Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Lo sviluppo cognitivo e la percezione geometrica nell'epistemologia di Enriques, Klein e Speranza.

Analisi dei risultati di un questionario somministrato in due scuole secondarie.

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Prof.ssa
ALESSIA CATTABRIGA

Presentata da:
EUGENIA BOLDRINI

Sessione Unica
Anno Accademico 2017/2018

A chi vuole insegnare
e a chi vuole imparare.

Introduzione

Questo elaborato ha lo scopo di analizzare i collegamenti che intercorrono tra lo sviluppo cognitivo e l'apprendimento dei concetti geometrici: entrambi questi processi iniziano presto nella fase evolutiva ed è necessario che proseguano parallelamente affinché l'acquisizione psicologica delle conoscenze geometriche avvenga correttamente. Le diverse interpretazioni di come ciò venga ad accadere sono uno degli aspetti di cui tratta l'epistemologia della scienza – e in particolare della matematica – disciplina che si occupa di indagini e riflessioni critiche riguardanti le strutture logiche, i fondamenti, le metodologie e, appunto, l'origine e lo sviluppo delle conoscenze scientifiche. Gli studi epistemologici che saranno alla base di questa trattazione sono frutto delle ricerche di tre eminenti matematici: Federigo Enriques (1871-1946), Felix Klein (1849 - 1925) e Francesco Speranza (1932-1998). Le loro esperienze nel complesso abbracciano più di un secolo di storia della matematica e, sebbene in misura diversa, i contributi che ognuno di loro ha dato all'evoluzione delle epistemologia hanno avuto dei risvolti notevoli, che verranno analizzati in questa tesi.

Il motivo che ha portato alla scelta di questi personaggi è, oltre alla già citata continuità che garantiscono alla narrativa di questi argomenti, l'intrinseco collegamento che le loro visioni della matematica possiedono: in particolare, le idee di ciascuno riguardo quale sia *spirito della Geometria* – e come esso venga tradotto in un'ottica rivolta all'insegnamento – risuonano fra loro, ed è Speranza stesso che riporta alcune citazioni degli altri due matematici a sostegno della sua posizione in favore dell'«empirismo in geometria, ma sarebbe più giusto [...] razionalismo sperimentale che è la concezione fondamentale sottostante alla scienza da Galileo in poi. Essa permette di evitare sia lo Scilla dell'idealismo (in cui finirono i kantiani) sia il Cariddi del sensismo alla Sesto Empirico (per il quale la geometria non ha senso, perché nella realtà non esistono oggetti che abbiano solo lunghezza e non larghezza e spessore). Questa terza via, a mio avviso, dà particolare importanza all'insegnamento e all'apprendimento: infatti, lo spazio non è qualcosa di bell'e pronto che bisogna *imparare* e neppure una pura e semplice struttura mentale (o neurologica); va invece *formato* con adeguate strategie». Sono infatti convinti anche gli altri due autori, come si desume dalle citazioni presenti in [35], della centralità che l'esperienza e il riscontro con la realtà debbano avere all'interno della formazione dei concetti geometrici:

> *"Il difetto dello spirito matematico è di non comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile istrumento dialettico."* (F. Enriques, *Problemi della scienza*).
>
> *"Ritengo impossibile sviluppare considerazioni geometriche se non ho sempre davanti a me la figura alla quale si riferiscono. Una geometria analitica fatta solo di calcoli, che abolisce le figure, non può essere considerata vera geometria."* (F.Klein, *Zur Nicht-Euklidische Geometrie*).

Un altro aspetto che ricorre nelle loro trattazioni è la discussione sul ruolo che l'intuizione deve avere all'interno della didattica: nell'introduzione alle sue *Lezioni di Geometria proiettiva*, Enriques obietta il fatto che «si considera generalmente come criterio teorico di perfezione (logica) lo scegliere il minimo numero possibile di elementi geometrici come fondamentali; ma questo criterio [...] non soddisfa sempre il senso psicologico dell'intuizione, allorché porta a sostituire con una definizione la nozione intuitiva di un elemento di cui la mente ha una chiarissima immagine». È d'accordo con lui Speranza quando in [36] suggerisce che un'ottima pratica didattica, per tutti i livelli scolastici, sarebbe quella di «spingere gli allievi, almeno ogni tanto, a fare delle congetture: e sarebbe opportuno che qualche volta esse non fossero corrette (dopotutto, anche la Matematica avanza di solito attraverso congetture che solo in un secondo momento vengono falsificate o dimostrate o restano congetture). Si lavora dunque sulla geometria come se fosse una scienza sperimentale». Concorda con entrambi Klein che esprime in [18] la sua volontà di rendere centrale l'intuizione argomentando che «l'insegnamento non può dipendere solo dalla materia, ma dipende soprattutto dal soggetto a cui devi insegnare [...]. Applicato in particolare alla geometria, questo significa che nelle scuole si dovrà sempre collegare l'insegnamento all'inizio con una vivida intuizione concreta e quindi solo gradualmente portare elementi logici al centro; in generale, il solo metodo genetico fornirà un mezzo legittimo per sviluppare lentamente una piena comprensione dei concetti» . Anche questo stesso metodo genetico di cui si parla – che altro non è che l'applicazione epistemologica della teoria dello sviluppo cognitivo a cui si è fatto riferimento precedentemente – ha un ruolo preminente all'interno del pensiero di questi matematici. Infine va menzionato, come ulteriore ragione che comprova la scelta di basarsi proprio sulle teorie di Enriques, Klein e Speranza e sui loro legami, il pensiero comune agli scienziati sulla necessità di infondere un nuovo senso di unitarietà alla scienza. L'interpretazione della seguente citazione di Enriques:

> *"Il progresso delle conoscenze e dei metodi di ricerca importa bensì una differenziazione e coordinazione del lavoro scientifico* [...]*; ma i problemi che la realtà pone al nostro spirito non sono in alcun modo ordinati secondo ragioni obiettive di affinità entro schemi prefissati. Non vi sono scienze separate e distinte che si lascino disporre in una gerarchia naturale, ma una scienza sola."*

da parte di Speranza in [33] è che, quando si organizza il sapere, si potrebbe cadere in errore considerando i principi nascosti secondo cui questa classificazione è avvenuta come «metafisiche implicite *naturali, necessarie* e imporre agli scienziati queste divisioni e subordinazioni». Klein, oltre a riportare delle opinioni simili nei suoi scritti [17, 18], incarna per eccellenza grazie al suo

Programma questo ideale di ricerca di fusione e unificazione, in particolare per la Geometria.

Nello specifico, in questa tesi si inizia [Capitolo 1] riportando quali siano stati nel corso degli ultimi due secoli gli sviluppi che diversi nuovi risultati derivanti dal dominio della Psicologia e della Fisiologia hanno prodotto nell'ambito dell'epistemologia della Matematica e in particolar modo della Geometria. Si farà riferimento specialmente alle opere [8, 9] di Enriques e alle idee di Speranza, riportate in [33]: questi due matematici danno una spiegazione del rapporto che intercorre tra il processo di costruzione della conoscenza geometrica e l'esperienza sensoriale, riconducendo i diversi tipi di Geometria (continua, metrica e proiettiva) a diversi gruppi di esperienze sensoriali (tattili-muscolari, del tatto speciale, visive).

La possibilità di parlare di diverse Geometrie è qualcosa che caratterizza l'impostazione più recente di tale disciplina e uno dei momenti cruciali per la nascita della Geometria moderna è la presentazione nel 1872 da parte di Klein del cosiddetto "Programma di Erlangen", di cui si tratterà nel secondo capitolo. L'obiettivo di tale manifesto era quello di rispondere all'esigenza di una sistemazione delle Geometrie più unitaria, che superasse, comprendendole, l'impostazione euclidea e le innovazioni non euclidee. In particolare, nel Capitolo 2 saranno riportate le basi teoriche della teoria di classificazione che Klein espone nel suo Programma, seguendo in parte la traduzione di Gino Fano [17], da cui sarà mutuata la terminologia, e in parte l'analisi contenuta nell'introduzione di [7]. Il focus sarà soprattutto sull'impostazione costruttiva del Programma e su quali siano le conseguenze che questo ha avuto a livello storico ed epistemologico: come si legge in Bourbaki, «superata come scienza autonoma e vivente, la geometria classica si è trasfigurata in un linguaggio universale della matematica contemporanea».

Successivamente, nel terzo capitolo si affronterà l'impatto che il Programma di Erlangen e le teorie epistemologiche inerenti allo sviluppo della conoscenza geometrica illustrate precedentemente hanno avuto da un punto di vista didattico. Si analizzeranno, nella prima parte [Sezione 3.1], le idee espresse da Klein stesso sull'insegnamento della matematica in [18], mentre la seconda parte del capitolo [Sezione 3.2] sarà focalizzata sulla visione che ha Speranza di tali questioni, come illustrata in [34].

Questo percorso di scoperta dei concetti geometrici, così come la differenziazione nei vari livelli dello sviluppo psicologico e in che modo essa permetta di «desumere dalle sensazioni la rappresentazione dello spazio» sono alla base dell'indagine che si è deciso di svolgere in questa tesi, al fine di studiare quale sia la nozione naturale e intrinseca che a scuola si crea di Geometria. Questo studio è consistito nella somministrazione di un questionario – basato su quello creato da Medici, Speranza e Vighi per la ricerca esposta in [23] – a degli studenti di due scuole secondarie (rispettivamente 113 studenti provenienti da una scuola secondaria di primo grado e 93 da una di secondo grado). L'analisi delle risposte è riportata nel quarto e ultimo capitolo, e segue sia una linea "orizzontale" [Sezione 4.2] – all'interno della quale i raffronti sono fatti tra le concezioni di studenti della stessa età ma di epoche diverse, rifacendosi ai risultati del questionario del 1986 contenuto in [23] e a quelli ottenuti nel 2018 in occasione di questa tesi – che "verticale" [Sezione 4.3] – le risposte degli studenti di scuola secondaria di primo e di secondo grado che hanno svolto il questionario vengono confrontate sia tenendo conto del diverso livello d'istruzione che dei vari stadi dello sviluppo cognitivo a cui corrispondono le loro diverse età. Come anche segnalato da Medici, Speranza e Vighi, gli esiti di questo questionario possono essere utili per la preparazione di strategie didattiche e persino per studiare le origini delle teorie matematiche, due angolazioni che potrebbero essere analizzate con l'intento di ampliare i risultati ottenuti in questa tesi.

Al di là dell'obiettivo primario di questa indagine, gli studenti si sono mostrati entusiasti e piacevolmente sorpresi dal fatto che le domande potessero avere più risposte "corrette" e dalla libertà di espressione che veniva concessa loro. Ecco nello specifico alcuni dei commenti che gli alunni hanno lasciato:

> «Il questionario forse non ha una risposta corretta in assoluto ma spinge più a cercare caratteristiche comuni tra le figure e dunque il ragio-

> namento che ha portato ad una conclusione risulta più interessante della conclusione».
>
> «Le domande erano appositamente vaghe, ho apprezzato questa scelta perché mi ha spinta a ragionare maggiormente su quesiti che seppur non complessi offrivano una larga gamma di interpretazioni».
>
> «Sembra un questionario facile ma tende molti tranelli quindi in molte cose ho avuto dei dubbi e ho cercato di andare per esclusione o a logica. Lo scopo di questo questionario credo proprio sia quello di mettere in dubbio cose che appaiono ovvie ma non sono, quindi penso sia fatto molto bene».
>
> «Questo questionario è stato molto interessante e mi ha fatto ricordare quante cose pensiamo di sapere riguardo ad un argomento, ma del quale infondo non conosciamo più di tanto».
>
> «Carino come test, alcune domande non sono vere o false ma vogliono semplicemente vedere come ragioni e qual è la tua prima impressione visiva su una figura geometrica, mi piace».
>
> «A mio parere il questionario è risultato interessante, in particolare per l'ambiguità delle possibilità di risposta. Sapendo che non c'era una risposta più esatta dell'altra sono stata spinta ad osservare in modo più approfondito tutte le domande».

Questi giudizi riflettono ed esplicitano una visione dell'insegnamento come un qualcosa che incuriosisce, fa riflettere, accende l'interesse: come si legge nell'articolo "Prof e ragazzi: patto anti-noia" di D'Avenia pubblicato in occasione dell'apertura di questo anno scolastico, «educare è aiutare a crescere, l'interesse non è quindi il frutto di effetti speciali più o meno tecnologici, ma la conseguenza del fatto che gli oggetti che presentiamo all'attenzione dei ragazzi hanno ragione di bene, di vero e di bello, e i ragazzi vi si aggrappano [...], perché sanno, anzi sentono prima di saperlo, che questo li aiuterà a crescere. Crescere è infatti, a qualsiasi età, l'unico modo che l'uomo ha per guadagnare tempo, cioè per dare scacco alla morte portando a compimento il progetto di vita che è».

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Come nascono le conoscenze geometriche: studi epistemologici e psicologici

Lo scopo di questo primo capitolo è quello di riportare quali siano stati nel corso degli ultimi due secoli gli sviluppi che diversi nuovi risultati derivanti dal dominio della Psicologia e della Fisiologia hanno prodotto nell'ambito dell'epistemologia della Matematica ed in particolar modo della Geometria. Tale disciplina, e più in generale l'epistemologia della scienza, si occupa di indagini e riflessioni critiche riguardanti le strutture logiche, i fondamenti, le metodologie e, aspetto sul quale si è scelto di focalizzarsi all'interno di questa tesi, l'origine e lo sviluppo delle conoscenze scientifiche. In particolare si farà riferimento al pensiero di Federigo Enriques (1871-1946) come espresso in [8, 9], e alle idee di Francesco Speranza (1932-1998), riportate in [33], a cui si rimanda per eventuali approfondimenti.

1.1 L'epistemologia: metodo e strumento

Diversi sono i ruoli che si possono attribuire all'epistemologia dentro ad un progetto di analisi e di creazione di percorsi educativi per la Matematica, e sono questi che Speranza si propone di analizzare in [34]. In questo contesto, egli sostiene che si possa parlare di epistemologia storica, che ripercorre il formarsi del pensiero matematico dall'antichità a oggi, oppure di epistemologia genetica, che invece si concentra nel seguire lo sviluppo dell'uomo.

Tra coloro che fanno propria l'una o l'altra visione, spicca Enriques, che in [9, p. 87] ipotizza che queste siano strettamente connesse argomentando che «le *ragioni storiche* (che possono essere contrapposte all'*eredità* biologica) costituiscono un primo indirizzo di spiegazione; ma alla veduta storica si può aggiungere una *critica* dei *processi mentali*, che valga propriamente a dilucidare la *formazione* e la *variazione* dei concetti».

L'autore che Speranza poi elegge a capo della corrente genetica è Piaget, il quale in [26] si addentra in studi epistemologici, fortemente influenzati dalle sue ricerche psicologiche sperimentali, che si collacano, citando Speranza [34], «entro un doppio quadro di riferimento teorico: da un lato la sua teoria della *psicogenesi delle conoscenze*, basata sulla sequenza degli *stadi* e dei *sotto-stadi*; dall'altro, per quanto riguarda la Matematica, lo strutturalismo bourbakista (riferito soprattutto alle *strutture madri*, algebriche topologiche e d'ordine, che danno, nell'ambito della Matematica moderna, una descrizione coerente alla Matematica classica)».

Due dei concetti distintivi della teoria di Piaget sono infatti lo *strutturalismo* e l'*empirismo*. Il primo si fonda sul presupposto che ogni oggetto di studio costituisca una struttura, cioè un insieme organico i cui elementi non possono esistere in autonomia ma assumono valore solo nelle relazioni che ciascun elemento ha con tutti gli altri. In particolare Piaget in [25] tenta di conciliare la dimensione storica e quella fisiologica nella prospettiva di uno "strutturalismo genetico" che superi le contrapposizioni di questo genere tipiche dell'innatismo – concezione che considera l'uomo fin dalla nascita in possesso di determinate conoscenze. Ed è proprio la corrente opposta all'innatismo, l'empirismo, quella di cui il pedagogista si fa portavoce: egli ritiene essenziale l'esperienza poiché è solo tramite essa che la conoscenza può venire acquisita, convinzione in linea con i risultati ottenuti in diversi esperimenti sui processi cognitivi, che sono gli strumenti con i quali l'organismo acquisisce informazioni dall'ambiente, le elabora ed esercita su queste un controllo.

Speranza dichiara di condividere l'appello empirista di Piaget, riservandosi però la facoltà di limitare all'interno del quadro teorico l'applicabilità dello strutturalismo, nel caso si dovesse rivelare troppo rigido ed aprioristico. Tale critica è stata mossa da molti studiosi a Piaget e Speranza propone di risolverla considerando nel suo programma un "nocciolo" teorico fondamentale con una "fascia protettiva" che invece lo scienziato è disposto a sacrificare in caso di divergenze con l'esperienza, come suggerito da Lakatos in [20].

La volontà di seguire le orme di Piaget l'epistemologo la esplicita affermando che:

> Per essere utile alla didattica e per essere vicina all'effettiva costruzione del pensiero matematico, una epistemologia deve essere sostanzialmente genetica, e quindi anche sperimentale. Ciò implica che il sorgere del pensiero matematico va cercato nei bambini, negli adolescenti, a volte in adulti non particolarmente colti in Matematica, a volte, in casi limite, negli stessi matematici.

Prima di addentrarsi nell'analisi di come si sviluppino le conoscenze geometriche – seguendo la teoria genetica-sperimentale dell'epistemologia appena descritta – è doveroso ragionare ancora sull'ottica con cui affrontare un qualsiasi ragionamento basato sulla teoria della conoscenza. Anche Speranza si aggiunge alla lunga lista di studiosi che hanno riflettuto sulla natura delle conoscenze matematiche: sono esse innate, perché riguardano oggetti ideali che hanno una loro esistenza autonoma, come riteneva Platone, o perché le loro leggi sono connaturate nel nostro modo di pensare, che era l'opinione di Kant, oppure hanno origine nell'esperienza? Tra il considerare i concetti matematici come *a priori* o meno, Speranza in [34] si schiera dalla parte del no, opinione che ovviamente estende alle singole discipline: partendo dalla Geometria, che, a seguito della dimostrazione della validità logica delle geometrie euclidee e non euclidee ha perso il suo status di disciplina "intrinseca", per arrivare alla Logica stessa che, come anche ritengono Enriques e Piaget, non può essere a priori ma deriva dall'esperienza (una giustificazione possibile fa riferimento alla scoperta e allo studio di alcune Logiche alternative sia nella nostra stessa corrente di pensiero che presso altre civiltà).

Un altro dubbio che Speranza esprime riguarda quale momento tra quelli del percorso di studio della Matematica mettere al centro della propria indagine. La domanda che egli pone è la seguente: « Noi siamo interessati alla *conoscenza* della Matematica come insieme di teorie già costruite oppure alla *costruzione* del pensiero matematico?». Dalle riflessioni successive deriva la sua definitiva preferenza per la seconda delle due alternative, perché più aperta alla possibilità di analizzare i diversi livelli di costruzione del pensiero e soprattutto poiché in questo modo «non solo la ricerca di come si formano le teorie, ma anche la ricerca di come si organizzano i concetti diventa interessante».

1.2 Il significato reale della Geometria

Per poter arrivare a capire la genesi e appunto l'organizzazione dei concetti geometrici, in [9] Enriques parte con una riflessione sul significato e la visione di Geometria che egli ed altri studiosi, tra cui Speranza, condividono.

Nella controversia fra il *realismo*, concezione secondo la quale gli oggetti della Matematica hanno una realtà propria, indipendente dal soggetto che li studia, e il *nominalismo*, posizione in cui si ritrova chi assume «non potersi parlare della Geometria come di una scienza fisica, perché lo spazio non risponde ad alcun oggetto reale, ma esprime soltanto una forma subiettiva [1] della sensibilità», la finalità di Enriques è di trovare un equilibrio tra le due posizioni. Il matematico riassume la disputa in questo modo:

> Così alla tesi di Kant che nega l'esistenza di un oggetto reale rispondente alla parola «spazio», si oppone con Herbart [14] il riconoscimento della realtà dei «rapporti spaziali»; e al nominalismo, recentemente sostenuto da Poincaré [30], che mette in luce come codesti rapporti non

[1] Cioè soggettiva.

> abbiano un significato reale indipendente in modo assoluto dai corpi, si contrappone una più precisa valutazione della Geometria, intesa come parte della Fisica.

In particolare, l'ipotesi che la Geometria debba precedere in un'esposizione formale sia la Meccanica che la Fisica, poiché le concezioni geometriche sono alla base anche nelle ricerche fisiche, era uso convertirla erroneamente in un rapporto di dipendenza necessaria che si esprime appunto nell'«a priori» kantiano. La critica di Enriques è motivata dai successivi studi della filosofia evoluzionista, che danno una visione più adeguata dello sviluppo delle conoscenze: l'interpretazione per mezzo di conoscenze anteriori si accetta in un senso diverso da quello kantiano, ovvero riconoscendo il graduale sviluppo di ciascuna a partire dai dati empirici e dalle nozioni semplici fino a costituire le basi di una dottrina relativamente autonoma. Sotto questa ottica, egli traduce e quindi ribalta i rapporti tra Geometria e Fisica che aveva stabilito Kant, caratterizzando ora la prima come parte della seconda, dotata di un più alto grado di perfezione, in virtù della semplicità, della generalità e della relativa indipendenza dei rapporti che comprende.

Prima di entrare nel vivo della questione, occorre segnalare la distinzione critica che Enriques attua fra lo *spazio fisico* (supposto conforme alla tesi realistica della teoria della conoscenza), del quale la geometria può essere nota soltanto in via approssimata, la *rappresentazione sensibile*, approssimativa anch'essa, che ognuno si forma dello spazio, e il *concetto* o i concetti che cadono sotto l'intuizione geometrica del matematico. Data la ripartizione, scaturisce il problema di ottenere e dedurre i concetti spaziali dalle rappresentazioni sensibili, di cui la psicologia fisiologica mostra la genesi – nei termini di Enriques, «di derivare il concetto matematico dello spazio dalle rappresentazioni spaziali che le sensazioni hanno tratto dal mondo esterno» – e spiegare i postulati della Geometria, che così viene soggettivamente costruita, riconnettendone la necessità alla struttura logica del pensiero.

Tornando all'idea di spazio con la tripartizione appena citata in mente, Enriques ritiene che esso non sia soltanto una intuizione che permette di ordinare le percezioni empiriche, ma anche un concetto, ed è proprio questo suo significato psicologico che egli rivendica al fine di poter donare alla Geometria il meritato ruolo di scienza deduttiva, grazie appunto al significato logico astratto che lo spazio possiede. Vi è un momento in cui Enriques pone esplicitamente la domanda "che cosa sia lo spazio": per quanto una definizione possa contribuire a conferire alla parola un senso di imprecisione o di indeterminatezza – porta l'esempio di una palla sferica, capace di espandersi fin quando non sarà diventata infinita e avrà riempito tutto lo spazio, procedimento che egli stesso definisce "trascendente" a causa dell'uso implicito e improprio del concetto di limite – ciò che resta di essa è un significato fisico effettivo per quanto riguarda i rapporti spaziali, ovvero la posizione reciproca dei corpi. E la sicurezza che questi rapporti contengano una conoscenza reale risulta dal fatto che le relazioni proprie della Geometria – quali quelle di allineamento, equidistanza, e così via – corrispondono ad affermare che ci sia una concordanza continuativa «fra certi atti volontarii e le sensazioni che ne seguono». Più dettagliatamente, Enriques prosegue poi argomentando che «il concetto dello spazio, nella sua accezione matematica, rappresenta l'insieme dei rapporti (geometrici) fra i punti, fatta astrazione delle sensazioni particolari che si riattaccano all'immagine del punto. Lo spazio viene così pensato come una *varietà di elementi qualunque*, cui si dà il nome di "punti", perché sono dati in certe relazioni di ordine atte a rappresentare con una grande approssimazione i rapporti di posto intercedenti fra i corpi molto piccoli (punti fisici)».

Questa indefinitezza, come suggerisce Plucker [29], può essere sfruttata per studiare sotto la definizione di spazio forme geometriche molto diverse, con il fine di dissipare ogni dubbio sul fatto che possano esistere concetti opposti a quelli della Geometria classica, ma comunque basati su ipotesi ben definite e coerenti: un esempio fra tutti di ciò è la costruzione delle geometrie non euclidee come organizzate da Lobatschewsky e Riemann. L'interesse per questa generalizzazione è duplice, sia per quanto riguarda la questione dello spazio fisico, sia per quel che concerne l'origine e lo sviluppo delle conoscenze geometriche. È vero che, nonostante la costruzione di un sistema adeguato di concetti, c'è sempre l'impossibilità psicologica di rappresentare i fenomeni reali in un quadro diverso dallo spazio secondo la sua ordinaria intuizione, ma il sentimento di necessità legato alla creazione di esso, citando Enriques, «non può essere scosso, dall'avere criticamente ammesso, la possibilità di ipotesi diverse intorno alla costituzione fisica dello spazio», poiché la realtà non vede i limiti imposti su di essa dalla rappresentazione che ne viene estrapolata. Sui rapporti tra la realtà e la sua rappresentazione astratta, Enriques aggiunge:

> È un carattere peculiare dello spirito umano di essere portato a cercare nel mondo reale i modelli concreti delle sue creazioni. Questa disposizione passa quasi inavvertita presso le menti non nutrite di studii astratti, poiché i concetti che esse formano, resultato di associazioni prossime dei dati sensibili, si presentano appunto, fin da principio, come rappresentanti di oggetti reali. Tuttavia anche in questi casi, il procedimento che estende l'osservazione sperimentale è un procedimento di astrazione, pel quale si genera un concetto, cui si tendono a subordinare immediatamente le osservazioni nuove. Ma quando si tratta di spiriti coltivati nelle scienze astratte, il processo costruttivo dei concetti si allontana smisuratamente dalle associazioni prossime dei dati sensibili, onde la creazione ideale che ne risulta appare completamente fuori della realtà; perciò appunto la ricerca di oggettivare l'astratto ci colpisce come un carattere peculiare di quelle menti.

1.3 L'acquisizione psicologica dei concetti geometrici

In [9] Enriques parte dal presupposto appena stabilito – della non aprioriità della Geometria – per inoltrarsi nella scoperta dei processi che sono dietro la costruzione delle rappresentazioni spaziali che l'intuizione e la psiche mettono in atto. La sua critica alla dottrina nominalistica è mossa sulla base di diversi esperimenti di fisio-psicologia – in particolare gli studi sull'origine empirica dei concetti geometrici di Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz [13] e sul rapporto tra la fisiologia psicologica e l'intuizione dello spazio descritto da Wilhelm Wundt [39] – che accreditano maggiormente l'ipotesi già descritta secondo la quale la rappresentazione dello spazio si origini dalle sensazioni e dell'associazione psicologica (entrambe ritenute da Lotze [22] derivanti dall'esperienza).

Per quanto riguarda la spiegazione dell'intuizione, vi sono due posizioni contrastanti, l'*innatismo* e l'*empirismo*, già nominate a pagina 2. Dalla tesi kantiana che «i rapporti spaziali sieno rapporti che la mente scorge fra sensazioni possibili» – che viene riportata così in [9] – deriva il primo, che collega l'intuizione di questi rapporti alla struttura anatomo-psicologica dell'uomo. Chi invece ritiene che «i rapporti spaziali faccian parte del dato dei sensi (vista, tatto, ecc.)» si schiera con la filosofia empirica, che da ciò deduce una visione dell'intuizione come reiterazione di sensazioni passate e quindi una sua riduzione ad una somma di esperienze. È interessante osservare che in questo contesto Enriques si riferisce all'intuizione con l'appellativo di "visione immaginativa delle relazioni spaziali".

La controversia fra i due punti di vista non si può e non si deve ridurre a una presa di posizione netta, poiché sembrano entrambe apparire relativamente ragionevoli. Sono le conseguenze che se ne traggono su cui bisogna porre attenzione, e il punto secondo Enriques è evitare quelle unilaterali: «il nativismo[2] ragiona come se potesse pensarsi una psiche formata anteriormente all'esercizio dei sensi e indipendente dal mondo esterno; l'empirismo riduce invece tutta l'attività psichica ad una ricettività passiva». La soluzione risiede dunque nel provare a conciliare i due indirizzi per giungere a spiegare l'intuizione spaziale come uno sviluppo psicologico che parte dalle sensazioni, durante la quale si tenga però conto della struttura del soggetto.

Ma la questione si complica, poiché alla riflessione psicologica va a sovrapporsi una ricerca biologica, che deve necessariamente avvenire preliminarmente. Infatti, alla tesi empirica secondo cui i rapporti di posizione vanno

[2] È così che Enriques usa riferirsi all'innatismo.

annoverati tra i sensi, gli innatisti contrappongono l'idea che la conoscenza di queste corrispondenze sia implicita nell'uso stesso dei sensi. Si aggiunge quindi il problema della spiegazione dell'*orientazione spaziale*, cioè del coordinamento tra movimenti e sensazioni, a cui si ritiene che la questione psicologica possa essere senz'altro ricondotta. Enriques sostiene «che lo sviluppo della coordinazione dei movimenti alle sensazioni, cioè dell'orientazione spaziale, così negli animali come nell'uomo, è il prodotto di esperienze eseguite sotto certe condizioni anatomo-fisiologiche». Precisa però che da questo assunto non bisogna derivare l'idea che queste condizioni dell'organismo umano si traducano in caratteristiche di apriorità dell'intuizione spaziale: obietta infatti che, essendo l'orientazione avvertita dalla mente soltanto per mezzo di sensazioni come quelle muscolari, tattili, visive e delle informazioni che esse riportano, non è possibile risolvere l'arbitrarietà insita nella scelta dei postulati e soprattutto conferire ad essi il carattere di assolutezza che richiedono.

Si tratterà dunque di analizzare lo sviluppo psicologico, l'elaborazione e la semplificazione dei dati di senso, le cui condizioni soggettive sono da ricercare nella stessa funzione della psiche, non nell'anatomia. Più precisamente si tenterà di rappresentare questo sviluppo come un processo di *associazione e astrazione* e di ridurre le condizioni appena citate a leggi logiche che spiegheranno la formulazione dei postulati: questi ultimi si ritrovano dunque ad essere decomposti in due parti, l'enunciato di un fatto non evidente, ma che serve per associare più di una rappresentazione in un concetto unico, e il principio in sé, di carattere logico. Enriques esplicita questa connotazione nel seguente esempio: «il concetto di una figura, essendo preso come rappresentante un oggetto reale che corrisponde a più sensazioni associate, la esistenza o la possibilità d'un oggetto ipotetico rispondente ad un dato aggruppamento di sensazioni costituisce il *fatto geometrico* espresso dai postulati; invece la forma, sotto la quale questi si presentano all'intuizione del geometra, e l'evidenza che vi si collega, tiene alle *proposizioni logiche sovrappostesi al fatto medesimo*».

Le fonti della sua critica Enriques le mutua da un lato dalla Psicologia fisiologica, dall'altro dalla Geometria: spetta infatti alla prima indicare in quale modo i rapporti d'estensione vengano percepiti con la vista, o con il tatto, o con le sensazioni muscolari, ma per interpretare convenientemente questi risultati è indispensabile sapere in che modo i rapporti percepiti si leghino ai concetti geometrici fondamentali. Seguendo il percorso di Helmholtz [13], si sceglie di dirigere ed interpretare l'esperienza fisiologica alla luce di un'indispensabile critica dei postulati e principalmente degli enti fondamentali della Geometria.

1.3.1 Costruzione dei concetti di punto, retta e superficie

La ricerca fisio-psicologica descritta finora, che vuole dimostrare come l'acquisizione delle rappresentazioni spaziali avvenga grazie alle sensazioni, deve essere completata da una nuova ricerca, più propriamente psicologica, la quale spieghi come dalle rappresentazioni menzionate si formino i concetti. Un contenuto spaziale si ritrova infatti in ogni sensazione: solitamente nell'uomo sono le sensazioni muscolari, tattili e visive, che, in connessione con i movimenti, concorrono a formare le rappresentazioni spaziali, associandosi e connettendosi anche con gli altri sensi, per esempio l'udito (per questo motivo la teoria che segue è stata definita come "*associazionistica*").

Oggetto delle rappresentazioni spaziali sono *punti*, *rette* e *superfici*. Le rette si possono generare con il semplice movimento di un punto e le superfici con quello della retta, ma loro stesse rispondono a dei gruppi di sensazioni, diverse da quelle che si producono quando si varia l'ente generatore: da ciò nasce il duplice modo di presentarsi delle rette e delle superfici, cioè il loro aspetto *genetico* e quello *attuale*. È più appropriato analizzare la rappresentazione di una retta o di una superficie – ma anche del punto stesso – come derivante per associazione dai due gruppi di sensazioni che corrispondono ai due modi di considerarla. Per il punto però il ragionamento è leggermente più complesso, poiché affermare l'esistenza di un punto ha prima di tutto un significato relativo alla posizione dell'osservatore: «la distinzione delle sensazioni contemporanee del tatto o della vista, riesce possibile mercé i cosidetti segni locali di Lotze [22], cioè tenendo conto delle mutue differenze tra i punti della cute e della retina, specie in riguardo alle loro relazioni coi punti vicini; si ha così una soluzione abbastanza soddisfacente del problema, che intende spiegare fisiologicamente come si riesca a determinare una posizione nello spazio», argomenta Enriques, poiché l'immagine del punto fisico deriva dalle due immagini associate di *punto visivo* e di *punto tattile*.

Poiché la caratterizzazione del un punto è stata appena definita come dipendente dalla posizione dell'osservatore ed è dal variare di essa che i rapporti fra i punti appaiono al soggetto come diversi, ne consegue che l'insieme dei punti così intesi costituisce uno *spazio fisiologico* – relativo all'osservatore stesso – differente dallo *spazio geometrico*. Dunque sorge il problema di spiegare come dai dati grossolani delle sensazioni di spazio si arrivi alla rappresentazione geometrica: lo spazio fisiologico, visivo, tattile o muscolare, non possiede i caratteri di omogeneità e di isotropia che sono invece attribuiti allo spazio geometrico. Occorre perciò aggiungere alle associazioni sensoriali un processo d'astrazione: Enriques a tal proposito definisce il concetto geometrico dello spazio precisamente come «l'astratto dei varii spazii fisiologici possibili, per riguardo ad un osservatore mobile».

Occorre ora determinare nel contesto dell'acquisizione delle varie rappresentazioni spaziali come esse si dispongano rispetto alle sensazioni della vista, del tatto e muscolari. Enriques prima di addentrarsi in un tale lavoro d'interpretazione delinea una serie di definizioni dei principali concetti spaziali matematici. Infatti, alla base della teoria associazionistica si trova la decomposizione delle sensazioni complesse corrispondenti alle immagini di rette, superfici ed altri enti geometrici in sensazioni elementari puntuali.

Come accennato in precedenza, data la rappresentazione del punto, si può ricostruire l'immagine della retta in due modi diversi: in un modo genetico, quando cioè la si considera come una serie di punti successivi o in modo attuale, quando la retta sensibile è data come insieme, in cui le rappresentazioni simultanee di tutti i suoi punti si fondono in una unica immagine complessa. Se da una parte è il riconoscimento di tale separazione che implica veramente tutte le successive rappresentazioni, è anche vero che per dimostrare la continuità della retta si renderebbe necessario un procedimento di limite se non si usasse, come suggerisce Enriques, l'associazione delle appena citate rappresentazioni genetiche della retta con quelle attuali: questo collegamento implica, come già anticipato, che il concetto stesso del punto collega due rappresentazioni diverse, quella che nasce dal corpuscolo e quella che deriva dalla divisibilità in parti della retta.

Un'alternativa riguardo la genesi del concetto di retta è quella che ipotizza che essa provenga dallo studio di diversi ordini di fenomeni: da quello dei movimenti dei corpi solidi, dove la retta si presenta come asse i cui punti restano immobili in una rotazione, dalla Dinamica dei punti materiali, nella quale la retta si presenta come traiettoria di un punto il cui movimento non sia modificato dai corpi circostanti, dall'Ottica, in cui la retta si presenta come raggio o come linea di simmetria del fenomeno. Rispettivamente, *le tre proprietà della retta servono a definirla rispetto al tatto, al senso muscolare e alla vista*: ciò che risulta fondamentale è come l'arrangiamento di questi modi di vedere permetta di cogliere diversi ordini di fenomeni in un'unica rappresentazione geometrica.

Passando al concetto di superficie, Enriques propone di derivarlo dall'unione di tutte le sue rappresentazioni genetiche, che si ottengono generando ogni superficie mediante il movimento di una retta che le appartiene. Infatti egli osserva che «se si vuole prescindere da ogni determinazione metrica della linee generatrici e direttrici, una sola generazione della varietà a due dimensioni, conducente a due fasci di linee unisecantisi sopra di essa, non basta ad esprimere tutto ciò che si riattacca nella nostra mente all'idea del continuo a due dimensioni, giacché non permette di stabilite una corrispondenza biunivoca continua fra due tali varietà o (ciò che è lo stesso) di riferirle ad una varietà numerica». Potrebbe quindi essere necessario avere due generazioni diverse della medesima superficie derivanti dal movimento, che è quello che infatti si sceglie di postulare: ciò enuncia in sostanza la condizione per la quale il concetto di superficie implica che ci siano almeno due rappresentazioni genetiche associate in esso. Se inoltre si tiene conto del fatto che alle rappresentazioni genetiche si uniscono insieme, nel concetto della superficie, le rappresentazioni attuali, allora occorre riconoscere l'esistenza di altre condizioni, le quali andranno tradotte in nuovi postulati. Infatti, «la rappresentazione attuale di una superficie è piuttosto l'immagine di un limite; così per esempio la superficie (opaca) ch'io guardo, o la superficie (resistente) ch'io tocco, corrispondono alla sensazione di limitare un certo movimento dell'organo; insomma la superficie rappresentata si presenta con una sola faccia e l'idea della superficie che ha due facce e separa due regioni di spazio implica già l'associazione di due rappresentazioni attuali», il che descrive esattamente la proprietà della superficie di separare i punti che cadono dall'una e dall'altra parte di essa.

1.3.2 Psicogenesi delle Geometrie del continuo, metrica e proiettiva

La tesi di Enriques che ora si esporrà e dimostrerà è la seguente: «i tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base dalla teoria del continuo (Analysis situs), della Geometria metrica e della Geometria proiettiva si possono coordinare nella loro psicogenesi a tre gruppi di sensazioni, che sono rispettivamente le generali sensazioni tattili-muscolari, quelle del tatto speciale e della vista».

Per quanto riguarda la vista, sono interessanti all'indagine i seguenti risultati di ricerche scientifiche: la formazione dell'immagine sopra la retina è equivalente a una proiezione centrale piana dell'oggetto, i movimenti dell'occhio normalmente si effettuano attorno a un centro e sono ad orientazione costante e infine le immagini corrispondenti nella visione binoculare in situazioni normali si fondono. Enriques discute contro la nota congettura secondo cui la vista produca la percezione immediata delle distanze fra i punti, e quindi della grandezza di un oggetto: la sua argomentazione si basa sulla tesi che «i dati visivi attinenti alle molteplici immagini che possiamo formarci di un oggetto col muover gli occhi, contengono gli elementi da cui si può dedurre matematicamente il confronto delle distanze, ma questo non ha un senso proprio per riguardo alle singole immagini; di più, il giudizio delle distanze non può ritenersi neppure come dato immediatamente dalla visione binoculare, perché gli elementi metrici del corrispondente sistema di proiezioni [...] non possono riguardarsi come noti all'osservatore prima dell'esperienza visiva e dei confronti e delle associazioni con altri sensi che essa implica». Cosi l'estensione della facoltà visiva alla percezione della forma e della grandezza degli oggetti può essere acquisita solo dopo uno sviluppo empirico. Helmholtz [13] ha appunto spiegato queste idee, ritenendo che il giudizio comparativo delle distanze non sia un dato immediato della visione, ma un acquisto derivante dell'esperienza, conseguito mediante l'associazione di essa con le sensazioni tattili-muscolari, nonché con le stesse sensazioni visive che nascono da un cambiamento di posizione dell'osservatore. Da tutto ciò Enriques trae la conclusione che ciò che è immediatamente estraibile della vista è solo l'insieme di proprietà geometriche dell'oggetto che si traducono in proprietà delle proiezioni, indipendenti dalla posizione particolare che ha l'oggetto osservato e dalla sua lontananza dagli occhi, e le distanze chiaramente non figurano fra queste.

Il matematico sa che, nonostante non sia stata definita in alcun modo la distanza fra punti, ciò non deve significare che ogni nozione geometrica sia estranea ai dati immediati della vista: esiste infatti una disciplina che studia «i rapporti qualitativi inerenti ai concetti elementari della linea retta e della superficie piana, i quali sono pienamente indipendenti dai rapporti quantitativi (o metrici) supposti dall'idea di distanza, benché si esprimano ordinariamente per mezzo di questi» ed essa è la Geometria proiettiva. La visione binoculare è infatti sufficiente per distinguere piano e retta e dunque, poiché i dati immediati della vista forniscono delle nozioni di retta e di piano, questo è equivalente ad affermare che *la vista definisce gli elementi costitutivi della Geometria proiettiva.*

Passando ai dati forniti dalle sensazioni tattili-muscolari, Enriques si riallaccia a diversi risultati di ricerche psico-fisiologiche tra cui appaiono quelle di Weber [40] – secondo cui «una lunghezza costante viene percepita inegualmente dalle varie parti della cute, e cioè come maggiore là dove la finezza della sensazione è maggiore (esperienze col compasso)»– e Lotze [22] – che ritiene che le sensazioni, soprattutto di pressione, vengono collegate alla parte della cute che è stata toccata, ipotesi derivante dalla teoria dei segni locali, ma nel riconoscere tale parte si commette sempre un errore, che varia considerevolmente da posizione a posizione, a tal punto che due punti distanti meno di un certo intervallo, detto soglia della sensazione, in una certa posizione della cute non vengono più percepiti come distinti. Va notato che la soglia di sensazione non appartiene solo al tatto, ma anche alla vista e dunque assume un significato rilevantissimo in quanto mostra che lo spazio fisiologico, tattile o visivo, non è continuo: sorge di nuovo [si veda Pagina 11] il problema di spiegare come il processo per cui si deriva la rappresentazione geometrica dello spazio dalle possibili rappresentazioni fisiologiche ricrei uno spazio continuo – nuovamente occorre aggiungere alle associazioni sensoriali un processo d'astrazione.

Il secondo punto che importa rilevare è il seguente: il giudizio comparativo delle distanze, e più generalmente delle grandezze degli oggetti, esige il riferimento ad un organo tattile scelto come sede di paragone costante. Questo organo tattile deve poter essere mosso ma restare invariato e deve risultare adattabile agli oggetti, affinché elementi diversi possano essere così confrontati metricamente. Esso diviene un vero organo di *tatto speciale*, termite già citato precedentemente e che si è scelto di spigare ora, che si differenzia per le sue implicazioni metriche: in generale tale organo per l'uomo è la mano, ma questa può essere surrogata. Questa definizione si è resa necessaria poiché è solo grazie al tatto speciale che il soggetto è in grado di riconoscere l'invarianza nel movimento dei corpi solidi, ed è questo che gli consente dunque di creare strumenti di misura.

Sembra dunque che gli elementi costruttivi primordiali che entrano più spiccatamente a formare lo spazio tattile-muscolare non siano le nozioni della retta e del piano, ma quella della distanza: dunque *lo spazio tattile-muscolare dato dall'organo speciale, è lo spazio metrico*. Questo è sicuramente illimitato, ed è illimitata in esso la retta, poiché è possibile trasportare l'organo del tatto speciale o un oggetto qualsiasi e dar luogo a una successione di lunghezze uguali indefinitamente ripetibile, ma non è detto che esso sia anche infinito: le lunghezze poste di seguito una dopo l'altra – operazione che deve essere pensata senza limite nella rappresentazione astratta – potrebbero anche sovrapporsi dopo aver percorso un intervallo relativamente lungo.

Enriques a questo punto della sua trattazione si cimenta nell'esplorare una sorta di parallelismo fra lo sviluppo storico e lo sviluppo psicogenetico dei postulati geometrici che lo porta a concludere che i geometri siano effettivamente riusciti a scomporre la Geometria negli elementi costitutivi che corrispondono ai vari gruppi di sensazioni. Le ricerche riguardanti i principi della Geometria sono infatti classificabili secondo tre indirizzi fondamentali, l'indirizzo elementare, l'indirizzo metrico e l'indirizzo proiettivo: il primo è caratterizzato dalla mancanza di un analisi tendente a separare i concetti geometrici, ovvero in esso tutti i concetti fondamentali (di retta, piano, congruenza, ...) sono considerati l'uno accanto all'altro e si cerca soltanto di rendere semplici le proporzioni e i postulati che ne esprimono i primi rapporti e di sottolinearne le mutue dipendenze. Un altro indirizzo iniziato è quello metrico, nel quale tutta la Geometria viene fondata sulla base della nozione di distanza o di lunghezza di una linea, dentro una varietà continua. Questi studi si riattaccano da una parte allo sviluppo della Geometria differenziale, fondata da Gauss, e dall'altra alla teoria dei gruppi di trasformazioni, come essa è stato definita da Klein, Lie e Poincaré. D'altronde, aggiunge Enriques, la fondazione della Geometria proiettiva e il suo assetto indipendente dalle nozioni metriche inducevano Klein ad inaugurare un nuovo indirizzo proiettivo d'investigazione dei principi, alla cui base vi sono le nozioni (grafiche e ottiche) della retta e del piano.

È interessante notare che all'epoca (cioè all'inizio del '900) l'attuale topologia algebrica era agli albori ma comunque Enriques si rende conto del fatto che «la Geometria proiettiva e la metrica, hanno un sostrato qualitativo comune, nell'insieme dei rapporti, inerenti ai concetti più generali di linea e di superficie, che caratterizzano una varietà continua a più dimensioni. *Questi concetti, senza alcun intervento delle idee di retta, piano, congruenza ecc., danno luogo già a un ramo della Geometria, detto teoria dell'estensione o del continuo o Analysis situs*».

Il punto centrale è che la critica dei principi della Geometria si è svolta parallelamente al differenziarsi della Geometria stessa secondo i due rami, il metrico ed il proiettivo, aventi la loro radice comune nella più generale topologia. A questi due rami si collegano i due gruppi di sensazioni tattili-muscolari e visive. E si può dire ancora che la generica sensibilità tattile-muscolare – la quale è anche il fondamento della impressionabilità della retina – fa da base alle rappresentazioni geometriche attinenti alla teoria del continuo, cioè le nozioni di linea, di superficie, e così via; è invece dovuta, come è stato detto, a un organo speciale del tatto la valutazione delle distanze e quindi la genesi di una esatta idea della congruenza o uguaglianza geometrica. È dunque provato l'intento iniziale ovvero quello di dimostrare che:

> I tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base dalla teoria del continuo (Analysis situs), della Geometria metrica e della proiettiva, si possono riattaccare nella psicogenesi, a tre gruppi di sensazioni: rispettivamente alle generali sensazioni tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.

Questa organizzazione dello spazio ricalca perfettamente, salvo che per l'ordine, quella di Piaget [27] – la distinzione in fase topologica, proiettiva e metrico-euclidea – e vale la pena notare come queste tre si ricolleghino alla sistemazione della Geometria attuata da Klein, che si esporrà nel Capitolo 2 (nel saggio [8], Enriques riconosce infatti che Klein è stato in grado di dedurre dai dati della Psicologia fisiologica la distinzione fra nozioni metriche e grafiche, guidato appunto dall'analisi dei concetti matematici). Questo risultato inaugura la spiegazione psicologica dei postulati della Geometria e a sua volta ne riceve conferma: nel senso che i postulati che stanno a base della teoria del continuo costituiscono condizioni per la possibilità di unire associativamente, nei concetti astratti della linea e della superficie, le varie rappresentazioni genetiche ed attuali che vi si collegano. Enriques dice proprio: «la nostra critica ha in pari tempo posto in luce una certa indeterminatezza di quei concetti generali, dipendente dalla loro relatività, per cui si manifesta necessaria una costruzione progressiva, la quale ponga innanzi alcune linee e superficie particolari, e muova da queste ad estendere via via i concetti già definiti. Questa necessità lascia scorgere, in un certo senso, l'ufficio di quella evoluzione, per cui le sensazioni particolari della vista e del tatto speciale, si differenziano dalla generale sensibilità tattile-muscolare, in ordine all'acquisto delle rappresentazioni di spazio». I postulati propri della Geometria proiettiva vengono dunque riconosciuti come condizioni necessarie per l'associazione di certe rappresentazioni visive, da cui hanno origine i concetti astratti della retta e del piano e un ragionamento analogo vale per quelli della Geometria metrica, che concernono i movimenti e la congruenza, e dell'Analysis situs.

Per osservare le condizioni associative descritte, si prenda l'esempio di Enriques in cui egli esamina «il modo come la "retta" può essere rappresentata, nella rappresentazione tattile dello spazio. La retta tattile si può riguardare indifferentemente come "linea più breve tra due punti" (filo teso), o come "linea che resta immobile quando si fa muovere attorno a due suoi punti tenuti fissi" e ambedue queste rappresentazioni della retta sembrano in qualche modo mediate. L'associazione della retta visiva e della retta tattile in un unico concetto della retta,determina la relazione fondamentale fra le due Geometrie, proiettiva e metrica: essa infatti porta ad unificare le due Geometrie in una metrico-proiettiva, nel senso ben noto ai matematici».

Vale la pena notare come sotto quest'ottica è immediato spiegare e comprendere perché la congruenza, dai tempi di Euclide, è sempre stata scambiata con l'identità logica: è l'associazione tattile-visiva che corrobora questa "illusione" poiché è grazie ad essa che la congruenza – che altro non è che un'uguaglianza tattile – si manifesta come una particolare proiettività, la quale sarebbe proprio l'uguaglianza visiva. Ma, aggiunge Enriques, non sarebbe giusto definire la congruenza come una semplice identità tanto nell'ordine tattile come nel visivo, poiché senza il riferimento a qualcosa di esterno (l'organo tattile o un'unità di misura) non si vedrebbe come distinguere la congruenza dalla similitudine.

Tornando all'associazione tattile-visiva che porta a unificare la Geometria metrica e quella proiettiva, si può dimostrare che essa determina anche la natura euclidea del sistema metrico-proiettivo stesso: lo spazio di cui le elementari esperienze tattili-muscolari forniscono la rappresentazione potrebbe infatti essere tanto euclideo quanto non-euclideo. La spiegazione deriva dall'unione di due rappresentazioni delle parallele, la rappresentazione visiva come "due rette di un piano che non si incontrano" e la rappresentazione tattile come "linee equidistanti". La condizione associativa diventa "due rette di un piano che non si incontrano siano equidistanti", la quale enuncia (o contiene) il postulato delle parallele, di cui l'esperienza conferma la veridicità. Dunque il fatto che lo spazio comunemente più scelto sia l'euclideo è il risultato dell'associazione tattile-visiva, ma nonostante ciò, per il suo carattere necessariamente approssimato e ristretto entro una determinata regione dello spazio, non si può comunque da questo arrivare dimostrare la validità universale della Geometria euclidea.

Enriques conclude il suo saggio [9] in questo modo:

> I postulati della Geometria appaiono come condizioni necessarie per certe associazioni che sottostanno alla genesi dei concetti geometrici. Il sentimento di necessità subiettiva che li accompagna, scaturisce dalla applicazione delle leggi logiche ai suddetti concetti, così associativamente generati.

È inutile aggiungere come una tale spiegazione tolga ogni valore alla pretesa di chi vuole estendere la necessità dei postulati all'ordine fisico dello spazio, nel quale per rendere possibili le menzionate associazioni basta che esse trovino una corrispondenza approssimativa.

Da un punto di vista sintetico, le precedenti considerazioni sull'acquisizione dei concetti geometrici mettono in luce la varietà delle esperienze elementari ed inconsciamente ripetute che vengono rievocate nella visione immaginativa e nell'intuizione dello spazio, ma più ancora esse mostrano il lungo processo di associazioni e di astrazioni attraverso il quale i concetti medesimi e soprattutto i postulati sono generati. L'*evidenza* della Geometria sta a significare da una parte la facilità di rievocare esperienze inconsce anche dopo un lungo periodo di tempo e dall'altra la possibilità di riscontrare nella forma dei postulati le operazioni di associazione ed astrazione, eseguite sugli elementi costitutivi dello spazio: ciò che i postulati suppongono sono quindi le condizioni dello sviluppo psicologico, che si svolge seguendo leggi logiche e secondo il principio di economia, riuscendo appunto nel generare una rappresentazione più unificata della realtà geometrica.

Capitolo 2

Il Programma di Erlangen e il suo impatto storico ed epistemologico

Nel capitolo precedente si è visto come Enriques dia una spiegazione del rapporto che intercorre tra il processo di costruzione della conoscenza geometrica e l'esperienza sensoriale, riconducendo i diversi tipi di Geometria (continua, metrica e proiettiva) a diversi gruppi di esperienze sensoriali (tattili-muscolari, del tatto speciale, visive). La riflessione di Enriques si sviluppa a cavallo tra il XIX e XX secolo, un periodo chiave per lo sviluppo storico della Geometria e che si caratterizza per il tentativo di strutturazione e sistematizzazione dei numerosi progressi avvenuti nell'800 in ambito geometrico.

Un momento cruciale di questa fase è la presentazione da parte di Felix Klein (1849 - 1925) del cosiddetto *Programma di Erlangen* di cui si tratterà in questo capitolo. In particolare, saranno riportate le basi teoriche della teoria di classificazione che Klein espone nel suo Programma, seguendo in parte la traduzione di Gino Fano [17], da cui sarà mutuata la terminologia, e in parte l'analisi contenuta nell'introduzione di [7], a cui si rimanda per approfondimenti.

Il focus sarà soprattutto sull'impostazione costruttiva del Programma e su quali siano le conseguenze che questo ha avuto a livello storico ed epistemologico. Nello specifico si analizzerà nella seconda parte del capitolo la lettura che Speranza ne dà in [37]. Per completezza, una breve presentazione dell'impostazione matematica del Programma, rivista in chiave contemporanea, è contenuta nell'Appendice B.

2.1 «Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti»

Questo è il titolo della dissertazione che Felix Klein lesse nel 1872 in occasione della presa d'incarico del ruolo di Professore nell'Università di Erlangen, che conteneva e proponeva diversi principi generali che avevano lo scopo di unificare le varie Geometrie scoperte e sviluppate nei decenni precedenti. Esso ebbe un impatto praticamente impareggiabile a livello storico, culturale e, aspetto su cui è intenzione soffermarsi in questo elaborato, epistemologico: come si legge nella prefazione all'edizione italiana del Programma a cura di Lorenzo Magnani e Riccardo Dossena, contenuta in [7],

> L'effetto di generalizzazione di aree della Geometria prima disgiunte è enorme e così pure il portato epistemologico della trasformazione concettuale operata dal Programma di Erlangen. [...] Dal punto di vista epistemologico e filosofico l'opera di Klein delinea nella Matematica quel lavoro tipico del ragionamento creativo che conduce alla generalizzazione e alla formazione di punti di vista unificanti e più astratti.

Klein, riprendendo risultati pregressi – come la teoria generale degli invarianti, ad opera di Cayley e Sylvester, e la caratterizzazione del ruolo che le proprietà metriche possono avere nella Geometria proiettiva – ed espandendo la dottrina dei gruppi a lui contemporanea, riesce a raggiungere dei risultati fondamentali. «La grande originalità di Klein è di aver concepito la relazione fra una "Geometria" e il suo gruppo rovesciando i ruoli delle due entità, per cui il gruppo è l'oggetto primordiale e i diversi spazi sui quali esso "opera" mettono in evidenza i diversi aspetti della struttura del gruppo», si legge ancora in [7]. Si potrebbe argomentare dunque che sono stati perciò proprio gli sviluppi della teoria dei gruppi di trasformazioni, passati e futuri, a conferire portata storica al saggio del 1872.

Ed è così che il Programma di Erlangen inaugura il dominio che gradualmente eserciterà la teoria dei gruppi su tutte le matematiche (non soltanto sulla Geometria) e allo stesso tempo la fusione sempre più stretta dei concetti dell'Algebra, della Geometria e dell'Analisi, tendenze che sono fra le più caratteristiche della Matematica moderna e che sembrano essere – così si legge [1] nell'intervento del 1872 di Klein – le motivazioni, in particolare la seconda, che lo hanno spinto ad intraprendere questa ricerca: «il pubblicare siffatte considerazioni comprensive appariva tanto più giustificato, in quanto che la geometria, che pur è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate, che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre».

Prima di entrare nel merito delle specifiche considerazioni che Klein riporta, sembra interessante esplicitare due *leitmotiv* del Programma come sono menzionati da Klein stesso nella premessa di [17]:

> Nello studio delle varietà vi sono appunto dei tipi differenti come in Geometria, e si tratta, come in Geometria, *di mettere in rilievo ciò che v'ha di comune e di diverso* in ricerche intraprese indipendentemente le une dalle altre.
>
> In via astratta, basterebbe di seguito parlare semplicemente di varietà più volte estese; ma, *collegandola alle rappresentazioni geome-*

[1]In maniera più specifica, Klein espande questa riflessione in una nota: «Quando si osserva per es. come in generale il fisico matematico si priva dei vantaggi che in molti casi gli potrebbe accordare un'osservazione proiettiva anche poco sviluppata, e come d'altra parte il (geometra) proiettivo non pon mano alla ricca fonte di verità matematiche che ha dato luogo alla scoperta della teoria della curvatura delle superfici, bisogna ben ammettere che lo stato attuale della scienza è assai imperfetto, e sperare ch'esso abbia in breve a migliorare».

> *triche più famigliari, l'esplicazione si fa più semplice e più facilmente intellegibile.*[2]

Questa menzionata familiarità rende chiara la volontà di Klein di fondare la sua dissertazione sulla Geometria di Euclide, ripercorrendo dunque il tracciato storico attraverso il quale si è costruita la Geometria, invece di trattare l'argomento nel modo più astratto e generale possibile, partendo dalle varietà pluridimensionali.

È ora il caso di approfondire più nel dettaglio l'esposizione della sistemazione kleiniana, così come enunciata da lui nel 1872. Il concetto più essenziale è, come già anticipato, quello di *gruppo di trasformazioni dello spazio*: si richiede dunque che componendo assieme un numero arbitrario ma finito di trasformazioni dello spazio, il risultato sia ancora una trasformazione dello spazio.[3] Queste nozioni e diciture sono riprese totalmente dalla teoria dei gruppi simmetrici – o, come veniva chiamata all'epoca dal matematico tedesco, teoria delle sostituzioni – di Cayley, da Klein implementata sostituendo gli scambi di grandezze discrete in numero finito con i movimenti di un «campo continuo».

Il primo gruppo che Klein cita, coerentemente con l'intenzione appena descritta di partire dall'«immagine sensibile» e dunque, per estensione, dalla Geometria euclidea, è il cosiddetto gruppo principale ed è in questo modo che egli lo introduce:

> Ora vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi. Infatti, per la natura del concetto di proprietà geometriche, queste sono indipendenti dalla posizione che la figura da studiare occupa nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, e finalmente anche dal senso[4] in cui sono disposte le sue parti.

[2]Corsivo non presente in [17].

[3]Klein suppone «sempre soggetto simultaneamente alle trasformazioni tutto il complesso delle figure dello spazio» ed è per questo che decide di parlare semplicemente di trasformazioni dello spazio.

[4]Qui per "senso" Klein intende "orientazione".

> Le proprietà di una tale figura rimangono dunque inalterate in tutti i movimenti dello spazio, nelle sue trasformazioni per similitudine, nel processo di riflessione (specchiamento), come pure in tutte le trasformazioni che risultano da composizioni di queste. Il complesso di tali trasformazioni lo chiameremo *gruppo principale* di trasformazioni dello spazio: *le proprietà geometriche non si alterano nelle trasformazioni del gruppo principale.* E inversamente possiamo anche dire: *le proprietà geometriche sono caratterizzate dalla loro invariabilità rispetto alle trasformazioni del gruppo principale.*

Da questa precisa descrizione si può dedurre che per gruppo principale Klein intenda l'insieme di tutte le trasformazioni ammesse nella Geometria di Euclide (cioè le similitudini). Dunque la Geometria ordinaria, o come lui stesso la chiama "elementare", diventa quella associata al gruppo principale e si traduce nello studio delle proprietà invarianti rispetto proprio a questo gruppo: le proprietà geometriche a cui si riferisce sono appunto tutte le caratteristiche delle figure dello spazio e tutte le grandezze legate ad esse che restano invariate per le trasformazioni del gruppo principale.

Da subito in [17] viene chiarito ed esplicitato il problema matematico che si vuole affrontare e risolvere nel Programma, descritto come desiderio di generalizzazione della Geometria: nel senso che lo scritto contiene non solo la Geometria ordinaria ma anche e in particolare i nuovi metodi geometrici che Klein vuole formalizzare e i diversi strumenti dell'epoca usati nella classificazione delle varietà. Tale intento viene realizzato dicendo che, *data una varietà e in essa un gruppo di trasformazioni, quel che si vuol fare è «studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato»*: in questi termini viene dunque riformulato il problema della fondazione di qualsiasi Geometria.[5]

[5] L'idea di forma è tutt'altro che ben definita, nondimeno è chiara la funzione che essa ricopre all'interno del Programma, e risulta utile per la comprensione di diversi problemi. Speranza in [33] definisce questa scelta come «una rottura con la tradizione cartesiana delle idee *chiare e distinte* (purché si tratti di idee *utili*)», schierandosi con Klein lungo una linea di difesa dell'intuizione (anche in una trattazione assiomatica) contro le definizioni precise

Le differenze tra gli indirizzi geometrici possono dunque essere ridotte, secondo Klein, alla risoluzione di prendere in considerazione, invece del gruppo principale, gruppi di trasformazioni di volta in volta diversi. Questo principio prevede l'aggiunta di «forme speciali», ovvero elementi generici che si scelgono fissati, e, fissate queste, lo «studio delle forme contenute nella varietà in relazione ad una data forma» può avvenire in due modi equivalenti: *o aggiungendo al sistema delle forme quest'ultima, e allora si analizzeranno le proprietà del sistema con questa aggiunta in relazione al gruppo iniziale, oppure non estendendo il sistema, ma limitando le trasformazioni messe alla base della trattazione a quelle contenute nel gruppo che lasciano invariata la forma proposta.*

Questo doppio passaggio funziona perché, come intende dimostrare Klein, *i gruppi delle diverse geometrie sono uno contenuto nell'altro*: in particolare il gruppo principale è contenuto da tutti e l'esplorazione degli altri indirizzi, fino ad arrivare alla Geometria proiettiva, può procedere unicamente tramite l'estensione appena descritta. Di più, «ogni trasformazione dello spazio che non appartenga precisamente al gruppo principale può servire a trasportare a figure nuove proprietà di figure note», e questo rivela la linea che si seguiva al tempo della nascita del pensiero proiettivo – le proprietà delle figure che venivano dedotte «per proiezione» si confrontavano con altre loro caratteristiche.

In particolare, il gruppo principale si caratterizza all'interno del gruppo proiettivo per il fatto che le sue trasformazioni lasciano inalterata una particolare figura dello spazio, chiamata da Klein cerchio immaginario all'infinito o assoluto degenere – nel senso che il cerchio viene trasformato in sé solo tramite quelle trasformazioni proiettive che appartengono al gruppo principale. Le proprietà metriche diventano allora relazioni proiettive delle figure rispetto a questa forma immaginaria o, precisamente, le proprietà come intese nel senso della Geometria elementare si trasformano a livello proiettivo o in proprietà dei corpi stessi oppure in relazioni fra essi e il sistema dei punti

ma pedanti.

reali, fra essi e il cerchio immaginario all'infinito, fra essi ed entrambi.

Come si legge ancora in [17], «fintanto che poniamo a base della trattazione geometrica uno stesso gruppo di trasformazioni, il contenuto della Geometria rimane inalterato»: per arrivare dalla Geometria euclidea alle nuove geometrie c'è dunque bisogno di attuare lo step descritto prima. E il contrasto tra queste ultime e la Geometria euclidea è proprio spiegato dalla conseguenza che, quando si passa ad un gruppo più esteso, non tutte le proprietà geometriche si conservano. In altre parole, alcune proprietà delle figure della Geometria euclidea non sono più tali, quando si passa a una Geometria che usa un gruppo diverso o più ampio: uno di questi è appunto quello delle trasformazioni proiettive.

A questo punto Klein introduce la nozione di equivalenza delle teorie geometriche o, come si potrebbe descrivere in termini più moderni, l'isomorfismo tra strutture geometriche: egli «stabilisce una connessione» mediante l'uso implicito di una biezione. Il punto a cui Klein giunge comunque è che qualsiasi studio geometrico può essere ricondotto, per mezzo della teoria dei gruppi di trasformazioni, alla Geometria proiettiva.

Nell'ultima parte del suo discorso Klein accenna alla possibilità di costruire anche gruppi di trasformazioni più estesi di quello proiettivo. Si può infatti gradualmente passare dal gruppo delle trasformazioni razionali, che fonda le ricerche di Geometria algebrica, a quello più esteso delle «trasformazioni infinitamente piccole supposte reali» che sono alla base dell'Analysis situs o topologia. In ordine crescente segue ancora il gruppo di tutte le trasformazioni puntuali e quest'ultimo trova maggiori applicazioni in Analisi che in Geometria, dato che le forme alle quali si applica sono per esempio le equazioni alle derivate parziali – su questo gruppo ancora Klein afferma che «una trasformazione puntuale per una porzione infinitesima dello spazio è sempre equivalente ad una trasformazione lineare», cioè, in termini moderni, sugli elementi differenziali del primo ordine essa induce una proiettività.

Si può dunque riassumere lo scopo del Programma constatando che, più che a costruire una teoria compiuta, Klein punta a dare delle idee guida, dei *programmi di ricerca* che possano risultare efficaci per organizzare il sapere e per proseguire con ulteriori riflessioni.

2.2 Influsso storico ed epistemologico

Un'ottima analisi della portata storica ed epistemologica del Programma di Erlangen è svolta da Speranza in [37]: egli si focalizza soprattutto sulle conseguenze che esso ha provocato nell'ambito dell'epistemologia della Matematica, perché, nelle sue parole, «Klein, con il programma di Erlangen, supera la pluralità delle geometrie in una prospettiva d'ordine superiore». Il principio generale del Programma, come già detto, si basa sul fatto che ogni Geometria studia certi concetti, certe proprietà, certe relazioni che sono invarianti per diverse classi di trasformazioni e Speranza traduce queste differenziazioni sottolineando, come anche altri autori hanno fatto prima e dopo di lui, che in vista dei progressi compiuti da Klein ora l'ambiguo e abusato termine *uguale* in realtà viene tradotto nel più corretto e universale *equivalente a meno di trasformazioni di* G.

Sin da subito ciò che Speranza mostra di apprezzare di più della dissertazione del matematico tedesco è tanto l'impostazione unitaria delle geometrie – che è riuscito a creare senza far perdere a nessuna le proprie peculiarità – quanto la tendenza alla generalità che egli mostra di ricercare parlando da subito di una generica *varietà*, «lasciando aperta la possibilità di effettuare scelte più libere: per esempio, il piano e lo spazio proiettivi non coincidono con il piano e lo spazio euclidei; a un certo punto, in topologia è (oggi) opportuno far riferimento a spazi topologici qualsiasi», nonostante egli conferisca comunque, come già esplicitato, un posto d'onore al gruppo S delle similitudini, a cui si riferisce come gruppo principale. Speranza loda anche la volontà di Klein di mettere sempre in evidenza i fatti geometrici e evidenzia il merito di quest'ultimo nell'essere stato in grado di creare un ambiente ben formalizzato ed astratto: «come S viene caratterizzato come il sottogruppo del gruppo proiettivo che lascia invariato l'assoluto [6], così Klein cerca di caratterizzare qualsiasi sottogruppo G' d'un gruppo G come quello formato dalle trasformazioni di G che lasciano invariato *qualcosa di geometrico*: come egli dice, una *forma*».

Pone a questo punto le seguenti domande: perché Klein scegli di focalizzarsi tanto sul gruppo delle similitudini? Perché non mettere al centro il gruppo delle isometrie? La risposta alla prima domanda va soppesata perché, se da una parte non si può ignorare che Klein abbia voluto legare strettamente le sue speculazioni all'intuizione e dunque abbia suggerito di prendere la geometria euclidea come punto di partenza, dall'altra si vedono nella dissertazione riferimenti che mettono alla base gruppi diversi da quello principale, «come se Klein volesse evitare di fare un discorso generale su un gruppo qualsiasi». A riguardo, Speranza cita anche Enriques [10]:

> Si è eretto a principio di massima che ogni teorema debba enunciarsi sempre nella forma più generale possibile, di cui è suscettibile, e cioè per n variabili, anziché per due o tre. [...] Conviene riconoscer che quest'ambito ha diminuito l'efficacia propulsiva di ottimi maestri e merita di essere seriamente contestato. Giacché la forma troppo astratta dell'enunciato riesce ad oscurare il vero significato del teorema nascondendone le origini [...] ad ogni problema compete in qualche modo il proprio grado di generalità, che è il primo grado in cui il problema stesso rivela la sua vera natura.

Per quanto riguarda la seconda domanda, Speranza ipotizza diverse motivazioni che possono aver portato Klein a scegliere di lavorare con il gruppo delle similitudini piuttosto che con quello delle isometrie. Innanzitutto, poiché «la classificazione euclidea delle figure è invariante per similitudine», cita dei motivi storici, che lo vedevano intento nella realizzazione di un progetto che partisse dalla Geometria euclidea. Ancora, perché quest'ultima, così come le Geometrie non euclidee, può essere subordinata alla Geometria proiettiva – nel senso che sia il gruppo principale che i gruppi delle Geometrie non

[6] Il cerchio immaginario all'infinito.

euclidee possono essere caratterizzati come sottogruppi del gruppo proiettivo che fissano una particolare figura.

Con il Programma di Erlangen, l'idea di gruppo ha assunto un ruolo centrale non solo negli sviluppi strettamente matematici della Geometria, ma anche nel suo inquadramento filosofico, nota Speranza. Poincaré per primo in [30] sostiene che «il concetto generale di gruppo è pre-esistente nelle nostre menti, almeno potenzialmente. Si impone a noi non come forma della nostra sensibilità, ma della nostra comprensione»: per lui l'idea di gruppo funziona come *concetto in atto*, cioè come strumento per organizzare informalmente la conoscenza, anche quando non è esplicitamente conosciuto. L'importanza dei gruppi di trasformazioni sta nel fatto che la trasformabilità di figure è anch'essa un concetto in atto profondamente radicato nel modo di pensare dell'uomo, essendo collegato alle radici stesse del pensiero astratto. Che la nuova visione della Geometria non influisca solo sul sistema dei teoremi, ma anche su quello dei concetti è stato espresso in modo significativo da Bachelard in [1]: «la forma matematica si conosce attraverso le sue trasformazioni. Si potrebbe dire all'essere matematico: dimmi come ti trasformerò e ti dirò chi sei». Va notato come l'enfasi sia su *come ti trasformano* e non *come ti trasformi* (che farebbe pensare invece a una proprietà inerente all'essere medesimo) perché la classificazione degli enti geometrici deve necessariamente essere riportata a un osservatore, come la relatività insegna, e questo è secondo Speranza il motivo per cui l'ambizioso tentativo di Klein di garantire una base assoluta al sistema dei concetti geometrici, avendo dato una particolare importanza a S, è in parte fallito.

«Si potrebbe anche dire (usando la metafora politica, come in alcuni articoli di Gillies [12]), che Klein inizia una rivoluzione, ma lascia al suo posto il re, il cui ruolo è svolto da quella che chiama *geometria elementare*, più esattamente dal gruppo S delle similitudini (nel piano o nello spazio euclidei)»: Speranza nel suo saggio inizia questa riflessione al fine di riuscire a conferire l'attributo di rivoluzione alla stesura del Programma di Erlangen e a tutte le conseguenze che esso ha portato. Lui argomenta appunto che, sebbene non incontrò opposizioni (contrariamente a quello che accade solitamente ai mutamenti rivoluzionari) e non rovesciò nessuna teoria precedente, ne è comunque degno, perché è opportuno estendere la metafora da politica a sociale: la vera rivoluzione è negli atteggiamenti e nei modi di pensare, è al *metalivello* «dei valori matematici della comunità che definiscono gli scopi e i metodi dei contenuti e incorporano credenze generali circa la loro natura».[7] Ha influito infatti nel senso che una volta superata la restrizione del gruppo principale, la geometria non deve più essere legata a determinati oggetti geometrici e l'enfasi si sposta su concetti più astratti, quali quello di gruppo.

Sembra necessario sottolineare infine esplicitamente l'importanza che l'intuizione ricopre nella stesura e nell'interpretazione del Programma di Erlangen, tanta da indurre Klein a dedicarle la seguente nota alla fine del saggio [17]:

> Se nel testo noi accenniamo all'intuizione dello spazio come a qualcosa di secondario, lo facciamo in relazione al contenuto puramente matematico delle considerazioni da formulare. L'intuizione ha per esso il solo scopo dell'evidenza, il quale però dal lato pedagogico è da stimarsi assai. Un modello geometrico per esempio è sotto questo punto di vista assai istruttivo ed interessante.
>
> Ben diversa però è la questione sull'importanza dell'intuizione geometrica in generale. Io la considero come una cosa che sta da sé. V'ha una geometria speciale che non vuol esser riguardata, come le ricerche discusse nel testo, quale forma intuitiva di considerazioni astratte. In essa si tratta di concepire assolutamente le figure dello spazio con le forme che esse hanno effettivamente, e di intendere (ed è quello il lato matematico) le relazioni che per esse sussistono come conseguenze evidenti dei postulati sull'intuizione dello spazio. Un modello – sia pur eseguito ed osservato, oppure solo rappresentato con evidenza – non è per questa geometria un mezzo per raggiungere lo scopo, ma lo scopo medesimo.

[7]Citazione tratta dal *Meta-level Revolution in Mathematics* di Caroline Dunmore contenuto in [12, p. 209-225].

Istituendo per tal modo la geometria come qualcosa a sé, accanto alla matematica pura, ma indipendentemente da essa, non facciamo certo nulla di nuovo. È desiderabile però che si metta una buona volta ed espressamente in evidenza questo punto di vista, poiché l'investigazione recente lo omette quasi totalmente. E a questo si collega il fatto che inversamente l'investigazione stessa venne di rado usata a studiare le proprietà di forma degli enti dello spazio, benché appaia di gran vantaggio appunto in questo indirizzo.

Capitolo 3

L'insegnamento della Geometria alla luce degli studi precedenti

In questo capitolo si affronterà l'impatto che il Programma di Erlangen e le teorie epistemologiche inerenti allo sviluppo della conoscenza geometrica illustrate nel Capitolo 1 hanno avuto da un punto di vista didattico. Si analizzeranno, nella prima parte, le idee espresse da Klein stesso sull'insegnamento della matematica in [18], mentre la seconda parte del capitolo sarà focalizzata sulla visione di Speranza come illustrata in [34].

3.1 Sull'insegnamento della Geometria secondo Klein

Nel capitolo finale del suo [18], "Osservazioni sull'Insegnamento della Geometria", Klein inizia esprimendo la sua tesi secondo cui la didattica della Geometria – materia che, grazie alla sua veneranda età come scienza, vanta una lunga tradizione come argomento di insegnamento – soffre proprio per il peso della tradizione: dal momento che molti componenti non più vitali hanno "messo radici", sono difficili da eliminare e possono persino ostacolare considerevolmente l'introduzione di nuovi argomenti.

Per comprendere lo stato dell'insegnamento della Geometria come era ai suoi tempi, Klein va a ritroso nell'analisi storica fino a tornare al più eclatante momento di risveglio dell'attività scientifica, il Rinascimento: a quei tempi infatti l'ispirazione proveniva dagli antichi e si studiavano in particolare gli elementi di Euclide, come introduzione alla Geometria, per poi proseguire studiando altre componenti della Geometria greca, come per esempio il calcolo di π, le sezioni coniche di Apollonio e le costruzioni con riga e compasso. Tale insegnamento della Geometria è naturalmente estremamente unilaterale: «non solo la preoccupazione per le applicazioni, ma anche la formazione dell'intuizione spaziale erano completamente marginalizzate, l'enfasi era esclusivamente sul lato logico astratto della deduzione geometrica».

Klein critica le modalità di insegnamento tradizionale a diversi livelli: sopra ogni altra cosa, crede che la fusione di diverse discipline sia troppo poco realizzata in classe, il che si riflette specialmente nella isolata posizione che assume la Geometria elementare. Volendo essere più specifico riguardo allo stato dell'insegnamento della Geometria, Klein si propone di studiare separatamente lo sviluppo nei singoli paesi: significativi per questo studio sono le sue analisi dell'insegnamento in Italia [18, p. 259] e Germania [18, p. 265].

In Italia – si tenga a mente che per questa analisi Klein parte dal 1860 circa – la più grande influenza sulla ristrutturazione uniforme dell'insegnamento della Matematica fu il geometra Luigi Cremona che, grazie alla sua attività scientifica, è stato in grado di esercitare un impatto duraturo sull'educazione universitaria, collegando la Geometria proiettiva con la Geometria descrittiva. D'altra parte Cremona ha avuto un effetto sull'insegnamento nelle scuole secondarie in un senso molto diverso: diversi esperti ritengono che egli raccomandò Euclide come un libro di testo se non obbligatorio, sicuramente esemplare per tutto l'insegnamento della Geometria nelle scuole, per la disposizione e limitatezza della materia che tratta e, in particolare, per come esplicita l'ideale di una struttura rigorosamente chiusa della Geometria. Così, Cremona sottolineava soprattutto il lato logico, mentre – nella sua stessa attività didattica e nel suo lavoro scientifico – prevalevano i momenti intuitivi. Klein risulta sorpreso da questo contrasto ma si focalizza su come questa proposta ebbe seguito: i matematici italiani dell'epoca si fecero carico di sostituire Euclide con dei *libri di testo* che ne conservassero la materia e la tendenza, ma che realizzassero il suo obiettivo in un modo che corrispondesse meglio ai requisiti più stringenti del momento.

Klein comincia commentando la trasposizione in italiano di Euclide redatta[1] da Enrico Betti e Francesco Brioschi nel 1867 (si veda [2]) con cui si è avviata la diffusione della conoscenza di Euclide a livello didattico in Italia: essa contiene, come molte altre edizioni scolastiche, solo i libri da 1 a 6, e i libri 11 e 12; tuttavia la tendenza degli autori si rivela subito non essere affatto quella di presentare l'argomento in questa forma antica: tutti i numerosi fatti tratti dall'intuizione, che Euclide usa tacitamente, sono formulati in modo esplicito ed esatto per colmare le lacune del primo libro – tra i concetti tacitamente applicati da Euclide si annovera anche quello di moto rigido, che viene messo da Betti e Brioschi a base del sistema grazie a una serie di assiomi del moto.

Altri testi scolastici scritti a partire dagli Elementi si allontanano ancora di più dalla trattazione originale di Euclide, cercando di raggiungere un grado maggiore di rigore nella loro elaborazione dei fondamenti, giudicando i numerosi concetti di base di Euclide e del libro di testo Betti-Brioschi come non sufficientemente definiti e quindi mirando ad adottare un unico concetto di base, per esempio quello del punto, da cui dovrebbero essere costruite tutte le altre configurazioni necessarie in Geometria in modo puramente logico. In particolare, qualsiasi uso del concetto di movimento rigido dovrebbe essere interamente evitato nelle basi della Geometria. Il culmine di questo sviluppo è probabilmente rappresentato dai vari libri di testo di Giuseppe Veronese. Gli "Elementi" di Veronese [38] contengono gli sviluppi teorici in maniera estremamente completa: tutti i postulati della Geometria sono enunciati,

[1] In occasione del neonato decreto del 1867 sulla riformulazione dei programmi, ispirato principalmente da Cremona, come già anticipato.

anche quando appaiono come estremamente evidenti; si rimanda però ancora, anche se in breve, all'osservazione empirica come principio euristico per l'instaurazione degli assiomi.

Klein argomenta che la direzione astratta di Veronese sia stata addirittura enfatizzata dal lavoro della cosiddetta scuola di Peano: Giuseppe Peano (1858 - 1932) si propone di realizzare una presentazione puramente logica della Matematica, libera da ogni elemento di intuizione. Perciò sceglie di usare un linguaggio formale particolare, il cui scopo sarebbe dovuto essere quello di sostituire il linguaggio ordinario: infatti egli ritiene che a causa delle innumerevoli associazioni che l'uso di parole familiari implica, non volendo assolutamente essere influenzati da fattori non logici, l'ideale è operare con simboli privi di senso secondo regole arbitrarie. Klein è dell'avviso che «l'entusiasmo del logico per l'eliminazione di qualsiasi intuizione (se ciò dovesse mai essere possibile) è in qualche modo prematuro: mentre alcuni potrebbero inizialmente apprezzare questa logica più pura, deve esistere anche qui un modo migliore per mediare tra logica e intuizione».

In contrapposizione con questi sviluppi, si vede la nascita di un filone che, come l'analogo movimento in Germania che in seguito si analizzerà, cerca di abbandonare l'elevata considerazione della logica astratta e la stretta aderenza agli Elementi di Euclide, per rinnovare l'insegnamento della Matematica con un approccio più intuitivo, integrando i principali concetti generali della scienza moderna (allora questo significava il concetto di funzione) e includendo le applicazioni. Il leader di questo movimento è Gino Loria, professore di Geometria Superiore dell'Università di Genova, che presentò nel 1905 un suo intento di riforma [21] durante un incontro di "Mathesis" – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche [2] – il che è una testimonianza eccellente sia di quanto le idee moderne fossero diventate di fondamentale spessore per gli insegnanti in Italia che delle circostanze per cui la spinta innovativa finì per interessare più i programmi che i libri di testo.

[2] Associazione che ha per scopo preciso la valorizzazione ed il progresso dell'insegnamento della matematica e, più in generale, dell'insegnamento scientifico.

Per quanto riguarda la Germania, Klein inizia criticando la mancanza di uniformità d’insegnamento che si manifesta a diversi livelli: sia nei vari stati che presso le singole istituzioni e i singoli insegnanti. Una tendenza importante che egli segnala è la concezione che gli insegnamenti delle scuole primarie debbano necessariamente basarsi sull’intuizione immediata e sempre su ciò che è visibile e familiare agli alunni. Queste concezioni derivano dal pensiero dello svizzero Heinrich Pestalozzi, che nei suoi saggi delinea una Matematica che permetta anche a un alunno senza istruzione precedente di riuscire ad ottenere l’accesso ai fatti più semplici dello spazio e all’intuizione numerica: per far ciò questi vengono ridotti a un enorme ammasso di nozioni in cui si presentano tutte le possibili relazioni in maniera estremamente dettagliata. Klein cita anche l’opera di Johann Friedrich Herbart "Sull’idea di Pestalozzi di fondare un ABC dell’intuizione" [15], dove però le idee di Pestalozzi sono riprese e trattate con una presentazione più schematica e quindi più interessante.

Klein segnala come l’enfasi posta da Pestalozzi ed Herbart sull’importanza dell’intuizione spaziale si sia allargata dalle scuole primarie alle secondarie e come conseguenza di ciò si sia arrivati a concepire l’idea pedagogica che essa possa essere non solo il metodo con cui preparare alla Matematica i gradi inferiori, ma anche un fine a se stessa: «non si dovrebbero usare le materie intuitive solo per esercitare il pensiero logico, ma per esercitare l’intuizione stessa», ritiene Klein.

Il libro di testo che secondo Klein realizza al meglio queste tendenze riformatrici è il "Manuale metodico di Matematica elementare" di Gustav Holzmüller [16]. Qui già il titolo è caratteristico e mostra un’evoluzione rispetto alla meticolosità e al fiscalismo di Pestalozzi ed Herbart: si intende "metodico" in contrasto con "sistematico", dunque non eccessivamente fiscale, ma che può essere anche adattato a diversi approcci educativi. Inoltre, questo non è un libro di Geometria o di Aritmetica, ma l’intera Matematica elementare è presentata: le singole sotto-discipline appaiono in ordine alternato, così da poter essere insegnate in modo consecutivo in classe e da far emergere chiaramente anche i loro rapporti reciproci. Particolare importanza viene data nel testo, secondo Klein, «alla comprensione di una costruzione, non solo come una possibilità, ma anche realizzata in modo chiaro e completo. I teoremi geometrici appaiono poi spesso come risultati collaterali [...]; per esempio, i teoremi di congruenza derivano dall'osservazione che la costruzione di un triangolo, quando vengono fornite tre parti, è unica».

Sempre in [18], Klein esprime il suo pensiero riguardo all'importanza di tenere conto degli aspetti psicologici in ambito didattico. Egli sottolinea come gli sviluppi della Psicologia sperimentale abbiano portato a cogliere a pieno il senso di quanto la differenza di talento individuale influenzi l'apprendimento:

> In effetti c'era un tempo in cui si era fermamente convinti che solo pochi studenti fossero dotati di doti matematiche – questo significava che solo questi erano in grado di capire qualcosa di Matematica e che tutti gli altri non potevano imparare nulla, anche dopo aver applicato i più grandi sforzi; la ragione per cui una tale visione avrebbe trovato un'accettazione così generale può essere trovata solo nel metodo difettoso dell'insegnamento della Matematica prevalente in quel momento. In seguito, quando si cominciò a valutare di più l'arte della pedagogia ben presto ci si spostò verso l'opinione opposta che ogni studente può imparare, purché buona volontà e qualche sforzo anche dal lato del insegnante, qualcosa di considerevole di Matematica.

Queste idee si riflettono nel tentativo di riforma dei curricula del tempo, descritti in precedenza: la formazione dell'*intuizione* spaziale è portata alla ribalta, la *storia della Matematica* viene considerata molto di più, le *applicazioni* sono debitamente enfatizzate e il *disegno geometrico* diventa una componente sostanziale dell'insegnamento della Matematica; nelle linee guida formulate dalla Prussia nei curricula del 1882 troviamo la richiesta che «tra matematica e altri argomenti siano realizzate quante più connessioni possibili».

3.2 Sull'insegnamento della Geometria secondo Speranza

Nell'analisi riportata nella sezione precedente Klein esprime le sue opinioni e i suoi giudizi sullo stato della didattica della Geometria, e più in generale della Matematica, così come essa si era sviluppata fino al 1908: successivamente alla pubblicazione del Programma, si sono alternate diverse correnti, più o meno innovative e coerenti con quanto dichiarato nella dissertazione del matematico tedesco.

Il lascito di queste spinte innovative e di questi curricula riformatori viene ripreso, poco meno di un secolo dopo, da Speranza che in [34] descrive il Programma di Erlangen come una delle premesse premesse teoriche della ricerca da lui intrapresa su come i bambini tendano a formare i concetti geometrici. In dettaglio ne parla così[3]: «Non c'è una sola Geometria ma *esistono tante Geometrie, ciascuna con il proprio criterio d'equivalenza delle figure* (che di regola si esprime come trasformabilità dell'una nell'altra per effetto di trasformazioni d'un gruppo fissato). Ciò significa che *gli stessi concetti geometrici sono relativi*: un concetto geometrico g è ammissibile nella geometria G solo se l'insieme delle figure che afferiscono a g è invariante in G, cioè solo se tutte le figure G-equivalenti a una figura di g sono ancora figure di g». Per esempio, nella Geometria affine il concetto di parallelogramma è ammissibile, perché ogni figura affine a un parallelogramma è un parallelogramma, ma il concetto di rettangolo non lo è.

È significativo che il Programma di Erlangen risalga al 1872, un'epoca decisiva per un'altra tappa del pensiero geometrico (o meglio metageometrico): la prova della coerenza relativa delle geometrie non euclidee. L'impatto e il valore rivoluzionario di entrambi questi risultati citati si ritrovano purtroppo molto minimizzati nella trattazione corrente della Matematica, nota Speranza, grazie al fatto che quasi tutte le Geometrie classiche (metrica, si-

[3]Nell'Appendice B sono riportate le definizioni formali di questi ed altri concetti descritti qualitativamente in questa sezione.

mile, affine) sono subordinate l'una all'altra: ovvero i rispettivi gruppi di trasformazioni formano un insieme totalmente ordinato dalla relazione d'inclusione. La Geometria greca si basa soprattutto sul gruppo delle isometrie e su quello delle similitudini, che in quella catena sono gli ultimi elementi, e la nomenclatura classica è basata sulla Geometria simile (vale a dire, i suoi nomi e i suoi predicati esprimono concetti ammissibili nella Geometria delle similitudini): dunque è di queste che risulta più facile ed è più diffuso parlare.

Questo è interessante secondo Speranza perché, dato che le altre Geometrie (affine, proiettiva, topologica) utilizzano criteri d'equivalenza strettamente meno fini di quello delle similitudini, per loro è utilizzabile parte della nomenclatura euclidea (per esempio conica, ma non circonferenza, nella Geometria proiettiva): con qualche aggiustamento, si può costruire dunque la nomenclatura di ciascuna della Geometrie classiche come sottoinsieme di quella delle similitudini. Poiché *la Geometria metrica euclidea ha il vantaggio di contenere le altre geometrie classiche* – nel senso che se due figure sono equivalenti per isometrie lo sono anche rispetto alle equivalenze basate sui gruppi di quelle geometrie – il lessico di quelle geometrie si ottiene selezionando opportunamente il lessico della Geometria euclidea. Ma, sottolinea Speranza, in primo luogo le affermazioni della Geometria affine o proiettiva diventano così difficilmente rintracciabili, e si perde la visione globale di tali geometrie; e inoltre, in alcune circostanze ha interesse considerare gruppi che non contengono quello delle isometrie, e quindi danno luogo a delle geometrie non più riconducibili, neppure in teoria, alla Geometria euclidea. La domanda che si pone quindi è: «questo è un fatto *naturale* o si può notare l'influenza di circostanze storiche?». Accenna così a un altro importante principio: il linguaggio non è uno strumento neutro, ma, così come si è storicamente attuato, influenza il modo di pensare.

Tornando di nuovo al concetto di gruppo e come esso si inserisca nell'idea di riforma dell'insegnamento proposta da Speranza, in [36] si legge ancora: «già nella scuola dell'obbligo, anche senza parlare espressamente di gruppi, ha senso comunque chiedersi quali proprietà e quali classi di enti sono invarianti per una data trasformazione. La ricerca di invarianti è molto significativa anche per la fisica, e porta a constatare che vi sono diverse geometrie. [...] La Geometria di Euclide è principalmente metrica, cioè fondata sul gruppo delle isometrie (ma in parte su quello delle similitudini): l'importanza di questo gruppo, e quindi della relativa Geometria, non ha però un carattere a priori, ma ha origini storiche e pratiche (soprattutto fra i manufatti, abbondano gli oggetti rigidi, cioè quelli che spostandosi mantengono, almeno approssimativamente, le distanze). Ma altre esperienze portano ad altri tipi di Geometria: le ombre solari e l'assonometria alla Geometria affine, la prospettiva e le ombre da sorgenti prossime alla Geometria proiettiva». La relatività dei concetti geometrici consiste nel fatto che, come già osservato sopra, per esempio, nella Geometria affine non ha senso il concetto di rettangolo: per effetto di un'affinità, un rettangolo si può trasformare in una figura che non è un rettangolo. Comunque ciò che è interessante fare è introdurre considerazioni di questo tipo a scuola: si può andare dalla ricerca di invarianti per determinate trasformazioni, fino a una trattazione distinta – non separata, specifica Speranza, perché per esempio, si può fare prima della Geometria affine, e poi, su questa, introdurre la Geometria metrica, semplicemente aggiungendo concetti quali congruenza, isometria, distanza – di diversi tipi di Geometrie. Queste osservazioni sulle diverse Geometrie, così come le teorie di Enriques sull'acquisizione psicologica dei concetti geometrici riportate nel Capitolo 1, convergono poi nel circolo di teorie formali che sono alla base dell'analisi che Speranza esegue su come si sviluppa l'acquisizione delle conoscenze geometriche nei bambini e negli adolescenti.

Egli, come già visto nel Capitolo 1, si trova d'accordo con diversi matematici e filosofi tra cui Gauss, Riemann, Helmholtz, Mach e fra tutti Enriques che ritengono che le conoscenze abbiano origine dall'esperienza, se pur valorizzando l'azione della mente umana, che costruisce teorie interagendo con essa. In particolare la sua idea è che la Geometria abbia origine dalle prime esperienze spaziali proprie del bambino: «inizialmente la Geometria ha a che fare con sensazioni, esperienze e osservazioni *esterne*, di tipo senso-motorio (la fonte dell'Aritmetica e della Logica è in qualche modo più *interna* a noi stessi); procede poi per razionalizzazioni successive di queste prime osservazioni». Queste razionalizzazioni chiaramente sono presenti in diversi tipi e diversi livelli: si consideri a titolo d'esempio la Geometria elementare, che a volte è trattata in modo informale, a volte secondo una sistemazione di tipo euclideo, a volte secondo una che tiene conto della revisione avvenuta al termine dell'800, a volte con l'uso di un simbolismo *ad hoc*, a volte sulla base dell'Algebra. L'estensione di tali livelli e la compresenza di questa scala di teorie porta Speranza a porsi questa domanda, centrale per quanto riguarda l'indagine epistemologica:

> Fin dove ci possiamo spingere verso il *basso*? A un certo punto troviamo il linguaggio naturale, che ci fornisce esso stesso degli orientamenti nella concezione del mondo, nel modo di organizzare l'osservazione: si pensi per esempio al termine *stesso*, che ci fa operare in termini di relazioni di equivalenza, anche se non ne siamo consci.

La questione è così interessante da stimolare in lui un'intensa riflessione sulle diverse strategie che, nei periodi infantili, si usano per risolvere problemi, pur se relativamente semplici, quando non si può ancora far uso del linguaggio – senza il quale ovviamente non si può comunicare il tipo di strategia, la quale diventa quindi sostanzialmente impossibile da analizzare – e tale ipotesi si trova dunque a far parte del nucleo teorico del programma di epistemologia genetica che Speranza delinea.

Il problema dell'insegnamento è centrale in Speranza e si evolve in quello più generale della *costruzione* della Geometria come scienza razionale (in contrapposizione alla tendenza di *darla come cosa già sistemata*). La prima questione che egli solleva in questo senso è su *quale* Geometria andare a riorganizzare. Non c'è dubbio che, nelle varie fasi in cui si articola, la Geometria presenti una molteplicità di aspetti diversi. Ad un estremo abbiamo il "saper capire lo spazio", un livello pre-linguistico; attraverso la verbalizzazione (ovvero la capacità di trovare parole adeguate per parlare dello spazio), la concettualizzazione (che serve per organizzare l'esperienza spaziale in concetti), le rappresentazioni (tra cui si elencano il metodo della coordinate, la prospettiva, . . .), l'istituzione di relazioni, lo studio di trasformazioni e dei loro invarianti, si arriva ai problemi più chiaramente logici: la ricerca di definizioni e di dimostrazioni e infine l'assiomatizzazione. Solo a questo punto possono prendere il via le teorie più "libere", nel senso di non più legate all'esperienza. Ciascuna di queste tappe può essere raggiunta durante un determinato stadio dello sviluppo cognitivo ma va sottolineato come sia stata proprio l'analisi del modo in cui procede la formazione dei concetti geometrici in riferimento all'età a dare a Speranza spunto per la costruzione di percorsi didattici. Speranza in [35] infatti traccia un panorama sui possibili percorsi di insegnamento della Geometria in parallelo con i vari livelli dello sviluppo del pensiero, senso-motorio, intuitivo, delle operazioni concrete e formale – descritti da Piaget in [27] e che saranno richiamati nella Sezione 4.3.2 – secondo lo schema riportato in Figura 3.1.

La Geometria prende le mosse dall'esperienza spaziale, visiva e tattile ma anche motoria che corrisponde allo stadio senso-motorio dello spostarsi e del muovere gli oggetti circostanti, ma, anche se il primo approccio che il bambino ha con la Geometria è strettamente fisico, da subito in lui si formano delle *immagini mentali* [4] le quali una volta elaborate, più o meno coscientemente, e abbinate con altre, tutte relative allo stesso concetto, costituiscono il modello mentale del concetto stesso, ovvero l'unico mezzo con il quale il soggetto entra in relazione con l'oggetto matematico.

Perciò è di grandissima importanza che in questa fase l'acquisizione del concetto sia il più possibile veritiera e che, muovendosi verso lo stadio cognitivo cosiddetto intuitivo, venga integrato il più possibile con attività pratiche e sperimentali: l'importante, secondo Speranza, è «avvicinare il *saper fare* al *saper parlare*». Arrivati a questo punto, con dei compiti comunemente

[4] Esso sono definite in [6] come il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione sensoriale esterna che, pur essendo tipico del singolo, è un prodotto che ha connotazioni comuni su diversi individui.

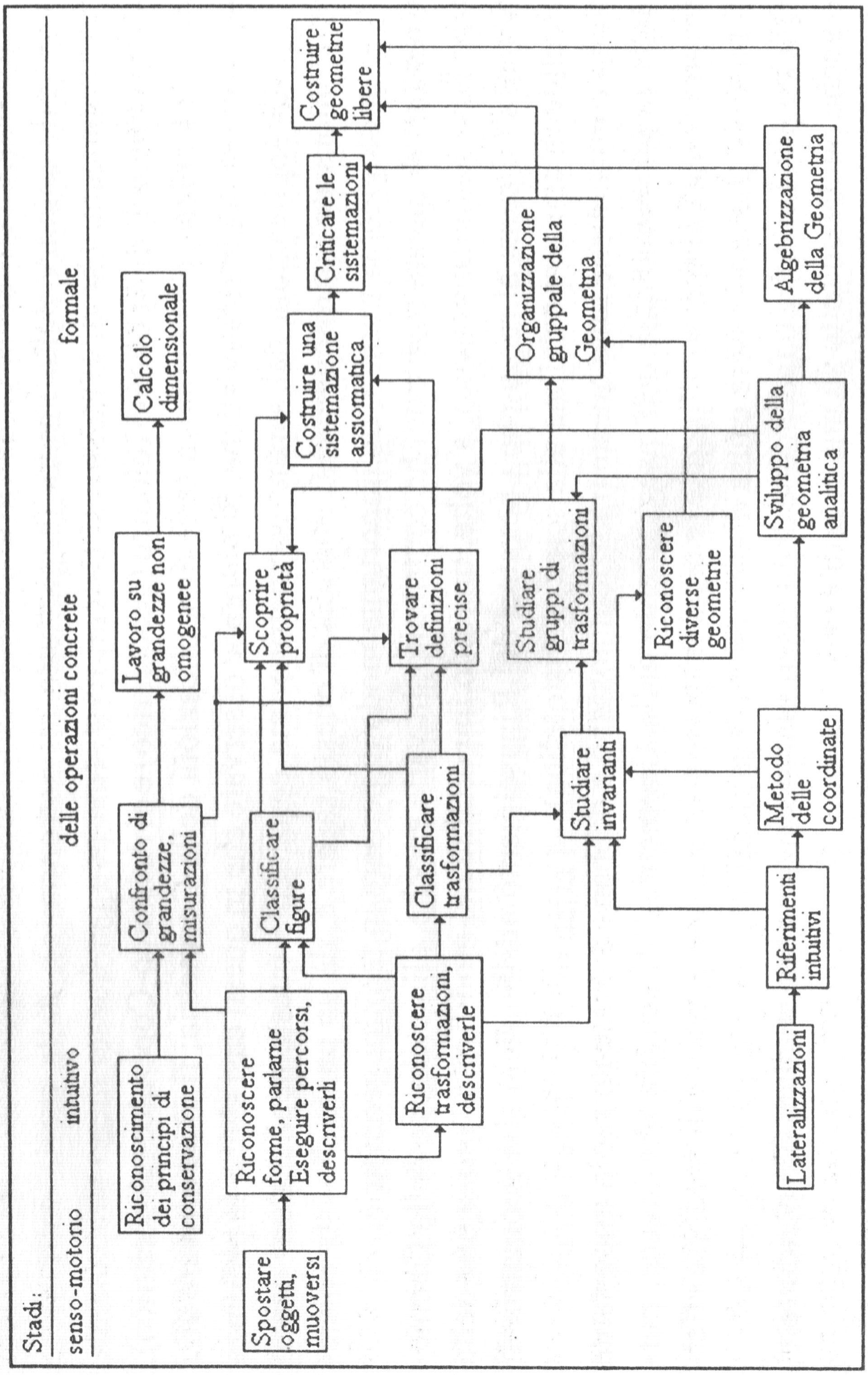


Figura 3.1: Schema sul progresso delle conoscenze geometriche in relazione allo sviluppo del pensiero.

chiamati *di lateralizzazione* – i quali altro non sono che attività che hanno il fine di aiutare nella scoperta della differenza tra destra e sinistre o tra sopra e sotto (e più in generale del metodo delle coordinate) – si iniziano a stimolare ragionamenti che dovrebbero aiutare a far «capire quali di queste distinzioni cambiano e quali restano invariate al cambiare dell'osservatore: significa cominciare a ragionare in termini di *invarianti*, di *proprietà indipendenti dall'osservatore*».

Il lavoro a cui si è appena accennato corrisponde grossolanamente a quello che andrebbe svolto nella fase dei 5-8 anni (dalla fine della scuola materna al primo ciclo delle elementari), mentre nel secondo ciclo deve iniziare un'attività di sistemazione e razionalizzazione del sapere geometrico che proseguirà nella scuola media. È necessario far mettere in atto i primi procedimenti di astrazione: per esempio «raggruppiamo le figure che hanno certe caratteristiche comuni in classi, a ciascuna delle quali corrisponde un concetto collettivo ed eventualmente anche un nome comune (cerchio, triangolo, prisma,...)». Va tenuto ben presente che lo scopo di Speranza è di analizzare l'apprendimento di immagini mentali in particolare quando esse sono accompagnate da quel complesso di abilità che permettono di riconoscere gli oggetti, di muoversi fra essi, che sono ciò che lui chiama *figure geometriche*.

Altri procedimenti di astrazione, che andrebbero attuati didatticamente un po' più avanti nel tempo, portano alla concettualizzazione di relazioni quali "*è parallela a...*", "*è perpendicolare a...*", "*sta fra... e...*", e di trasformazioni come traslazioni, rotazioni, simmetrie. Speranza suggerisce questa distinzione, nonostante formalmente le trasformazioni non siano altro che relazioni, argomentando che la scoperta di questa affinità vada riservata per il periodo della scuola secondaria di primo grado, come si legge infatti in uno degli obiettivi che l'insegnamento della Matematica doveva avere secondo i programmi deliberati dal Decreto Ministeriale del 1979 [5]: «guidare alla capacità di sintesi, favorendo una progressiva chiarificazione dei concetti e facendo riconoscere analogie in situazioni diverse, così da giungere a una

[5] Si veda `http://www.edscuola.it/archivio/norme/decreti/dm9279.html`.

visione unitaria su alcune idee centrali (variabile, funzione, trasformazione, struttura...)».[6]

Ciò su cui suggerisce di soffermarsi è il tema delle corrispondenze e delle analogie, chiave di volta del pensiero matematico-strutturale, specialmente in quanto, come illustra Speranza, è dai ragionamenti su di esse che derivano le definizioni, capisaldi del pensiero critico: se fino a un certo livello di approfondimento, per riconoscere se una figura e una trasformazione appartengono a una determinata classe non c'è bisogno di conoscere la loro definizione formale, quest'ultima diventa necessaria in caso di ambiguità ed è anzi proprio grazie a questa esigenza che esse nascono e vengono raffinate. Il messaggio fondamentale dichiarato da Speranza, dal quale si evince immediatamente che il sottinteso teorico del programma deriva direttamente da Klein e la sua impostazione della Geometria, è il seguente:

> Fin dalle scuole elementari è importante cominciare a pensare in termini di quello che cambia e quello che resta invariato per una determinata trasformazione. Si prepara così la strada alla considerazione dei gruppi di trasformazioni come classi di trasformazioni che lasciano invariate certe caratteristiche geometriche.

Sulla visione della scienza come il risultato di un confronto fra saperi, Speranza propone di costruire una trattazione della Geometria per gli studenti delle scuole secondarie di secondo grado, o equivalentemente per chi abbia raggiunto lo stadio formale della formazione del pensiero. Poiché a questo livello si è in grado sia di comprendere le sistemazioni assiomatiche che di criticarle, è opinione dell'autore che l'approccio migliore per una comprensione e un'interpretazione più formale della Geometria debba avvenire utilizzando assieme ognuna delle diverse letture che della materia sono state

[6] All'interno del curricolo per la scuola primaria redatto con riferimento alle competenze chiave europee e alle Indicazioni Nazionali 2007, la conoscenza delle trasformazioni geometriche elementari e dei loro invarianti figura tra quelle da acquisire anche alla fine della scuola primaria (si veda l'Appendice C.2).

fatte. La Geometria deve essere secondo lui nota in via assiomatica – mediante una risistemazione delle lacune presenti nei contenuti euclidei, si può arrivare a riflettere sul fatto che «i termini primitivi (punto, retta, ...) non hanno significato obbligato» e quindi la teoria diventa un "gioco" ipotetico-deduttivo, aperto a interpretazioni diverse – tanto quanto in via algebrica, traducendo le proprietà geometriche in teoremi di Algebra grazie all'identificazione dei punti con le n-ple di numeri. Infine bisognerebbe unificare e paragonare le diverse geometrie (metrica, simile, affine, proiettiva) confrontando i loro invarianti in base ai rispettivi gruppi di trasformazioni, in linea con il Programma di Klein.

Con questo tipo di trattazione si apre, secondo Speranza, la strada ad ulteriori riflessioni sulle teorie geometriche e ad ulteriori liberazioni della Geometria: a prendere il posto di trattazioni nelle quali gli assiomi si scelgono solo per rendere legittima una teoria esistente saranno le esposizioni in cui si vuole formalizzare più di una teoria insieme o anche in base a soli criteri estetici. Speranza chiude la sua analisi citando una massima di Guido Castelnuovo secondo cui «il valore formativo della Geometria, e la sua utilità come strumento per altre discipline, vengono messi in risalto da una trattazione che tenga conto dei molti approcci possibili: se anche a livello elementare c'è l'esigenza di una trattazione critica, a maggior ragione questo deve essere vero quando si studia la Geometria a livello avanzato».

Capitolo 4

Il questionario: descrizione e analisi dei risultati

In questo capitolo si presenterà lo strumento che è stato scelto per indagare alcuni dei concetti descritti nei capitoli precedenti, in particolare la formazione e la sistemazione dei concetti geometrici e come queste si leghino allo sviluppo cognitivo: questa attività è stata realizzata in due scuole superiori, una di primo e una di secondo grado, e consiste nella somministrazione di un questionario. Gli scopi di tale studio, così come la struttura del questionario, prendono spunto dalla ricerca presentata nell'articolo [23] "*Sulla formazione dei concetti geometrici e sul lessico geometrico*" del 1986 di Medici, Speranza e Vighi.

Inizialmente si tracceranno gli obiettivi e la metodologia sia della ricerca del 1986 che di quella effettuata all'interno di questo lavoro di tesi, la seconda parte del capitolo sarà invece dedicata all'analisi dei dati: verranno dapprima confrontati gli esiti del questionario ottenuti oggi con quelli risalenti al 1986 e successivamente verrà fatto un confronto tra i risultati della secondaria di primo grado e quelli della secondaria di secondo grado.

4.1 Descrizione del questionario

La sperimentazione del 1986 presentata in [23], consisteva nella somministrazione di un questionario, riportato nell'Appendice A.2, a 388 ragazzi di 9-11 anni (quarta, quinta elementare e prima media) di parecchie regioni italiane. Lo scopo principale di tale ricerca era capire, nelle parole di Speranza [34], «quali criteri vengono scelti dalle persone per considerare analoghe delle figure geometriche; anzi, quali figure geometriche sono considerate *più analoghe* di altre». In altre parole, gli autori tentavano di indagare quali fossero i tipi di geometria – o, il che è equivalente, quali i criteri di equivalenza – che appaiono come più naturali: infatti, riprendendo l'approccio geometrico di Klein descritto nel Capitolo 2, fissato un gruppo G di trasformazioni (che è come dire fissata una relazione di equivalenza), hanno senso solo quei concetti che corrispondono a classi (di figure) invarianti per le trasformazioni G; dunque, analizzando quali figure gli studenti considerino analoghe e quale terminologia e tipo di giustificazioni essi utilizzino nelle risposte, si può risalire a quale criterio di classificazione loro abbiano in mente. Chiaramente come evidenziato in [23], uno dei limiti legato al metodo di indagine è che per sua stessa natura un questionario può appellarsi solo alcune esperienze spaziali, quasi sempre quelle legate al disegno e all'osservazione di figure disegnate.

Il questionario utilizzato nell'indagine realizzata per questa tesi, riportato nell'Appendice A.1, presenta alcune differenze rispetto a quello originale, ma in entrambi i casi, quel che si chiede agli alunni è di associare una o più figure ad un'altra o di assegnare una data figura ad un insieme di figure oppure ad un altro, al fine di comprendere il criterio dell'equivalenza e il tipo di caratteristiche che prevalgono nell'elezione. Le modifiche effettuate sono state motivate da diverse fattori che si andranno di seguito ad esporre, insieme alla descrizione delle caratteristiche che le singole domande intendono indagare.

Innanzitutto sono state eliminate alcune domande per limitare il campo di indagine: la numero 4 e la 7 perché indagavano esclusivamente le capacità linguistico-comunicative (cioè il saper descrivere le figure in termini verbali), la numero 9 poiché si voleva limitare l'indagine a ciò che emerge semplicemente dall'osservazione e non dalla manipolazione e la numero 6 perché esiste molta letteratura di ricerca successiva a riguardo (si veda il capitolo dedicato alle misconcezioni di [3]) . Sono rimaste praticamente inalterate le domande 1 e 2 di [23] – nella prima è stata fatta solo una piccola modifica nella figura 3 per rendere più visibile il fatto che essa abbia la stessa area di A – e in entrambe si chiede di scegliere la figura che "sembra più simile" a una determinata figura: la differenza principale tra le due è che nella prima la scelta può essere orientata da parole dell'ordinario lessico geometrico mentre ciò non può accadere nella seconda.

Le domande 3 e 5 di [23] – che corrispondono ai numeri 3 e 4 nel questionario somministrato per questa tesi – in cui l'analogia richiesta corrisponde all'appartenenza a un insieme, hanno presentato, come commenta Speranza in [34], risposte meno chiare e si sente quindi la necessità di riprendere l'indagine, presentando alternative più semplici: si è scelto dunque nel questionario rivisitato di modificare entrambi gli insiemi della domanda 3, sostituendo in uno i triangoli qualsiasi con triangoli scaleni che assomigliassero per lunghezza di uno o più lati alla figura da classificare e nell'altro i triangoli rettangoli messi in posizione canonica con altri inseriti più casualmente; nella domanda 4 è stato modificato uno dei due insiemi riportati nella richiesta 5 del questionario originale, sostituendo un parallelogramma con un rettangolo. Infine è stata aggiunta una richiesta – l'attuale domanda 5 – analoga alla precedente, in cui si fa riferimento a due insiemi per i quali la caratteristica comune è più riconoscibile (4 angoli uguali oppure 4 lati uguali).

Nei quesiti 7 e 8 – che corrispondono esattamente [1] alle domande originali 11 e 12 – la scelta dell'analogia è controllata inventando un nome comune attribuito ad alcune figure e chiedendo a quali figure, tra quelle proposte, si potrebbe assegnare lo stesso nome: naturalmente, la definizione non è specificata e il significato deve essere intuito per estensione; quel che si fa è cercare

[1] Anche per questi quesiti in [34] era stato segnalato il problema delle risposte non chiare, ma in questo caso si è deciso di non apportare modifiche.

di capire quale significato conferisce l'intervistato al nome, quale caratteristica ritiene più significativa. Infine la domanda 6 è andata a sostituire la 8 del questionario originale, infatti pur essendo molto diverse condividono l'obiettivo: indagare la capacità di concettualizzazione e di astrazione attraverso la ricerca di una caratteristica comune. La richiesta fatta nel questionario più recente è più esplicita (c'è un riferimento evidente ad una caratteristica comune, mentre in [23] si chiede solo di dare un nome ai poligoni), ma le figure proposte sono meno riconoscibili e quindi meno influenzate dall'ordinario lessico geometrico.

Per quanto riguarda la somministrazione del questionario realizzato nell'ambito di questa tesi, esso è stato consegnato in forma cartacea in classe in una scuola secondaria di primo grado – a tre classi prime e due seconde – e in una di secondo grado, nello specifico un Liceo Scientifico, a due classi terze, di cui una ad opzione scienze applicate, e due classi quarte, entrambe ad opzione scienze applicate. Il questionario era anonimo e andava completato in un'ora. I numeri di questo esperimento sono decisamente inferiori a quelli presentati nell'analoga indagine riportata in [23]: sono stati analizzati 206 questionari, di cui 113 provenienti dalla scuola media e 93 dalla scuola superiore, tutti svolti da studenti di scuole del Comune di Bologna.

Si sono scelte queste modalità perché si voleva sia operare un confronto con i dati di Medici, Speranza e Vighi per valutare eventuali differenze (e per questo sono state scelte le classi delle scuole medie), sia indagare come la capacità di classificare e di riconoscere invarianti maturino con il tempo e con lo sviluppo cognitivo, dunque il paragone è fatto fra due livelli scolastici diversi.

Il percorso di scoperta dei concetti geometrici così come la differenziazione nei vari livelli dello sviluppo psicologico e in che modo essa permetta di «desumere dalle sensazioni la rappresentazione dello spazio» che è stato trattato nei capitoli precedenti farà da quadro di riferimento per l'analisi dei risultati, argomento delle prossime due sezioni, dell'indagine appena descritta.

4.2 L'analisi orizzontale alla luce del cambiamento dei programmi della scuola primaria

In questa sezione si confronteranno i risultati dei 113 questionari completati quest'anno (2018) dagli studenti della scuola secondaria di primo grado con i risultati dell'indagine riportata in [23] del 1986, tenendo conto delle differenze tra i programmi in atto nelle scuole nei due periodi. Si è scelto di basare il confronto sulle indicazioni fornite per la didattica nella scuola primaria e non nella secondaria di primo grado perché in tutte le classi intervistate le conoscenze di Geometria indagate nel questionario non erano state ancora acquisite e quindi è sembrato opportuno fare riferimento direttamente ai traguardi finali del percorso della scuola primaria.

Nel Decreto n. 503 del 14 giugno 1955 – che era quello in atto al momento della somministrazione dei questionari da parte di Medici, Speranza e Vighi [23] – nella sezione dedicata all'Aritmetica e alla Geometria per le classi terza, quarta e quinta si legge:

> Per la Geometria l'alunno verrà condotto in via naturale a riconoscere le principali figure piane e solide: ciò attraverso il disegno e le più evidenti proprietà, mai attraverso la definizione, spesso non compresa, sempre dannoso sforzo mnemonico. [...] Tanto nel campo dell'aritmetica quanto in quello della Geometria, sarà utile abituare gli alunni stessi a proporre e a formulare problemi pratici ricavati dalla propria esperienza.

Il decreto è reperibile in forma integrale all'indirizzo `http://www.edscuola.it/archivio/norme/decreti/dpr503_55.html`, mentre in Appendice C.1 sono riportate le parti più significative rispetto agli argomenti trattati in questa tesi.

Invece nel curricolo per la scuola primaria stilato in accordo con le competenze chiave europee e basato sulle Indicazioni Nazionali del 2007 – che può essere consultato nell'Appendice C.2 – tra i traguardi per lo sviluppo delle competenze che devono essere raggiunti alla fine della scuola primaria si annoverano i seguenti:

> Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.
>
> Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.

Più esplicitamente la *competenza specifica* che si richiede acquisita è di «rappresentare, confrontare ed analizzare figure geometriche, individuandone varianti, invarianti, relazioni, soprattutto a partire da situazioni reali». Per quanto riguarda le *abilità* invece si citano:

> Descrivere, denominare e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie.
>
> Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse.
>
> Confrontare e misurare angoli utilizzando proprietà e strumenti.
>
> Utilizzare e distinguere fra loro i concetti di perpendicolarità, parallelismo, orizzontalità, verticalità.

Tra le *conoscenze* annoverate ci sono quelle di:

- Figure geometriche piane.
- Piano e coordinate cartesiani.
- Trasformazioni geometriche elementari e loro invarianti.

Nella sezione "livelli di padronanza" si richiede che tra i traguardi attesi a partire dalla fine della scuola primaria compaiano i seguenti:

Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.	Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...).

Da questo confronto emerge che il focus nella scuola odierna è impostato più che sul disegno sulle definizioni e su come lo studente possa usarle per classificare figure, e in particolare troviamo accenni alle trasformazioni geometriche che nei programmi del passato non sono presenti. Il riferimento ai modelli concreti e ai problemi pratici è presente in entrambi i curricula, mentre il richiamo alle strutture psicologiche e a quanto esse influenzino l'apprendimento è sparito nel tempo.

Il raffronto – che da questa riflessione parte – tra i dati raccolti durante le ricerche che hanno portato a questa tesi è stato qui di seguito riportato domanda per domanda; in ogni tabella la prima riga esprime le percentuali di risposte fornite dagli studenti (di 11-12 anni) di scuola secondaria di primo grado nella rilevazione effettuata nell'ambito di questa tesi, e la seconda offre gli stessi dati per i bambini (di 9-11 anni) intervistati da Medici, Speranza e Vighi nel loro lavoro del 1986.

Tabella 4.1: Domanda 1 - Analisi orizzontale.

	1	2	3	1-2	altre
2018	29,20%	42,48%	15,04%	7,96%	5,30%
1986	29%	58%	2%	5%	6%

Domanda 1 Speranza in [33], per giustificare le percentuali ottenute in questa risposta, ipotizza che la scelta possa essere orientata da parole dell'ordinario lessico geometrico: questo risulta vero anche per questa indagine, come si vedere dalle giustificazioni. Si legge infatti:

> «[Classe prima media] La 1, perché sono tutti e due quadrati, solo uno un po' più piccolo e uno un po' più grande».

È chiaro quindi che la possibilità dell'uso del termine "quadrato" per entrambe le figure è ciò che porta alla scelta. Anche senza esplicitamente servirsi di un lessico specifico, molti tra gli intervistati che rispondono scegliendo la figura "1" mostrano di preferirla perché è l'unica che lascia inalterate sia la forma che la posizione (quest'ultima a meno di una traslazione) della figura, non mutando l'aspetto del quadrato così come è a loro familiare.

> «[Classe prima media] La 1, perché hanno la forma uguale, ma non la dimensione».

> «[Classe seconda media] La 1, perché sono uguali tranne per la grandezza».

La maggioranza degli studenti comunque risulta essere in entrambe le indagini a favore dell'opzione "2" e, in accordo con quanto spiega Speranza in [34], le motivazioni sembrano essere influenzate dell'uso (più o meno implicito) delle isometrie, manifestato nella formulazione "stessa figura ma . . . ":

> «[Classe prima media] La 2, perché è la stessa figura ma rovesciata».

> «[Classe seconda media] La 2, perché è capovolta e assomiglia a un rombo ma se la giriamo è la stessa figura».

In conclusione, le differenze principali tra le due indagini sono nelle figure "2" e "3", nel senso che la percentuale di studenti che oggigiorno risponde "3" nel 1986 opta quasi totalmente per "2": si potrebbe concludere che la scelta ricada sulla figura di stessa area ora più di prima a causa dell'evoluzione nell'approccio che la scuola primaria ha avuto nei confronti dell'argomento. Se nei programmi del 1955 si leggeva «non si facciano recitare a memoria regole di misura: basta che l'alunno le sappia applicare praticamente», ora questa impostazione è molto più diffusa e l'importanza che vi si dà è rispecchiata nelle motivazioni degli studenti.

> «[Classe prima media] La 3, perché è più importante il numero di quadretti della forma».

Tabella 4.2: Domanda 2 - Analisi orizzontale.

	1	2	3	1-3	1-2-3	altre
2018	23,89%	12,39%	37,17%	16,81%	6,19%	2,65%
1986	32%	8%	35%	13%	4%	8%

Domanda 2 Va sottolineato, come d'altronde è fatto in [23], che «si tratta di scoprire le "somiglianze" come nel caso precedente, ma qui proponiamo il confronto di figure con cui la Geometria tradizionale non ha a che fare; ciò richiede una ricerca più attenta del bambino e meno legata al condizionamento verbale». Il risultato di ciò è che le risposte sono per questo quesito relativamente simili tra i due campioni, ma decisamente distanti da quelle della domanda precedente, nonostante la richiesta del testo sia esattamente la stessa. Il criterio che portava nella prima alla scelta di "1" è ciò che dovrebbe spingere ad optare per "2" nella seconda, ma le percentuali sono molto più basse: si può imputare questo al fatto che in questa situazione le figure non siano familiari agli studenti e quindi non ci sia nessuno "stereotipo" a cui ricondursi. Chi infatti risponde così, mostra di essere in grado di argomentare autonomamente la sua scelta, senza riferirsi a fatti o figure note, come Speranza aveva rilevato.

> «[Classe prima media] La 2, perché perché cambia solo la proporzione. La figura è nella stessa posizione rispetto alla figura B e anche se le dimensioni cambiano leggermente, questi due poligoni si assomigliano».

Sul totale delle risposte, la scelta preponderante comunque, compiuta da quasi due terzi delle persone, cade sulle figure direttamente (figura "1") o inversamente (figura "3") congruenti. In [23] infine si osserva «la tendenza a dare un nome alla figura A (avvio, piede, ecc.) per poi cercare una figura a cui attribuire lo stesso nome»: degno di nota come questo non accada nelle odierne scuole medie.

Tabella 4.3: Domanda 3 - Analisi orizzontale.

	A	B	A e B	né A né B	altre
2018	90,27%	7,08%		1,77%	0,88%
1986	9%	83%	3%	3%	2%

Domanda 3 È necessario premettere all'analisi che la domanda sottoposta da Medici, Speranza e Vighi è stata modificata – il perché è stato spiegato nella Sezione 4.1 – nel questionario progettato ai fini di questa tesi: nel 1986 le due opzioni si presentavano come un insieme con triangoli qualsiasi e uno con triangoli rettangoli posizionati con i due cateti rispettivamente orizzontali e verticali, come seguendo i due assi cartesiani naturalmente determinati dal foglio, mentre i triangoli presenti nel questionario più recente erano divisi in triangoli scaleni la cui lunghezza dei lati era molto simile alla figura da classificare e triangoli rettangoli posizionati casualmente. Questa correzione ha avuto conseguenze più che notevoli: le scelte dei due insiemi si scambiano quasi completamente, mostrando come probabilmente gli studenti facciano più fatica a riconoscere la caratteristica comune dell'angolo quando esso è collocato in posizioni non standard, e scelgano quindi di usare la somiglianza dei lati dei triangoli come criterio.

Tabella 4.4: Domanda 4 - Analisi orizzontale.

	A	B	né A né B	altre
2018	5,31%	88,50%	3,54%	2,65%
1986	7%	80%	9%	4%

Domanda 4 Anche questa domanda è stata leggermente modificata, per motivi analoghi alla precedente (si veda ancora la Sezione 4.1), sostituendo uno dei due parallelogrammi presenti inizialmente nell'insieme B con un rettangolo: questo non sembra aver avuto un grande effetto, la maggioranza

continua ad optare per questo insieme, principalmente in nome del numero di lati, che sembra battere la presenza di angoli retti come criterio di classificazione del poligono – questo, riportano Medici, Speranza e Vighi, accade anche nello studio del 1986. Tra le giustificazioni alla risposta B che non si focalizzano sul fatto che tutte le figure abbiano quattro lati, sono presenti sia le linee di pensiero di chi sottolinea la regolarità e la familiarità delle figure che di chi si spinge un po' più nell'ambito delle trasformazioni e parla di deformazioni. Ecco rispettivamente due esempi per ogni tipologia:

> «[Classe prima media] In B, perché questo insieme ha poligoni regolari e il 2 è una figura regolare».

> «[Classe seconda media] In B, perché tutte le sue figure sono parallelogrammi ed essendo la figura 2 una sottospecie di parallelogramma va lì».

> «[Classe prima media] In B, perché si trova sempre un rombo ma più schiacciato».

> «[Classe seconda media] In B, perché c'è una sagoma che è il doppio della figura 2».

Domanda 5 Questa domanda, seppur non presente nel questionario originale, è rilevante in questa parte dell'analisi perché pur essendo analoga alla precedente, fa uso di due caratteristiche più riconoscibili: si focalizza sul far scegliere allo studente la caratteristica più significativa tra l'uguaglianza dei lati (il quadrato del testo viene visto come caso particolare di rombo) o degli angoli (il quadrato del testo viene visto come caso particolare di rettangolo). I dati, come si può leggere nella prima riga della tabella corrispondente a questa domanda che compare a pagina 70, mostrano che l'insieme dei rombi è il più scelto, sia per la congruenza dei lati – in accordo con quanto succede nella domanda precedente – sia perché la posizione inusuale del quadrato induce gli studenti a trattarlo come un rombo:

«[Classe prima media] In A, perché sono rappresentati dei rombi che sono simili a quello della figura 3».

«[Classe seconda media] In A, perché, anche se ribaltando la figura diventerebbe un quadrato, alla fine è anche un rombo».

Tabella 4.5: Domanda 7 - Analisi orizzontale.

	1	2	1-2	1-4	2-3	2-4	1-2-4	1-2-3-4	nessuna	in bianco	altre
2018	4,42%	10,62%	18,58%	0,88%	15,93%	5,31%	12,39%	2,65%	8,85%	2,65%	17,68%
1986	3%	10%	15%	5%	16%	14%	17%	3%	2%	7%	8%

Domanda 7 Questi dati indicano un notevole aumento nelle risposte "altre" – in particolare le opzioni più scelte diverse da quelle presentate sono state "3" al 4,42%, "4" al 2,65%, "1-3" al 1,77%, "1-2-3" al 6,19%, "1-3-4" al 1,77% – e inoltre a un lieve aumento dell'opzione "1-2", corrisponde un calo relativamente basso per "1-2-4", ma considerevole per "2-4". Dalle motivazioni che gli studenti forniscono sembra di capire che chi opta per "2-4" lo fa vedendo le loro somiglianze con ognuna delle due figure riportate nel testo, senza probabilmente usare una visione d'insieme.

«[Classe prima media] Le figure 2 e 4, perché la prima è uguale ad A ingrandita e la seconda è uguale a B ingrandita».

Contrariamente a ciò, chi sceglie come opzioni "1-2" o"1-2-4" per il numero di lati uguali (tra loro e ad A e B) mostra di ricercare un criterio più unitario.

«[Classe prima media] Le figure 1 e 2, perché simili ad A e B mentre 3,4 hanno parti completamente diverse [o due punte o nessuna]».

> «[Classe seconda media] Le figure 1, 2 e 4, perché hanno tutte 5 lati e la 4 ha 3 angoli retti (quanti la B) e di conseguenza almeno 2 come la A».

Tabella 4.6: Domanda 8 - Analisi orizzontale.

	1	2	1-2	1-4	2-4	1-2-4	1-2-3-4	in bianco	altre
2018	0,88%	35,40%	7,08%	1,77%	23,01%	7,96%	7,08%	1,77%	15,03%
1986	7%	18%	18%	3%	26%	7%	7%	10%	6%

Domanda 8 Le percentuali appaiono molto cambiate nel tempo: la maggior parte è in diminuzione – nel 1986 tra le più scelte era "1-2" che invece ha più che dimezzato la sua percentuale – e alcune sono rimaste stabili, come "1-2-4" e "1-2-3-4". Il singolare incremento che è stato riportato dall'opzione "2" si può imputare al fatto che questo triangolo rettangolo sia l'unico posizionato nello stesso modo di A e B rispetto al riferimento naturale del foglio, e questo potrebbe indicare una difficoltà che negli anni è aumentata nel saper riconoscere triangoli rettangoli disegnati con i cateti non paralleli ai lati del foglio: mentre alcuni studenti riconoscono tutti i triangoli rettangoli, come testimonia la seguente citazione,

> «[Classe prima media] Le figure 1, 2 e 4, perché la 2 assomiglia maggiormente ad A, e 1 e 4 bisogna ruotarli per farli assomigliare».

la maggior parte degli studenti identifica solo il triangolo "2", in maniera molto più significativa di quanto avvenuto nell'indagine di Medici, Speranza e Vighi. Inoltre mentre nelle motivazioni alla scelta "2" tutti gli studenti sottolineano la presenza dell'angolo retto, quando le figure selezionate sono anche altri triangoli rettangoli, alle giustificazioni si aggiungono diversi argomenti, come si vede qui di seguito:

> «[Classe prima media] Le figure 2 e 4, perché la A assomiglia alla 2 perché hanno un angolo retto, la B assomiglia alla 4 perché hanno simile la base».

> «[Classe seconda media] Le figure 2 e 4, perché 2 è un triangolo rettangolo, 4 è triangolo isoscele come appunto A e B».

Concludendo, due delle riflessioni che emergono dal confronto dei questionari sono le seguenti: nella grande maggioranza dei casi, la scelta del criterio di somiglianza risulta influenzata – come si vede nei risultati tanto del 1986 che del 2018, nelle domande 1 e 2 in particolare – dall'*istituzionalizzazione* della figura e ancora che il bias dovuto al *riferimento "orizzontale-verticale"* sembra essere più significativo in tempi odierni. Ciò si può mettere in relazione con quanto detto all'inizio sui curricula: poiché questi ultimi si sono evoluti verso uno schema che penalizza la centralità dell'intuizione in nome di una più formale sistemazione che usa definizioni e classificazioni, sembrerebbe che la libertà nella capacità di osservazione ne abbia risentito. L'abitudine ad incontrare figure riprodotte sempre secondi gli stessi canoni porta, in presenza di una capacità di astrazione ancora in fase di sviluppo, data l'età, alla costruzione di modelli errati. Analizzando questo fatto attraverso la lente dei concetti figurali [2] introdotti da Fischbein in [11], si potrebbe dire che quelli che emergono dall'indagine sono concetti figurali in cui la componente figurale si libera dal controllo che la parte concettuale e formale, ancora acerba, opera.

[2] Fischbein descrive gli oggetti di indagine della Geometria come concetti figurali, dato che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e sensoriali proprie delle figure e, allo stesso tempo, possiedono qualità concettuali, come l'idealità, l'astrattezza, la generalità.

4.3 L'analisi verticale

In questa sezione si confronteranno i risultati dei questionari redatti dai 113 studenti della secondaria di primo grado (I-II media) con i 93 redatti dagli studenti della secondaria di secondo grado (III-IV superiore). Il confronto terrà conto di come sviluppi cognitivi che maturano e le conoscenze matematiche che aumentano in rapporto con il passare del tempo influiscano sulle risposte date dagli studenti.

4.3.1 Analisi alla luce dei programmi

Nelle Indicazioni Nazionali e Linee Guida per il curricolo della scuola secondaria di secondo grado del 2010 – reperibili in forma integrale alla pagina web `http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///MATEMATICA_scientifico.pdf` e limitatamente al cappello introduttivo e all'ambito Geometria per il primo biennio [3] descritti nell'Appendice C.3 – si legge, nella parte che delinea il profilo generale e le competenze, tra i gruppi di concetti e metodi che lo studente dovrà padroneggiare:

> Gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui si definiscono i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni).

Mentre nella sezione che parla degli obiettivi specifici di apprendimento si legge:

> Nel primo biennio saranno sviluppati i fondamenti della geometria euclidea del piano. In questo contesto sarà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, mostrando come, a partire dagli Elementi di Euclide, essi abbiano permeato lo sviluppo della matematica occidentale.

[3] Come per l'analisi delle risposte degli studenti delle medie si è scelto di basarsi sui traguardi previsti per la fine della primaria, anche qui si è preferito fare riferimento alla parte delle Indicazioni Nazionali che concerne il livello appena superato dagli studenti intervistati, cioè il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado.

> Saranno approfondite le principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e lo studente dovrà saper riconoscere le principali proprietà invarianti.
>
> Sarà introdotto il metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti, rette e fasci di rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità.

Rispetto ai traguardi previsti per la fine della primaria, richiamati nella sezione precedente e contenuti nell'appendice C.2, notiamo come sia molto più centrale centrale l'*approccio assiomatico*: al riferimento sul "saper descrivere, denominare e classificare figure" si sostituisce quello sullo "aver chiara l'importanza di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione". Anche il riferimento alle *trasformazioni geometriche* diventa più esplicito: il "riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse" si trasforma nel molto più tecnico "approfondire le principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini) e riconoscere le principali proprietà invarianti".

Le differenze fra queste indicazioni e i traguardi previsti per la fine della scuola primaria hanno portato ad analizzare i risultati dell'indagine in questa ottica.

Tabella 4.7: Domanda 1 - Analisi verticale.

	1	2	3	1-2	1-3	2-3	1-2-3
I grado	29,20%	42,48%	15,04%	7,96%	1,77%	0,88%	2,65%
II grado	24,73%	20,43%	39,78%	4,30%	4,30%	1,08%	5,38%

Domanda 1 Nel passaggio dalla scuola secondaria di primo grado a quella di secondo grado, i numeri per questo quesito non subiscono forti cambiamenti, fuorché la risposta "2" e la "3", le cui percentuali si invertono. Questa

inattesa inversione – il risultato atteso prevedeva che la maggioranza dei liceali scegliesse un'opzione con un riferimento alle appena studiate trasformazioni, quindi le figure "1" o "2", e che gli studenti della scuola inferiore si basassero su ciò che conoscono meglio e scegliessero usando il criterio dell'area – può essere capita osservando alcune delle giustificazioni che gli studenti forniscono. Nei questionari delle classi prima e seconda media si trovano un numero elevato di riferimenti (impliciti) agli invarianti – in particolare la forma e, più specificatamente, il tipo di figura – delle trasformazioni, segnale del fatto che si sentono pronti per parlare di isometrie e similitudini, che in effetti verranno loro introdotte a breve:

> «[Classe prima media] La 1, perché ha la stessa forma ma è più piccola».

> «[Classe seconda media] Le figure 1 e 2, perché hanno rispettivamente lo stesso verso ma diversa grandezza e stessa grandezza ma un altro verso».

> «[Classe prima media] La 2, perché è ancora un quadrato anche se con dimensioni ridotte».

Per quanto riguarda la scuola secondaria di secondo grado, è ipotizzabile che, avendo studiato le trasformazioni geometriche principalmente attraverso le equazioni o in maniera sintetica (nella Geometria classica[4] il riferimento esplicito alle trasformazioni è più limitato e punta nella direzione dei criteri più che in quella delle relazioni di equivalenza) per gli studenti sia difficile riconoscere un'isometria o una similitudine in atto, senza alcuna indicazione o contesto, e questo risuona con il fatto che l'opzione "3" che la maggioranza sceglie esprima una relazione di equivalenza maggiormente indagata a scuola, che è appunto l'equiestensione.

[4] A tal proposito Speranza in [37] commenta il fatto che negli Elementi di Euclide «vi sono solamente accenni indiretti a trasformazioni, per esempio quando si verifica per sovrapposizione il 1^o criterio di congruenza dei triangoli (senza però introdurre un termine apposito, salvo forse nella nozione comune "*Et quae inter se congruunt, aequalia sunt*")».

Tabella 4.8: Domanda 2 - Analisi verticale.

	1	2	3	1-2	1-3	2-3	1-2-3
I grado	23,89%	12,39%	37,17%	1,77%	16,81%	0,88%	6,19%
II grado	11,83%	11,83%	45,16%	2,15%	19,35%	1,08%	8,60%

Domanda 2 Il risultato dell'uso di figure meno riconoscibili è che, a differenza di prima, la scelta più gettonata è in entrambe le scuole quella della figura direttamente congruente, l'opzione "3" – che anche insieme ad altre figure, per esempio nelle alternative "1-3" e "1-2-3", mantiene sempre delle percentuali di scelta significative in entrambi i livelli. Qui gli studenti del biennio mostrano una più spiccata abilità rispetto alla domanda precedente nel riconoscere le trasformazioni a cui questa figura inconsueta viene sottoposta e le caratteristiche che essa conserva.

> «[Classe terza superiore] Le figure 1, 2 e 3, perché sono a una trasformazione da B ognuno».

> «[Classe quarta superiore] La 3, perché hanno la stessa area e lo stesso orientamento».

> «[Classe terza superiore] Le figure 1 e 3, perché hanno la stessa area di B e si possono sovrapporre ad essa».

Di nuovo tra gli alunni delle medie che si focalizzano sulle trasformazioni, la maggioranza si riferisce alle proprietà invarianti.

> «[Classe prima media] La 3, perché è rivolta dallo stesso lato e le grandezza sono uguali».

Rispetto a prima però, c'è un numero crescente di alunni che, anche se in maniera informale, prova a descrivere i movimenti che le figure subiscono.

> «[Classe prima media] Le figure 1 e 3, perché sono rispettivamente invertita e ruotata».

> «[Classe seconda media] Le figure 1, 2 e 3, perché sono una girata al contrario, una più piccola e l'ultima girata in obliquo circa».

Per quanto riguarda le singole scelte di "1" e "2" invece, esse riscuotono più successo nelle prime e seconde medie, stando ad indicare forse che a un livello scolastico inferiore, in cui non sono state affrontate né le congruenze né le similitudini, la scelta del criterio risulta più varia e meno uniformata. Per quanto riguarda la figura "2" e dunque la scelta della similitudine come criterio, a una somiglianza nelle percentuali dei due livelli ne corrisponde una nelle giustificazioni, anche se chiaramente quelle degli studenti più piccoli sono meno precise.

> «[Classe prima media] La figura 2, perché ha la stessa direzione di B però è più piccola».

> «[Classe quarta superiore] La figura 2, perché è disposta nello spazio allo stesso modo ed è in proporzione».

Chi riporta la scelta della figura "1" invece dà delle risposte simili – tra scuola secondaria di primo e secondo grado – ma la percentuale più alta tra gli studenti del livello scolastico inferiore che optano per l'isometria diretta sembrerebbe derivare da una questione di posizionamento nello spazio (sia la figura "1" che quella descritta nel testo hanno il lato più lungo orizzontale).

> «[Classe prima media] La figura 1, perché ha la stessa base e stesso lato ma è girata».

> «[Classe terza superiore] La figura 1, perché ha la stessa superficie, è solo girata. Anche la figura 3 ha la stessa superficie ma il fatto che sia ruotata la fa sembrare differente».

Domanda 3 Qui si nota come la differenza tra gli studenti che scelgono di posizionare il triangolo rettangolo in A o in B, già significativa nelle classi del liceo, diventi drastica nella scuola secondaria di primo grado. Inoltre

Tabella 4.9: Domanda 3 - Analisi verticale.

	A	B	A e B	né A né B	in bianco
I grado	90,27%	7,08%		1,77%	0,88%
II grado	36,56%	59,14%	4,30%		

mentre i più piccoli scelgono "A", i più grandi optano in prevalenza per "B"; questo scambio nella risposta scelta dalla maggioranza può essere letto come derivante dal fatto che nelle scuole secondarie di primo grado, come da Indicazioni Nazionali, non viene prestata un'attenzione particolare ai triangoli, rettangoli e non, mentre essi sono trattati praticamente nella loro interezza durante il primo biennio delle superiori, in particolare del liceo scientifico (anche se il focus è primariamente sui criteri di congruenza dei triangoli, questi risultati fanno ben sperare che la prolungata esposizione a ragionamenti in cui si *paragonano tra loro triangoli* abbia dato dei frutti). Infatti tra le risposte degli studenti delle superiori si trovano:

> «[Classe quarta superiore] In B, perché la figura 1 è un rettangolo e i triangoli in A non hanno caratteristiche comuni con esso».

> «[Classe terza superiore] Poiché in A triangoli si assomigliano per forma, mentre in B hanno una forma leggermente diversa ma hanno tutti un angolo retto, a prima vista sceglierei l'insieme A, ragionandoci il B».

> «[Classe terza superiore] In B, perché sono tutti triangoli rettangoli, solo uno è isoscele, a differenza della figura 1».

Il motivo della scelta quasi unanime dell'insieme A nel livello scolastico inferiore si basa, come descritto esplicitamente dagli studenti nelle risposte, solo sulla *somiglianza di forma tra i triangoli*, che hanno ciascuno un solo lato congruente a quello del triangolo del testo.

«[Classe prima media] In A, perché ruotando la figura 1 si sovrappone esattamente sul triangolo centrale perciò sono quasi identiche e la figura 1 sarebbe in perfetta "sintonia" con le altre figure dell'insieme A, mentre non starebbe bene in B perché i triangoli di B sono di misure del tutto diverse».

«[Classe seconda media] A prima vista l'avrei collocato in A, però dopo averci pensato un po' in B mancava solo il triangolo scaleno perché ci sono un triangolo rettangolo e uno isoscele, però la mia risposta rimane sempre la A perché sono tutti i triangoli scaleni».

Tabella 4.10: Domanda 4 - Analisi verticale.

	A	B	A e B	né A né B	in bianco	altre
I grado	5,31%	88,50%	1,77%	3,54%	0,88%	
II grado	2,15%	96,77%				1,08%

Domanda 4 Al contrario della domanda precedente, ora nella secondaria di primo grado c'è un gran distacco tra A e B, ma esso aumenta nelle superiori, pur restando sempre in favore di "B". Nella scelta la maggioranza decide di farsi guidare dal numero di lati o dal parallelismo dei segmenti, ma alcune risposte che riportano la scelta "B" fanno uso del concetto, esplicito o meno, di trasformazione:

«[Classe prima media] In B, perché una figura [il parallelogramma] di B assomiglia a un rombo un po' schiacciato».

«[Classe terza superiore] In B, perché sono tutte figure che, tagliate o ruotate, possono dare vita a quadrati».

Oppure si focalizzano sulla presenza di poligoni familiari:

> «[Classe prima media] In B ci sono dei poligoni esatti con forme esatte che hanno un nome come parallelepipedo [5] o rettangolo e 2 è un rombo».
>
> «[Classe terza superiore] In B, perché la figura è un quadrilatero ed un poligono regolare come le figure appartenenti al gruppo B, mentre le figure appartenenti al gruppo A sono semplicemente poligoni e non hanno nient'altro in comune».
>
> «[Classe terza superiore] In B perché è un quadrilatero regolare, in più tutte le figure dell'insieme B possono essere classificate (rettangolo e parallelogramma) mentre nell'insieme A a poter essere classificata è solo una figura (trapezio)».

Quest'ultimo studente mostra di mettere allo stesso livello il poter classificare le figure con l'avergli attribuito un nome (rettangolo, quadrato, . . .) e sembra che il criterio di scelta sia legato proprio alla riconoscibilità delle figure che appaiono.

Tabella 4.11: Domanda 5 - Analisi verticale.

	A	B	A e B	né A né B	in bianco	altre
I grado	71,68%	24,78%	1,77%	0,88%		0,88%
II grado	38,71%	33,33%	26,88%		1,08%	

Domanda 5 Per questa domanda si osserva che mentre negli studenti della scuola secondaria di secondo grado le opzioni "A", "B", "A e B" sono quasi allo stesso livello, alle medie la prima sovrasta la seconda, mentre l'opzione "A e B" viene scelta solo da due studenti su 113. Quest'ultima evidenza può significare tanto che gli studenti più piccoli non si sentano abbastanza sicuri da poter scegliere un'opzione non esplicitamente indicata – come potrebbe

[5] Chiaramente qui si intende "parallelogramma".

essere quella di mettere la figura nell'intersezione – quanto che la definizione del quadrato come esatta intersezione tra l'insieme dei rombi e quello dei rettangoli ancora non sia loro nota – mentre alle superiori è così naturale che la divisione delle risposte nelle tre opzioni è quasi equa: eccone alcuni esempi.

> «[Classe terza superiore] In A, perché il quadrato e i rombi hanno in comune quattro lati uguali paralleli a due a due e le diagonali perpendicolari, invece con gli elementi di B ha in comune solo angoli e lati a due a due paralleli».

> «[Classe quarta superiore] In A, perché il quadrato è un rombo con le diagonali congruenti».

> «[Classe quarta superiore] In B, perché anche le figure di quell'insieme hanno i lati opposti uguali e paralleli e inoltre tutti gli angoli uguali».

> «[Classe quarta superiore] La metterei in entrambi, perché in A vi sono due rombi che ruotandoli e "addrizzandoli" sono quadrati, in B vi sono due rettangoli, ovvero due quadrati con la base allungata».

Si riportano ora tre motivazioni date da alunni della secondaria di primo grado, per osservare come nei primi due casi il posizionamento del quadrato nella configurazione che è abitualmente attribuita al rombo fa confondere gli studenti, mentre nel terzo la distinzione tra i due quadrilateri anche se in posizione simile è usata proprio come motivazione nella scelta.

> «[Classe prima media] In A, perché sono tutti quadrati ruotati e girati».

> «[Classe prima media] In A, perché sono tutte e due quasi uguali alla figura».

> «[Classe seconda media] In B, perché anche se la figura 3 è capovolta è sempre un quadrato e non un rombo. Il gruppo B ha tutte le figure di quattro angoli retti, come la figura 3».

Tabella 4.12: Domanda 6 - Analisi verticale.

	1-3	1-3-4	1-2-3-4	1-2-3-5	1-2-3-4-5	altre
I grado	2,65%	13,27%	2,65%	0,88%	71,68%	8,83%
II grado		2,15%	1,08%	95,70%		1,08%

Domanda 6 In questa domanda vi sono rilevanti differenze tra i due livelli di scuola: quasi la totalità degli studenti della scuola secondaria di secondo grado riesce a trovare una caratteristica comune per tutte le figure: vengono anche citati, seppur in maniera imprecisa ed embrionale come mostra l'esempio successivo, gli invarianti delle trasformazioni affini (parallelismo e convessità), di cui gli studenti non hanno effettivamente conoscenze.

> «[Classe terza superiore] Queste cinque figure si assomigliano tutte dal momento che hanno tutte due lati paralleli e congruenti tra loro e due lati che convergono all'interno; ciò che però differisce è la misura dei lati e l'inclinazione delle figure».

Nella scuola secondaria di primo grado invece, pur essendo comunque alta la percentuale di chi accomuna tutte le figure, è considerevole anche la quantità di studenti che sceglie "1-3-4", ovvero solo quelle che si corrispondono grazie a similitudini:

> «[Classe seconda media] Non tutte le figure hanno una caratteristica in comune ma la 1,3 e 4 sono la stessa figura ma con aree diverse».

Per quanto non così precisa, questa motivazione mostra come il cambiamento del valore dell'area non sia visto come un motivo per rigettare un'ipotesi di classificazione, come ci si aspetterebbe visti gli esempi che gli studenti sono abituati a studiare. Ancora:

> «[Classe terza superiore] Sono tutte la stessa figura. La 3 è la ruotata della 1, la 4 è la 1 solamente rimpicciolita. Le figure 2 e 5 invece sono l'effetto della "schiacciatura" della figura 1, l'ho notato grazie ai lati e agli angoli».

> «[Classe terza superiore] Le figure hanno tutte in comune la proprietà di essere uno la dilatazione dell’altra: prendendo le coppie esiste una dilatazione e poi una roto-traslazione che fa coincidere una della due con l’altra».

> «[Classe prima media] Le figure hanno tutte in comune la proprietà di avere sei lati e rappresentano la stessa figura anche se allungata».

In queste tre risposte si parla di "stessa figura" ma a differenza della motivazione citata prima, vengono esplicitate alcune trasformazioni, quantomeno come uno strumento che permetta di passare da una figura all’altra lasciando alcune qualità invariate ed altre no. Nelle seguenti risposte invece, il focus più che su delle trasformazioni esplicite è su questa idea di "sostituizione" di lati o di parti di figura, focalizzata per lo più sugli angoli concavi e su come essi possano essere ottenuti modificando figure convesse.

> «[Classe terza superiore] Hanno tutte sei lati e assomigliano tutte a figure regolari. La 1 è un rettangolo i cui lati opposti più corti sono stati sostituiti ognuno da due lati, che formano un angolo convesso rispetto all’esterno della figura. Questa caratteristica dei lati opposti sostituiti da due segmenti ognuno è una caratteristica comune a tutte le figure. Infatti la 2 assomiglia ad un rombo, la 3 e la 4 a dei rettangoli e la 5 ad un altro rombo».

> «[Classe terza superiore] La caratteristica che accomuna tutte queste figure sono di avere una coppia di lati paralleli e una coppia di lati che sono stati spezzati in modo tale che tutte abbiano sei lati».

> «[Classe quarta superiore] La caratteristica che accomuna queste figure è la rientranza dei lati laterali che rendono il lato diviso in due, come fossero dei computer aperti, di cui la rientranza è ciò che divide la tastiera dallo schermo».

Tabella 4.13: Domanda 7 - Analisi verticale.

	1	2	3	4	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4	1-2-3	1-2-4	1-3-4	1-2-3-4	altre
I grado	4,42%	10,62%	4,42%	2,65%	18,58%	1,77%	0,88%	15,93%	5,31%	0,88%	6,19%	12,39%	1,77%	2,65%	11,5%
II grado	9,68%	1,08%	2,15%	33,33%	5,38%	1,08%	8,60%	2,15%	2,15%	2,15%		29,03%			3,23%

Domanda 7 Dai dati presenti nelle due righe della Tabella 4.13 consegue che la figura "2" è più scelta nelle medie, sia da sola che insieme ad altre, come nelle opzioni "1-2", "2-3" e "1-2-4", e in tutti questi casi le giustificazioni risultano per lo più qualitative:

> «[Classe seconda media] Le figure 1 e 2, perché assomigliano a delle case».

> «[Classe prima media] La figura 2, perché è un pentagono come A e B ed è più simile come forma».

Vi è anche una tendenza, tra le opzioni che ammettono solo due figure, a giustificare la scelta considerando ognuna delle singole figure A e B e vedendo quale ad essa assomigliasse di più, non provando a trovare un criterio alla base della definizione di "zippi" estrapolandolo dalle caratteristiche comuni ad A e B.

> «[Classe prima media] Le figure 2 e 3, perché la 2 è molto simile alla A e la 3 è molto simile alla B, anche se è girata dalla parte opposta e alla fine non si chiude con una linea retta».

Quest'ultima attitudine, già esplicitata nell'analisi precedente [Sezione 4.2], è meno diffusa nella secondaria di secondo grado. Qui tutte le scelte elencate precedentemente sono poco gettonate, ad eccezione di "1-2-4", che però viene preferita in questo caso perché tutte le figure hanno cinque lati, mostrando una propensione più aderente alle classiche regole che si usano per confrontare le figure nei contesti sintetici e propri delle isometrie (lati, angoli, . . .).

> «[Classe quarta superiore] Le figure 1, 2 e 4, perché sono tutti pentagoni irregolari».

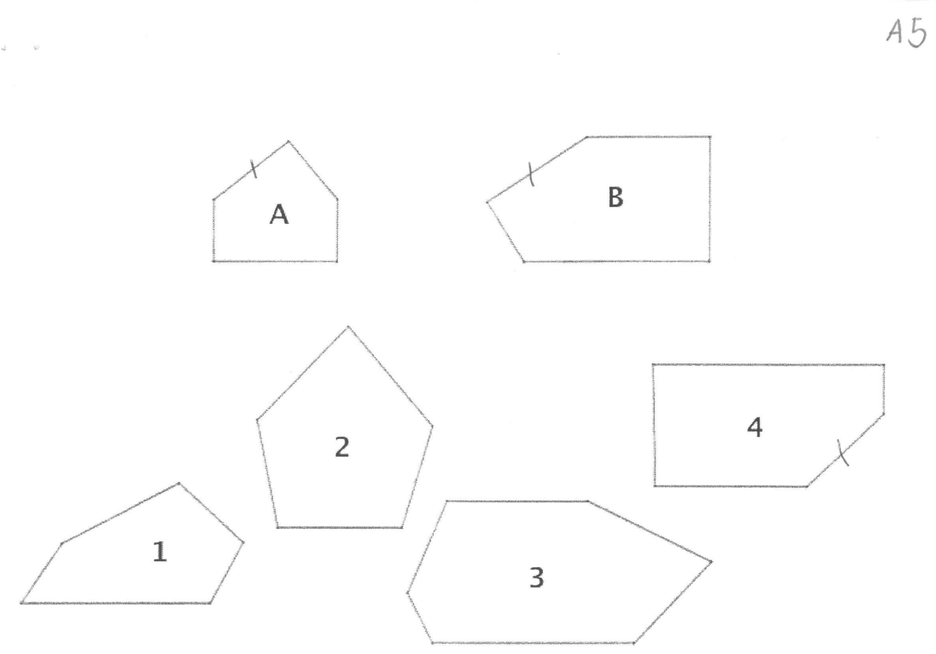
Interessante infine notare come la "4", l'opzione preferita dagli alunni della scuola superiore, ha riportato una percentuale bassissima nella secondaria di primo grado, e il motivo di ciò potrebbe essere che la figura viene scelta per la presenza di "angoli retti" e "lati perpendicolari", elementi che come già visto gli studenti più piccoli hanno difficoltà a riconoscere.

> «[Classe quarta superiore] La 4, perché presenta due angoli retti e se unita ad A e B si incastrano i due lati presi in considerazione [evidenziati nella Figura 4.1]».

Ecco infine un esempio di ragionamento più che esaustivo sulla scelta del criterio di classificazione.

> «[Classe terza superiore] La caratteristica che mi sembra accomuni le figure A e B sia avere due angoli retti, ma allora nessun'altra figura sarebbe uno zippo. Si potrebbe allora supporre che gli zippi debbano avere almeno due angoli retti e chiamerei zippo la figura 4. La caratteristica degli zippi però potrebbe essere avere 5 lati (per la quale ho optato), dunque sono ancora zippi le figure 1, 2 e 4».

Domanda 8 Come si vede nella Tabella 4.14, la figura 2, unico triangolo rettangolo orientato con i cateti paralleli a quelli di A e B, riscuote successo nelle medie molto più che nelle superiori: gli studenti della secondaria di secondo grado tendono ad associare ad A e B, oltre ad essa, tutte le figure che riconoscono come triangoli rettangoli, mentre ciò succede in maniera molto inferiore alle medie. Questo può significare che il posizionamento dell'angolo



7) Se chiami “zippi” le figure A e B, quali fra quelle numerate chiami ancora zippi? 4

Perché? Perché presenta due angoli retti e se unita ad ~~A~~ e B ~~forma un rettangolo~~ si incastrano i due lati presi in considerazione

Figura 4.1: Risposta alla Domanda 7 di uno studente di quarta superiore.

Tabella 4.14: Domanda 8 - Analisi verticale.

	1	2	3	4	1-2	1-4	2-3	2-4	1-2-3	1-2-4	1-3-4	1-2-3-4	nessuna	in bianco
I grado	0,88%	35,40%	1,77%	5,31%	7,08%	1,77%	4,42%	23,01%	1,77%	7,96%	0,88%	7,08%	0,88%	1,77%
II grado		5,38%		2,15%	6,45%	1,08%		18,28%		61,29%		4,30%	1,08%	

retto di un triangolo rettangolo in maniera che i due cateti siano paralleli ai due lati della pagina incida in maniera determinante sulla capacità di riconoscerlo, e ciò è maggiormente stimolato dalla posizione analoga a quella di A e B. Infatti come si legge nelle risposte, le motivazioni che spingono i ragazzi a scegliere sembrano essere maggiormente, per le medie, la presenza di un angolo retto e la sua posizione più o meno "canonica":

> «[Classe prima media] Chiamo petlenghe le figure 2 e 4, perché sono orizzontali e non diagonali».

> «[Classe prima media] Le figure 2 e 3, perché hanno posizioni molto simili alle figure A e B».

Per la secondaria di secondo grado invece il focus è sull'essere un qualsiasi triangolo rettangolo:

> «[Classe terza superiore] A e B sono triangoli rettangoli, 1, 2 e 3 anche; quindi sono petlenghe anche essi. Un'osservazione è che se B avesse avuto lo stesso orientamento di A solo la due sarebbe stata una petlenga. Ma il fatto che B abbia un orientamento diverso fa capire che questo non è una variabile che conta nella definizione di petlenghe».

> «[Classe quarta superiore] 1,2,4 perché hanno tutte un angolo retto perciò petlenghe potrebbe essere un sinonimo di triangolo rettangolo».

Ci sono poi 12 studenti sul totale dei 206 tra primo e secondo grado che optano per "1-2-3-4" scegliendo come criterio l'avere tre lati. Concludendo, dal numero relativamente elevato di studenti che, in aggiunta alla figura 2, indicano anche la 1 e la 4, sembra ragionevole giungere alla conclusione che i liceali hanno utilizzato come criterio di classificazione di triangoli la presenza di un angolo retto, indipendentemente dalla disposizione dell'angolo retto (analogamente a quanto visto nella Domanda 3).

In generale, quel che si può derivare dal confronto svolto sulle risposte date dagli alunni appartenenti ai due livelli scolastici è che gli studenti delle superiori utilizzano un linguaggio più preciso e formale – i colleghi più piccoli usano termini troppo vaghi quali "forma", "dimensioni" – fanno un riferimento più esplicito alle trasformazioni e agli invarianti – nei livelli inferiori si trovano nelle risposte già segnalate (si vedano le Domande 1 e 4) commenti su questa linea ma molto meno trasparenti – e denotano una maggiore capacità di astrazione – in primo luogo sono meno vincolati dalla posizione della figura nel foglio, che invece per gli alunni delle medie è un fattore determinante, come si è dedotto dall'analisi delle Domande 3 e 8 in particolar modo (dove molti non riconoscevano i triangoli rettangoli posizionati con i cateti non paralleli ai lati del foglio). Queste ed ulteriori osservazioni saranno spiegate più in dettaglio nella prossima sezione grazie all'uso degli strumenti della psicologia cognitiva.

4.3.2 Analisi alla luce dello sviluppo cognitivo

Alla luce delle teorie esposte precedentemente, all'interno di un analisi didattica risulta fondamentale tenere conto del fatto che lo sviluppo cognitivo – che generalmente procede di pari passo con l'età e l'istruzione scolastica – influenza in maniera significativa il modo di ragionare e la capacità di elaborare ed esprimere i concetti. Di conseguenza questo fattore deve essere tenuto in considerazione nell'indagine che punta alla comprensione delle risposte fornite dagli studenti, specialmente quando si vuole effettuare, come in questa sezione, un confronto in verticale.

I due momenti dello sviluppo cognitivo interessati dall'analisi, ovvero il periodo dei 10-11-12 anni e quello dei 16-17-18, si collocano in due diverse fasi della formazione delle conoscenze e ciò si presume influenzi le risposte. Queste fasi vengono dettagliatamente descritte nell'opera di Piaget sull'epistemologia genetica [26]:

> La prima tappa è quella della funzione semiotica (verso un anno e mezzo - due anni) che, con l'interiorizzazione dell'imitazione in immagini e l'acquisizione del linguaggio, permette la condensazione delle attività successive in rappresentazioni simultanee. La seconda grande tappa è quella dell'inizio delle operazioni concrete che, coordinando le anticipazioni e le retroazioni, giungono a una reversibilità suscettibile di risalire il corso del tempo e di assicurare la conservazione dei punti di partenza. Ma se, a questo riguardo, possiamo già parlare di una mobilità conquistata sulla durata, essa resta legata ad azioni e manipolazioni che sono esse stesse successive, poiché si tratta in realtà di operazioni che rimangono "concrete", cioè che poggiano su progetti e azioni reali. Le operazioni formali segnano invece la terza tappa in cui la conoscenza supera il reale stesso per inserirlo nel possibile e per collegare direttamente il possibile al necessario senza la mediazione indispensabile del concreto. [6]

Qui comunque ci si limiterà a citare gli stadi in maniera molto operativa, tenendo come base di riferimento teorica i risultati molto più generali descritti precedentemente nei Capitoli 1 e 3.

Secondo la teoria del pedagogista, gli studenti di prima e seconda media si trovano ancora nella fase psicogenetica delle *operazioni concrete*: questa inizia verso i 9-10 anni e in essa le azioni e le percezioni del soggetto, seppur

[6] Nella descrizione dello sviluppo esplicitata da Speranza nella Figura 3.1 della Sezione 3.2, gli stadi sono quattro (senso-motorio, intuitivo, delle operazioni concrete e formale), ma le osservazioni fatte valgono ugualmente a meno di considerare i primi due momenti uniti in ciò che Piaget chiama stadio pre-operatorio.

poggiando ancora direttamente sugli oggetti, sono ordinate, a differenza dei livelli precedenti detti pre-operatori, all'interno di una struttura che risulta essere componibile in maniera transitiva e reversibile.

La novità si nota particolarmente nel campo delle operazioni spaziali: fin dai 7-8 anni si costruiscono alcune operazioni relative alle prospettive e ai cambiamenti di punti di vista per quanto riguarda uno stesso oggetto di cui si modifica la posizione in rapporto al soggetto, ma solo verso i 9-10 anni si può parlare di una «*coordinazione di punti di vista* in rapporto a un insieme di oggetti, per esempio tre montagne o tre fabbricati che saranno osservati in diverse situazioni». Se ne sono trovati diversi riscontri nelle risposte degli studenti:

> «[Domanda 5, classe prima media] In A, perché lì ci sono dei rombi, ma se li guardi da un'altra prospettiva sono quadrati».

> «[Domanda 2, classe prima media] Le figure 1, 2 perché la 1 è congruente a B ma non è nella stessa direzione, invece la due è nella stessa direzione ma non è congruente».

> «[Domanda 4, classe prima media] La figura sta meglio in B perché basta allungarlo per formare il rettangolo di B e allungare i vertici per ottenere il parallelogramma».

> «[Domanda 4, classe prima media] In B, perché è come se fosse la base di un quadrato in 3D dall'interno». Si veda la Figura 4.2.

In termini di operazioni logico-matematiche e di causalità, quello che succede è che le prime, comprese quelle spaziali, attraverso le loro generalizzazioni e la loro stabilizzazione, giungono a uno stato di estensione e di azione massimo, ma sotto la loro forma molto limitata di operazioni concrete; contestualmente, lo sviluppo delle ricerche e anche delle spiegazioni causali, in netto progresso rispetto a prima, conduce il soggetto a sollevare problemi che non è ancora in grado di risolvere con i mezzi operatori di cui dispone. Ne consegue allora questa serie di *squilibri* di portata non indifferente per

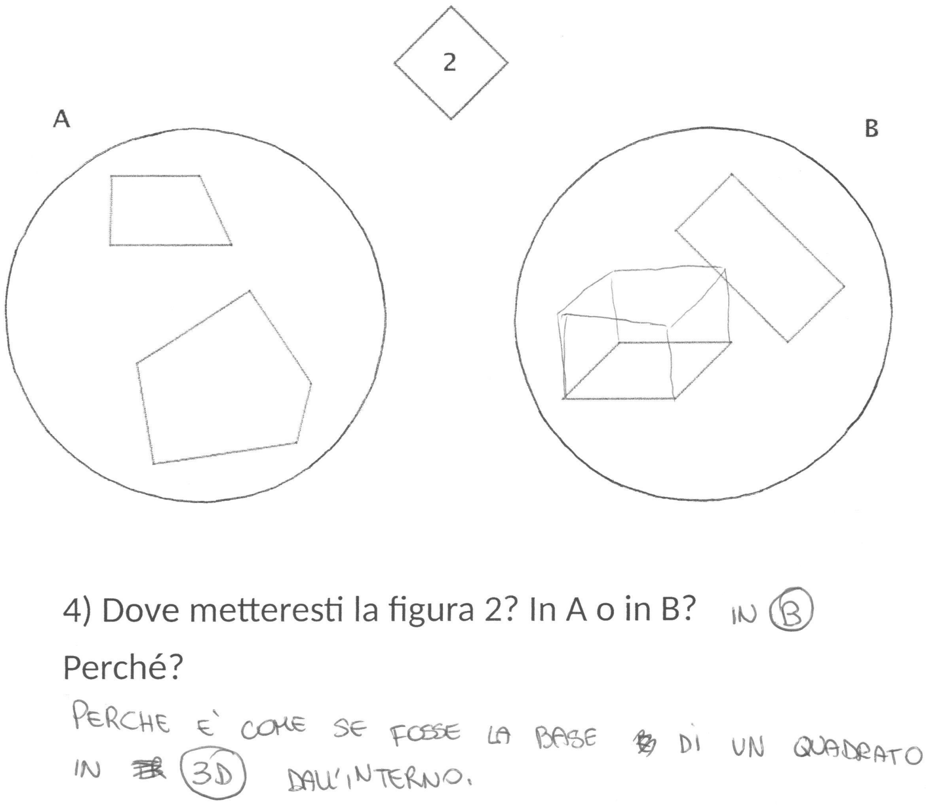


Figura 4.2: Risposta alla Domanda 4 di uno studente di seconda media.

quanto concerne le ulteriori strutturazioni: essi condurranno a completare le strutture operatorie già costruite, stabilendo sulla loro base concreta queste «operazioni su operazioni» che costituiranno le operazioni proposizionali formali. Praticamente ciò risulta in una moltitudine di domande astratte e concettuali che si formano nello studente a cui però egli non sa rispondere a causa dell'insufficienza e inadeguatezza dei mezzi teorici che possiede.

Per esempio, questi studenti di prima media non hanno ancora afferrato a pieno il concetto di classificazione, come d'accordo con la fase psicogenetica in cui si trovano.

> «[Domanda 3, classe prima media] In A perché la dimensione della figura combacia con uno degli spazi se è capovolta da destra a sinistra».

> «[Domanda 4, classe prima media] Non metterei la figura 2 in nessuno dei due perché non assomiglia particolarmente a tutti sia nel gruppo A sia nel gruppo B».

Nel seguente esempio in particolare si riscontra l'uso di una sorta di criterio di congruenza su figure con cui lo studente non è per nulla familiare.

> «[Domanda 7, classe prima media] 1,3,4 perché nessuna di esse ha due lati congruenti».

Le strutture operative formali che sono state citate precedentemente cominciano a costituirsi verso gli 11-12 anni – dunque sono riscontrabili solo negli studenti liceali che hanno già ampiamente superato questa fase – e permettono di giungere alla terza tappa del processo che conduce l'operazione a liberarsi dalla durata, cioè di fatto dal contesto psicologico delle azioni del soggetto per raggiungere finalmente quel carattere estemporaneo che è proprio dei rapporti logico-matematici puri. In realtà, la principale caratteristica della fase delle *operazioni formali* è il poter poggiare su ipotesi e non più soltanto sugli oggetti: è questa la novità fondamentale, assieme alla capacità di arricchire gli insiemi elaborando "insieme di parti", i quali costituiscono di fatto una classificazione di tutte le classificazioni possibili. La crescente capacità nella formalizzazione e nell'ideazione di classificazioni si è riscontrata in tutte queste risposte fornite da studenti della scuola secondaria di secondo grado:

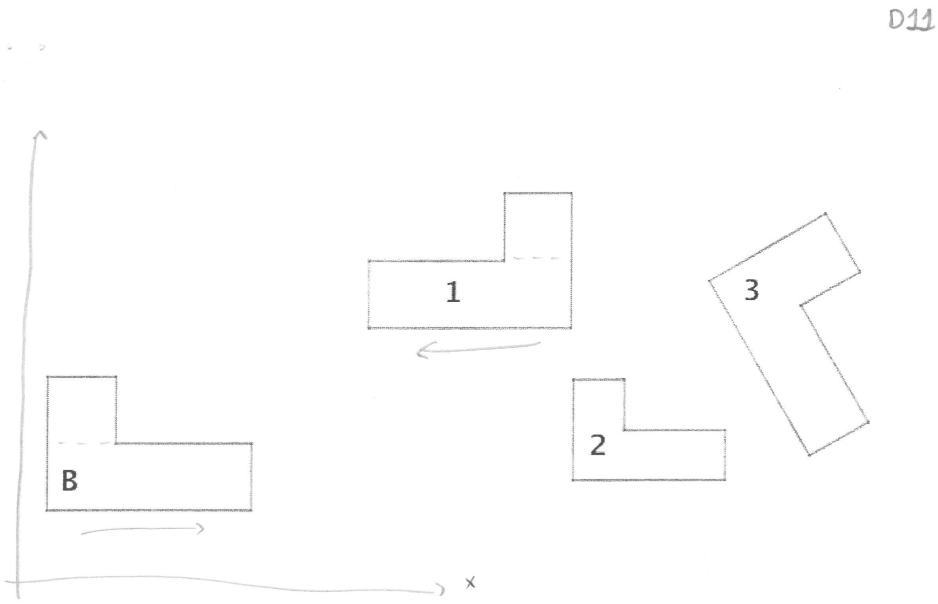
> «[Domanda 2, classe terza superiore] La figura 1 assomiglia di più alla figura B perché hanno stesso perimetro, stessa area e anche stessa forma. L'unica differenza fra le due è la disposizione nel piano, anche se per alcune cose sono simili anche in questo: ad esempio hanno il lato più lungo disposto orizzontalmente rispetto ad una ipotetica ascissa di un sistema cartesiano e hanno quella sorta di quadrato rivolto verso l'alto. L'unica cosa che davvero cambia quindi è il verso del lato più lungo». Si veda la Figura 4.3.

> «[Domanda 3, classe terza superiore] Metterei la figura 1 nell'insieme B, essa possiede infatti un angolo retto come tutte le figure appartenenti all'insieme B. Tutte le figure di B hanno, come 1, un angolo di 90° e quindi la somma degli altri due angoli interni è uguale a 90°. Con le figure dell'insieme A, la figura 1 ha in comune solo il fatto di essere scaleno, mentre con le figure dell'insieme B ha in comune due caratteristiche, ovvero l'angolo retto e la somma degli altri due angoli».

> «[Domanda 3, classe terza superiore] In A, perché l'insieme A è formato solamente da triangoli scaleni, mentre in B ce n'è uno rettangolo. Inoltre nell'insieme A la media del rapporto (espresso in cateto maggiore/cateto minore) tra i due cateti dei triangoli è maggiore che nell'insieme B. E dato che il triangolo uno ha un rapporto cateto maggiore/cateto minore più simile a quello presente nell'insieme A, lo posizionerei lì».

Uno studente di quarta superiore per rispondere alla Domanda 1 descrive minuziosamente, come si può vedere nella Figura 4.4, il suo metodo di ricerca di un criterio di somiglianza.

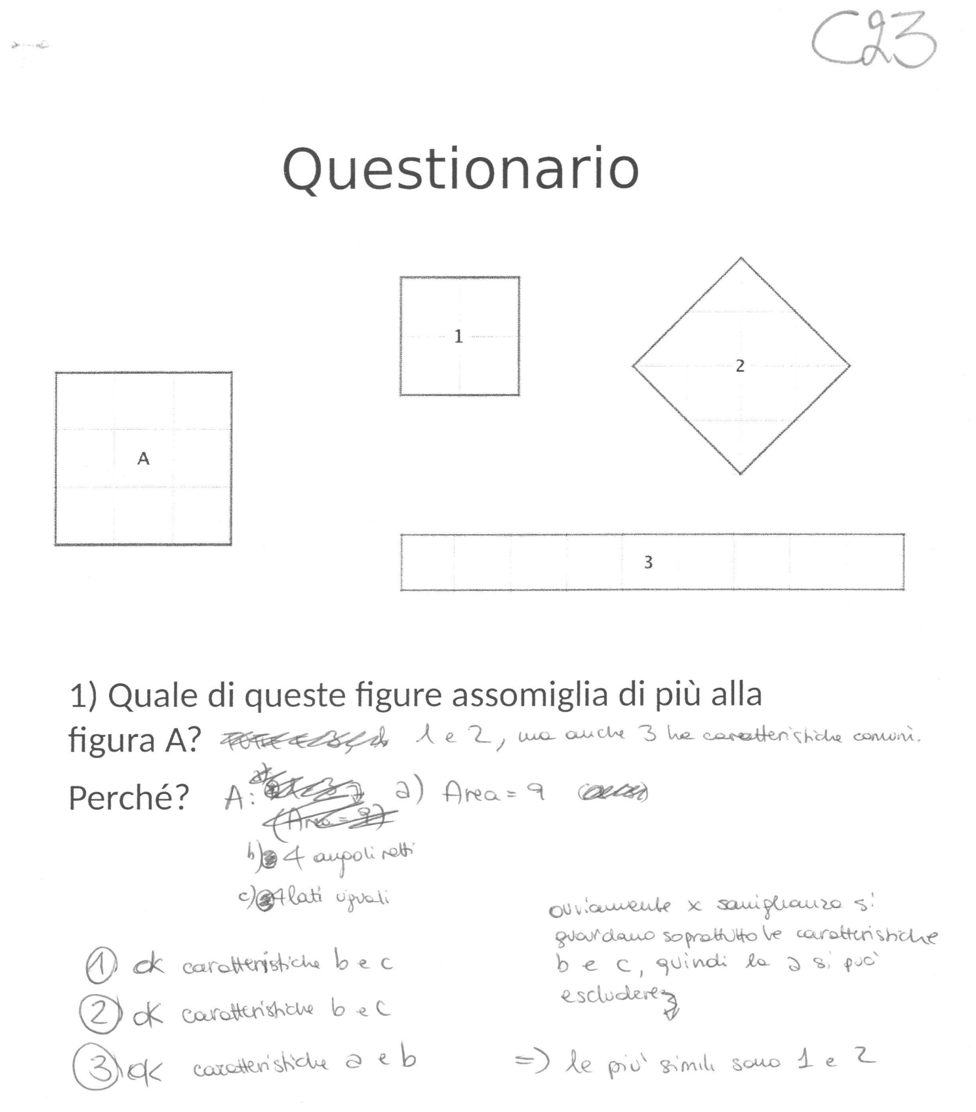
Le seguenti spiegazioni sono la versione non formalizzata delle discussioni su come una trasformazione possa modificare le forme delle figure.



2) Quale di queste figure assomiglia di più alla figura B? la figura 1

Perché? la figura 1 assomiglia di più alla figura B perché hanno stesso perimetro e stessa area, hanno la stessa forma e l'unica differenza tra le due è la disposizione del piano anche se per alcune cose sono simili anche in questo: ad esempio, hanno il lato più lungo adiacente ad un'ipotetica ascissa di un sistema cartesiano e hanno quella parte di quadrato rivolta verso l'alto. L'unica cosa che davvero cambia quindi è il verso del lato più lungo

Figura 4.3: Risposta alla Domanda 2 di uno studente di terza superiore.



C23

Questionario

1) Quale di queste figure assomiglia di più alla figura A? ~~Tutte e 3~~ 1 e 2, ma anche 3 ha caratteristiche comuni.

Perché? A: a) Area = 9

b) 4 angoli retti

c) 4 lati uguali

① ok caratteristiche b e c

② ok caratteristiche b e c

③ ok caratteristiche a e b

ovviamente x somiglianze si guardano soprattutto le caratteristiche b e c, quindi la a si può escludere

=) le più simili sono 1 e 2

Figura 4.4: Risposta alla Domanda 1 di uno studente di quarta superiore.

> «[Domanda 4, classe terza superiore] Metterei la figura 2 in B perché nell'insieme ci sono figure con quattro lati come essa, in A no. Inoltre posso ottenere le figure in B partendo dalla figura 2 ed allungando i lati».

> «[Domanda 4, classe terza superiore] In B perché sono tutte figure che tagliate o rotati possono dare vita a quadrati. Inoltre in tutte le figure di B un lato è congruente».

> «[Domanda 4, classe quarta superiore] In B perché ha quattro lati, gli angoli di 90 gradi e può diventare un parallelogramma anche se con i lati uguali. Se gli traslo i lati per farlo diventare un parallelogramma inoltre, avrà gli angoli opposti uguali, come parallelogramma».

> «[Domanda 5, classe quarta superiore] La metterei in entrambi, perché in A vi sono due rombi che ruotandoli e "addrizzandoli" sono quadrati, in B vi sono due rettangoli, ovvero due quadrati con la base allungata». Aggiunge «Se dovessi scegliere la porrei in A, poiché i due rombi si avvicinano di più alla forma del quadrato».

> «[Domanda 7, classe quarta superiore] Chiamo zippo la numero 1 perché può essere considerata una rappresentazione tridimensionale della figura A su un piano non perpendicolare al foglio». Si veda la Figura 4.5.

Ad un livello d'istruzione più basso si trovano esempi in cui lo studente è ignaro o incerto di come agiscano le trasformazioni, a tal punto che se riconosce che le figure sono collegate da esse, è meno propenso ad assimilarle.

> «[Domanda 6, classe seconda media] No, ognuna viene come dire tirata, allungata, capovolta, più grande, più piccola o più grossa, più stretta». Si vedano i commenti nella Figura 4.6.

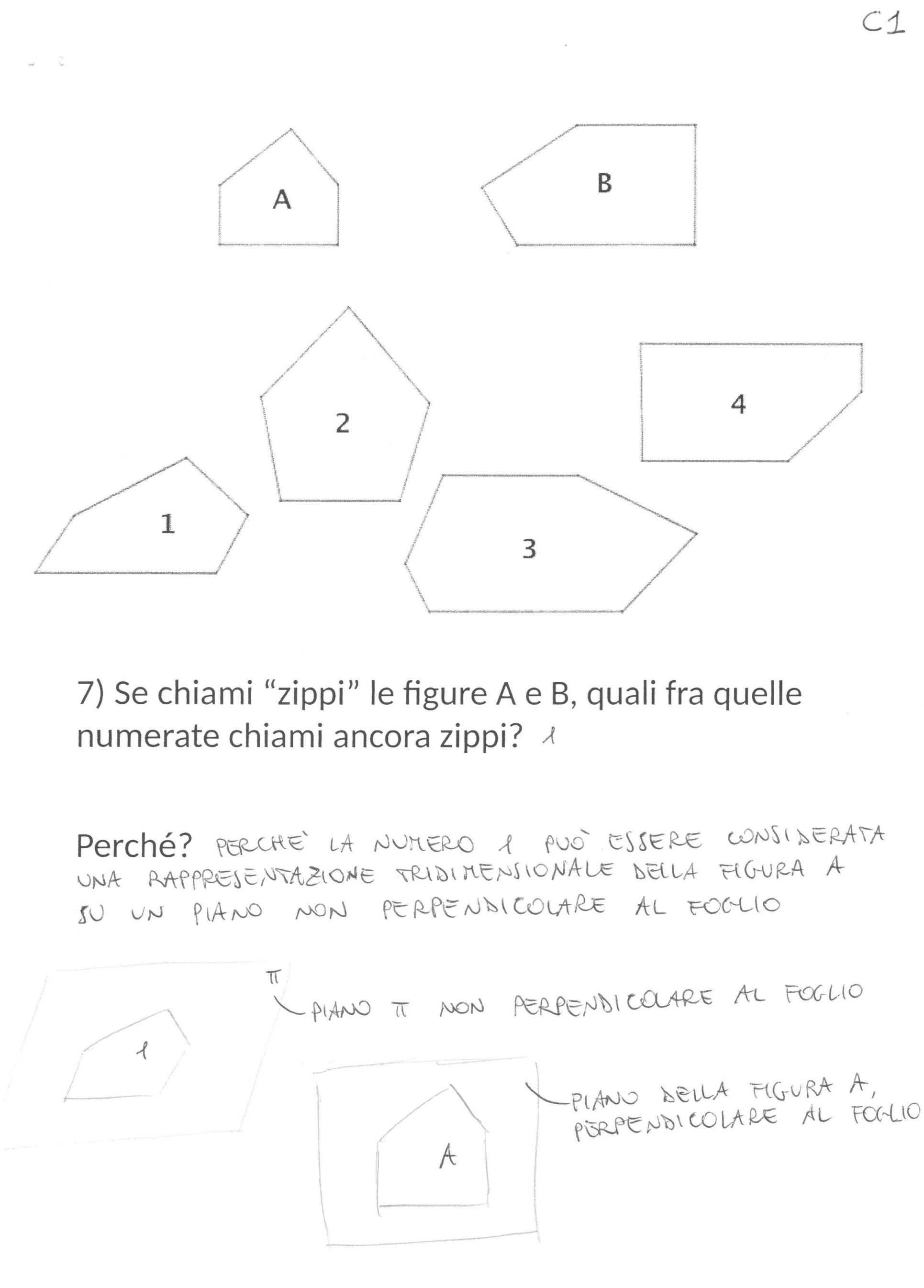


Figura 4.5: Risposta alla Domanda 7 di uno studente di quarta superiore.

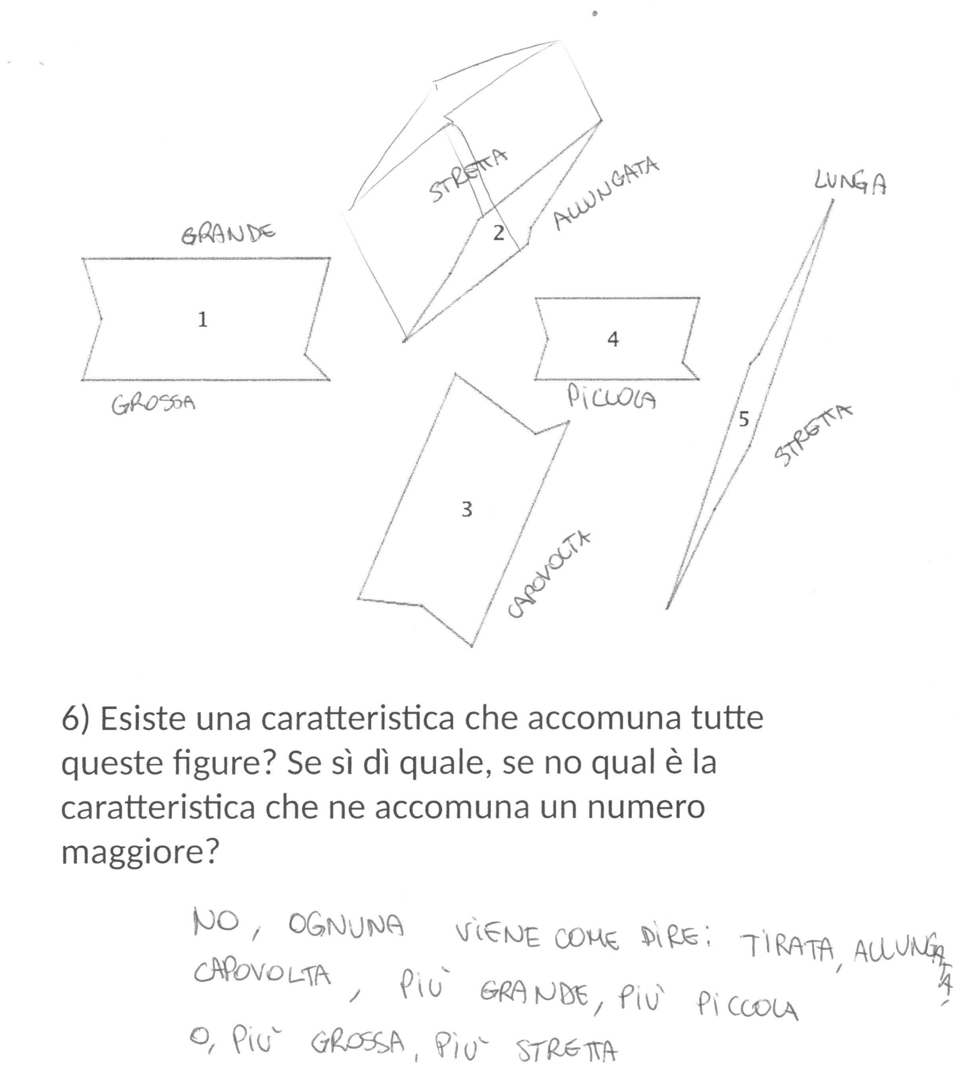


Figura 4.6: Risposta alla Domanda 6 di uno studente di seconda media.

Dall'analisi precedente emerge come in effetti i commenti e le risposte degli studenti siano in linea con la descrizione degli stadi piagettiani: gli studenti più grandi sono in effetti in grado di gestire meglio le classificazioni, argomentando coerentemente e utilizzando un linguaggio più elaborato; allo stesso tempo gli alunni più giovani manifestano una minore uniformità derivante dai vari squilibri che corrispondono alla fase in cui si trovano.

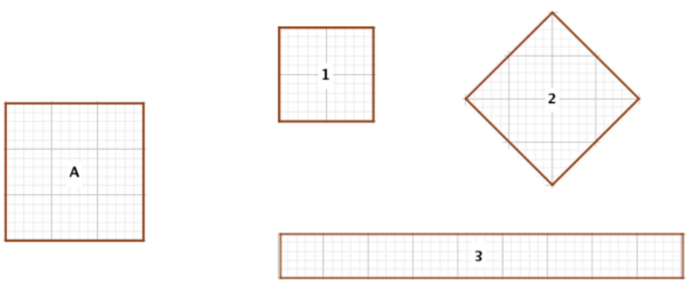
Appendice A

I questionari

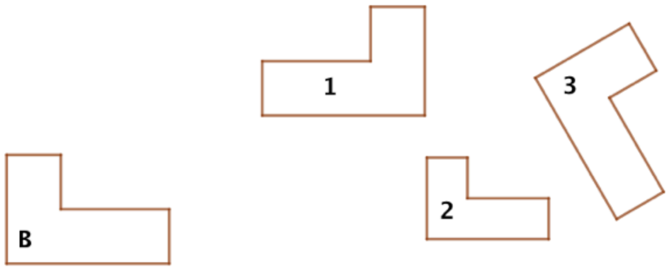
A.1 Il questionario somministrato per questa tesi

In questa sezione dell'appendice si riporta il questionario somministrato alle classi su cui è stata fatta l'indagine nell'ambito della tesi.

Questionario

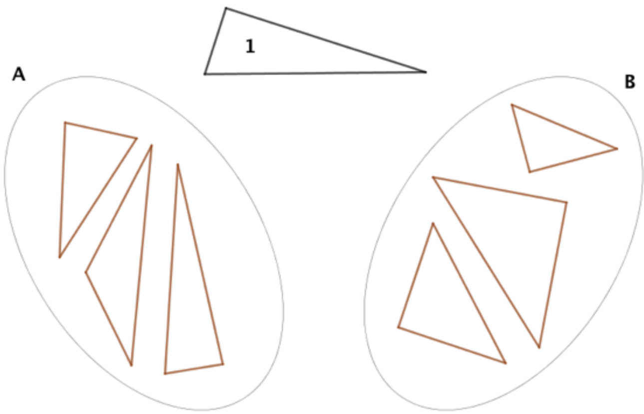


1) Quale di queste figure assomiglia di più alla figura A?
Perché?



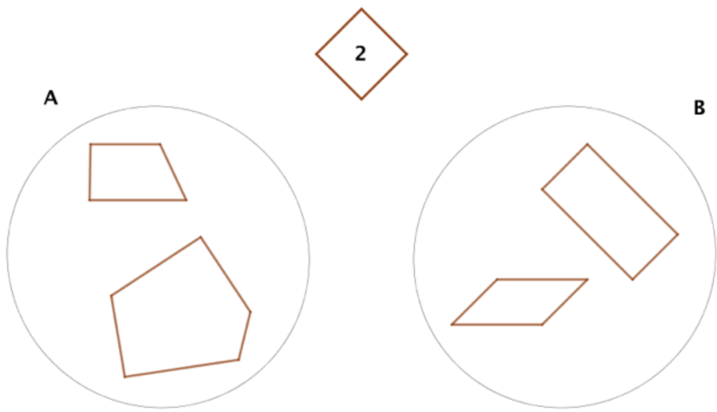
2) Quale di queste figure assomiglia di più alla figura B?

Perché?

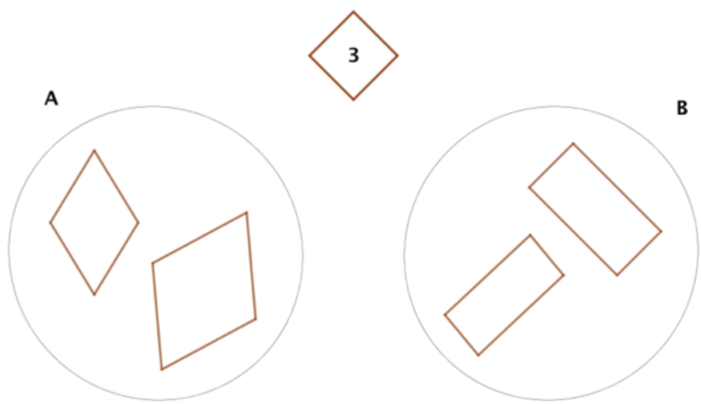


3) Dove metteresti la figura 1? In A o in B?

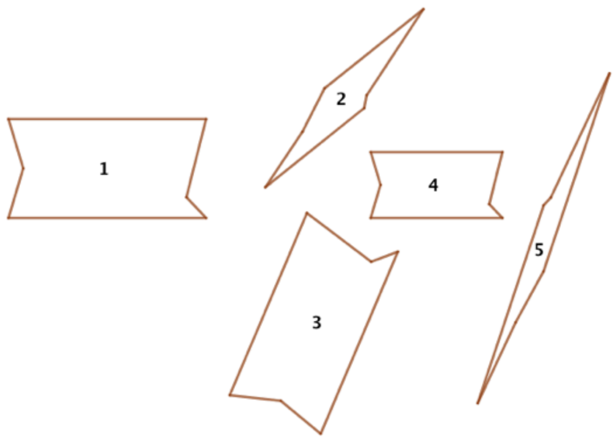
Perché?



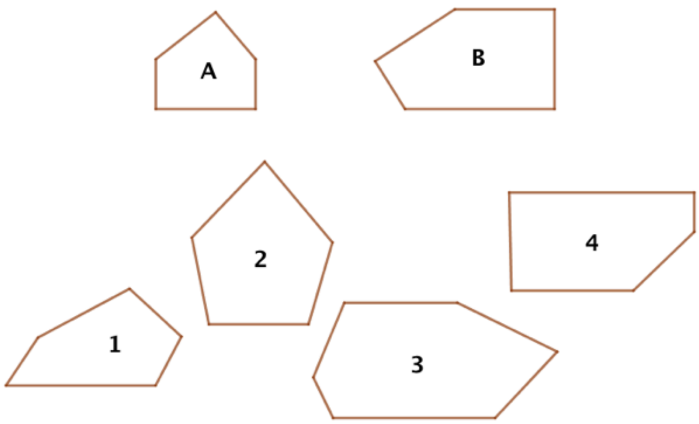
4) Dove metteresti la figura 2? In A o in B?
Perché?



5) Dove metteresti la figura 3? In A o in B?
Perché?

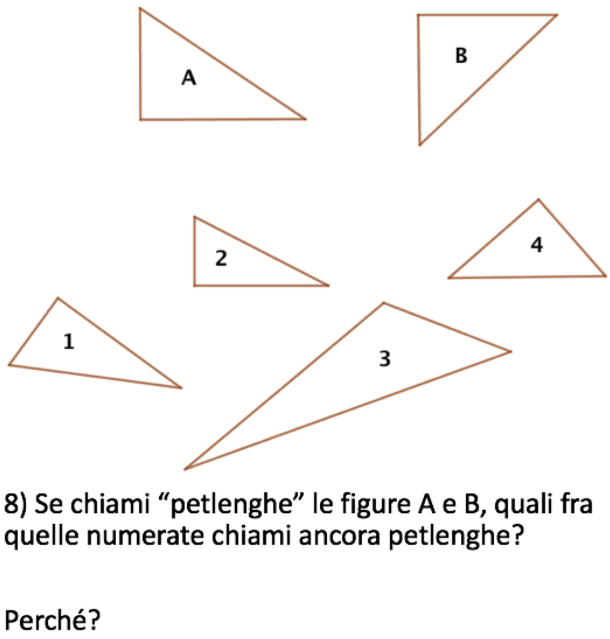


6) Esiste una caratteristica che accomuna tutte queste figure? Se sì dì quale, se no qual è la caratteristica che ne accomuna un numero maggiore?



7) Se chiami "zippi" le figure A e B, quali fra quelle numerate chiami ancora zippi?

Perché?



A.2 Il questionario originale di Medici, Speranza e Vighi

Nelle Figure A.1, A.2, A.3 e A.4 è riportato invece il questionario così come strutturato nell'indagine descritta in [23].

QUESTIONARIO

1) Quale di queste figure assomiglia di più alla figura A? Perché?

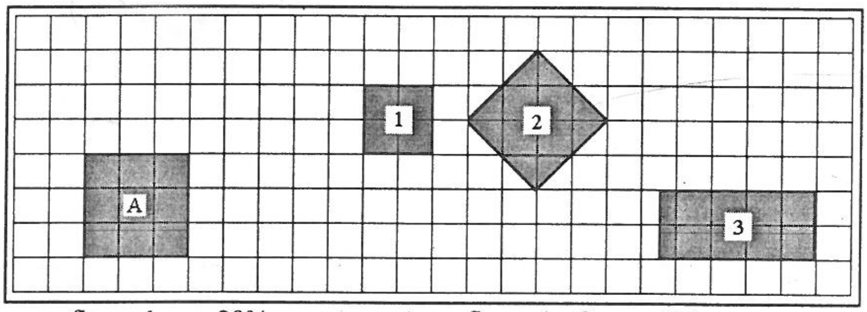


figura 1	29%	figure 1 e 2	5%
figura 2	58%	varie	6%
figura 3	2%		

2) Quale (o quali) di queste figure assomiglia di più alla figura A? Perché?

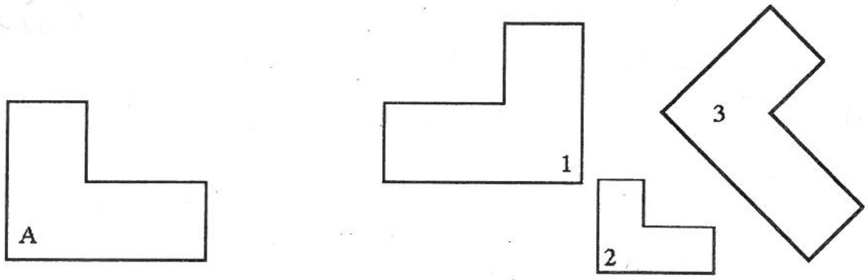
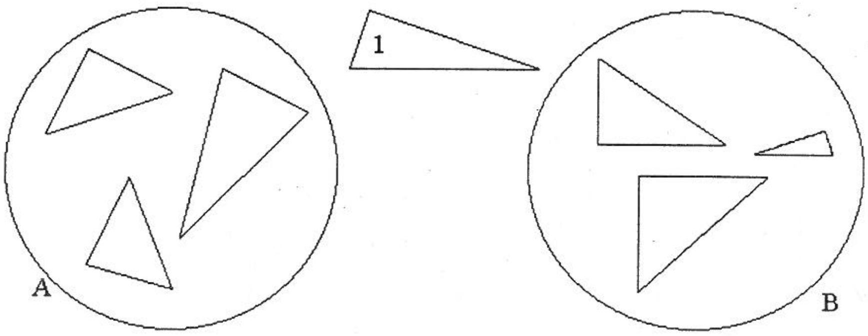


figura 1	32%	figure 1 e 3	13%
figura 2	8%	tutte le figure	4%
figura 3	35%	varie	8%

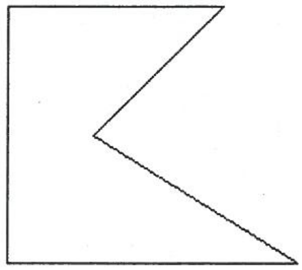
3) Metteresti la figura 1 in A o in B?



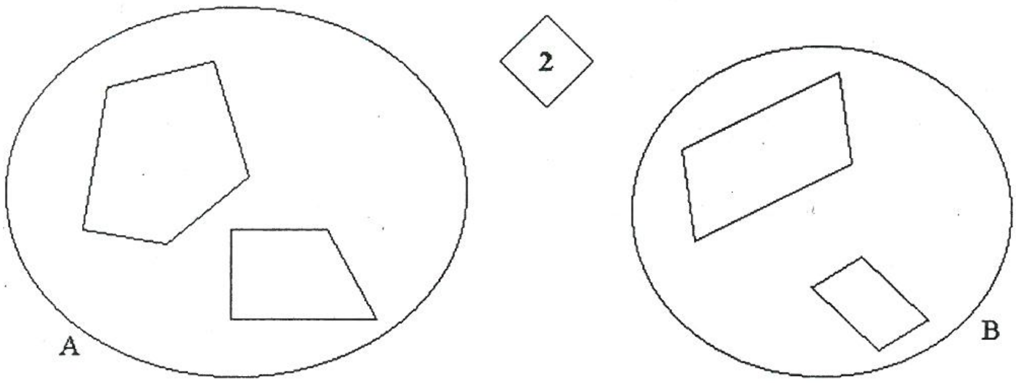
insieme A	9%	insiemi A e B	3%
insieme B	83%	nessuno dei due insiemi	3%
varie	2%		

Figura A.1: Questionario di Medici, Speranza e Vighi - pagina 1.

4) Descrivi la seguente figura in modo che, seguendo le tue istruzioni, un compagno possa disegnarla senza vederla.

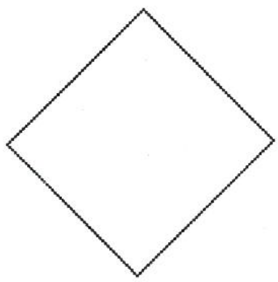


5) Metteresti la figura 2 in A o in B? Perché?



insieme A	7%	né A né B	9%
insieme B	80%	varie	4% .

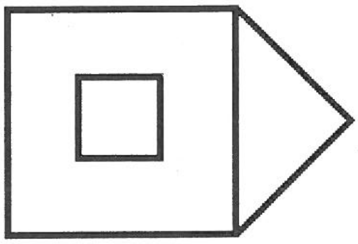
6) Come chiameresti questa figura?



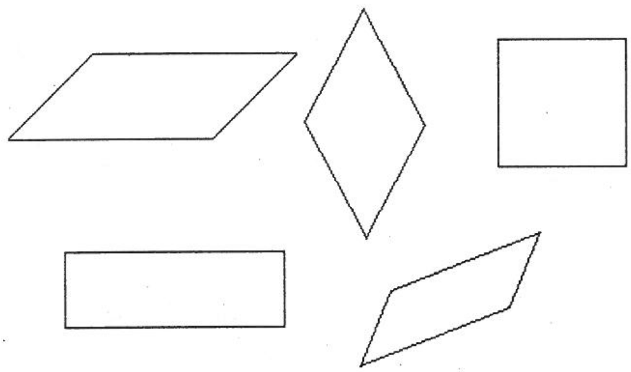
"quadrato"	38%	"quadrilatero", "parallelogramma"	9%
"rombo"	50%	varie	2%
"quadrato storto"	2%		

Figura A.2: Questionario di Medici, Speranza e Vighi - pagina 2.

7) Descrivi la seguente figura in modo che, seguendo le tue istruzioni, un compagno possa disegnarla senza vederla.



8) Come chiameresti queste figure? (Usa lo stesso modo di dire per tutte)



"quadrilateri"	35%	un nome per ogni figura	29%
"poligoni"	3%	"parallelogrammi"	10%
altre	15%	"figure geometriche"	8%

9) Ritaglia due pezzi di carta come questi avvicinali in tutti i modi che ti riesce e disegna qui sotto le figure che trovi. Sai nominare le figure che hai trovato?

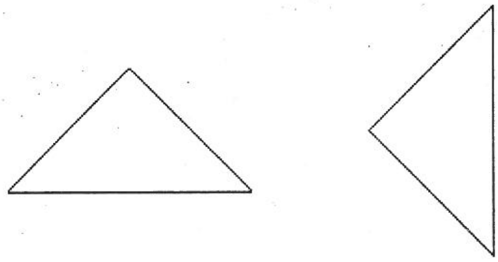


figure geometriche tradizionali	64%	altre figure	14%
risposte errate o parziali o mancanti	22%		

Figura A.3: Questionario di Medici, Speranza e Vighi - pagina 3.

10) Se chiami "zippi" le figure A e B, quali fra le seguenti chiami pure zippi?

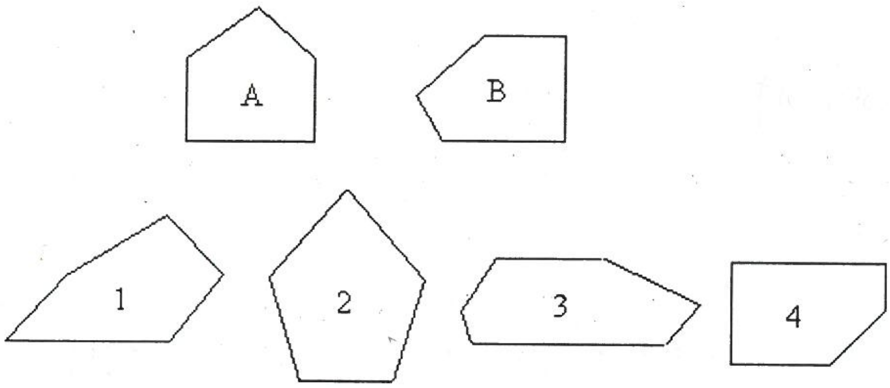


fig. 1	3%	fig. 2-4	14%	tutte le figure	3%
fig. 2	10%	fig.1-2	15%	nessuna figura	2%
fig. 2-3	16%	fig. 1-4	5%	non fa l'esercizio	7%
fig.1-2-4	17%	altre	8%		

11) Se chiami "petlenghe" le figure A e B, quali fra quelle numerate chiami ancora "petlenghe"? Perché?

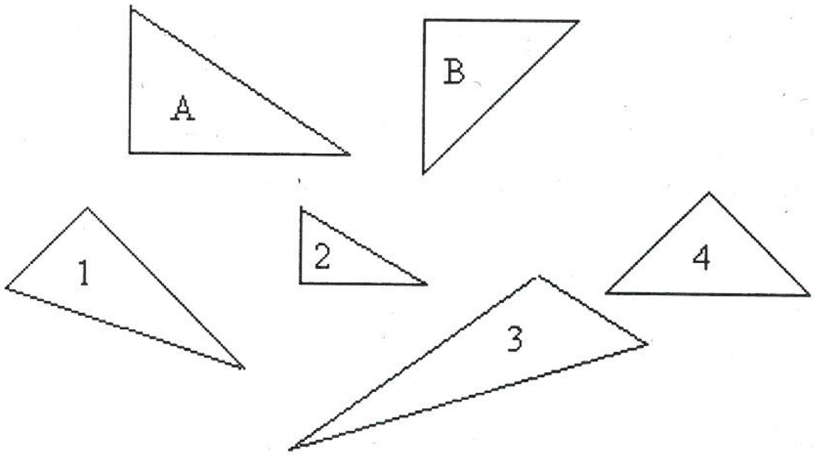


fig. 2	18%	fig. 1	7%	fig. 1-2-3-4	7%
fig. 1-2	18%	fig. 1-4	3%	altre risposte	6%
fig. 2-4	26%	fig. 1-2-4	7%	non fa l'esercizio	10%

Figura A.4: Questionario di Medici, Speranza e Vighi - pagina 4.

Appendice B

L'impostazione matematica del Programma di Erlangen

In questa appendice si presenteranno le nozioni algebriche e geometriche utilizzate da Klein nel suo Programma per la sistemazione delle diverse Geometrie, che si erano sviluppate con metodi e linguaggi differenti nel corso del XIX secolo, in un unico apparato formale. Il concetto matematico a cui si deve la riuscita di questa unificazione è quello di gruppo.

A differenza di quanto fatto nel Capitolo 2, si utilizzerà una terminologia moderna, in parte quindi differente da quella usata originariamente da Klein e si copriranno solo le parti del Programma più interessanti nell'ottica di una trasposizione didattica per la scuola secondaria o per i primi anni di Università. L'impostazione di tale appendice segue [4] a cui si rimanda per approfondimenti.

Siano M un insieme qualunque e G un gruppo di trasformazioni (cioè biezioni) di M. Si sceglie di chiamare M *spazio*, i suoi elementi *punti* e un qualunque insieme di punti *figura*. Allora si dirà che la figura A è *equivalente* alla figura B se esiste una trasformazione di G che manda A su B, cioè: $A \sim B$ se $\exists\, \varphi \in G\, (\varphi : M \to M)$ tale che $\varphi(A) = B$.

Poiché G è un gruppo, si ha immediatamente che sono vere le proprietà:

riflessiva: ogni figura è equivalente a se stessa dato che G contiene l'identità;

simmetrica: se A è equivalente a B, mediante $\varphi \in G$, allora B è equivalente ad A, mediante φ^{-1} che sta ancora in G;

transitiva: se A è equivalente a B mediante $\varphi \in G$, e B è equivalente a C mediante $\phi \in G$, allora A è equivalente a C mediante $\phi \cdot \varphi$ che sta ancora in G.

Dunque le proprietà di gruppo garantiscono le proprietà necessarie (riflessiva, simmetrica e transitiva) per avere una relazione di equivalenza.

Klein allora chiama *geometrica* ogni proprietà delle figure dello spazio M e ogni grandezza legata a una figura che resti invariata per tutte le trasformazioni del gruppo G, vale a dire che sia comune a tutte le figure equivalenti. Il sistema di proposizioni relative alle proprietà delle figure e delle grandezze invarianti per tutte le trasformazioni del gruppo G si chiama la *geometria* del gruppo G.

È ora evidente che il motivo della scelta di Klein di partire dalla definizione di gruppo sta nella sua estrema generalità: come appena esplicitato, nel Programma una geometria è descritta come lo studio delle proprietà che sono invarianti rispetto ad un particolare gruppo di trasformazioni e perciò in questo modo qualsiasi classificazione di trasformazioni mediante gruppi e sottogruppi diventa una classificazione delle diverse geometrie, consentendo tra l'altro così anche di interpretare le geometrie non euclidee iperbolica ed ellittica, assieme alla geometria euclidea delle similitudini, nell'ambito della geometria proiettiva.

Il gruppo caratterizzante la geometria proiettiva piana – in questa trattazione ci si limiterà al caso piano – è chiamato *gruppo proiettivo* ed agisce su uno spazio chiamato *piano proiettivo*. Questo è un insieme in cui ciascun punto è definito da una terna (x_1, x_2, x_3) di coordinate reali *omogenee* cioè tali che (x_1, x_2, x_3)=(y_1, y_2, y_3) se e solo se $x_i = \rho\, y_i$ con $\rho \neq 0$ reale. Una *trasformazione proiettiva* o *proiettività* è una biezione del piano proiettivo che fa corrispondere al punto (x_1, x_2, x_3) il punto (x'_1, x'_2, x'_3) di coordinate

$$\begin{cases} \rho' x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases} ,$$

dove ρ' è un numero reale non nullo e le c_{ij} sono delle costanti reali che rispettano la seguente condizione sul determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

In altre parole le trasformazioni proiettive sono tutti e soli gli automorfismi di uno spazio vettoriale reale tridimensionale letti in coordinate omogenee: inoltre due automorfismi determinano una stessa proiettività se coincidono a meno di moltiplicazione per uno scalare non nullo. Le trasformazioni proiettive formano un gruppo (ciò è facilmente dimostrabile attraverso la precedente rappresentazione analitica).

Per ritrovare le altre Geometrie all'interno di quella proiettiva, si introduce la nozione di gruppo di automorfismi di una figura. Se le trasformazioni di uno spazio qualunque M appartenenti al gruppo G mandano un insieme U di punti in se stesso (cioè si restringono ad applicazioni di U in sé) esse vengono chiamate *automorfismi* di (o rispetto ad) U. È facile dimostrare che l'insieme delle trasformazioni del gruppo G automorfe rispetto ad U è un gruppo, chiaramente sottogruppo di G. Ora dunque l'intento di Klein risulta molto chiaro: definire diversi sottogruppi del gruppo delle trasformazioni proiettive, i quali caratterizzeranno le diverse Geometrie (ad esempio affine, elementare, metrica) che saranno così contenute – si vedrà a breve in che senso – all'interno della Geometria proiettiva.

Si consideri una *retta* proiettiva, cioè l'insieme dei punti del piano proiettivo che soddisfano un'equazione lineare omogenea, cioè del tipo $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$. Si può facilmente dimostrare che, in generale, una proiettività manda rette in rette. Il gruppo *affine* è definito come il gruppo degli automorfismi della retta (detta anche *retta all'infinito* del gruppo), cioè come il gruppo delle proiettività che fissano la retta. La rappresentazione analitica delle trasformazioni affini nel piano affine (che è semplicemente il piano proiettivo privato della retta all'infinito) è facilmente ricavabile. Una qualsiasi trasformazione proiettiva di equazioni (si prendano le coordinate proiettive (x_1, x_2, x_3) in modo tale che la retta all'infinito abbia equazione $x_3 = 0$)

$$\begin{cases} \rho' x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x_3' = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases},$$

rappresenta una trasformazione affine se $x_3 = 0$ implica $x_3' = 0$, poiché questo significa che la retta $x_3 = 0$ ha come immagine se stessa. Per questo è necessario e sufficiente che: $c_{31} = c_{32} = 0$. Si ottiene così la rappresentazione analitica di una trasformazione affine:

$$\begin{cases} \rho' x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x_3' = c_{33}x_3 \end{cases}, \tag{B.1}$$

che è possibile ridurre alla seguente, introducendo nel piano affine, i cui punti sono caratterizzati dal fatto che $x_3 \neq 0$, delle coordinate non omogenee $(\frac{x_1}{x_3} = x, \frac{x_2}{x_3} = y)$:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases},$$

dove a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2 sono i parametri che si ottengono dividendo le prime due equazioni di (B.1) per la terza. Queste appena descritte sono tutte le trasformazioni affini purchè

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Successivamente si descrive il *gruppo ortogonale*, contenente le trasformazioni affini di equazioni

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases},$$

tali che la loro matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

sia ortogonale, ovvero rispetti la condizione $A\,{}^tA = I$, dove ${}^tA$ è la trasposta della matrice A e I è la matrice identità 2×2.

Tra il gruppo affine e quello ortogonale si trova il gruppo che Klein chiama *gruppo principale*. Questo è il gruppo delle similitudini, cioè il sottogruppo del gruppo affine i cui elementi in coordinate non omogenee sono del tipo

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = brx + ary + d \end{cases},$$

dove $a^2 + b^2 \neq 0$, $r^2 = 1$ e $a, b, r \in \mathbb{R}$. Queste trasformazioni conservano le ampiezze degli angoli e possono essere rappresentate anche nella forma

$$\begin{cases} x' = k\,(x \cos\varphi - y \sin\varphi) + c \\ y' = k\,(\pm\, x \sin\varphi \pm\; y \cos\varphi) + d \end{cases}.$$

Sono stati finora descritti il gruppo proiettivo e alcuni suoi sottogruppi: affine, principale, ortogonale. A questi quattro gruppi corrispondono quattro Geometrie: proiettiva, affine, elementare (o conforme), metrica euclidea. Di questi gruppi, il più ampio è quello messo alla base della geometria proiettiva (cioè il gruppo proiettivo) e il più ristretto quello che sta alla base della geometria metrica euclidea (cioè il gruppo ortogonale). D'altra parte la geometria proiettiva ha la classe di enti geometrici più povera di tutti, e la geometria metrica euclidea la più ricca: la geometria metrica euclidea ingloba sia gli enti e le relazioni affini che gli enti proiettivi, mentre la geometria proiettiva prescinde dalle proprietà strettamente affini delle figure, e la geometria affine ignora le proprietà metriche, nel senso che non distingue (ovvero considera equivalenti) figure che differiscono solo per proprietà metriche. In generale, *più il gruppo fondamentale di una geometria è esteso, meno è ricco in enti geometrici. Il fatto è evidente, poiché più le trasformazioni del gruppo sono numerose, meno si trovano relazioni o proprietà che sono invarianti per tutte queste trasformazioni.*

Di seguito un semplice schema che sintetizza quanto detto. Siano

$G_M =$ gruppo ortogonale	$W_M =$ geometria metrica euclidea
$G_E =$ gruppo principale	$W_E =$ geometria elementare
$G_A =$ gruppo affine	$W_A =$ geometria affine
$G_P =$ gruppo proiettivo	$W_P =$ geometria proiettiva.

Si ha allora la seguente successione dei gruppi, ordinata per inclusione:

$$G_M \subset G_E \subset G_A \subset G_P,$$

alla quale corrisponde la successione in ordine inverso per le proprietà che si conservano, cioè gli enti così come gli invarianti delle geometrie derivate (l'inclusione delle geometrie a cui si faceva riferimento prima è quindi da interpretare in questo senso):

$$W_P \subset W_A \subset W_E \subset W_M.$$

Infine anche il gruppo principale (quello della geometria elementare) si può interpretare come un determinato gruppo di automorfismi proiettivi. Si tratta degli automorfismi dell'assoluto degenere costituito dai punti ciclici $I_1 = (1, i, 0)$ e $I_2 = (1, -i, 0)$ e queste trasformazioni sono automorfismi della figura i cui punti soddisfano l'equazione quadratica omogenea $x_1^2 + x_2^2 = 0$, chiamata da Klein cerchio immaginario all'infinito o assoluto (degenere). Analogamente ciò si può fare per le Geometre non euclidee: i loro gruppi, rispettivamente chiamati iperbolico ed ellittico, si definiscono infatti in termini di automorfismi. Per caratterizzare la geometria metrica iperbolica bisogna tornare alla geometria proiettiva e considerare nel piano proiettivo una qualsiasi conica K reale non degenere – l'assoluto. Il sottogruppo del gruppo proiettivo costituito da tutte le trasformazioni che lasciano fissa questa conica (cioè gli automorfismi di K) è detto *gruppo (metrico) iperbolico* e la corrispondente geometria è la *geometria (metrica) iperbolica.* La *geometria ellittica* si può invece ottenere come la geometria corrispondente al sottogruppo del gruppo proiettivo costituito da tutte le trasformazioni che lasciano fissa una conica immaginaria non degenere (l'assoluto) del piano proiettivo, chiamato *gruppo ellittico.*

Da quanto visto si può dunque concludere che la teoria dei gruppi così come è stata implementata da Klein permette anche di integrare la Geometria euclidea e quelle non euclidee in uno schema generale e di trovare punti di contatto dove prima non si rilevavano che contraddizioni.

Appendice C

Indicazioni Nazionali e curricula di Matematica

In questa appendice riportiamo in forma estesa i riferimenti istituzionali utilizzati per le analisi dei questionari contenute nel Capitolo 4.

C.1 Programmi didattici per la scuola primaria del 1955

Qui di seguito è riportata parte del testo del Decreto [1] del Presidente della Repubblica 14 giugno 1955, n. 503, contenente i programmi in vigore per la scuola primaria all'epoca della somministrazione del questionario di Medici, Speranza e Vighi, redatta in modo tale da riportare in grassetto i riferimenti utili per questa tesi.

Premessa I presenti programmi comprendono l'indicazione del fine assegnato alla istruzione primaria; la descrizione della via da seguire per raggiungere il fine stesso; un complesso di suggerimenti, desunti dalla migliore esperienza didattica e scolastica.

[1] Reperibile in forma integrale alla pagina web `http://www.edscuola.it/archivio/norme/decreti/dpr503_55.html`.

Sotto il primo riguardo (indicazione del fine dell'istruzione primaria) i programmi hanno carattere normativo e prescrivono il grado di preparazione che l'alunno deve raggiungere: ciò per assicurare alla totalità dei cittadini quella formazione basilare della intelligenza e del carattere, che è condizione per un'effettiva e consapevole partecipazione alla vita della società e dello Stato. Questa formazione, anteriore a qualunque finalità professionale, fa si che la scuola primaria sia elementare non solo in quanto fornisce gli elementi della cultura, ma soprattutto in quanto educa le capacità fondamentali dell'uomo; essa ha, per dettato esplicito della legge, come suo fondamento e coronamento l'insegnamento della dottrina cristiana secondo la forma ricevuta dalla tradizione cattolica.

Le indicazioni attinenti al secondo aspetto dei programmi (la via o metodo da seguire per il raggiungimento degli scopi dell'istruzione primaria) non hanno il medesimo carattere normativo delle precedenti; poiché lo Stato, se ha il diritto e il dovere di richiedere l'istruzione obbligatoria, non ha una propria metodologia educativa. Va tuttavia osservato che le indicazioni di questo secondo gruppo sorgono come sintesi concorde e spontanea dalla meditazione sui problemi attuali dell'educazione e dell'insegnamento. Esse si riconducono anzitutto alla nostra tradizione educativa umanistica e cristiana: cioè al riconoscimento della dignità della persona umana; al rispetto dei valori che la fondano: spiritualità e libertà; all'istanza di una formazione integrale. Da qui derivano: la necessita di muovere dal mondo concreto del fanciullo, tutto intuizione, fantasia, sentimento; la sollecitudine di fare scaturire dall'alunno stesso l'interesse all'apprendere; la cura di svolgere gradualmente le attitudini all'osservazione, alla riflessione, all'espressione; la costante preoccupazione di aiutare in tutti i modi il processo formativo dell'alunno senza interventi che ne soffochino o ne forzino la spontanea fioritura e maturazione; la consapevolezza, finalmente, che scopo essenziale della scuola non è tanto quello di impartire un complesso determinato di nozioni, quanto di comunicare al fanciullo la gioia e il gusto di imparare e di fare da se, perché ne conservi l'abito oltre i confini della scuola, per tutta la vita.

Queste esigenze capitali del processo educativo acquistano un accento di più diretta attualità, se vengono riconosciute in due istanze particolarmente vive nella scuola contemporanea: la globalità e l'aderenza all'ambiente dell'alunno.

Nella psicologia concreta del fanciullo l'intuizione del tutto è anteriore alla ricognizione analitica delle parti; cosi la scuola ha il compito di agevolare questo processo naturale partendo dalle prime intuizioni globali per snodarle via via nelle articolazioni di un discorso riflesso. Il fanciullo scopre a poco a poco il significato delle proprie esperienze, e perciò conviene che con lenta gradualità scopra l'esistenza delle materie nelle quali il sapere scolastico tanto più variamente si diversifica, quanto più progredisce verso il sistema e la scienza.

Il criterio della globalità, più accentuato nei primi anni di scuola, viene via via attenuato e superato; tuttavia il progressivo affiorare delle materie d'insegnamento non significa che esse possano sussistere isolate e indifferenti le une rispetto alle altre. Tutte, ancorché in misura di volta in volta diversa, si prestano sempre a scambievoli richiami e integrazioni che sorgono dalle loro molteplici correlazioni sul piano dell'unita della cultura.

D'altra parte, la consapevolezza delle fondamentali caratteristiche dell'anima infantile pone la scuola su una linea di naturale continuità con quanto l'alunno ha già imparato, inteso e sentito nel cerchio della famiglia, del suo ambiente naturale e sociale, delle istituzioni educative che abbia frequentato; perciò l'insegnante non può dimenticare l'aderenza e la partecipazione alla vita dell'ambiente nella varietà delle sue manifestazioni e nell'ispirazione morale e religiosa che la anima.

In tal modo il principio della libertà trova una reale attuazione; come il maestro non deve mai dimenticare che l'educazione dell'alunno non comincia dalla scuola e non si esaurisce in essa, cosi i presenti programmi non intendono creare l'istruzione dal nulla o dal vuoto, bensì intendono stimolare il costume scolastico già in atto, perché dia una misura sempre più piena delle proprie energie interiori, orientandolo al conseguimento delle finalità civili e sociali dell'istruzione pubblica.

Anche il terzo aspetto dei programmi (suggerimenti più particolari desunti dalla migliore esperienza scolastica e didattica) va considerato nello spirito della libertà e nel rispetto della funzione autonoma della scuola.

Non si è seguita nella elaborazione dei presenti programmi la distinzione tradizionale tra le prescrizioni programmatiche e le avvertenze poiché le une e le altre vengono ricondotte al processo della ricerca pedagogica e didattica e all'atto vivo dell'insegnamento.

Dopo il rinnovamento operato dai programmi del 1923 e da quelli del 1945, la formulazione di questi nuovi programmi è stata sollecitata più direttamente da due esigenze: far aderire maggiormente il piano didattico alla struttura psicologica del fanciullo e tenere conto che per precetto della Costituzione l'istruzione inferiore obbligatoria ha per tutti la durata di almeno otto anni.

Per rendere questi intenti praticamente attuabili, è stato alleggerito il carico delle nozioni rispetto ai programmi quinquennali precedenti e sono stati elaborati programmi graduati per cicli didattici. Tali cicli rispettano per la loro durata le fasi dello sviluppo dell'alunno e rendono meglio possibile un insegnamento individualizzato in relazione alle capacita di ciascuno, così che in un periodo di tempo a più largo respiro ogni alunno possa giungere, maturando secondo le proprie possibilità, al comune traguardo.

D'altra parte, ciò consente che vengano adottati quei procedimenti saggiamente attivi che spronano il fanciullo nell'operosa ricerca e nell'approfondimento della consapevolezza di quanto viene imparando.

Spetta naturalmente all'insegnante, in base alle accertate possibilità dei singoli alunni, di formulare un suo personale piano di lavoro, distribuito nel tempo, che egli potrà eventualmente aggiornare alla luce di una sempre più approfondita conoscenza della scolaresca.

Una vecchia opinione popolare considerava la scuola elementare come la scuola del leggere, dello scrivere e del far di conto. Si può intenderla ancora oggi così, salvo una accurata determinazione del significato di queste parole. Nell'auspicare una scuola che insegni per davvero a leggere si esige che da essa escano ragazzi che ragionino con la propria testa, giacché saper leggere è ben anche aver imparato a misurare i limiti del proprio sapere e ad esercitare l'arte di documentarsi. Analogamente saper scrivere vale saper mettere ordine nelle proprie idee, saper esporre correttamente le proprie ragioni. Quanto a far di conto, nel nostro secolo, che è il secolo dell'organizzazione e delle statistiche, è chiaro che una persona è tanto più libera quanto più sa misurare e commisurarsi.

Non ci si dissimula l'importanza e la gravità del compito affidato al maestro. Nessuno, dopo di lui, potrà forse riparare ad una mancata formazione essenziale, e in questo senso elementare, degli alunni che le famiglie e la Patria gli affidano. Ed è pur vero che il grado di civiltà di una Nazione si misura soprattutto dalla cultura di base del suo popolo.

Programmi per la prima e la seconda classe

L'insegnante, fin dall'inizio, orienti la sua azione educativa a promuovere la formazione integrale della personalità dell'alunno attraverso l'educazione religiosa, morale, civile, fisica e le altre forme di attività spirituali e pratiche corrispondenti agli interessi, ai gradi, ai modi dell'apprendere e del conoscere propri dell'età. Nell'assolvere questo compito, **l'insegnante faccia leva sulle tendenze costitutive dell'alunno, guidandolo ad osservare, riflettere, esprimersi, senza alcuna preoccupazione di ripartire nelle tradizionali materie le attività scolastiche e il contenuto dell'insegnamento. Si proporrà invece di ottenere dall'alunno la partecipazione quanto più possibile spontanea e impegnativa alla ricerca ed alla conquista individuale di quelle esperienze, cognizioni, abilità, che nel loro complesso concorrono appunto alla formazione integrale della personalità in questo stadio dello sviluppo.**

Anche l'accenno alla distinzione fra attività di osservazione, riflessione, espressione, va tenuto presente a titolo puramente indicativo e pratico, in quanto nessuna di esse si compie isolatamente. Così, dopo aver stimolato lo spirito di osservazione del fanciullo, dirigendo la sua attenzione su oggetti e fatti della più elementare esperienza e dell'ambiente locale, l'insegnante lo condurrà, mediante conversazioni, indagini personali, osservazioni più attente, a riflettere su quei medesimi oggetti e fatti, perché parlino più suggestivamente alla sua naturale sete di conoscere, e lo avvierà ad esprimere nelle più varie forme, con spontaneo processo spirituale, i risultati delle sue personali conquiste.

[...]

In ogni giornata scolastica trovino adeguato ed opportuno posto, possibilmente all'aperto, giochi ed esercizi che, mentre giovino ai fini dell'educazione alla socievolezza, valgano a sveltire ed a correggere i movimenti e consentano al fanciullo di esprimersi gioiosamente in canti e ritmi rivolti all'armonico sviluppo delle attitudini fisiche e morali.

L'esplorazione dell'ambiente non abbia carattere nozionistico, ma muova dall'interesse occasionale spontaneo del fanciullo per sollecitarlo e guidarlo alla diretta osservazione del mondo circostante, nei suoi due inseparabili aspetti di tempo e di luogo.

Si dia modo perciò all'alunno di formarsi un'idea intuitiva della successione delle generazioni (coetanei, giovani, adulti, vecchi) tra le persone di sua conoscenza, delle divisioni dell'anno (ricorrenze religiose, civili, ecc.), dei mutamenti e delle trasformazioni delle cose (vicenda delle stagioni e suoi riflessi sulle coltivazioni e sul lavoro umano; materie e strumenti di lavoro, mezzi di trasporto, servizi pubblici, ecc.). Si utilizzino le escursioni nei dintorni, si incoraggino raccolte e collezioni.

Si guidi in particolare l'alunno ad osservare attentamente qualche animale e pianta del luogo per fargli scoprire le caratteristiche fondamentali della vita animale e vegetale. Il fanciullo comincerà cosi a considerare le vitali necessita dell'uomo e il suo lavoro per procacciarsi alimenti, indumenti, asilo nell'ordinata convivenza sociale.

La conoscenza del numero parta dalle attività di gioco e dal bisogno di osservare e di fare del fanciullo, e si svolga per lenti gradi di sviluppo.

L'insegnante addestri l'alunno nella numerazione progressiva e regressiva, nella scomposizione e ricomposizione dei numeri, nei relativi esercizi intuitivi e pratici di riunire, togliere, replicare, distribuire, attività che sono alla base delle quattro operazioni.

È opportuno che in un primo tempo non si oltrepassi il 10 e che si giunga al 20 alla fine del primo anno del ciclo.

I calcoli pratici sulle quattro operazioni verranno compiuti dapprima solo oralmente, poi anche per iscritto.

Soltanto nel secondo anno si passera, di decina in decina, all'ambito numerico compreso entro il 100, continuando a dare la dovuta importanza al calcolo mentale.

L'apprendimento della tavola pitagorica sia una conquista intuitiva e costruttiva; pertanto il suo spedito e sicuro uso mnemonico sarà rinviato al ciclo successivo. Si cerchi di evitare alcune operazioni scritte meno facili, quali la sottrazione che richieda il cosiddetto prestito l'addizione con più di tre addendi, la divisione che lasci resto. Naturalmente nella divisione ci si limiterà al divisore di una sola cifra.

L'occasione ad eseguire operazioni verrà prevalentemente data da facilissimi quesiti tratti dalla vita pratica e dai giochi infantili: quesiti che richiedano una sola operazione.

Dall'osservazione degli oggetti più comuni si farà derivare la conoscenza intuitiva di qualche solido geometrico e di qualche figura piana, possibilmente intesa come limite del solido.

[...]

Programmi per le classi terza, quarta e quinta

Dalla globale intuizione del mondo circostante già suggerita per il primo ciclo didattico, e tenuta ancora a fondamento dell'attività scolastica durante il primo anno di questo secondo ciclo, il fanciullo sarà avviato ad una prima attenta analisi soprattutto attraverso l'esperienza episodica, prima base del sapere sistematico.

Sarà dunque ancora l'ambiente, nei suoi molteplici aspetti, il punto di riferimento per ogni ulteriore attività di osservazione, di ricerca, di riflessione, di espressione; ma, in progresso di tempo, l'alunno si renderà conto delle molteplici connessioni e correlazioni esistenti tra gli argomenti di studio. Ciò gli darà sempre maggiore consapevolezza dell'unita della cultura di base su cui si va formando e della possibilità di articolarla anche attraverso lo studio di singole discipline. Tutto questo va tenuto presente per la migliore interpretazione del programma che segue, dove le materie d'insegnamento affiorano, senza peraltro essere separate, dal contesto delle indicate attività che l'alunno dovrà svolgere, e sulle quali fondamentalmente si deve far leva per bandire dalla scuola primaria ogni ingombrante nozionismo e ogni pretesa di prematura sistematicità del sapere.

[. . .]

Aritmetica e geometria

Anche l'insegnamento della matematica andrà in questo ciclo differenziandosi sempre più, ma senza perdere il collegamento con gli altri insegnamenti è quindi sempre a strettissimo contatto con la vita pratica, e in relazione agli interessi del fanciullo. Si darà per questo massima importanza ai problemi, che andranno proposti con la naturalezza che deriva dalle effettive occasioni pratiche, ma al tempo stesso con rigorosa costante gradualità.

Occorre soprattutto concretezza e aderenza alla realtà quotidiana, ricorrendo anche al casi più comuni della contabilità familiare e commerciale.

In questo ciclo didattico occorre fissare definitivamente il significato essenziale di ciascuna delle quattro operazioni aritmetiche in relazione ai problemi fondamentali che esse risolvono. A tale scopo si svolgeranno ampiamente e ripetutamente problemi, soprattutto orali, con dati numerici semplicissimi; e solo gradualmente si introdurranno, nei problemi da eseguire per iscritto, dati più complessi usando numeri interi più alti o numeri decimali, e ricordando che per tali numeri in molti casi non soccorre più direttamente l'intuizione.

Solo in un secondo momento (ad esempio, nel secondo anno del ciclo) si passera a problemi richiedenti più di una operazione, usando dapprima sistematicamente una o più domande ausiliarie intermedie, le quali spezzino sostanzialmente il problema nella somma di due o più problemi. Ad ogni modo non si proporranno problemi, anche alla fine del ciclo, che richiedano più di tre, o eccezionalmente quattro operazioni: anzi si raccomanda di giungere a tali problemi solo nell'ultimo anno del ciclo.

Così l'insegnamento del sistema metrico deve appunto essere elemento di concretezza e non di astratta artificiosità: va quindi compiuto con la massima rispondenza alla effettiva pratica della vita. Dovranno essere banditi, ad esempio, quei multipli di unita di misura che, come il miriametro e il miriagrammo, non vengono usati mai o quasi mai in pratica. Si darà invece rilievo alle misure di valore, a quelle non decimali del tempo ed anche a talune misure locali, pur limitandosi a semplicissime esercitazioni. Si riduca al minimo o si sopprima del tutto l'uso per le riduzioni della famosa "scala" coi suoi gradini: è essenziale che l'alunno sappia, per esperienza e per ragionamento, e non per operazione meccanica, che ad esempio cinque metri equivalgono a cinquecento centimetri o che tre chilometri equivalgono a tremila metri. Si evitino quindi i virtuosismi inutili e, di regola, si evitino le riduzioni dirette da multipli a sottomultipli dell'unita di misura e viceversa. Anche in questo campo si seguirà una bene intesa gradualità, riservando ad esempio al secondo anno del ciclo le misure di superficie ed all'ultimo anno le misure di volume.

Alla fine del ciclo didattico, l'alunno dovrà possedere in modo organico e completo la tecnica delle quattro operazioni sui numeri interi e decimali (non oltre i millesimi): perciò l'insegnante potrà proporre anche svariati esercizi di calcolo, pure non sostenuti da problemi. Ricordi ad ogni modo che in mancanza di meglio è preferibile far eseguire operazioni a titolo di esercizio anziché proporre problemi artificiosi, astrusi, non rispondenti a realtà. In particolare, si raccomanda di dare grande importanza al calcolo mentale, anche con procedimenti di approssimazione. Il possesso della tavola pitagorica dovrà essere sicuro e completo alla fine del primo anno del ciclo. Per dare una sicura gradualità allo studio delle operazioni aritmetiche si raccomanda di rinviare al secondo anno del ciclo la divisione col divisore di due cifre e le operazioni sui numeri decimali. Non si dovranno in alcun modo, in questo ciclo, introdurre operazioni sulle frazioni: ci si limiterà a dare l'intuizione di frazione a fini pratici.

Per la geometria l'alunno verrà condotto in via naturale a riconoscere le principali figure piane e solide: ciò attraverso il disegno e le più evidenti proprietà, mai attraverso la definizione, spesso non compresa, sempre dannoso sforzo mnemonico.

Non si facciano recitare a memoria regole di misura: basta che l'alunno le sappia applicare praticamente. Ci si limiti a semplici calcoli di perimetri (poligoni, circonferenza del cerchio), di aree (rettangolo, quadrato, triangolo, cerchio, un cenno appena sui poligoni regolari), del volume del parallelepipedo rettangolo e del cubo.

Sarà bene riservare all'ultimo anno del ciclo i calcoli riguardanti il cerchio. Si evitino i problemi inversi, quando essi non sorgano da una pratica necessita e non presentino una evidente eseguibilità.

Tanto nel campo dell'aritmetica quanto in quello della geometria, sarà utile abituare gli alunni stessi a proporre e a formulare problemi pratici ricavati dalla propria esperienza.

C.2 Curricolo per la scuola primaria impostato sulle competenze chiave europee e sulle Indicazioni Nazionali del 2007

Nelle figure C.1, C.2, C.3, e C.4 sono riportati gli stralci concernenti l'insegnamento della Matematica del curriculo – reperibile in forma integrale all'indirizzo web `http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/Veneto_Curricolo_Primo_Ciclo_Indicazioni_2012.pdf` – creato sulla base della Raccomandazione del Parlamento Europeo del 18 Dicembre 2006 e delle Indicazioni Nazionali del 2007. Nelle tabelle sono state evidenziate le parti citate nel Capitolo 4.

COMPETENZE IN MATEMATICA E COMPETENZE DI BASE IN SCIENZA E TECNOLOGIA – MATEMATICA

DISCIPLINA DI RIFERIMENTO: MATEMATICA
DISCIPLINE CONCORRENTI: tutte

TRAGUARDI PER LO SVILUPPO DELLE COMPETENZE FISSATI DALLE INDICAZIONI NAZIONALI PER IL CURRICOLO 2012

MATEMATICA

TRAGUARDI ALLA FINE DELLA SCUOLA PRIMARIA	TRAGUARDI ALLA FINE DEL PRIMO CICLO
• L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice. • Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo. • Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo. • Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...). • Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici. • Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza. • Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici. • Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria. • Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri. • Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). • Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato ad utilizzare siano utili per operare nella realtà.	• L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni. • Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. • Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni. • Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza. • Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. • Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi. • Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione). • Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta. • Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale. • Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, …) si orienta con valutazioni di probabilità. • Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

Figura C.1: Curricolo per la scuola primaria - pagina 19.

SEZIONE A: *Traguardi formativi*				
COMPETENZA CHIAVE EUROPEA:	**COMPETENZE DI BASE IN MATEMATICA**			
Fonti di legittimazione:	Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio 18.12.2006 Indicazioni Nazionali per il Curricolo 2007			
	FINE CLASSE TERZA SCUOLA PRIMARIA		**FINE SCUOLA PRIMARIA**	
COMPETENZE SPECIFICHE	**ABILITA'**	**CONOSCENZE**	**ABILITA'**	**CONOSCENZE**
Utilizzare con sicurezza le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, scritto e mentale, anche con riferimento a contesti reali Rappresentare, confrontare ed analizzare figure geometriche, individuandone varianti, invarianti, relazioni, soprattutto a partire da situazioni reali; Rilevare dati significativi, analizzarli, interpretarli, sviluppare ragionamenti sugli stessi, utilizzando consapevolmente rappresentazioni grafiche e strumenti di calcolo; Riconoscere e risolve problemi di vario genere, individuando le strategie appropriate, giustificando il procedimento seguito e utilizzando in modo consapevole i linguaggi specifici	***Numeri*** Contare oggetti o eventi, a voce e mentalmente, in senso progressivo e regressivo e per salti di due, tre, ... Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta. Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo. Conoscere con sicurezza le tabelline della moltiplicazione dei numeri fino a 10. Eseguire le operazioni con i numeri naturali con gli algoritmi scritti usuali. Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali, rappresentarli sulla retta ed eseguire semplici addizioni e sottrazioni, anche con riferimento alle monete o ai risultati di semplici misure. ***Spazio e figure*** Percepire la propria posizione nello spazio e stimare distanze e volumi a partire dal proprio corpo. Comunicare la posizione di oggetti nello spazio fisico, sia rispetto al soggetto, sia rispetto ad altre persone o oggetti, usando termini adeguati (sopra/sotto, davanti/dietro, destra/sinistra, dentro/fuori). Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno, descrivere un percorso che si sta facendo e dare le istruzioni a qualcuno perché compia un percorso desiderato. Riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche. Disegnare figure geometriche e costruire modelli	Gli insiemi numerici: rappresentazioni, operazioni, ordinamento I sistemi di numerazione Operazioni e proprietà Figure geometriche piane Piano e coordinate cartesiani Misure di grandezza Misurazione e rappresentazione in scala Le fasi risolutive di un problema e loro rappresentazioni con diagrammi Principali rappresentazioni di un oggetto matematico Tecniche risolutive di un problema Unità di misura diverse Grandezze equivalenti Elementi essenziali di logica Elementi essenziali del linguaggio della probabilità	***Numeri*** Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali. Eseguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda delle situazioni. Eseguire la divisione con resto fra numeri naturali; individuare multipli e divisori di un numero. Stimare il risultato di una operazione. Operare con le frazioni e riconoscere frazioni equivalenti. Utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane. Interpretare i numeri interi negativi in contesti concreti. Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta e utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica. Conoscere sistemi di notazione dei numeri che sono o sono stati in uso in luoghi, tempi e culture diverse dalla nostra. ***Spazio e figure*** Descrivere, denominare e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre da altri. Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria). Utilizzare il piano cartesiano per localizzare punti. Costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione. Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse. Confrontare e misurare angoli utilizzando proprietà	Gli insiemi numerici: rappresentazioni, operazioni, ordinamento I sistemi di numerazione Operazioni e proprietà Frazioni e frazioni equivalenti Sistemi di numerazione diversi nello spazio e nel tempo Figure geometriche piane Piano e coordinate cartesiani Misure di grandezza; perimetro e area dei poligoni. Trasformazioni geometriche elementari e loro invarianti Misurazione e rappresentazione in scala Le fasi risolutive di un problema e loro rappresentazioni con diagrammi Principali rappresentazioni di un oggetto matematico Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche Unità di misura diverse Grandezze equivalenti Frequenza, media, percentuale Elementi essenziali di logica Elementi essenziali di calcolo probabilistico e combinatorio

Figura C.2: Curricolo per la scuola primaria - pagina 20.

	materiali anche nello spazio. ***Relazioni, dati e previsioni*** Classificare numeri, figure, oggetti in base a una o più proprietà, utilizzando rappresentazioni opportune, a seconda dei contesti e dei fini. Argomentare sui criteri che sono stati usati per realizzare classificazioni e ordinamenti assegnati. Leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi, schemi e tabelle. Misurare grandezze (lunghezze, tempo, ecc.) utilizzando sia unità arbitrarie sia unità e strumenti convenzionali (metro, orologio, ecc.).		e strumenti. Utilizzare e distinguere fra loro i concetti di perpendicolarità, parallelismo, orizzontalità, verticalità. Riprodurre in scala una figura assegnata (utilizzando, ad esempio, la carta a quadretti). Determinare il perimetro di una figura utilizzando le più comuni formule o altri procedimenti. Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule. Riconoscere rappresentazioni piane di oggetti tridimensionali, identificare punti di vista diversi di uno stesso oggetto (dall'alto, di fronte, ecc.) ***Relazioni, dati e previsioni*** Rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni. Usare le nozioni di media aritmetica e di frequenza. Rappresentare problemi con tabelle e grafici che ne esprimono la struttura. Utilizzare le principali unità di misura per lunghezze, angoli, aree, volumi/capacità, intervalli temporali, masse, pesi e usarle per effettuare misure e stime. Passare da un'unità di misura a un'altra, limitatamente alle unità di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario. In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili. Riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure.	

Figura C.3: Curricolo per la scuola primaria - pagina 21.

SEZIONE C: Livelli di padronanza				
COMPETENZA CHIAVE EUROPEA:	COMPETENZE DI BASE IN MATEMATICA			
LIVELLI DI PADRONANZA				
1	2	3 *dai Traguardi per la fine della scuola primaria*	4	5 *dai Traguardi per la fine del primo ciclo*
Numera in senso progressivo. Utilizza i principali quantificatori. Esegue semplici addizioni e sottrazioni in riga senza cambio. Padroneggia le più comuni relazioni topologiche: vicino/lontano; alto basso; destra/sinistra; sopra/sotto, ecc. Esegue percorsi sul terreno e sul foglio. Conosce le principali figure geometriche piane. Esegue seriazioni e classificazioni con oggetti concreti e in base ad uno o due attributi. Utilizza misure e stime arbitrarie con strumenti non convenzionali Risolve problemi semplici, con tutti i dati noti ed espliciti, con l'ausilio di oggetti o disegni.	Conta in senso progressivo e regressivo anche saltando numeri. Conosce il valore posizionale delle cifre ed opera nel calcolo tenendone conto correttamente. Esegue mentalmente e per iscritto le quattro operazioni ed opera utilizzando le tabelline. Opera con i numeri naturali e le frazioni. Esegue percorsi anche su istruzione di altri. Denomina correttamente figure geometriche piane, le descrive e le rappresenta graficamente e nello spazio. Classifica oggetti, figure, numeri in base a più attributi e descrive il criterio seguito. Sa utilizzare semplici diagrammi, schemi, tabelle per rappresentare fenomeni di esperienza. Esegue misure utilizzando unità di misura convenzionali. Risolve semplici problemi matematici relativi ad ambiti di esperienza con tutti i dati esplicitati e con la supervisione dell'adulto.	Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice. Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo. Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo. Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...). Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici. Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza. Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici. Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria. Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri. Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato ad utilizzare siano utili per operare nella realtà.	Opera con i numeri naturali, decimali e frazionari; utilizza i numeri relativi, le potenze e le proprietà delle operazioni, con algoritmi anche approssimati in semplici contesti. Opera con figure geometriche piane e solide identificandole in contesti reali; le rappresenta nel piano e nello spazio; utilizza in autonomia strumenti di disegno geometrico e di misura adatti alle situazioni; padroneggia il calcolo di perimetri, superfici, volumi. Interpreta semplici dati statistici e utilizza il concetto di probabilità. Utilizza in modo pertinente alla situazione gli strumenti di misura convenzionali, stima misure lineari e di capacità con buona approssimazione; stima misure di superficie e di volume utilizzando il calcolo approssimato. Interpreta fenomeni della vita reale, raccogliendo e organizzando i dati in tabelle e in diagrammi in modo autonomo. Sa ricavare: frequenza, percentuale, media, moda e mediana dai fenomeni analizzati. Risolve problemi di esperienza, utilizzando le conoscenze apprese e riconoscendo i dati utili dai superflui. Sa spiegare il procedimento seguito e le strategie adottate. Utilizza il linguaggio e gli strumenti matematici appresi per spiegare fenomeni e risolvere problemi concreti.	L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni. Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni. Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza. Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi. Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione). Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta. Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale. Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, …) si orienta con valutazioni di probabilità. Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

Livello 3: atteso a partire dalla fine della scuola primaria Livello 4: atteso nella scuola secondaria di primo grado Livello 5: atteso alla fine della scuola secondaria di primo grado

Figura C.4: Curricolo per la scuola primaria - pagina 25.

C.3 Indicazioni Nazionali e Linee Guida per il curricolo della scuola secondaria di secondo grado del 2010

Di seguito riportiamo una selezione delle Indicazioni Nazionali e Linee Guida per il curricolo della scuola secondaria di secondo grado del 2010. [2] In particolare per quanto riguarda il Liceo Scientifico si trovano le seguenti indicazioni (sono state riportate in grassetto le parti citate nel Capitolo 4):

Profilo generale e competenze Al termine del percorso liceale lo studente dovrà padroneggiare i principali concetti e metodi di base della matematica, sia aventi valore intrinseco alla disciplina, sia connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale, in particolare del mondo fisico. Una caratteristica importante del percorso del liceo scientifico sarà l'interazione dello studio della matematica con le altre discipline scientifiche. Questa contribuirà alla loro comprensione e al loro apprendimento fornendo un quadro concettuale e un insieme di tecniche adeguate. D'altro canto, permetterà di connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate e di approfondirne il significato.

Lo studente dovrà acquisire una consapevolezza critica dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, dovrà acquisire il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nel pensiero greco, la matematica infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento, la svolta a partire dal razionalismo illuministico che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica. Di qui i gruppi di concetti e metodi che lo studente dovrà padroneggiare:

[2] Reperibile integralmente all'indirizzo web `http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///MATEMATICA_scientifico.pdf`.

1. **gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui si definiscono i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);**

2. gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, le funzioni elementari dell'analisi e le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale, con particolare riguardo per le loro relazioni con la fisica;

3. la conoscenza elementare di alcuni sviluppi caratteristici della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica.

Dovrà inoltre avere familiarità con l'approccio assiomatico nella sua forma moderna e possedere i primi elementi della modellizzazione matematica, anche nell'ambito di fenomeni anche di natura diversa da quella fisica. Dovrà conoscere il concetto di modello matematico e la specificità del rapporto che esso istituisce tra matematica e realtà rispetto al rapporto tra matematica e fisica classica. Dovrà essere capace di costruire semplici modelli matematici di insiemi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione e il calcolo. Infine, lo studente dovrà acquisire concettualmente e saper usare elementarmente il principio di induzione matematica, per comprendere la natura dell'induzione matematica e la sua specificità rispetto all'induzione fisica.

Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali, la filosofia e la storia. L'ampio spettro di contenuti affrontati richiede che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, è necessario evitare dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, particolarmente necessario nel liceo scientifico, deve sempre essere funzionale alla comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali acquisiti in profondità.

Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso dovrà, quando ciò si rivelerà opportuno, favorire l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante, in particolar modo nel liceo scientifico, che dovrà essere introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.

[...]

Obbiettivi specifici di apprendimento per il primo biennio per l'ambito Geometria

Nel primo biennio saranno sviluppati i fondamenti della geometria euclidea del piano. In questo contesto sarà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, mostrando come, a partire dagli Elementi di Euclide, essi abbiano permeato lo sviluppo della matematica occidentale. L'approccio euclideo non deve essere ridotto a metodologia assiomatica, come del resto non è mai stato storicamente.

Al teorema di Pitagora sarà dedicato uno spazio adeguato mettendone in luce gli aspetti geometrici e le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.

Saranno approfondite le principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e lo studente dovrà saper riconoscere le principali proprietà invarianti. Lo studente approfondirà le

proprietà fondamentali della circonferenza.

Saranno sviluppati i primi elementi di rappresentazione delle figure dello spazio.

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

Sarà introdotto il metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti, rette e fasci di rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. Lo studio delle funzioni quadratiche si accompagnerà alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non dovrà essere disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

Saranno inoltre introdotte le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, anche in vista del loro uso nello studio della fisica.

Bibliografia

[1] Bachelard G., *Le nouvel esprit scientifique*, PUF, Parigi, (1949).

[2] Betti E. e Brioschi F., *Elementi di Euclide*, Le Monnier, Firenze, (1867).

[3] Bolondi G. e Fandiño Pinilla M. I., *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*, EdiSES, Napoli, (2012).

[4] Borgato M. T., *Il Programma di Erlangen*, note, (2006), `http://www.fe.infn.it/u/mandreot/SSIS/DidMateModuloII/borgato9.pdf`.

[5] Brousseau G., *La situation fondamentale pour la Geometrie Elementaire en tant que modèle de l'espace*, Atti del Convegno «La ricerca in didattica della Matematica: suoi contenuti e finalità», Trento, (1984).

[6] D'Amore B, *Elementi di didattica della Matematica*, Pitagora Editrice, Bologna, (1999).

[7] Dossena R. e Magnani L., *Felix Klein: il Programma di Erlangen*, Note di Matematica, Storia, Cultura, 7, Springer, Milano, (2004).

[8] Enriques F., *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria*, Rivista di Filosofia, 4, 171-195, (1901).

[9] Enriques F., *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna, (1906).

[10] Enriques F. e Chisini O., *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Zanichelli, Bologna, (1915-1934).

[11] Fischbein E., *The theory of figural concepts*, Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162, (1993).

[12] Gillies D., *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, (1992).

[13] Helmholtz H., *Epistemological Writings*, a cura di R. Cohen e M. Wartofsky, D. Reidel publishing company, Boston, (1921).

[14] Herbart, J.F., *Pedagogia generale derivata dal fine dell'educazione*, tr. it. a cura di I. Volpicelli, La nuova Italia, Firenze, (1997).

[15] Herbart, J.F., *Pestalozzi's Idea of an A B C of Sense Perception*, tr. ing. a cura di W. J. Eckoff, D. Appleton, New York (1903).

[16] Holzmüller G., *Manuale metodico di Matematica elementare*, Teubner, Leipzig, (1894).

[17] Klein F., *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, tr. it. a cura di G. Fano, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 17, 307-343, (1890).

[18] Klein F., *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint, Volume II: Geometry*, Springer, Gottinga, (1908).

[19] Klein F. e Schimmack R., *Lectures on mathematics teaching in secondary schools, Part I*, Steiner, Leipzig, (1907).

[20] Lakatos I., *The medothology of scientific research programmes*, Cambridge University Press, London, (1976).

[21] Loria G., *Programmi del passato e programmi per l'avvenire*, Bollettino dell'associazione Mathesis, 15, 135-44, (1905).

[22] Lotze R. H., *Medicinische Psychologie*, Weidmann, Leipzig, (1852).

[23] Medici D., Speranza F. e Vighi P., *Sobre la formacion de los conceptos geometricos y sobre el lexico geometrico*, Ensenanza de las Ciencias, 4, 16-22, (1986).

[24] Newton I., *Principi matematici della filosofia naturale*, tr. it. a cura di A. Pala, Utet, Torino, (1965).

[25] Piaget, J., *Le structuralisme*, Presses Universitaires de France, Parigi, (1968).

[26] Piaget J., *L'épistémologie génétique*, Presses Universitaires de France, Parigi, (1970).

[27] Piaget J. e Inhelder B., *La rappresentazione dello spazio nel bambino*, tr. it a cura di B. Garau, Giunti-Barbera, Firenze (1972).

[28] Piaget J., Inhelder B. e Szeminska A., *La Geometria spontanea del bambino* tr. it a cura di B. Garau, Giunti-Barbera, Firenze (1973).

[29] Plucker J., *On a New Geometry of Space*, Royal Society of London, Londra (1865).

[30] Poincaré J.H., *La Scienza e l'Ipotesi*, tr. it. a cura di G. Porcelli, Dedalo, Bari (1989).

[31] Popper K.R., *The Logic of Scientific Discovery*, Hutchinson, Londra, (1959).

[32] Speranza F., *La geometria nella scuola elementare*, L'educazione matematica, 2, 1-23, (1981).

[33] Speranza F., *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora Editrice, Bologna, (1997).

[34] Speranza F., *A cosa serve la filosofia della matematica?*, In: Scritti di Epistemologia della Matematica, Pitagora Editrice, Bologna, (1997).

[35] Speranza F., *Salviamo la Geometria!*, In: Scritti di Epistemologia della Matematica, Pitagora Editrice, Bologna, (1997).

[36] Speranza F., *La razionalizzazione della Geometria*, In: Scritti di Epistemologia della Matematica, Pitagora Editrice, Bologna, (1997).

[37] Speranza F., *La "rivoluzione" di Felix Klein*, In: Scritti di Epistemologia della Matematica, Pitagora Editrice, Bologna, (1997).

[38] Veronese G., *Elementi di Geometria, ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (1º biennio)*, Drucker, Padova, (1897).

[39] Wundt W., *Principles of Physiological Psychology*, Sonnenschein, London, (1904).

[40] Weber E. H., *Annotationes anatomicae et physiologicae; programmata collecta*, Lipsia, (1851).

Ringraziamenti

Arrivata alla fine di questo percorso universitario, concluso in poco meno di due anni, è per me doveroso esprimere la mia immensa gratitudine nei confronti di alcune persone per l'aiuto ed il sostegno che mi hanno mostrato.

Ringrazio *in primis* la Professoressa Alessia Cattabriga per l'infinita disponibilità e la grande passione che ha saputo trasmettermi sin dal nostro primo incontro. Venni a studiare nella città di Bologna alla ricerca di un ambiente universitario motivante e coinvolgente, e di professori che sapessero condurmi al traguardo più entusiasta e preparata che mai, e l'aver trovato tutto ciò in lei è stato di ispirazione e mi ha davvero incoraggiato.

Ringrazio tutta la mia famiglia. Innanzitutto mia madre Milena, mio padre Giorgio e mio fratello Guglielmo, che anche a 400 chilometri di distanza non hanno mai mancato di farmi sentire la loro vicinanza e il loro affetto (e i loro affettati).

Ringrazio i miei amici. Quelli vecchi, che già sanno quanto sono grata loro per essere rimasti sempre al mio fianco, e i nuovi, che hanno reso questa mia avventura da fuorisede indimenticabile, in modo speciale la mia "coinquilinamica" Eleonora: grazie per le giornate piene di chiacchierate sullo stipite della porta e per le serate finite a pane e olio – voglio che tu sappia che anche adesso che ci separeremo, io sarò sempre la Monica della tua Rachel.

Ringrazio tutti i Professori che hanno collaborato al mio progetto di tesi per il tempo e l'attenzione che mi hanno dedicato: il Prof. Carlo Bertoni, la Prof.ssa Francesca Gaetani, la Prof.ssa Angela Rambaldi e la Prof.ssa Elisa Targa del Liceo Copernico; la Prof.ssa Silvia Abrescia, la Prof.ssa Angela

Osti e la Prof.ssa Marinella Penazzi della scuola secondaria di primo grado "Rolandino de' Passaggeri". L'autenticità con cui svolgete il vostro lavoro è incoraggiate e d'ispirazione.

Ringrazio anche la Professoressa Giulia Tasquier del Dipartimento di Fisica e Astronomia per l'aiuto tecnico e soprattutto per il supporto morale.

Ringrazio tutti gli studenti e le studentesse delle classi IVE, IIIG, IVD, IIIF, IF, IIF, IIC, IC, ID con cui ho avuto il piacere di passare del tempo mentre preparavo questa tesi, così come tutti gli altri studenti che ho incontrato in questo periodo, siete stati meravigliosi, oltre ogni mia aspettativa. Spero di aver aiutato voi anche solo una frazione di quanto voi abbiate aiutato me.

Ringrazio Matteo e Chiara, i fidanzati più incredibili che potessi desiderare. Non bastano più le parole per descrivere quanto vi ami.

Ringrazio infine Bologna «la Grassa», per avermi adottata.