'}{\mu} Da = \frac{\mu' k}{\mu L^2} \quad (2.44)$$

si ottiene l'equazione di Brinkman in forma adimensionale [4]:

$$\bar{u} - Da_m \nabla^2 \bar{u} = \bar{\nabla} p + RT k_i \quad (2.45)$$

Volendo eliminare la dipendenza dalla pressione, si esegue il rotore della (2.45) ottenendo:

$$\bar{\nabla} \times \bar{u} - Da_m \nabla^2 (\bar{\nabla} \times \bar{u}) = -R \frac{\partial T_x}{\partial y} + R \frac{\partial T_y}{\partial x} \quad (2.46)$$

A.Barletta, nel libro *Heat Transfer in Multi Phase Materials* [4], usa la funzione di corrente  $\Psi$  definita come quella funzione tale per cui

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.47)$$

dove  $u$  e  $v$  sono la componente  $x$  e  $y$  del vettore  $\bar{u}$ . il termine  $\bar{\nabla} \times \bar{u}$  della (2.46) ha solo la componente lungo l'asse  $z$  diversa da zero, quindi si può dire che:

$$(\bar{\nabla} \times \bar{u})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\nabla^2 \Psi \quad (2.48)$$

Facendo sull'equazione dell'energia le stesse considerazioni fatte nel problema HRL del capitolo precedente e aggiungendo la funzione di corrente  $\Psi$ , si ottiene il sistema [4]:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi - Da_m \nabla^2 (\nabla^2 \Psi) = -R \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nabla^2 T \\ z = 0, 1; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0; \quad T = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Considerando le funzione  $\Psi$  e  $T$  come una forma d'onda [4]:

$$\Psi = f(z) e^{\lambda t} \sin(ax) \quad (2.50)$$

$$T = h(z) e^{\lambda t} \cos(ax) \quad (2.51)$$

e sostituendole nel sistema (2.49), si ottiene:



$$\begin{cases} Da_m f''''(z) - (2Da_m a^2 + 1)f''(z) + a^2(Da_m a^2 + 1)f(z) + aRh(z) = 0 \\ h''(z) - (a^2 + \lambda)h(z) - af(z) = 0 \\ z = 0, 1; \quad f = f' = 0; \quad h = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Come si nota, la prima equazione del sistema (2.52), è del quarto ordine, ovvero l'unico approccio possibile è quello numerico.

L'equazione di Brinkman fa da ponte tra l'equazione di Darcy e l'equazione di Navier-Stokes. Cioè quando  $Da_m \rightarrow 0$  si ha il risultato ottenuto con Darcy, mentre quando  $Da_m \rightarrow \infty$  si ha il fluido libero.

Viene verificato che:

$$\lim_{Da_m \rightarrow \infty} \frac{R}{Da_m} = Ra \quad (2.53)$$

I risultati numerici sono di seguito riportati.

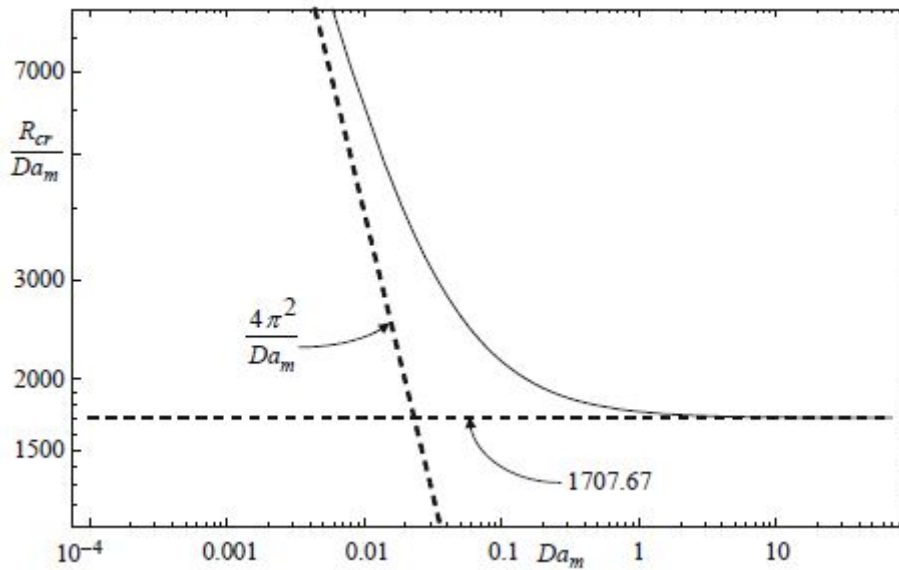


Figura 2.7: Valore critico di  $R/Da_m$  rispetto a  $Da_m$  per il modello di Brinkman nel modello HRL (linea continua). Casi asintotici della legge di Darcy ( $R_{cr} = 4\pi^2$ ) e Navier-Stokes ( $R_{cr}/Da_m = 1707.67$ ) [4].

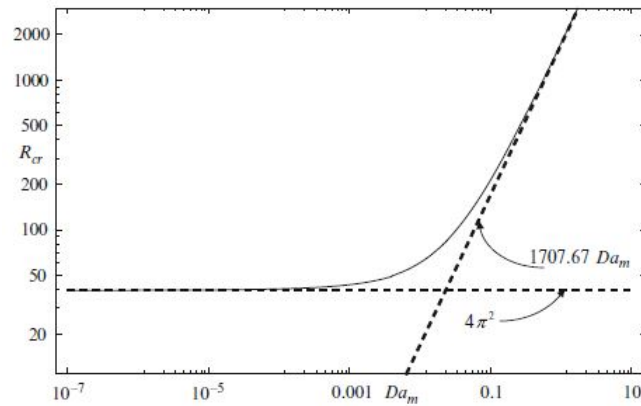


Figura 2.8: Valore critico di  $R$  rispetto a  $Da_m$  per il modello di Brinkman nel modello HRL (linea continua). Casi asintotici della legge di Darcy ( $R_{cr} = 4\pi^2$ ) e Navier-Stokes( $R_{cr}/Da_m = 1707.67$ ) [4].

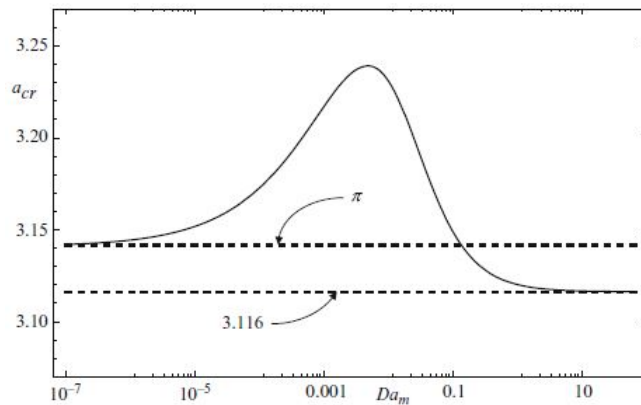


Figura 2.9: Valore critico di  $a$  rispetto a  $Da_m$  per il modello di Brinkman nel modello HRL (linea continua). Casi asintotici della legge di Darcy ( $a_{cr} = \pi$ ) e Navier-Stokes( $a_{cr}/Da_m = 3.116$ ) [4].

## 2.4 Problema di Prats

Una variante del problema HRL nasce quando invece di assumere un flusso di base a riposo, si assume in moto.

Prats si pose il quesito di come il flusso base possa influenzare le condizioni di criticità.

Nel libro *Heat Transfer in Multi Phase Materials* [4], A. Barletta presenta una trattazione di tale problema. Si riportano di seguito i passaggi principali.

Si considera la medesima configurazione del problema HRL trascurando, anche qui, l'effetto della dissipazione viscosa nel bilancio energetico. Le equazioni di partenza quindi sono date dal sistema (2.14) qui riportato assieme alle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \\ \frac{\mu}{k} \bar{u} = -\bar{\nabla} P + \rho g \beta (T - T_0) \hat{k} \\ \rho c \left( \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T \right) = k' \nabla^2 T \\ z = 0 : \quad v = 0, \quad T = T_h \\ z = L : \quad v = 0, \quad T = T_c \end{cases} \quad (2.54)$$

Adimensionalizzando tali equazioni secondo i parametri della sezione precedente si ottiene:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \\ \bar{u} = -\bar{\nabla} P + R T \hat{k} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T = \nabla^2 T \\ z = 0 : \quad v = 0, \quad T = 1 \\ z = L : \quad v = 0, \quad T = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Assunto il flusso base lungo l'asse  $x$ , si scrive:

$$\begin{cases} \bar{u}_B = Pe \hat{i} \\ T_B = 1 - z \\ P_B = -Pe x + R z \left( 1 - \frac{z}{2} \right) \end{cases} \quad (2.56)$$

dove  $Pe$  è il numero di Péclet definito come il rapporto tra la velocità lungo l'asse del moto e il parametro  $\tilde{\alpha}/L$ ;  $\hat{i}$  è il versore dell'asse  $x$ .

Passando dal sistema di riferimento fisso al sistema di riferimento mobile con il fluido si scrivono le trasformazioni:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \bar{x} - Pe t \hat{i} \\ \tilde{u} = \bar{u} - Pe \hat{i} \\ \tilde{t} = t \\ \tilde{P} = P + Pe x \\ \tilde{T} = T \end{cases} \quad (2.57)$$

Con tali trasformazioni le equazioni (2.55) risultano invarianti, mentre la soluzione base si trasforma nella stessa soluzione base del problema HRL:

$$\begin{cases} \bar{u}_B = 0 \\ T_B = 1 - z \\ P_B = R z \left(1 - \frac{z}{2}\right) \end{cases} \quad (2.58)$$

Ciò significa che l'analisi lineare da' gli stessi risultati del problema HRL. Ovvero non vi sono modifiche alla soluzione.

La novità si ha quando si considera il flusso verticale. Le equazioni sono sempre le (2.55) con diverse condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \\ \bar{u} = -\bar{\nabla} P + R T \hat{k} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T = \nabla^2 T \\ z = 0 : \quad v = Pe, \quad T = 1 \\ z = L : \quad v = Pe, \quad T = 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

La soluzione stazionaria di base è più complicata:

$$\begin{cases} \bar{u}_B = Pe \hat{k} \\ T_B = \frac{e^{Pe} - e^{Pe z}}{e^{Pe} - 1} \\ P_B = \left( \frac{Re^{Pe}}{e^{Pe} - 1} - Pe \right) z - \frac{Re^{Pe z}}{Pe(e^{Pe} - 1)} \end{cases} \quad (2.60)$$

Le equazioni perturbate e linearizzate danno come risultato il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f''(z) - a^2 f(z) - a R h(z) = 0 \\ h''(z) - Pe h'(z) - a^2 h(z) - a Pe F(z) f(z) = 0 \\ F(z) = \frac{e^{Pe z}}{e^{Pe} - 1} \\ y = 0, 1 : \quad f = 0, \quad h = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

Risolvendo il sistema per via numerica si ottengono le condizioni di instabilità.

$Pe$	$a_{cr}$	$R_{cr}$
0	$\pi$	$4\pi^2$
$10^{-3}$	3.14159	39.4784
$10^{-1}$	3.14196	39.4924
1	3.17868	40.8751
2	3.29218	45.0776
5	4.19616	73.4146
8	6.09212	114.833
10	7.59035	143.518
15	11.3830	215.283

Figura 2.10: Condizioni critiche per inizio instabilità convettiva [4].

Come mostrato in tabella di figura 2.10 il numero d'onda critico  $a_{cr}$  e il valore critico del parametro di Darcy-Rayleigh  $R_{cr}$ , dipendono dal modulo del numero di Péclet  $Pe$ . Ciò significa che la direzione del flusso verticale, verso l'alto o verso il basso, non influenza l'insorgenza dell'instabilità convettiva. Si nota che quando  $Pe \rightarrow 0$  si ottiene il risultato del problema HRL.

## 2.5 Effetto della Dissipazione Viscosa

Per l'instabilità convettiva la dissipazione viscosa può non essere trascurabile, in quanto tale contributo fa variare le condizioni energetiche del fluido. Esistono diverse formulazioni del bilancio energetico che tengono conto dell'effetto della dissipazione viscosa e nell'articolo scritto da A. Barletta, *Local energy balance, specific heats and the Oberbeck-Boussinesq approximation* [3], viene dimostrato qual'è la forma migliore di tale equazione nell'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq sia per fluidi liberi che per fluidi che saturano un mezzo poroso.

L'equazione di conservazione della massa e della quantità di moto (Navier-Stokes) riferite all'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq devono essere chiuse, quindi, dall'equazione dell'energia:

$$\rho_0 c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T \right) = k \nabla^2 T + q_g + 2\mu D_{ij} D_{ij} \quad (2.62)$$

dove  $c$  è la capacità termica per unità di massa definita come:

$$c = c_p - \frac{p\beta}{\rho_0} \quad (2.63)$$

in cui  $c_p$  è la capacità termica a pressione costante.

La (2.62) è valida per un fluido libero. Per un fluido che satura un materiale poroso si è visto che vale la (2.11) qui' riportata:

$$(\rho_0 c)_f \left( \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T \right) = k' \nabla^2 T + q_g + \mu \Phi$$

## Parte II

# Instabilità Convettiva di un Fluido non-Newtoniano





## Capitolo 3

# Instabilità in un Fluido con Legge di Potenza

Come visto nel primo capitolo, i fluidi non Newtoniani si differenziano dai Newtoniani per il diverso comportamento sotto forze di taglio. Non seguendo una curva reologica lineare sono necessarie correlazioni empiriche per determinare il valore della viscosità dinamica nei diversi range di moto. Dal punto di vista della previsione di un certo comportamento la questione si complica e l'unico approccio possibile è quello numerico.

Tra i diversi articoli scientifici esaminati, i più importanti al fine del lavoro di tesi sono:

1. [2] *Linear instability of the horizontal throughflow in a plane porous layer saturated by a power-law fluid.*  
Autori: A.Barletta, D. A. Nield.
2. [1] *Convective instability of the Darcy–Bénard problem with through flow in a porous layer saturated by a power-law fluid.*  
Autori: L.S. de B. Alves, A. Barletta.
3. [5] *Thermal Instability of a Power-Law Fluid Flowing in a Horizontal Porous Layer with an Open Boundary: A Two-Dimensional Analysis.*  
Autori: M. Celli, A. Barletta, S. Longo, L. Chiapponi, V. Ciriello, V. Di Federico, A. Valiani.

Il primo articolo riguarda un'estensione del problema di Prats per i fluidi con legge di potenza che saturano uno strato poroso contenuto tra due piani isotermi e impermeabili, in cui il piano inferiore ha una temperatura maggiore di quello superiore.

Il secondo articolo analizza lo stesso problema, ma con condizioni al contorno che richiamano oltre alla temperatura costante anche un apporto di calore costante.

Il terzo articolo riguarda lo stesso problema, ma considerando i piani isobari.

Da questi articoli si evince uno schema risolutivo:

1. DEFINIZIONE DELLE EQUAZIONI DI GOVERNO DIMENSIONALI.  
Il punto di partenza riguarda la definizione delle equazioni di continuità, bilancio della quantità di moto e bilancio energetico in forma dimensionale.
2. DEFINIZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO.
3. DEFINIZIONE DEI PARAMETRI ADIMENSIONALI.
4. ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DI PARTENZA E DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO.
5. DEFINIZIONE DELLO STATO BASE.  
In questa fase viene determinata la condizione iniziale, ovvero si determina lo stato di moto del fluido e la sua distribuzione di temperatura.
6. ANALISI PERTURBATIVA.
  - (a) Perturbazione dello stato base.
  - (b) Linearizzazione delle equazioni perturbate.
7. RISOLUZIONE DEL SISTEMA CON I MODI NORMALI.
8. RISULTATI.

Nell'articolo [1] viene studiato come caso particolare il problema di un fluido a potenza che satura uno strato poroso le cui condizioni al contorno sono quelle di impermeabilità e flusso termico costante nel piano inferiore e impermeabilità e temperatura costante nel piano superiore.

Nell'articolo [5], invece, viene studiato lo stesso problema ma con le condizioni al contorno di impermeabilità e temperatura  $T = T_0 + \Delta T$  nel piano inferiore, mentre nel piano superiore si ha le condizioni di isobaricità e isotermità alla temperatura di  $T = T_0$ .

La condizione innovativa, rispetto alla letteratura di questo lavoro di tesi, consiste nello studiare un fluido con legge di potenza che satura uno strato poroso il cui piano inferiore viene mantenuto impermeabile ed attraversato da un flusso di calore costante, mentre il piano superiore è considerato isobaro e isotermito.

### 3.1 Definizione del Problema

Si consideri un fluido non Newtoniano che satura un solido poroso in uno strato piano di spessore  $H$ . La parete inferiore viene considerata **impermeabile** ed attraversata da un flusso di calore costante (**isoflusso**). La parete superiore, invece, viene considerata **isobara** e **isoterma**. In figura 3.1 viene illustrato il problema.

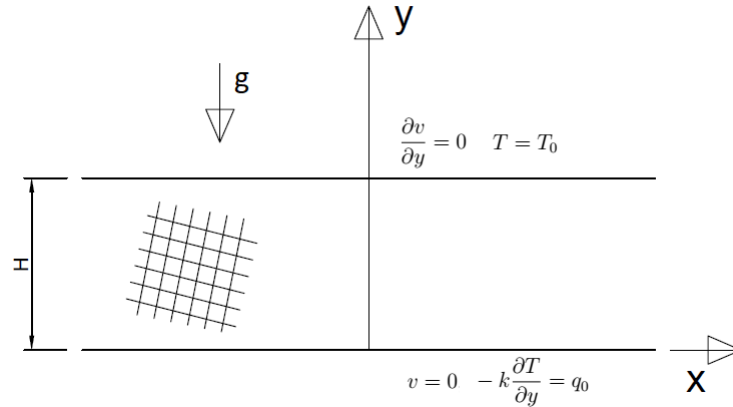


Figura 3.1: Problema oggetto della tesi

Le equazioni che governano il sistema sono il bilancio della massa, ovvero l'equazione di continuità, il bilancio della quantità di moto e il bilancio dell'energia. Sotto le ipotesi di Oberbeck Boussinesq, quindi, si ha:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\eta}{K} |\bar{\mathbf{u}}|^{n-1} \bar{\mathbf{u}} = -\bar{\nabla} \bar{p} - \rho_0 \bar{\mathbf{g}} \beta (\bar{T} - \bar{T}_0) \quad (3.2)$$

$$\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} = \chi \bar{\nabla}^2 \bar{T} \quad (3.3)$$

Dove  $\eta$  è il fattore di consistenza misurato in  $[Pa \cdot s^n]$  definito nella relazione  $\tau = \eta(\dot{\gamma})^n$ ,  $K$  è la permeabilità generalizzata del mezzo poroso misurata in  $[m^{n+1}]$ ,  $n$  è l'indice di potenza,  $\mathbf{u}$  è la velocità di filtrazione o velocità di Darcy,  $\sigma$  è il rapporto tra la capacità termica del mezzo poroso saturato dal fluido e la capacità termica del fluido,  $\chi$  è il coefficiente di diffusività termica effettivo del mezzo poroso misurato in  $[m^2 \cdot s^{-1}]$ .

Le condizioni al contorno invece sono:

$$\begin{aligned}
 \bar{y} = 0 : \quad \bar{v} = 0, \quad -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = q_0 \\
 \bar{y} = H : \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \bar{T} = T_0
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Il sistema di equazioni (3.1)-(3.4) è il problema dimensionale. Volendo quindi adimensionalizzarlo, si definiscono i parametri adimensionalizzanti:

$$\begin{aligned}
 (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &\Rightarrow H(x, y, z) \\
 \bar{t} &\Rightarrow \frac{\sigma H^2}{\chi} t \\
 \bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &\Rightarrow \frac{\chi}{H}(u, v, w) = \frac{\chi}{H} \mathbf{u} \\
 \bar{T} &\Rightarrow T_0 + T \Delta T \\
 \bar{\nabla} &\Rightarrow \frac{1}{H} \nabla
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

In cui i  $(\bar{\quad})$  sono le quantità dimensionali.

Andando quindi a sostituire le (3.5) nelle (3.1)-(3.4), si ottiene:

•

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} &= 0 \\
 \frac{1}{H} \frac{\chi}{H} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\
 \frac{\chi}{H^2} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0
 \end{aligned}$$

•

$$\frac{\eta}{K} |\bar{\mathbf{u}}|^{n-1} \bar{\mathbf{u}} = -\bar{\nabla} \bar{p} - \rho_0 \bar{g} \beta (\bar{T} - \bar{T}_0)$$

Come visto ed analizzato negli articoli, conviene scrivere questa equazione in forma rotazionale in modo da eliminare il contributo della pressione, in quanto il rotore di un gradiente di un campo scalare si annulla:

$$\bar{\nabla} \times \left( \frac{\eta}{K} |\bar{\mathbf{u}}|^{n-1} \bar{\mathbf{u}} \right) = \rho_0 g \beta \bar{\nabla} \times (\bar{T} \hat{e}_y)$$

dove  $\hat{e}_y$  è il versore dell'asse  $y$ .

Procedendo con l'adimensionalizzazione quindi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\eta}{K} \frac{1}{H} \frac{\chi^{n-1}}{H^{n-1}} \frac{\chi}{H} \nabla \times (|\mathbf{u}|^{n-1} \mathbf{u}) &= \rho_0 g \beta \frac{1}{H} \Delta T \nabla \times (T \hat{e}_y) \\
 \frac{\eta}{K} \frac{\chi^n}{H^n} \nabla \times (|\mathbf{u}|^{n-1} \mathbf{u}) &= \rho_0 g \beta \Delta T \nabla \times (T \hat{e}_y)
 \end{aligned}$$

$$\nabla \times (|\mathbf{u}|^{n-1}\mathbf{u}) = \frac{\rho_0 g \beta \Delta T K H^n}{\eta \chi^n} \nabla \times (T \hat{\mathbf{e}}_y)$$

$$\nabla \times (|\mathbf{u}|^{n-1}\mathbf{u}) = R \nabla \times (T \hat{\mathbf{e}}_y)$$

Dove  $R$  è il numero di Darcy-Rayleigh modificato.

•

$$\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} = \chi \bar{\nabla}^2 \bar{T}$$

$$\sigma \frac{\chi}{H^2} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\chi}{H} \frac{1}{H} \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi \frac{1}{H^2} \nabla^2 T$$

$$\frac{\chi}{H^2} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\chi}{H^2} \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{\chi}{H^2} \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T$$

•

$$\bar{y} = 0 : \quad \bar{v} = 0, \quad -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = q_0$$

$$y = 0 : \quad v = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -\frac{q_0}{k}$$

$$\frac{\Delta T}{H} \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q_0}{k}$$

Considerando la legge di Fourier (come suggerito da L.S. de B. Alves e A. Barletta in [1] ), si può pensare di definire:

$$\Delta T = \frac{q_0 H}{k} \Rightarrow \frac{q_0}{k} = \frac{\Delta T}{H}$$

quindi:

$$\frac{\Delta T}{H} \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q_0}{k} = -\frac{\Delta T}{H}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -1$$

•

$$\bar{y} = H : \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \bar{T} = T_0$$

$$y = 1 : \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad T = 0$$

Dunque le equazioni adimensionali sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \times (|\mathbf{u}|^{n-1}\mathbf{u}) = R \nabla \times (T\hat{\mathbf{e}}_y) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (3.8)$$

e le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -1 \\ y = 1 : \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad T = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

## 3.2 Stato Base

Allo stato base si considera il fluido con componente di moto lungo l'asse  $x$ , pari al numero di Péclet, ( $\mathbf{u}_b = (u_b, v_b, w_b) = (P, 0, 0)$ ) e il problema stazionario.

Ciò significa che la temperatura si configura secondo il problema:

$$P \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

$$y = 0 : \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -1 \quad (3.11)$$

$$y = 1 : \quad T = 0$$

Considerando che la temperatura non varia lungo  $x$  e  $z$ , la (3.10) diventa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.12)$$

La soluzione risulta quindi essere:

$$T_b(y) = 1 - y \quad (3.13)$$

### 3.3 Analisi di Stabilità Lineare

Volendo affrontare un'analisi perturbativa di tipo lineare, si definiscono le perturbazioni di velocità e temperatura attorno ai valori dello stato base:

$$u = u_b + \varepsilon U = P + \varepsilon U \quad (3.14)$$

$$v = v_b + \varepsilon V = \varepsilon V \quad (3.15)$$

$$w = w_b + \varepsilon W = \varepsilon W \quad (3.16)$$

$$T = T_b + \varepsilon \Theta = 1 - y + \varepsilon \Theta \quad (3.17)$$

Sostituendo queste definizioni all'interno delle equazioni (3.6)-(3.9) si ottiene:

•

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(P + \varepsilon U) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon W) &= 0 \\ \varepsilon \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

•

$$\nabla \times (|\mathbf{u}|^{n-1} \mathbf{u}) = R \nabla \times (T \hat{\mathbf{e}}_y)$$

Scomponendo l'equazione lungo le componenti  $x, y, z$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( (u^2 + v^2 + w^2)^{(n-1)/2} w \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( (u^2 + v^2 + w^2)^{(n-1)/2} v \right) &= -\frac{\partial}{\partial z} (T \hat{\mathbf{e}}_y) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( (u^2 + v^2 + w^2)^{(n-1)/2} u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (u^2 + v^2 + w^2)^{(n-1)/2} w \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( (u^2 + v^2 + w^2)^{(n-1)/2} v \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( (u^2 + v^2 + w^2)^{(n-1)/2} u \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (T \hat{\mathbf{e}}_y) \end{aligned}$$

Sostituendo quindi le (3.14)-(3.17), tutti i termini a sinistra dell'uguale diventano qualcosa di molto complicato; quindi, dato che il fine è ricavare equazioni perturbate lineari, con l'aiuto di un software come Mathematica, si può pensare di espandere in serie di potenze tutti i termini di sinistra troncando l'espansione ai termini del primo ordine in  $\varepsilon$ , ottenendo:

$$\varepsilon P^{n-1} \left( -\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = -\varepsilon R \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

$$\varepsilon P^{n-1} \left( n \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0$$

$$\varepsilon P^{n-1} \left( -n \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \varepsilon R \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

Ovvero, si posso riscrivere come:

$$-\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{R}{P^{n-1}} \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

$$n \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$-n \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{R}{P^{n-1}} \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

•

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - y + \varepsilon \Theta) + (\mathbf{u}_b + \varepsilon \mathbf{U}) \cdot \nabla(1 - y + \varepsilon \Theta) = \nabla^2(1 - y + \varepsilon \Theta)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \varepsilon P \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \varepsilon^2 U \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \varepsilon V + \varepsilon^2 V \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \varepsilon^2 W \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \varepsilon \nabla^2 \Theta$$

Eliminando quindi i termini non lineari in  $\varepsilon$  si ha:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + P \frac{\partial \Theta}{\partial x} - V = \nabla^2 \Theta$$

• Le condizioni al contorno diventano:

$$y = 0 : \quad V = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0$$

$$y = 1 : \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \Theta = 0$$

Il problema, quindi, è diventato il seguente:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{3.18}$$



$$-\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{R}{P^{n-1}} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (3.19a)$$

$$n \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (3.19b)$$

$$-n \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{R}{P^{n-1}} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad (3.19c)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + P \frac{\partial \Theta}{\partial x} - V = \nabla^2 \Theta \quad (3.20)$$

Con le condizioni al contorno date da:

$$y = 0 : \quad V = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \quad (3.21)$$

$$y = 1 : \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \Theta = 0$$

Differenziando ora la (3.18) rispetto  $y$ , la (3.19a) rispetto a  $z$  e la (3.19c) rispetto a  $x$  si ottiene:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = 0 \quad (3.22)$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} = -\frac{R}{P^{n-1}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \quad (3.23)$$

$$-n \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{R}{P^{n-1}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \quad (3.24)$$

Moltiplicando ora la (3.22) per  $n$  e la (3.23) per  $-n$  e sommando con la (3.24), si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{R}{P^{n-1}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \quad (3.25)$$

Si può quindi pensare di usare l'equazione (3.20) con la (3.25) per determinare  $\Theta$  e  $V$  e la (3.18) con la (3.19) per trovare  $U$  e  $W$ .

La (3.20) con la (3.25) assieme alle condizioni al contorno (3.21) formano un problema nelle incognite  $(V, \Theta)$ . Si può risolvere tale problema assumendo che le perturbazioni abbiano la forma di onde piane,

$$\begin{aligned} V(x, y, z, t) &= f(y) \exp[i(\alpha_x x + \alpha_z z - \omega t)] \\ \Theta(x, y, z, t) &= h(y) \exp[i(\alpha_x x + \alpha_z z - \omega t)] \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_z)$  è il vettore d'onda,  $\alpha = (\alpha_x^2 + \alpha_z^2)^{1/2}$  è il numero d'onda a cui corrisponde la lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi/\alpha$  e  $\omega$  è la frequenza angolare.

Si è interessati a studiare la transizione all'instabilità convettiva, così si adotta una analisi di stabilità temporale in cui le parti immaginarie di  $\alpha_x$  e  $\alpha_z$  sono nulle (ovvero sono numeri reali), ma  $\omega$  è considerato complesso ( $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ); in tal modo la parte immaginaria fornisce termini del tipo  $e^{\omega_i t}$ . In questa maniera la parte immaginaria di  $\omega$  descrive:

- $\text{Im}(\omega) > 0$ : crescita del disturbo nel tempo.
- $\text{Im}(\omega) < 0$ : diminuzione del disturbo nel tempo.
- $\text{Im}(\omega) = 0$ : condizione di stabilità neutrale.

Quindi, le curve di stabilità neutrale nel piano  $(\alpha, R)$  sono definite dalla condizione  $\text{Im}(\omega) = 0$ . Il valore di minimo di  $R$  sulla curva di stabilità neutrale definisce i valori critici  $(\alpha_{cr}, R_{cr})$  per l'inizio dell'instabilità convettiva.

Dato che il moto del fluido è ipotizzato lungo l'asse  $x$ , i modi normali il cui vettore d'onda ha  $\alpha_z = 0$  sono nominati modi trasversi, mentre i modi normali per cui  $\alpha_x = 0$  sono detti modi longitudinali. Tutti gli altri modi sono detti obliqui.

Considerando quindi le definizioni 3.26, l'equazione (3.20) diventa:

$$\begin{aligned}
 -\alpha_x^2 f + n f'' - n \alpha_z^2 f &= -\frac{R}{P^{n-1}} (-\alpha_x^2 h - n \alpha_z^2 h) \\
 n f'' - f (\alpha_x^2 + n \alpha_z^2) + \frac{R}{P^{n-1}} h (\alpha_x^2 + n \alpha_z^2) &= 0 \\
 n f'' - (\alpha^2 + (n-1)\alpha_z^2) \left( f - \frac{R}{P^{n-1}} h \right) &= 0 \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Mentre l'equazione (3.25) diventa:

$$\begin{aligned}
 -i\omega h + iP\alpha_x h - f &= -\alpha_x^2 h + h'' - \alpha_z^2 h \\
 h'' - h \left( \alpha_x^2 + \alpha_z^2 - i \underbrace{(\omega - P\alpha_x)}_{=\eta} \right) + f &= 0 \\
 h'' - h (\alpha^2 - i\eta) + f &= 0 \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

E le condizioni al contorno (3.21) saranno:

$$\begin{aligned}
 y = 0 : \quad f = 0, \quad h' = 0 \\
 y = 1 : \quad f' = 0, \quad h = 0
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Ecco quindi che il problema è diventato:

$$\begin{cases} n f'' - (\alpha^2 + (n-1)\alpha_z^2) \left( f - \frac{R}{P^{n-1}} h \right) = 0 \\ h'' - h(\alpha^2 - i\eta) + f = 0 \\ y = 0 : f = 0, \quad h' = 0 \\ y = 1 : f' = 0, \quad h = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Dove  $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_z^2$  è il numero d'onda,  $\eta = \omega_r - \alpha_x P$  è la frequenza riscalata. La velocità di fase dei modi normali è  $\eta/\alpha_x = \omega/\alpha_x - P$ .

Volendo ora ridurre il numero di parametri, si può definire il numero riscalato di Darcy-Rayleigh come:

$$\tilde{R} = \frac{R}{P^{n-1}} \quad (3.31)$$

Indicando con  $\phi$  l'angolo di inclinazione del vettore d'onda  $\boldsymbol{\alpha}$  rispetto all'asse  $x$  nel piano  $(x, z)$ , cioè  $\alpha_z = \alpha \sin \phi$ , con una trasformazione si può pensare di mappare ogni modo longitudinale e obliquo nella sua componente trasversa ( $\alpha_z = 0$  o  $\phi = 0$ ) con  $P = 1$ .

Si definisce, quindi, un indice di potenza riscalato:

$$\tilde{n} = \frac{n}{1 + (n-1) \sin^2 \phi} \quad (3.32)$$

Considerando le equazioni (3.31) e (3.32), il problema (3.30) si scrive come:

$$\begin{cases} f'' - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} \left( f - \tilde{R} h \right) = 0 \\ h'' - h(\alpha^2 - i\eta) + f = 0 \\ y = 0 : f = 0, \quad h' = 0 \\ y = 1 : f' = 0, \quad h = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

A causa delle trasformazioni (3.31) e (3.32) i modi longitudinali ( $\alpha_z = \alpha$  o  $\phi = \pi/2$ ) governati dai parametri  $R, P, n$  corrispondono a celle convettive trasversali in un fluido Newtoniano equivalente,  $\tilde{n} = 1$  e numero di Darcy-Rayleigh  $\tilde{R}$ .

Andando ora ad applicare un metodo variazionale, moltiplicando la prima equazione della (3.33) per il coniugato di  $f$  e integrando per parti tra  $[0, 1]$  si ha:

$$- \int_0^1 |f'|^2 dy - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} \int_0^1 |f|^2 dy + \frac{\alpha^2 \tilde{R}}{\tilde{n}} \int_0^1 \bar{f} h dy = 0 \quad (3.34)$$

mentre moltiplicando la seconda equazione della (3.33) per il coniugato di  $h$  e integrando per parti tra  $[0, 1]$  si ha:

$$-\int_0^1 |h'|^2 dy - (\alpha^2 - i\eta) \int_0^1 |h|^2 dy + \frac{\alpha^2 \tilde{R}}{\tilde{n}} \int_0^1 \bar{h} f dy = 0 \quad (3.35)$$

Considerando l'equazione (3.30) nella (3.31) si ottiene:

$$-\int_0^1 |h'|^2 dy - (\alpha^2 - i\eta) \int_0^1 |h|^2 dy + \frac{\tilde{n}}{\alpha^2 \tilde{R}} \int_0^1 |f'|^2 dy + \frac{1}{\tilde{R}} \int_0^1 |f|^2 dy = 0 \quad (3.36)$$

La (3.36) è costituita da una parte reale ed una immaginaria, le quali dovranno essere nulle per soddisfare la relazione. Ciò che si ottiene da tale considerazione è:

$$\eta \int_0^1 |h|^2 dy = 0 \quad (3.37)$$

Cioè la (3.37) deve avere  $\eta = 0$  per essere soddisfatta. Da ciò se ne conclude che i modi viaggiano con velocità

$$\omega = \alpha_x P \quad (3.38)$$

Ovvero le celle convettive si muovono in direzione del flusso di base con la stessa velocità di quest'ultimo.

E quindi, in conclusione, il problema (3.33) diventa:

$$\begin{cases} f'' - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} (f - \tilde{R}h) = 0 \\ h'' - \alpha^2 h + f = 0 \\ y = 0 : f = 0, \quad h' = 0 \\ y = 1 : f' = 0, \quad h = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

La risoluzione del problema (3.39) viene fatta accoppiando il metodo Runge-Kutta con lo Shooting Method. Più avanti viene riportato il metodo per la risoluzione numerica in Mathematica.

Nelle figure 3.2 e 3.3 vengono riportati i risultati numerici di  $\tilde{R}(\alpha)$  sia per  $\tilde{n} > 1$  che per  $\tilde{n} < 1$ .

Il calcolo richiede un carico computazionale considerevole che aumenta con il diminuire dell'indice di potenza  $\tilde{n}$ .

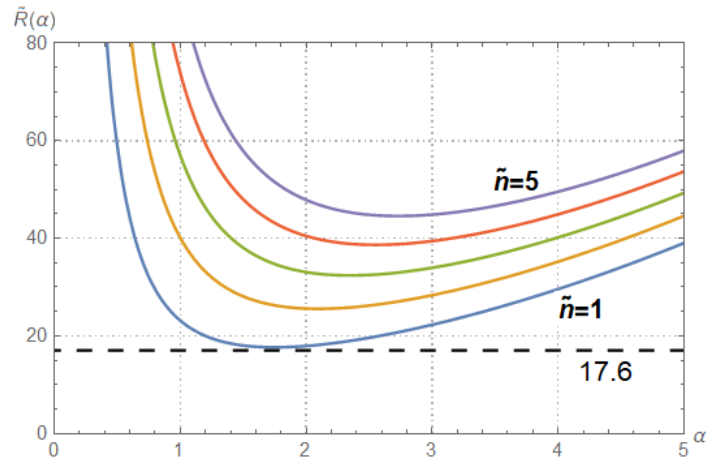


Figura 3.2: Curve di instabilità  $\tilde{R}(\alpha)$  per  $\tilde{n} \geq 1$

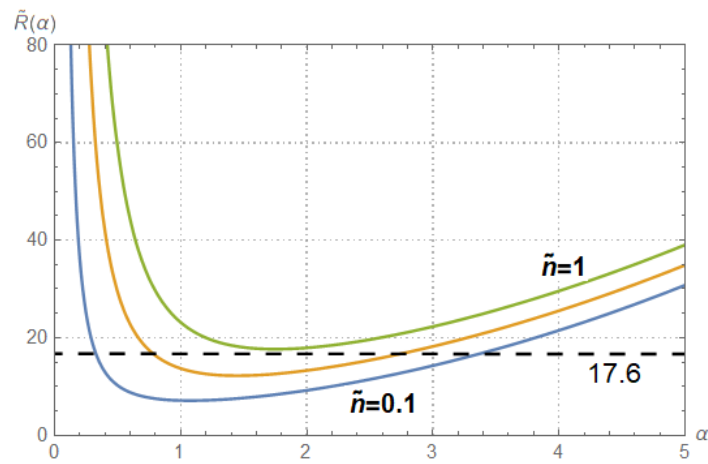


Figura 3.3: Curve di instabilità  $\tilde{R}(\alpha)$  per  $\tilde{n} \leq 1$

Ora, resta da individuare i punti critici, ovvero i valori minimi dei grafici  $\tilde{R}(\alpha)$  appena trovati.

Per fare questa operazione iterativamente si devono definire due nuove funzioni  $F$  e  $H$  dipendenti da  $\alpha$ , considerarle nel sistema (3.39) al posto di  $f$  ed  $h$  e farne la derivata rispetto ad  $\alpha$ , ottenendo un nuovo problema ai valori al contorno di quattro incognite ( $f, h, F, H$ ) con valori al contorno definiti dalle derivate dei valori al contorno del sistema (3.39), ottenendo:

$$\begin{cases} f'' - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} (f - \tilde{R}h) = 0 \\ h'' - \alpha^2 h + f = 0 \\ F'' - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} F - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} \tilde{R}H - 2\frac{\alpha}{\tilde{n}} f - 2\frac{\alpha}{\tilde{n}} \tilde{R}h = 0 \\ H'' - \alpha^2 H + F - 2\alpha h = 0 \\ y = 0 : \quad f = 0, \quad h' = 0, \quad F = 0, \quad H' = 0 \\ y = 1 : \quad f' = 0, \quad h = 0, \quad F' = 0, \quad H = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Le prime due equazioni definiscono il luogo dei punti, mentre le altre due definiscono i punti di minimo delle prime.

Risolvendo allo stesso modo di prima tale problema, si ottengono i valori di  $\tilde{R}_{cr}(\tilde{n})$  e  $\alpha_{cr}(\tilde{n})$  riportati nelle figure 3.4 e 3.5.

Gli stessi risultati sono stati riportati nella tabella (3.1).

Confrontando il dato per  $\tilde{n} = 1 \rightarrow \tilde{R}_{cr} = 17.65365$  e  $\alpha_{cr} = 1.79231$  di tabella (3.1) con la tabella (6.1) di pagina 247 del libro "Convection in porous media (Fifth Edition)" di "Nield, Donald A and Bejan" [8] si ha una corrispondenza con tali dati.

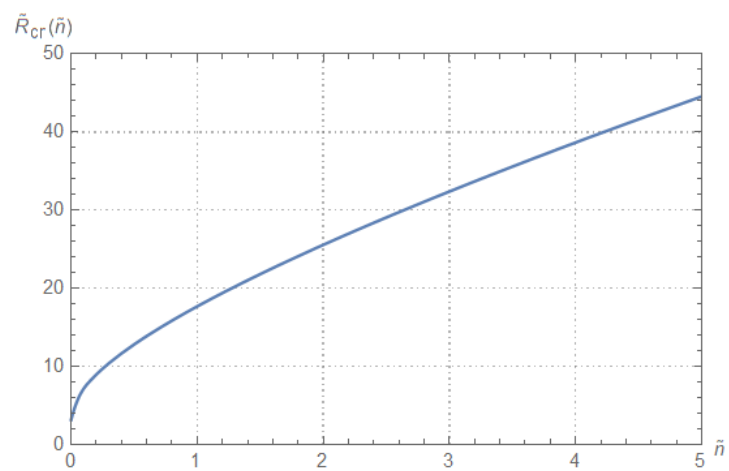


Figura 3.4: Valori critici  $\tilde{R}_{cr}(\tilde{n})$

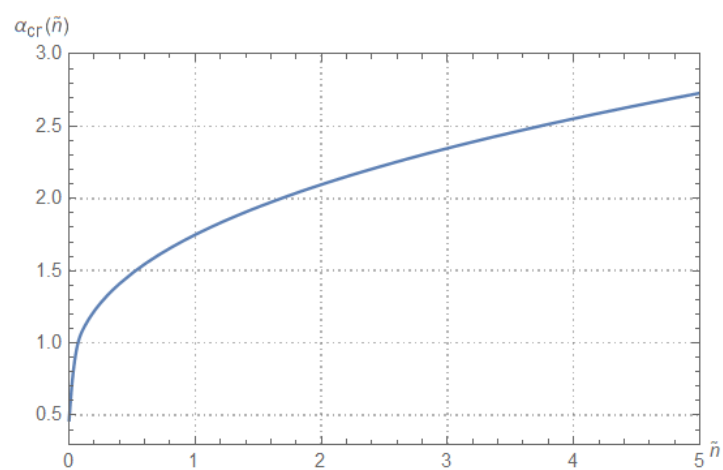


Figura 3.5: Valori critici  $\alpha_{cr}(\tilde{n})$

$\tilde{n}$	$\tilde{R}_{cr}$	$\alpha_{cr}$	$\tilde{n}$	$\tilde{R}_{cr}$	$\alpha_{cr}$
0.1	7.09732	1.07388	2.6	29.73926	2.25472
0.2	8.91340	1.22085	2.7	30.41130	2.27882
0.3	10.35969	1.32570	2.8	31.07701	2.30240
0.4	11.62421	1.41042	2.9	31.73668	2.32547
0.5	12.77572	1.48272	3.0	32.39062	2.34808
0.6	13.84824	1.54644	3.1	33.03910	2.37025
0.7	14.86150	1.60380	3.2	33.68236	2.39200
0.8	15.82812	1.65621	3.3	34.32063	2.41335
0.9	16.75676	1.70467	3.4	34.95411	2.43433
1.0	17.65365	1.74986	3.5	35.58302	2.45494
1.1	18.52348	1.79231	3.6	36.20752	2.47521
1.2	19.36985	1.83242	3.7	36.82779	2.49515
1.3	20.19562	1.87051	3.8	37.44399	2.51478
1.4	21.00309	1.90682	3.9	38.05626	2.53410
1.5	21.79417	1.94157	4.0	38.66475	2.55314
1.6	22.57045	1.97492	4.1	39.26959	2.57191
1.7	23.33324	2.00701	4.2	39.87090	2.59040
1.8	24.08370	2.03797	4.3	40.46880	2.60865
1.9	24.82282	2.06790	4.4	41.06339	2.62664
2.0	25.55143	2.09689	4.5	41.65478	2.64440
2.1	26.27030	2.12501	4.6	42.24308	2.66193
2.2	26.98009	2.15233	4.7	42.82836	2.67924
2.3	27.68138	2.17891	4.8	43.41072	2.69633
2.4	28.37470	2.20481	4.9	43.99025	2.71322
2.5	29.06052	2.23006	5.0	44.56702	2.72991

Tabella 3.1: Valori di  $\tilde{R}_{cr}$  e  $\alpha_{cr}$  per  $\tilde{n}$  compreso tra 0.1 e 5. con passo 0.1.



### 3.4 Considerazioni sui Risultati

Richiamando ora le equazioni (3.27) e (3.28) qui rinominate

$$\tilde{R} = \frac{R}{P^{n-1}} \quad (3.41)$$

$$\tilde{n} = \frac{n}{1 + (n-1) \sin^2 \phi} \quad (3.42)$$

si può pensare di ricavare  $n$  dalla (3.42), in modo da ottenere  $n$  in funzione di  $\tilde{n}$  e  $\phi$ , e inserire questa nella (3.41).

$$n = \tilde{n} + \tilde{n} (n-1) \sin^2 \phi$$

$$n = \tilde{n} + \tilde{n} n \sin^2 \phi - \tilde{n} \sin^2 \phi$$

$$n (1 - \tilde{n} \sin^2 \phi) = \tilde{n} (1 - \sin^2 \phi)$$

$$n(\tilde{n}, \phi) = \frac{\tilde{n} (1 - \sin^2 \phi)}{1 - \tilde{n} \sin^2 \phi} \quad (3.43)$$

Ecco che la (3.43) indica come varia l'indice di potenza  $n$  in funzione di  $(\tilde{n}, \phi)$ .

Inserendo quindi la (3.43) nella (3.41), si ottiene:

$$R = \tilde{R} P \frac{\tilde{n} (1 - \sin^2 \phi)}{1 - \tilde{n} \sin^2 \phi}^{-1}$$

$$R = \tilde{R} P \frac{\tilde{n} (1 - \sin^2 \phi) - 1 + \tilde{n} \sin^2 \phi}{1 - \tilde{n} \sin^2 \phi}$$

$$R(\tilde{R}, P, \tilde{n}, \phi) = \tilde{R} P \frac{\tilde{n} - 1}{1 - \tilde{n} \sin^2 \phi} \quad (3.44)$$

Nell'equazione (3.41)  $\phi$  è l'inclinazione fra il vettore d'onda e l'asse  $x$ . Le celle convettive hanno asse che giace sul piano  $(x-z)$ . Analizzando la (3.41) si ha che a fissato numero di Peclet  $P$  si ha:

- per  $n < 1$  (fluido pseudoplastico),  $\tilde{n}$  è una funzione monotona crescente di  $\phi$ ; quindi i modi più critici corrispondono ai valori più piccoli di  $\phi$ , cioè celle convettive il cui asse è perpendicolare all'asse  $x$  ( $\phi = 0, \tilde{n} = n$ ).

- Per  $n = 1 = \tilde{n}$  (fluido Newtoniano),  $\tilde{n}$  è indipendente da  $\phi$ , quindi l'inizio dell'instabilità è analoga sia per celle convettive trasverse che longitudinali.
- per  $n > 1$  (fluido dilatante),  $\tilde{n}$  è una funzione monotona decrescente di  $\phi$ , dunque la condizione più critica per l'inizio dell'instabilità si ha per i valori di  $\phi$  maggiori, cioè celle convettive il cui asse è parallelo all'asse  $x$  ( $\phi = \pi/2, \tilde{n} = 1$ ).

Considerando i fluidi pseudoplastici ( $n < 1$ ) la condizione critica si ha per perturbazioni il cui vettore d'onda è inclinato dell'angolo  $\phi = 0$  rispetto all'asse  $x$ . Ciò significa che, considerando la (3.43),  $n = \tilde{n}$  e dalla (3.44) si ha:

$$R = \tilde{R}(n)P^{n-1} \quad (3.45)$$

In figura 3.6 vengono riportati gli andamenti dei valori critici di un fluido pseudoplastico secondo la legge (3.45) considerando la tabella (3.1). Ovvero si possono analizzare gli andamenti di  $R_{cr}$  al variare del numero di Péclet  $P$  per fissati valori di  $\tilde{R}_{cr}$  e  $n$ .

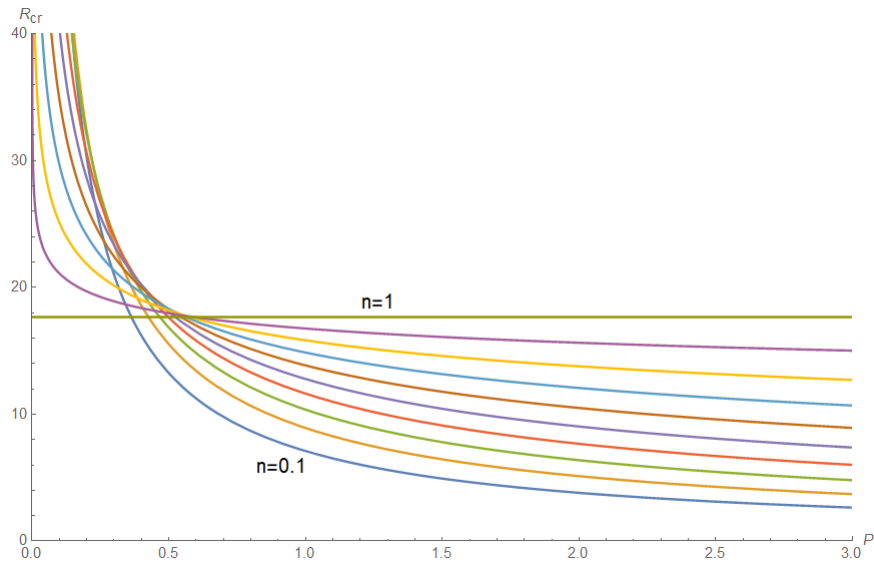


Figura 3.6: Andamenti di  $R_{cr} = \tilde{R}_{cr} P^{n-1}$  al variare di  $P$  per  $0.1 \leq n \leq 1$  con passo 0.1 (fluidi pseudoplastici con condizione critica per  $\phi = 0$ ) con riferimento ai valori di tabella (3.1).

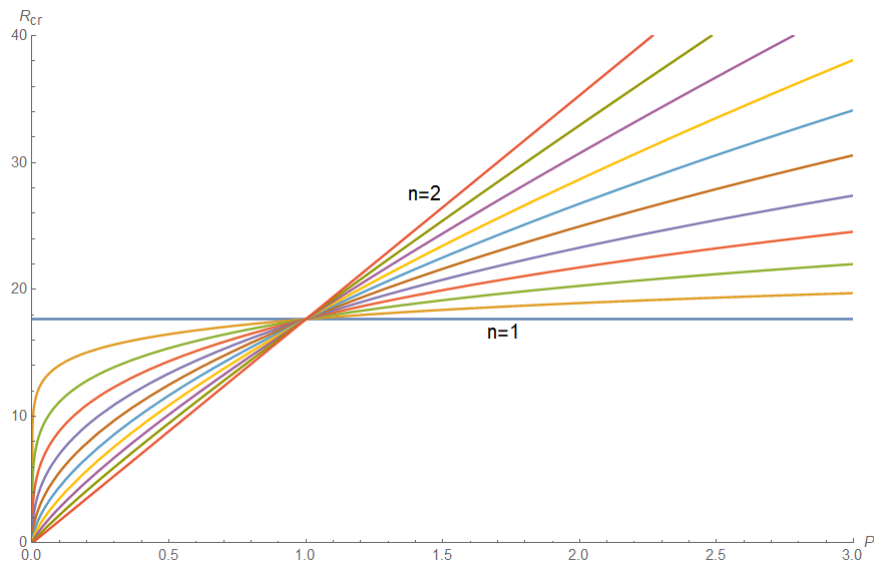


Figura 3.7: Andamenti di  $R_{cr} = 17.65365 P^{n-1}$  al variare di  $P$  per  $n \geq 1$  con passo 0.1 (fluido dilatante con condizione critica per  $\phi = \pi/2$ ) con riferimento ai valori di tabella (3.1).

Per i fluidi dilatanti, invece, la condizione più critica si ha per  $\phi = \pi/2$  come visto in precedenza. Quindi dalla (3.42) si ha  $\tilde{n} = 1$  e di conseguenza, dalla (3.41):

$$R = \tilde{R}(\tilde{n} = 1)P^{n-1} \quad (3.46)$$

Nel grafico 3.7 vengono riportati i valori critici di  $R$  al variare del numero di Péclet  $P$ .

Si può notare che le diverse curve cambiano il proprio andamento una volta superato il valore di  $R_{cr}$  relativo ad  $n = 1$  (fluido Newtoniano), cioè per valori di  $P < 1$  le curve  $R_{cr}$  non superano il valore di 17.65365, mentre per valori di  $P > 1$  le curve  $R_{cr}$  non sono mai inferiori a tale valore. Ovviamente per  $P = 1$  si ha  $R_{cr} = 17.65365$ .

**OSSERVAZIONE:**

nel caso di fluidi dilatanti ( $n > 1$ ) è stato visto che la condizione più critica si ha per  $\phi = \pi/2$ , ovvero per celle convettive longitudinali. Si consideri la prima equazione del sistema 3.30 qui riportata:

$$nf'' - (\alpha^2 + (n-1)\alpha_z^2) \left( f - \frac{R}{P^{n-1}}h \right) = 0$$

dove  $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_z^2$ .

Considerare le celle longitudinali significa imporre  $\alpha_x = 0$ . A questo punto l'equazione diventa:

$$(f'' - \alpha_z^2) \left( f - \frac{R}{P^{n-1}}h \right) = 0$$

Come si vede il parametro  $n$  rimane solo nel termine  $R/P^{n-1}$ . Ciò significa che tale valore può essere solo una costante.

Per quanto riguarda i valori di  $\alpha_{cr}$ , invece, se  $n < 1$  (fluido pseudoplastico) allora si ha che, come visto in precedenza, la condizione più critica è ottenuta per  $\phi = 0$ , il che comporta  $\tilde{n} = n$  e di conseguenza si ottiene la stessa curva di figura 3.5 nel piano  $(\alpha_{cr} - n)$ .

Se, invece,  $n > 1$  (fluido dilatante) si ha la condizione più critica per  $\phi = \pi/2$ , il che comporta  $\tilde{n} = 1$ , ovvero  $\alpha_{cr}$  non è più rappresentato da un andamento, ma è un valore costante pari a  $\alpha_{cr} = 1.74986$  (tabella 3.1). Se, infine,  $n = 1$  (fluido Newtoniano) non si ha dipendenza dall'angolo  $\phi$  per la condizione più critica e come per i fluidi dilatanti ( $n > 1$ ) si ha  $\alpha_{cr} = 1.74986$ .

Se ne conclude che:

- Per i fluidi pseudoplastici ( $n < 1$ ) la condizione di sollecitazione maggiormente critica si ha per valori di  $\phi = 0$  e per il numero di Péclet  $P \rightarrow \infty$  si raggiunge la condizione asintotica  $R_{cr} = 0$ . Per valori di  $P \rightarrow 0$  invece il valore di  $R_{cr}$  diventa infinito. Il grafico 3.5 rappresenta anche l'andamento di  $\alpha_{cr}(n)$ .
- Per i fluidi dilatanti ( $n > 1$ ) la condizione di sollecitazione maggiormente critica si ha per valori di  $\phi = \pi/2$ . Per valori del numero di Péclet  $P < 1$  si denota un andamento di  $R_{cr}$  che tende ad avvicinarsi, ma non a superare, il valore di  $R_{cr} = 17.6537$  valido per un fluido Newtoniano ( $n = 1$ ). Per valori di  $P > 1$ , invece, si supera il valore di  $R_{cr} = 17.6537$  e l'andamento risulta di tipo lineare con l'aumento di  $P$ . Il valore di  $\alpha_{cr}$ , invece, risulta costante e pari a 1.74986.
- Per fluidi Newtoniani ( $n = 1$ ), è facile vedere che si ottiene un valore di  $R_{cr}$  costante indipendente dal numero di Péclet  $P$  e dalla direzione della perturbazione ( $\phi$ ). Il valore critico di  $R$  è  $R_{cr} = 17.6537$  e il valore critico di  $\alpha$  è  $\alpha_{cr} = 1.74986$ .

### 3.5 Codice Numerico

In questa sezione, viene spiegato il codice numerico utilizzato. Nella prima parte di codice si vuole risolvere il problema:

$$\begin{cases} f'' - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} (f - \tilde{R}h) = 0 \\ h'' - \alpha^2 h + f = 0 \\ y = 0 : f = 0, \quad h' = 0 \\ y = 1 : f' = 0, \quad h = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Questo, essendo un problema ai valori iniziali, deve essere ricondotto a un problema di Cauchy.

In Mathematica la funzione "NDSolve" permette di trovare la soluzione numerica di un sistema di equazioni differenziali con valori al contorno definiti. Definendo quindi una funzione soluzione denominata "sol" dipendente dalle variabili  $(\alpha, n, R, \eta_1)$ , dove per comodità si è indicato  $\tilde{n} = n$ ,  $\tilde{R} = R$  e con  $\eta_1$  il parametro aggiuntivo nella condizione al contorno, e il parametro di "scale fixing" ad 1 per la definizione della nuova condizione al contorno, si scrive il codice per la risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} f'' - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} (f - \tilde{R}h) = 0 \\ h'' - \alpha^2 h + f = 0 \\ f(0) = 0, \quad f(0)' = \eta_1, \\ h(0) = 1, \quad h(0)' = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

```

sol[α_, n_, R_, η1_] :=
  NDSolve[{
    f''[y] -  $\frac{\alpha^2}{n}$  f[y] +  $\frac{\alpha^2}{n}$  R h[y] == 0,
    h''[y] -  $\alpha^2$  h[y] + f[y] == 0,
    f[0] == 0, f'[0] == η1, h[0] == 1, h'[0] == 0
  },
  {f, h}, {y, 0, 1}, MaxSteps → Infinity,
  Method → {"ExplicitRungeKutta"}, InterpolationOrder → All];

f[1] /. sol[1, 1, 1, 1]
h[1] /. sol[1, 1, 1, 1]

{0.595058}

{1.40494}

```

Come si può notare, subito dopo la definizione del sistema di equazioni con le relative condizioni al contorno, è stato esplicitato il numero massimo di step per calcolare la soluzione "*MaxSteps* → *Infinity*", il tipo di metodo con cui si vuole risolvere il problema "*Method* → *ExplicitRungeKutta*" e volendo mantenere risultati con errore non più grande dell'errore di macchina (pari a 15.9546), si usa il comando "*InterpolationOrder* → *All*".

Lanciando il calcolo, vengono computati i vettori che identificano le soluzioni  $f$  ed  $h$  e per avere una prova che queste siano state calcolate, si valutano le due funzioni numeriche in un punto " $f[1]/.sol[1, 1, 1, 1]$ " e " $h[1]/.sol[1, 1, 1, 1]$ " ottenendo rispettivamente 0.595.. e 1.404...

La seconda parte del calcolo è quella atta a trovare i valori di  $\tilde{R}$  e  $\alpha$  al variare di  $\tilde{n}$  sia maggiori che minori di  $\tilde{n} = 1$ .

Per fare ciò, si instaura un ciclo iterativo "*Do*" in cui si cercano le radici di un sistema di equazioni che soddisfano le condizioni non considerate nel calcolo precedente del sistema (3.48). Quindi si ripete il calcolo al variare di  $\tilde{n}$ .

Il codice è:

■  $\tilde{n} \in [1,5]$

```

Clear[ $\alpha$ , n, R,  $\eta_1$ ];
Rold = 1.;
 $\eta_1$ old = 1.;
Do[Print["-----"]
  Do[reso =
    FindRoot[{
      Re[Evaluate[f'[1] /. sol[ $\alpha$ , n, R,  $\eta_1$ ]]] == 0,
      Re[Evaluate[h[1] /. sol[ $\alpha$ , n, R,  $\eta_1$ ]]] == 0
    },
    {{R, Rold}, { $\eta_1$ ,  $\eta_1$ old}}, MaxIterations  $\rightarrow$  Infinity];
    Print[NumberForm[{ $\alpha$ , R /. reso}, 5], ", "];
    Rold = (R /. reso);
     $\eta_1$ old = ( $\eta_1$  /. reso),
    { $\alpha$ , 0.1, 8, 0.1}];
  Print["-----"], {n, 1., 5.}]

```

Si vede che una volta ripulita la memoria dalle variabili di interesse ("Clear[...]") vengono definiti i punti da cui il calcolo deve avere inizio ("Rold" e " $\eta_1$ old"). Dopodiché vi sono due cicli annidati, in quello più interno viene calcolata la soluzione a fissato valore di  $n$ , vengono stampati i risultati "Print[...]" e aggiornati i valori di  $R_{old}$  e  $\eta_{1old}$  e il calcolo viene eseguito per tutti i valori di  $\alpha$  compresi tra 0.1 e 8 con passo 0.1. Poi viene aggiornato il valore di  $n$  nel ciclo più esterno in modo da calcolare in una volta sola tutti i valori cercati.

Tutti i punti computati vengono poi usati per trovare la funzione interpolante per ogni valore di  $n$ . Nel listato che segue, in cui si fa riferimento ai punti per  $n = 1$ , viene definita una lista "data1" usata per definire la funzione interpolante "R1"; dopodiché vengono graficati sullo stesso grafico sia i punti che la funzione interpolante. Si può poi trovare il minimo di tale funzione con il comando "NMinimize[...]".

Il codice per la ricerca dei punti risulta:

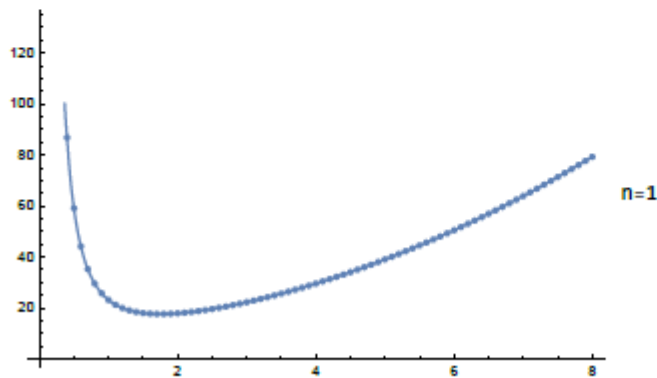


n=1

```

data1 = {{0.1, 1245.5}, {0.2, 318.42}, {0.3, 146.79}, {0.4, 86.805}, {0.5, 59.126},
{0.6, 44.182}, {0.7, 35.265}, {0.8, 29.574}, {0.9, 25.769}, {1., 23.145},
{1.1, 21.3}, {1.2, 19.994}, {1.3, 19.075}, {1.4, 18.441}, {1.5, 18.024},
{1.6, 17.778}, {1.7, 17.666}, {1.8, 17.666}, {1.9, 17.757}, {2., 17.925},
{2.1, 18.16}, {2.2, 18.453}, {2.3, 18.797}, {2.4, 19.186}, {2.5, 19.617},
{2.6, 20.085}, {2.7, 20.588}, {2.8, 21.123}, {2.9, 21.689}, {3., 22.284},
{3.1, 22.906}, {3.2, 23.554}, {3.3, 24.228}, {3.4, 24.925}, {3.5, 25.647},
{3.6, 26.392}, {3.7, 27.159}, {3.8, 27.948}, {3.9, 28.759}, {4., 29.591},
{4.1, 30.445}, {4.2, 31.32}, {4.3, 32.215}, {4.4, 33.131}, {4.5, 34.067},
{4.6, 35.023}, {4.7, 36.}, {4.8, 36.997}, {4.9, 38.013}, {5., 39.05},
{5.1, 40.106}, {5.2, 41.182}, {5.3, 42.278}, {5.4, 43.393}, {5.5, 44.528},
{5.6, 45.683}, {5.7, 46.858}, {5.8, 48.051}, {5.9, 49.265}, {6., 50.498},
{6.1, 51.751}, {6.2, 53.023}, {6.3, 54.314}, {6.4, 55.625}, {6.5, 56.956},
{6.6, 58.306}, {6.7, 59.676}, {6.8, 61.065}, {6.9, 62.474}, {7., 63.902},
{7.1, 65.35}, {7.2, 66.817}, {7.3, 68.304}, {7.4, 69.81}, {7.5, 71.336},
{7.6, 72.882}, {7.7, 74.447}, {7.8, 76.031}, {7.9, 77.635}, {8., 79.259}};
R1 = Interpolation[data1];
lp1 = ListPlot[data1];
p1 = Plot[R1[α], {α, 0.1, 8}, PlotRange -> {0, 100}, PlotLegends -> "n=1"];
Show[lp1, p1]

```



```

NMinimize[R1[α], {α, 1.5, 2}]
{17.6533, {α -> 1.74914}}

```

Un po' più difficoltoso risulta invece il calcolo per valori di  $\tilde{n} < 1$  in quanto più i valori di  $\tilde{n}$  si avvicinano allo 0 più il peso computazionale aumenta. Comunque questo limite, dal punto di vista pratico, non ha molto peso, in quanto non esistono in natura fluidi con indice di potenza prossimo a 0, quindi ci si può fermare prima con i calcoli.

Il codice per la ricerca dei punti è lo stesso di prima, ma, questa volta, si preferisce scrivere un codice per ogni valore di  $n$  fissato. Il codice seguente è valido per  $n = 0.1$ :

**$\tilde{n}=0.1$**

```
Clear[ $\alpha$ , n, R,  $\eta 1$ ];
Rold = 1.;
 $\eta 1$ old = 1.;
n = 0.1;
Do[reso =
  FindRoot[{
    Re[Evaluate[f'[1] /. sol[ $\alpha$ , n, R,  $\eta 1$ ]]] == 0,
    Re[Evaluate[h[1] /. sol[ $\alpha$ , n, R,  $\eta 1$ ]]] == 0
  },
  {{R, Rold}, { $\eta 1$ ,  $\eta 1$ old}}, MaxIterations -> Infinity];
Print[NumberForm[{ $\alpha$ , R /. reso}, 5], ", "];
Rold = (R /. reso);
 $\eta 1$ old = ( $\eta 1$  /. reso),
{ $\alpha$ , 0.1, 8, 0.1}];
```

Ed anche qui, come per il caso precedente, si cerca la funzione interpolante.

Di seguito viene riportato il codice per ricavare le curve delle figure 3.2 e 3.3.

■  $n \in [1,5]$

```
a = Plot[{R1[α], R2[α], R3[α], R4[α], R5[α]},
{α, 0.1, 5}, PlotRange → {{0, 5}, {0, 80}}, FrameLabel → {α, R̃[α]},
PlotLegends → {"ñ=1", "ñ=2", "ñ=3", "ñ=4", "ñ=5"}, PlotTheme → "Detailed"]
```

■  $n < 1$

```
b = Plot[{R01[α], R045[α], R1[α]}, {α, 0.1, 5},
PlotRange → {{0, 5}, {0, 80}}, PlotLegends → {"ñ=0.1", "ñ=0.45", "ñ=1"},
FrameLabel → {α, R̃[α]}, PlotTheme → "Detailed"]
```

I punti di minimo di ciascuna curva sono i punti critici. E' possibile trovare i punti critici in maniera iterativa. Come spiegato nel capitolo del progetto, si deve definire il problema:

$$\begin{cases} f'' - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} (f - \tilde{R}h) = 0 \\ h'' - \alpha^2 h + f = 0 \\ F'' - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} F - \frac{\alpha^2}{\tilde{n}} \tilde{R}H - 2\frac{\alpha}{\tilde{n}} f - 2\frac{\alpha}{\tilde{n}} \tilde{R}h = 0 \\ H'' - \alpha^2 H + F - 2\alpha h = 0 \\ y = 0 : f = 0, \quad h' = 0, \quad F = 0, \quad H' = 0 \\ y = 1 : f' = 0, \quad h = 0, \quad F' = 0, \quad H = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Si usa lo stesso identico codice per risolvere il problema (3.47). Considerando poi che i valori critici sono le coppie  $(R_{cr}, \alpha_{cr})$  al variare di  $n$ , si cercano appunto tali coppie. La prima parte del codice è:

```

sol[α_, n_, R_, η1_, η2_] :=
  NDSolve[{
    f''[y] -  $\frac{\alpha^2}{n}$  f[y] +  $\frac{\alpha^2}{n}$  R h[y] == 0,
    F''[y] -  $\frac{\alpha^2}{n}$  F[y] +  $\frac{\alpha^2}{n}$  R H[y] - 2  $\frac{\alpha}{n}$  f[y] + 2  $\frac{\alpha}{n}$  R h[y] == 0,
    h''[y] -  $\alpha^2$  h[y] + f[y] == 0,
    H''[y] -  $\alpha^2$  H[y] + F[y] - 2  $\alpha$  h[y] == 0,
    f[0] == 0, f'[0] == η1, h[0] == 1, h'[0] == 0,
    F[0] == 0, F'[0] == η2, H[0] == 0, H'[0] == 0
  },
  {f, h, F, H}, {y, 0, 1}, MaxSteps → Infinity,
  Method → {"ExplicitRungeKutta"}, InterpolationOrder → All];

f[1] /. sol[1, 1, 1, 1, 1]
h[1] /. sol[1, 1, 1, 1, 1]
F[1] /. sol[1, 1, 1, 1, 1]
H[1] /. sol[1, 1, 1, 1, 1]

```

La seconda parte invece è:

■  $\tilde{n} \in [1,5]$

```

Clear[α, n, R, η1, η2];
αold = 1.7;
Rold = 17.;
η1old = 1.;
η2old = 1.;
Do[reso =
  FindRoot[{
    Re[Evaluate[f'[1] /. sol[α, n, R, η1, η2]] == 0,
    Re[Evaluate[h[1] /. sol[α, n, R, η1, η2]] == 0,
    Re[Evaluate[F'[1] /. sol[α, n, R, η1, η2]] == 0,
    Re[Evaluate[H[1] /. sol[α, n, R, η1, η2]] == 0
  },
  {{R, Rold}, {η1, η1old}, {η2, η2old}, {α, αold}}, MaxIterations → Infinity];
Print[NumberForm[{n, R /. reso, α /. reso}, 5], ", "];
αold = (α /. reso);
Rold = (R /. reso);
η1old = (η1 /. reso);
η2old = (η2 /. reso),
{n, 1., 5., 0.1}];

```

■  $\tilde{n} \in [0.1,1]$

```

Clear[α, n, R, η1, η2];
αold = 1.;
Rold = 7.;
η1old = 1.;
η2old = 1.;
Do[reso =
  FindRoot[{
    Re[Evaluate[f'[1] /. sol[α, n, R, η1, η2]] == 0,
    Re[Evaluate[h[1] /. sol[α, n, R, η1, η2]] == 0,
    Re[Evaluate[F'[1] /. sol[α, n, R, η1, η2]] == 0,
    Re[Evaluate[H[1] /. sol[α, n, R, η1, η2]] == 0
  },
  {{R, Rold}, {η1, η1old}, {η2, η2old}, {α, αold}}, MaxIterations → Infinity];
Print[NumberForm[{n, R /. reso, α /. reso}, 5], ", "];
αold = (α /. reso);
Rold = (R /. reso);
η1old = (η1 /. reso);
η2old = (η2 /. reso),
{n, 0.1, 1, 0.1}];

```

Allo stesso modo di prima, i punti ricavati da questa analisi vengono interpolati e graficati, ottenendo i grafici delle figure 3.4 e 3.5. Questi ultimi due grafici possono essere tabulati salvando i punti trovati in una lista "data" e utilizzando la funzione "Grid[...]":

```
Grid[Prepend[data, {"ñ", "R̃cr", "αcr"}], Alignment → Left, Spacings → {2, 1},
      Frame → All, ItemStyle → "Text", Background → {{Gray, None}, {LightGray, None}}]
```

ñ	$\tilde{R}_{cr}$	$\alpha_{cr}$
0.1	7.0973	1.0739
0.2	8.9134	1.2209
0.3	10.36	1.3257

Dato che i dati dei valori critici devono essere il più accurati possibile, si ripetendo i calcoli aumentando la precisione di macchina, passando da 15.9546 a 20.

Per aumentare la precisione di macchina è sufficiente inserire il comando "WorkingPrecision → 20" all'interno di "NDSolve[...]" prima del comando "InterpolationOrder → All".

La tabella completa è la 3.1 riportata a fine della sezione precedente.

**Parte III**  
**Appendici**





# Appendice A

## Equazioni di Bilancio dei Fluidi Newtoniani

Se si vuole descrivere il moto di un fluido in una ben definita regione di spazio  $\Omega$ , è utile fare uno studio di tipo Lagrangiano, cioè analizzare gli spostamenti subiti nel corso del tempo da un elemento di fluido, ovvero da una porzione di fluido delimitata da una superficie ideale impermeabile al flusso di materia.

Considerando un'arbitraria proprietà estensiva  $\Phi$  del fluido (monofase) se ne vuole vedere qual'è la sua variazione nel tempo.

Usando la definizione di derivata classica

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}$$

si deve tener conto che il dominio di integrazione cambia nel tempo e quindi non sarà uguale agli istanti  $t$  e  $t + \Delta t$ .

Tramite considerazioni geometriche e il teorema di Gauss-Green per la trasformazione degli integrali di superficie in integrali di volume si ottiene il ***Teorema del Trasporto di Reynolds***

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \bar{\nabla} \cdot (\rho\Phi\bar{u}) \right] d\Omega \quad (\text{A.1})$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido, e  $\bar{u}$  è il vettore velocità.

Si può applicare tale enunciato per ricavare:

- ***bilancio locale della massa:***

imponendo  $\phi = m$  (la quale è una proprietà estensiva),  $\Phi = m/m = 1$ ; quindi si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \bar{\nabla} \cdot (\rho\bar{u}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Se  $\rho = cost$ , cioè si considera il fluido incomprimibile, si ottiene

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \quad (\text{A.3})$$

• **bilancio locale della quantità di moto:**

imponendo  $\phi = \Pi_i$  i-esima componente della quantità di moto, si ha che  $\Phi = \Pi_i/m = u_i$  i-esima componente della velocità; si ottiene facendo tutte le considerazioni del caso:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{g} - \nabla p + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \quad (\text{A.4})$$

dove

$$- \frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \text{ chiamata anche } \textit{derivata sostanziale}$$

$$- \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \text{ è il vettore la cui componente i-esime è } (\bar{\nabla} \cdot \bar{\tau})_i = \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

Per un fluido newtoniano, le componenti del tensore degli sforzi viscosi  $\tau$  sono date da

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \bar{u} I_{ij}$$

dove si è indicato con D il *tensore delle deformazioni*,

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

si dimostra che per un fluido newtoniano si ha

$$(\bar{\nabla} \cdot \bar{\tau})_i = \mu \left[ \nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) \right]$$

Si può quindi concludere che, per un fluido newtoniano, il bilancio della quantità di moto può essere scritto nella forma

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{g} - \nabla p + \mu \left[ \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{3} \nabla (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) \right] \quad (\text{A.5})$$

nota anche come *equazione di Navier-Stokes*.

• **bilancio locale dell'energia:**

imponendo  $\phi = E$ , si ottiene  $\Phi = E/m = \epsilon + \frac{\bar{u} \cdot \bar{u}}{2} - \bar{g} \cdot \bar{x}$ , dove si è indicato rispettivamente l'energia interna, l'energia cinetica e l'energia potenziale. Facendo le dovute considerazioni si ottiene:

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q} + q_g + \sigma_{ij} D_{ij} \quad (\text{A.6})$$

dove

- $\frac{D\epsilon}{Dt}$  è la derivata sostanziale dell'energia interna.
- $-\bar{\nabla} \cdot \bar{q}$  è la densità di flusso termico.
- $q_g$  è la potenza specifica generata nel volume.
- analizzando meglio il termine  $\sigma_{ij}D_{ij}$ , questo si può scrivere come:

$$\sigma_{ij}D_{ij} = -p \underbrace{\delta_{ij}D_{ij}}_{D_{ii}=\bar{\nabla} \cdot \bar{u}} + \tau_{ij}D_{ij} = -p(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + \tau_{ij}D_{ij}$$

dove  $-p(\bar{\nabla} \cdot \bar{u})$  è il lavoro di espansione o compressione del fluido e  $\tau_{ij}D_{ij}$  è l'effetto termico dovuto alla dissipazione viscosa.

Allora l'equazione di bilancio termico si scrive come:

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q} + q_g - p(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + \tau_{ij}D_{ij} \quad (\text{A.7})$$

## A.1 Approssimazione di Boussinesq

L'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq è utile nello studio di fenomeni di convezione termica.

Per il bilancio locale della massa si considera la densità del fluido costante ottenendo l'equazione A.3.

Per la quantità di moto, invece, si considera la densità variabile solo nel termine geodetico, ovvero:

$$\underbrace{\rho_0}_{\text{costante}} \frac{Du_i}{Dt} = \underbrace{\rho}_{\text{variabile}} g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Per un fluido Newtoniano a viscosità costante si ha che:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left[ \nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{(\bar{\nabla} \cdot \bar{u})}_{=0} \right] = \mu \nabla^2 u_i$$

Per quanto riguarda l'equazione dell'energia invece:

$$\underbrace{\rho_0}_{\text{costante}} \frac{D\epsilon}{Dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q} + q_g - p \underbrace{(\bar{\nabla} \cdot \bar{u})}_{=0} + \tau_{ij}D_{ij}$$

Per un fluido Newtoniano a viscosità costante si ha:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu \underbrace{(\bar{\nabla} \cdot \bar{u})}_{=0} \delta_{ij}$$

$$\tau_{ij}D_{ij} = 2\mu D_{ij}D_{ij}$$

In sostanza, si sta considerando la densità come funzione della sola temperatura e non anche della pressione.

$$\rho = \rho(T) \tag{A.8}$$

Sapendo che questa varia poco con la temperatura, la si espande in serie di Taylor attorno a  $T_0$  in modo da vedere le piccole variazioni di  $\rho$ :

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_0} (T - T_0) + O((T - T_0)^2) \tag{A.9}$$

Cioè per  $T \rightarrow T_0$

$$\rho(T) \rightarrow \underbrace{\rho(T_0)}_{\rho_0} + \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_0}}_{*} (T - T_0) + O((T - T_0)^2)$$

Nel termine  $*$  si considera che in realtà  $\rho = \rho(T, p)$  dove  $p$  è considerata costante. Ciò significa che si può definire il coefficiente di dilatazione termica isobaro:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}_{<0} \tag{A.10}$$

quindi:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_0} = (-\beta\rho)_{T_0}$$

Allora si può scrivere l'equazione di stato approssimata:

$$\rho(T) \cong \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \tag{A.11}$$

Con tale espressione della densità, si scrive la quantità di moto come:

$$\begin{cases} \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\rho_0 \beta (T - T_0) g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \\ P = \text{carico piezometrico} \\ P = p - \underbrace{\rho_0 g_i x_i}_{\text{pressione idrostatica}} \end{cases}$$

Quindi l'equazione di bilancio della quantità di moto è:

$$\rho_0 \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho_0 \beta (T - T_0) g_i + \mu \nabla^2 u_i \tag{A.12}$$

Per quanto riguarda il bilancio dell'energia si ha che  $\epsilon$  è una funzione di stato termodinamica del fluido. Considerando che ciascun elemento di fluido si trova in stato di equilibrio stabile, questo è determinato univocamente da  $(T, v)$  o, usando le variabili fluidodinamiche,  $(T, \rho)$ . Quindi si può dire che  $\epsilon = \epsilon(T, \rho)$ . Ma, per i discorsi fatti in precedenza si è visto che  $\epsilon = \epsilon(T, \rho(T))$ ; ovvero la dipendenza è solo per  $T$ .

Nel caso in cui il fluido è costituito da un gas rarefatto, cioè un gas perfetto in cui vale la legge di Joule, si può dire che:

$$d\epsilon = C_v dT$$

cioè

$$D\epsilon = C_v DT$$

Ma se il gas non è perfetto, si deve considerare l'approssimazione di Bousinesque:

$$d\epsilon = C dT$$

$C$  è il calore specifico.

$$d\epsilon = \underbrace{\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_p}_C dT$$

Per definizione:

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$$

$$h = \epsilon + pv = \epsilon + \frac{p}{\rho}$$

quindi:

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_p - \frac{p}{\rho^2} \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p}_{-\beta\rho} = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_p + \frac{p}{\rho}\beta = C + \frac{p}{\rho}\beta$$

Allora:

$$C = C_p - \frac{p\beta}{\rho} \tag{A.13}$$

Infatti, dall'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\frac{p}{\rho} = RT \Rightarrow \rho = \frac{p}{RT}$$

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T}$$

Nel caso del gas perfetto  $C = C_v$ , Per i liquidi invece

$$C = C_p - \underbrace{\frac{p\beta}{\rho}}_{\text{trascurabile}} \cong C_p$$

Per un gas reale, non si ha né  $C_p$  né  $C_v$ , ma un valore intermedio.

Quindi il bilancio locale dell'energia diventa:

$$\rho_0 c \frac{DT}{Dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q} + q_g + 2\mu D_{ij} D_{ij} \quad (\text{A.14})$$

Il termine  $\bar{q}$  viene misurato con la legge di Fourier:  $\bar{q} = -k\bar{\nabla}T$  con  $k$  costante in quanto si considerano piccole variazioni di  $T$ . Allora in definitiva si ottiene:

$$\rho_0 c \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + q_g + 2\mu D_{ij} D_{ij} \quad (\text{A.15})$$

Mettendo assieme le equazioni approssimate si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \\ \rho_0 \frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho_0 \beta (T - T_0) g_i + \mu \nabla^2 u_i \\ \rho_0 c \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + q_g + 2\mu D_{ij} D_{ij} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Un altro modo di scrivere le equazioni (A.16) è di dividere nella seconda per  $\rho_0$  definendo la viscosità cinematica:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad \left[ \frac{m^2}{sec} \right]$$

e dividere la terza per  $\rho_0 c$  definendo la diffusività termica:

$$\alpha = \frac{k}{\rho_0 c} \quad \left[ \frac{m^2}{sec} \right]$$

e il numero di Prandtl:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

ottenendo quindi

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \\ \frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \beta (T - T_0) g_i + \nu \nabla^2 u_i \\ \frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q_g}{\rho_0 c} + \frac{2\nu}{c} D_{ij} D_{ij} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

## Appendice B

### Problema di Rayleigh–Bénard

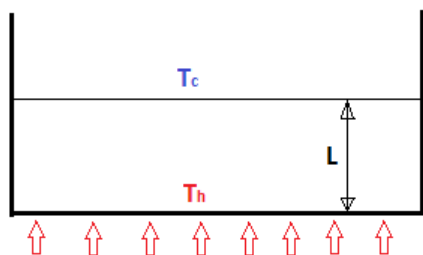


Figura B.1: Strato di fluido di spessore  $L$  con pareti superiore e inferiore mantenute a temperatura costante ( $T_h > T_c$ )

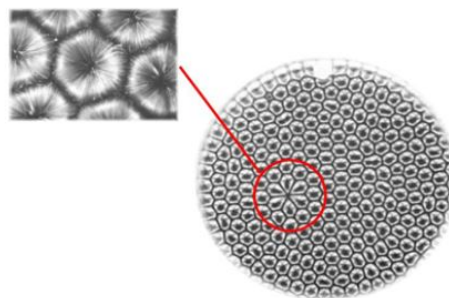


Figura B.2: Celle convettive di forma esagonale osservate da Bénard

L'esperienza di Bénard, risalente al 1900, descrive il moto di un fluido per l'effetto convettivo quando questo riceve calore dal basso, come mostrato in figura B.1.

Nel sistema considerato si ha una variazione verticale ed uniforme della temperatura, che, di conseguenza, diminuisce con l'altezza. Fino a quando la variazione di temperatura è piccola, tra l'interno e la superficie si ha unicamente un fenomeno di conduzione senza trasporto di materia. Quando il gradiente supera un certo valore critico ha inizio un meccanismo di convezione, che, in condizioni stabili, si struttura in una serie di cellette, chiamate Celle di Bénard. Queste celle rappresentano uno degli esempi più studiati di struttura dissipativa. Sulla superficie si struttura un mosaico a forma esagonale.

In sostanza la corrente di fluido caldo sale verso l'alto modificando il valore della tensione superficiale, che diminuisce con la temperatura; questo fatto giustifica la formazione di celle caratteristiche.

Bénard, per i suoi esperimenti, usò grasso di balena, un fluido molto viscoso

la cui tensione superficiale è abbastanza elevata da annullare l'effetto delle forze di galleggiamento. Aumentando lo spessore di fluido  $L$ , però, aumenta la forza di galleggiamento.

L'esperienza fatta da John Rayleigh, sulla base degli esperimenti di Benard, fu quella di risolvere un problema semplificato, il quale portò alla determinazione di un parametro caratteristico, il **numero di Rayleigh**  $Ra$ :

$$Ra = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu\alpha} \quad (\text{B.1})$$

per il quale, se si supera un valore critico, si instaurano le celle convettive illustrate in figura B.2.

Analizzando il problema, le condizioni al contorno da imporre sarebbero: quelle di impermeabilità e aderenza sulla parete di fondo; quelle di impermeabilità e sforzo tangenziale nullo sul pelo libero.

Rayleigh non risolse tale problema perché troppo complicato, allora ne risolse uno più semplice considerando lo sforzo di taglio nullo anche sulla parete di fondo, ovvero studiò un problema simmetrico.

Così facendo, ottenne una stima del valore critico  $Ra_{cr} \simeq 1100$ , equivalente a circa la metà del valore reale.

Si riporta il procedimento seguito da Rayleigh.

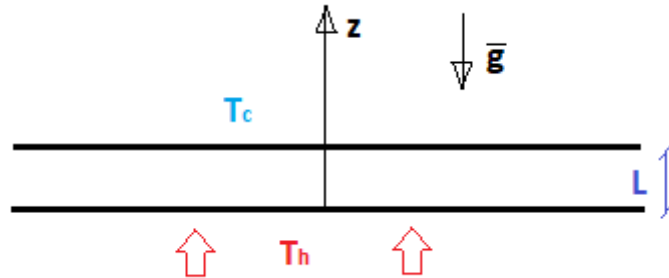


Figura B.3: Strato di fluido infinitamente esteso

Considerando uno strato di fluido infinitamente esteso come in figura B.3, si parte dalle equazioni dei fluidi newtoniani (descritte nell'appendice A):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \beta (T - T_0) + \nu \nabla^2 u_i \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \nabla^2 T + \frac{2\nu}{c} D_{ij} D_{ij} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$



dove nel bilancio di energia della B.2 è stato trascurato il termine di generazione di potenza specifica interna  $q_g$ .

Nello stato base, il sistema si considera stazionario (cioè si elidono le derivate temporali) e lo stato di moto del fluido è inizialmente fermo, quindi  $u_i = 0$ , cioè le B.2 diventano (trascurando la prima che risulta verificata):

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \beta (T - T_0) = 0 \\ \alpha \nabla^2 T = 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

L'equazione della temperatura della B.3 dice che:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B.4})$$

e quindi, date le condizioni al contorno per la temperatura, si ottiene la soluzione base:

$$T_B = T_h + \frac{T_c - T_h}{L} z = T_h - \frac{T_h - T_c}{L} z \quad (\text{B.5})$$

Per il carico piezometrico della B.3, invece, si ha una soluzione che dipende dalla variazione di temperatura.

Si vuole **studiare la stabilità** del sistema. Si considerino, quindi, delle perturbazioni alle soluzioni base del tipo:

$$u_i = u_{B_i} + \epsilon \tilde{u}_i \quad (\text{B.6})$$

$$p = p_B + \epsilon \tilde{p} \quad (\text{B.7})$$

$$T = T_B + \epsilon \tilde{T} \quad (\text{B.8})$$

Sostituendo queste espressioni nel sistema di equazioni iniziali B.2, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial u_{B_i}}{\partial x_j} + u_{B_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + g_i \beta \tilde{T} + \nu \nabla^2 \tilde{u}_i \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial T_B}{\partial x_j} + u_{B_j} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \alpha \nabla^2 \tilde{T} + \frac{4\nu}{c} D_{B_{ij}} \tilde{D}_{ij} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Volendo fare un'analisi lineare, si è costretti a linearizzare le equazioni B.9, trascurando i termini non lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \underbrace{\tilde{u}_j \frac{\partial u_{B_i}}{\partial x_j}}_{O^2} + \underbrace{u_{B_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{O^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + g_i \beta \tilde{T} + \nu \nabla^2 \tilde{u}_i \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_j \underbrace{\frac{\partial T_B}{\partial x_j}}_{T_B=T_B(z)} + \underbrace{u_{B_j} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}}_{u_{B_j}=0} = \alpha \nabla^2 \tilde{T} + \underbrace{\frac{4\nu}{c} D_{B_{ij}} \tilde{D}_{ij}}_{\text{No contributo dissipazione viscosa}} \end{array} \right.$$

Ciò che rimane, considerando  $\tilde{u}_i = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  è il sistema linearizzato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + g_i \beta \tilde{T} + \nu \nabla^2 \tilde{u}_i \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{T_h - T_c}{L} \tilde{w} = \alpha \nabla^2 \tilde{T} \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

Tale sistema di equazioni viene poi adimensionalizzato definendo le quantità adimensionali ( $\hat{\cdot}$ ):

- $\hat{u}_i = \frac{\tilde{u}_i}{\alpha/L}$
- $\hat{x}_i = \frac{x_i}{L}$
- $\hat{T} = \frac{\tilde{T}}{T_h - T_c}$
- $\hat{p} = \frac{\tilde{p}}{\alpha \nu / \rho_0 L^2}$
- $\hat{t} = \frac{t}{L^2/\alpha}$

Sostituendole nel sistema B.10, la prima diventa:

$$\frac{\alpha}{L} \frac{1}{L} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

Ovvero

$$\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{B.11})$$

La seconda

$$\underbrace{\frac{\frac{\alpha}{L}}{L^2}}_{=\frac{\alpha^2}{L^3}} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = \underbrace{-\frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0 \alpha \nu}{L^3}}_{=-\frac{\alpha \nu}{L^3}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \underbrace{g_i}_{=gk_i} \beta (T_h - T_c) \hat{T} + \frac{\alpha \nu}{L^3} \nabla^2 \hat{u}_i$$

Dividendo il tutto per la quantità  $\frac{\alpha \nu}{L^3}$  si ottiene:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + Ra \hat{T} k_i + \nabla^2 \hat{u}_i \quad (\text{B.12})$$

dove compaiono le quantità adimensionali:

- il numero di Prandtl:  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
- il numero di Rayleigh:  $Ra = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu\alpha}$

Per quanto riguarda l'energia (terza equazione della B.10), si ottiene:

$$\frac{(T_h - T_c)\alpha}{L^2} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{(T_h - T_c)\alpha}{L^2} \hat{w} = \frac{(T_h - T_c)\alpha}{L^2} \alpha \nabla^2 \hat{T}$$

Cioè dividendo per  $\frac{(T_h - T_c)\alpha}{L^2}$  si ha

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \hat{w} = \alpha \nabla^2 \hat{T} \quad (\text{B.13})$$

Volendo ora eliminare la dipendenza dalla pressione nella B.12, si applica la seguente procedura. La B.12 scritta per componenti diventa:

$$\begin{cases} x : \frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \nabla^2 \hat{u} \\ y : \frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \nabla^2 \hat{v} \\ z : \frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + Ra \hat{T} + \nabla^2 \hat{w} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Derivando la prima rispetto a  $\hat{y}$ , la seconda rispetto a  $\hat{x}$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t \partial \hat{y}} = -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \nabla^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t \partial \hat{x}} = -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \nabla^2 \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Sottraendo la prima dalla seconda delle B.15 si ottiene:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right) = \nabla^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right) \quad (\text{B.16})$$

Derivando ora la seconda equazione del sistema B.14 rispetto a  $\hat{z}$  e la terza per  $\hat{y}$  si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t \partial \hat{z}} = -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{z} \partial \hat{y}} + \nabla^2 \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t \partial \hat{y}} = -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{z} \partial \hat{y}} + Ra \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} + \nabla^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Sottraendo la prima dalla seconda delle B.17 si ottiene:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right) = -Ra \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} + \nabla^2 \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right) \quad (\text{B.18})$$

Ora derivando la prima equazione del sistema B.14 rispetto a  $\hat{z}$  e la terza per  $\hat{x}$  si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t \partial \hat{z}} = -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{z} \partial \hat{x}} + \nabla^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t \partial \hat{x}} = -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{z} \partial \hat{x}} + Ra \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \nabla^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Sottraendo la prima dalla seconda delle B.19 si ottiene:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) = -Ra \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \nabla^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) \quad (\text{B.20})$$

Cioè unendo in un sistema le B.16, B.18 e B.20 si ha:

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right) = \nabla^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right) \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right) = -Ra \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} + \nabla^2 \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right) \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) = -Ra \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \nabla^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Derivando quindi la seconda equazione del sistema B.21 rispetto a  $\hat{y}$  e la terza rispetto ad  $\hat{x}$  si ottiene:

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} \right) = -Ra \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \\ \left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) = -Ra \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

Sommando la seconda equazione alla prima del sistema B.22 si ha:

$$\left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} \right] = -Ra \left( \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \right) \quad (\text{B.23})$$

Riconoscendo che il termine tra parentesi tonde all'interno delle parentesi quadre si può scrivere come:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}$$

si ha:

$$\left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \hat{w} = Ra \nabla_2^2 \hat{T} \quad (\text{B.24})$$

Dove si è indicato il laplaciano bidimensionale:

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2}$$

Allora il problema che si deve risolvere è il seguente:

$$\boxed{\begin{cases} \left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \hat{w} = Ra \nabla_2^2 \hat{T} \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \hat{w} = \alpha \nabla^2 \hat{T} \\ z = 0, 1 : \quad \hat{T} = 0; \quad \hat{w} = 0; \quad \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} = 0 \end{cases}} \quad (\text{B.25})$$

La soluzione delle perturbazioni descritte nel sistema B.25 è una combinazione lineare di modi normali di vibrare al variare del numero d'onda  $k$ . Tali soluzioni hanno la caratteristica di essere onde piane.

Nel dominio considerato tali onde si possono propagare lungo  $x$  o  $y$ . Non essendoci alcun motivo di privilegiare una direzione rispetto ad un'altra, se ne considera una arbitraria (per esempio  $x$ ):

$$\hat{w} = f(z) e^{i(kx - \lambda t)} \quad (\text{B.26})$$

$$\hat{T} = h(z)e^{i(kx - \lambda t)} \quad (\text{B.27})$$

dove  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda = \omega + i\eta$ ,  $\omega$  **frequenza angolare** e  $\eta$  **tasso di crescita della perturbazione**.

In questo modo, volendo studiare la stabilità, si ha che:

- $\eta > 0 \Rightarrow$  INSTABILE.
- $\eta = 0 \Rightarrow$  STABILITA' NEUTRALE.
- $\eta < 0 \Rightarrow$  STABILE.

Sostituendo quindi le B.26 e B.27 nel sistema B.25 e scrivendo che:

$$\begin{aligned} D &\equiv \frac{d}{dz}, \quad \nabla_2^2 = -K^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -i\lambda \\ &\Rightarrow \nabla^2 = D^2 - K^2 \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} \left( -\frac{i\lambda}{Pr} - D^2 + K^2 \right) (D^2 - K^2) f = -K^2 Ra h \\ -i\lambda h - f = (D^2 - K^2) h \\ (i\lambda + D^2 - K^2) h + f = 0 \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Le funzioni  $f$  e  $h$  dovranno soddisfare le condizioni al contorno in  $z = 0, 1$ . Dunque scrivendo

$$h(z) = \sin(n\pi z) \quad \forall n \quad (\text{B.29})$$

tale funzione e la sua derivata soddisfano le condizioni al contorno.

Conviene compattare la prima e la seconda equazione del sistema B.28 in modo da avere una sola funzione incognita. Ricavando dalla seconda la  $f$  e inserendola nella prima si ha:

$$\left( -\frac{i\lambda}{Pr} + D^2 - K^2 \right) (D^2 - K^2) (i\lambda + D^2 - K^2) h + K^2 Ra h = 0 \quad (\text{B.30})$$

Le condizioni al contorno diventano:

$$z = 0, 1 : \quad h = 0, \quad f = 0, \quad D^2 f = 0 \quad (\text{B.31})$$

Le condizioni sulla  $f$  si ricavano dalla seconda del sistema B.28:

$$(i\lambda - K^2)h + D^2 h + f = 0$$

Nell'intervallo  $[0, 1]$  la si può derivare rispetto a  $z$  due volte

$$(i\lambda - K^2)D^2h + D^4h + D^2f = 0 \quad \forall z \in [0, 1]$$

Per  $z = 0, 1 \Rightarrow \underbrace{D^2h = 0}_{\text{Condizione di stress nullo}} \Rightarrow D^4f = 0$

Ovvero le condizioni al contorno si scrivono come:

$$z = 0, 1 : \quad h = 0, \quad D^2h = 0, \quad D^4h = 0 \quad (\text{B.32})$$

La soluzione B.29 soddisfa le tre condizioni al contorno B.32. Essa, però, deve anche soddisfare l'equazione differenziale B.30, quindi, sostituendola si ha:

$$\left( \frac{i\lambda}{Pr} - n^2\pi^2 - K^2 \right) (n^2\pi^2 + K^2) (i\lambda - n^2\pi^2 - K^2) - K^2Ra = 0 \quad (\text{B.33})$$

La B.33 è una soluzione algebrica nel campo dei complessi e rappresenta un **relazione di dispersione** che lega  $(Ra, \lambda, Pr, K)$ . Questa equazione si può quindi dividere in due equazioni in campo reale mettendo al posto di  $i\lambda$  il valore  $i\omega - \eta$ .

$$\left( \frac{i\omega - \eta}{Pr} - n^2\pi^2 - K^2 \right) (n^2\pi^2 + K^2) (i\omega - \eta - n^2\pi^2 - K^2) - K^2Ra = 0$$

Parte immaginaria:

$$\frac{i\omega}{Pr} (n^2\pi^2 + K^2) (\eta + n^2\pi^2 + K^2) + i\omega (n^2\pi^2 + K^2) \left( \frac{\eta}{Pr} + n^2\pi^2 + K^2 \right) = 0$$

$$\boxed{\omega (n^2\pi^2 + K^2) \left[ \frac{2\eta}{Pr} + (n^2\pi^2 + K^2) \left( \frac{1}{Pr} + 1 \right) \right] = 0} \quad (\text{B.34})$$

Quando  $\eta \geq 0$  (instabilità),  $\omega$  moltiplica due fattori sicuramente positivi. L'unica soluzione, in questo caso è che  $\omega$  sia nullo, ovvero onde con velocità di fase nulla. Queste onde sono dette **onde stazionarie**. La B.34 rappresenta il **principio di scambio delle stabilità**.

Parte reale:

$$-\frac{\omega^2}{Pr} (n^2\pi^2 + K^2) + \left( \frac{\eta}{Pr} + n^2\pi^2 + K^2 \right) (n^2\pi^2 + K^2) (\eta + n^2\pi^2 + K^2) - K^2Ra = 0$$

Dividendo per  $K^2$  si ottiene:

$$\boxed{Ra = \frac{\left( \frac{\eta}{Pr} + n^2\pi^2 + K^2 \right) (n^2\pi^2 + K^2) (\eta + n^2\pi^2 + K^2) - \frac{\omega^2}{Pr} (n^2\pi^2 + K^2)}{K^2}} \quad (\text{B.35})$$

Se si è nel caso instabile ( $\eta \geq 0$ ), sparisce l'addendo a numeratore ( $\omega = 0$ ), ottenendo

$$Ra = \frac{\left(\frac{\eta}{Pr} + n^2\pi^2 + K^2\right)(n^2\pi^2 + K^2)(\eta + n^2\pi^2 + K^2)}{K^2} \quad (\text{B.36})$$

Il primo fattore sarà:

$$\frac{\eta}{Pr} + n^2\pi^2 + K^2 > n^2\pi^2 + K^2$$

e l'ultimo:

$$\eta + n^2\pi^2 + K^2 > n^2\pi^2 + K^2$$

Quindi per la B.36 si può dire che:

$$Ra \geq \frac{(n^2\pi^2 + K^2)^3}{K^2} \quad (\text{B.37})$$

Riassumendo:

- Stabilità neutrale:  $\eta = 0 \Rightarrow Ra = \frac{(n^2\pi^2 + K^2)^3}{K^2}$
- Instabilità:  $\eta > 0 \Rightarrow Ra > \frac{(n^2\pi^2 + K^2)^3}{K^2}$

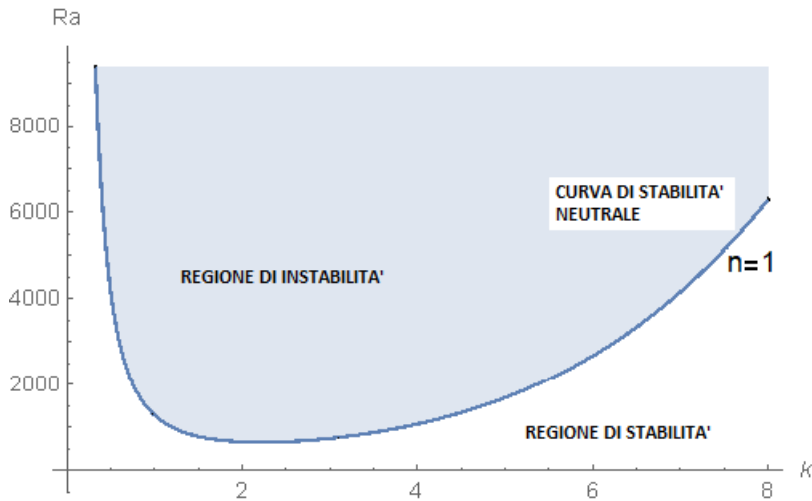


Figura B.4: Curva di stabilità



# Appendice C

## Shooting Method

Si vuole dare una spiegazione intuitiva dello *Shooting Method*.

Questo è un metodo numerico per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie ai valori iniziali. Se ad esempio si deve risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' - 2y = x(9 - x) \\ y(0) = 0 \\ y(9) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

dove  $y = y(x)$  e  $x \in [0, 9]$ .

Il problema C.1 non è risolvibile così come è scritto, in quanto non è un problema di Cauchy.

Allora, ciò che si fa, è risolvere il problema Cauchy associato imponendo un valore arbitrario di  $y'$  nel punto 0 (per esempio  $y'(0) = 4$ ) e successivamente si trova la soluzione al variare del valore imposto in  $y'(0)$  fino a quando non si soddisfa la condizione  $y(9) = 0$ .

$$\begin{cases} y'' - 2y = x(9 - x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

La soluzione del problema C.2 si può trovare anche per via numerica, ma potendola trovare senza problemi per via analitica si ha:

$$y(x) = \frac{1}{4} \left( 2(1 + x(x - 9)) - 2 \cosh(\sqrt{2}x) + 17\sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}x) \right) \quad (\text{C.3})$$

Calcolando il valore della funzione C.3 nel punto  $x = 9$  si ottiene  $y(9) = 928582$  che risulta molto maggiore del valore che si deve ottenere nella C.1. Innescando quindi un ciclo iterativo in cui si fa variare il valore di  $y'(0)$  nella C.2, si ricava la nuova funzione soluzione  $y(x)$  e se ne calcola il valore in  $x = 9$  bloccando il ciclo quando  $y(9) \simeq 0$ .

Ciò che si ottiene è  $y(9) = 0.00201877$  per  $y'(0) = 0.00177885$ .



# Appendice D

## Metodi Numerici per ODE ai Valori Iniziali

In questa appendice non si vuole descrivere i metodi numerici per la risoluzione di ODE ai valori iniziali, ma si vuole introdurre alcuni dei concetti per soffermarsi sui metodi Runge Kutta.

In particolare è stato usato come testo di riferimento il libro *Computational Methods for Fluid Dynamics*, di J.H.Ferziger e M.Peric' [9].

### D.1 Metodi a Due Livelli

Per i problemi ai valori iniziali si può considerare il problema differenziale al primo ordine del tipo:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = f(t, \phi(t)) \\ \phi(t_0) = \phi^0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Il problema consiste nel trovare la soluzione  $\phi$  nel tempo  $\Delta t$  dato il punto iniziale. La soluzione a  $t_1 = t_0 + \Delta t$  è  $\phi^1$ , la quale può essere usata come condizione iniziale per l'istante  $t_2 = t_1 + \Delta t$  ...etc.

Un metodo semplice può essere quello di integrare l'equazione D.1 da  $t_n$  a  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\phi}{dt} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt \quad (\text{D.2})$$

la quale diventa:

$$\phi^{n+1} - \phi^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt \quad (\text{D.3})$$

La D.3 è l'equazione esatta. Però, l'integrale non può essere valutato senza conoscere la soluzione esatta  $\phi(t)$ , quindi risulta necessaria una approssimazione dell'integrale e per farlo si può usare una formula di quadratura.

- *Metodo esplicito* o *Metodo di Eulero in avanti (forward Euler)*: se l'integrale è valutato usando i valori nel punto iniziale si ottiene

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \Delta t \quad (\text{D.4})$$

- *Metodo implicito* o *Metodo di Eulero all'indietro (backward Euler)*: se l'integrale è valutato usando i valori nel punto finale si ottiene

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f(t_{n+1}, \phi^{n+1}) \Delta t \quad (\text{D.5})$$

- *Metodo del punto medio*: se l'integrale è valutato usando i valori nel punto medio si ottiene

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{n+\frac{1}{2}}\right) \Delta t \quad (\text{D.6})$$

- *Interpolazione lineare* o *regola dei trapezi*: se l'integrale viene valutato usando un'interpolazione lineare tra il punto finale e quello iniziale allora si ha

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} [f(t_n, \phi^n) + f(t_{n+1}, \phi^{n+1})] \Delta t \quad (\text{D.7})$$

Questi sono chiamati metodi a due livelli perché richiamano valori a due istanti di tempo differenti. In generali si ottengono risultati affidabili per valori di  $\Delta t$  piccoli.

## D.2 Metodi Predictor-Corrector e Metodi a Multipunti

Nel Metodi Predictor-Corrector la soluzione al nuovo istante temporale è preannunciata usando il metodo di Eulero esplicito:

$$\phi_{n+1}^* = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \Delta t \quad (\text{D.8})$$

dove \* indica che la soluzione non è quella definitiva.

Dopodiché la soluzione viene corretta usando la regola dei trapezi:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} [f(t_n, \phi^n) + f(t_{n+1}, \phi_{n+1}^*)] \Delta t \quad (\text{D.9})$$

I metodi multipunti, invece, esegue una interpolazione polinomiale su un diverso numero di punti. Un esempio sono i metodi *Adam-Bashforth*: per la soluzione al primo ordine si usa il metodo esplicito di Eulero, per il secondo e terzo ordine invece

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} [3f(t_n, \phi^n) - f(t_{n-1}, \phi^{n-1})] \quad (\text{D.10})$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{12} [23f(t_n, \phi^n) - 16f(t_{n-1}, \phi^{n-1}) + 5f(t_{n-2}, \phi^{n-2})] \quad (\text{D.11})$$

In questo caso la soluzione nuova dipende da ciò che succede prima. Se invece si conoscono i dati agli istanti sia precedenti che successivi, si può calcolare la soluzione tramite una interpolazione polinomiale, ad esempio con il metodo di *Adams-Moulton*:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{12} [5f(t_{n+1}, \phi^{n+1}) + 8f(t_n, \phi^n) - f(t_{n-1}, \phi^{n-1})] \quad (\text{D.12})$$

### D.3 Metodi Runge-Kutta

Il metodo Runge-Kutta del secondo ordine consiste nel calcolare tramite il metodo di Eulero esplicito la soluzione (predictor)  $\phi_{n+\frac{1}{2}}^*$  e di seguito usarla per trovare la soluzione (corrector)  $\phi^{n+1}$ :

$$\phi_{n+\frac{1}{2}}^* = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, \phi^n) \quad (\text{D.13})$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^*\right) \Delta t \quad (\text{D.14})$$

I metodi Runge-Kutta sono molto utilizzati, in particolare quello del quarto ordine in cui si ha:

$$\phi_{n+\frac{1}{2}}^* = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, \phi^n) \quad (\text{D.15})$$

$$\phi_{n+\frac{1}{2}}^{**} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^*) \quad (\text{D.16})$$

$$\phi_{n+1}^* = \phi^n + \Delta t f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^{**}) \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{6} [ & f(t_n, \phi^n) + 2f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^*) + \\ & 2f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^{**}) + f(t_{n+1}, \phi_{n+1}^*) ] \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Questi metodi aumentano di difficoltà computazionale con l'aumentare dell'ordine. Infatti con un ordine di tipo  $n$  servono  $n$  equazioni per definire la funzione  $\phi^{n+1}$ .

# Bibliografia

- [1] LS de B Alves and A Barletta. Convective instability of the darcy-bénard problem with through flow in a porous layer saturated by a power-law fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 62:495–506, 2013.
- [2] A Barletta and DA Nield. Linear instability of the horizontal through-flow in a plane porous layer saturated by a power-law fluid. *Physics of Fluids*, 23(1):013102, 2011.
- [3] Antonio Barletta. Local energy balance, specific heats and the oberbeck-boussinesq approximation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009.
- [4] Antonio Barletta. *Heat Transfer in MultiPhase Materials*, volume 2. Springer, 2011.
- [5] M Celli, A Barletta, S Longo, L Chiapponi, V Ciriello, V Di Federico, and A Valiani. Thermal instability of a power-law fluid flowing in a horizontal porous layer with an open boundary: A two-dimensional analysis. *Transport in Porous Media*, pages 1–23, 2017.
- [6] R.P. Chhabra and J.F. Richardson. In *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology (Second Edition)*, pages 1 – 55. Butterworth-Heinemann, Oxford, second edition edition, 2008.
- [7] F Di Paola and Francesco Paolo Pinnola. *Calcolo Frazionario & Viscoelasticità*. Tesi di laurea, Dipartimento di Ingegneria Civile Ambientale e Aerospaziale, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italy, [http://www1.unipa.it/fabio.bagarello/didattica/Di% 20Paola% 20e% 20Pinnola calcolo% 20frazionario. pdf](http://www1.unipa.it/fabio.bagarello/didattica/Di%20Paola%20e%20Pinnola%20calcolo%20frazionario.pdf).
- [8] Donald A Nield, Adrian Bejan, and Nield-Bejan... volume 3 of *Convection in porous media*. Springer, 2006.
- [9] R.Pantani. *Elementi di viscoelasticità*. Presentazione, Dipartimento di Ingegneria Civile Ambientale e Aerospaziale, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italy,

<http://www.polymertechnology.it/bacheca/NanocompositeForm/page6/files/Viscoelasticity.pdf>.

- [10] Yu-Shu Wu and Karsten Pruess. Chapter 2 flow of non-newtonian fluids in porous media. volume 3 of *Advances in Porous Media*, pages 87 – 184. Elsevier, 1996.