

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Proiezioni di curve razionali normali e loro singolarità

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Monica Idà

Presentata da:
Stefano Canino

Sessione Unica
2017/18

A chi se lo merita . . .

Pulchra sunt quae videntur
Pulchriora quae sciuntur
Longe pulcherrima quae ignorantur

Indice

Introduzione	6
1 Premesse	9
1.1 Polinomi omogenei	9
1.2 Nozioni di geometria proiettiva	13
1.2.1 Carte affini	16
1.3 Curve algebriche piane	18
1.3.1 Intersezioni di curve	22
2 Punti semplici e punti singolari	27
2.1 Come usare le proiettività per semplificare i calcoli	28
2.2 Comportamento di una curva algebrica in un punto semplice	29
2.3 Comportamento di una curva algebrica in un punto doppio .	32
2.3.1 Il grafico di una curva reale intorno ad un suo punto doppio	37
3 Costruzione tramite proiezione di curve con un punto m-plo ordinario	40
3.1 Curve razionali normali	40
3.2 Costruzione per proiezione di una quartica con un punto tri- plo ordinario	41
3.3 Costruzione per proiezione di una curva con un punto m-plo ordinario	47
3.4 Una curva di grado $m+1$ con un punto m-plo è razionale . . .	48

4	Rivestimento doppio di una cubica con una cuspid	51
4.1	Rivestimento doppio di una cubica con una cuspid di prima specie	51
5	Costruzione tramite proiezione di un punto quadruplo non ordinario	58
5.1	Punto quadruplo non ordinario	58
6	Costruzione tramite proiezione di un oscnodo	65
	Bibliografia	72
	Ringraziamenti	74

Elenco delle figure

2.1	Nodo	38
2.2	Biflecnodo	38
2.3	Cuspide di I specie	38
2.4	Tacnodo $\lambda_1\lambda_2 > 0$	39
2.5	Tacnodo $\lambda_1\lambda_2 < 0$	39
2.6	Cuspide di II specie	39
2.7	Oscnodo	39

Introduzione

In questa tesi si studiano alcune singolarità che si ottengono dalla proiezione di una curva razionale normale.

Nel primo capitolo vengono introdotti gli strumenti utilizzati nel seguito per lo sviluppo della tesi; in particolare, la prima parte si occupa di definire alcune proprietà dei polinomi omogenei, fondamentali per lo studio delle curve proiettive, nonché le operazioni di omogeneizzazione e deomogeneizzazione che saranno poi cruciali per passare dall'affine al proiettivo. La seconda parte è invece costituita da alcuni richiami di geometria proiettiva, come ad esempio equazioni cartesiane e parametriche per piani e rette, carte affini e proiezioni di centro un sottospazio. Nell'ultima parte infine si definiscono le curve algebriche piane, sia nel caso affine che in quello proiettivo, e si indagano alcune loro principali proprietà concentrandosi anche sul rapporto affine/proiettivo poichè, come si vedrà nel seguito, è molto comodo poter lavorare in entrambi i piani spostandosi da uno all'altro a seconda delle esigenze.

Il secondo capitolo si occupa dello studio dei punti semplici e di quelli singolari di una curva. Nella prima parte si fa vedere come portare una curva \mathcal{C} in una proiettivamente equivalente in modo che un dato punto di \mathcal{C} e la tangente (o una delle tangenti se il punto è multiplo) a \mathcal{C} in quel punto vadano a finire rispettivamente in $[0, 0, 1]$ e $x_0 = 0$. Nella seconda parte si studiano invece i punti semplici di una curva mediante curve ausiliarie e nella terza viene fatta la stessa cosa ma con i punti doppi. In quest'ultimo caso sono state analizzate solo alcune possibilità, ossia quelle inerenti alla tesi.

Col terzo capitolo comincia la parte centrale della tesi: nella prima parte si definiscono infatti le curve razionali normali. Nella seconda si mostra la

costruzione di un punto triplo ordinario tramite proiezione della quartica razionale normale standard e si generalizza poi il metodo ad un qualsiasi punto m -plo ordinario. Nella terza parte invece si fornisce un metodo per trovare equazioni parametriche, che esistono sempre, di una curva di grado m con un punto m -plo, anche non ordinario.

Nei capitoli quarto, quinto e sesto si riportano invece esempi di punti singolari ottenuti mediante proiezione della sestica razionale standard; più precisamente i casi trattati sono stati rispettivamente: un rivestimento doppio di una cubica con una cuspidi, un punto quadruplo non ordinario, un oscnodo (degenere).

Le motivazioni del perchè proiettando si ottengano dei punti singolari piuttosto che altri sono da ricercare nella teoria degli schemi; benchè questo esuli dagli scopi della tesi, si cercherà qui brevemente di spiegare cosa succede nei quattro esempi presentati. Prima di passare ai casi concreti è importante osservare che dati una curva \mathcal{C} ed un suo punto semplice P , la retta tangente a \mathcal{C} in P può essere pensata come la retta per P ed un punto di \mathcal{C} infinitamente vicino a P , mentre il piano osculatore a \mathcal{C} in P può essere visto come il piano per P ed altri due punti di \mathcal{C} infinitamente vicini a P . Detto questo vediamo cosa è successo in ciascun esempio:

1. Punto triplo ordinario (Capitolo 3): in questo caso il centro di proiezione è stato scelto in modo che tre punti distinti della \mathcal{C}_4 venissero mandati nello stesso punto e le rispettivamente tangenti andassero a finire in tre rette distinte che, come si vedrà, sono proprio le tre tangenti principali del punto triplo ottenuto;
2. Rivestimento doppio della cubica con una cuspidi (Capitolo 4): in questo caso il centro di proiezione è stato scelto in modo che i punti di \mathcal{C}_6 venissero proiettati a due a due nello stesso punto, cioè che la proiezione fosse $2 : 1$. Ciò ha fatto sì che si ottenesse un rivestimento doppio. La cuspidi è invece data dal fatto che il punto in cui la cubica presenta la singolarità è immagine tramite la proiezione non solo di due punti distinti A e B della \mathcal{C}_6 ma anche delle loro rispettive tangenti t_A e t_B : la singolarità si ha quindi perchè anche i due punti di \mathcal{C}_6 infinitamente vicini rispettivamente ad A e B vanno a finire nel punto

in cui sono mandati A e B . Il punto doppio è non ordinario poichè le sue due tangenti principali sono coincidenti, in quanto date dalle proiezioni dei piani osculatori a \mathcal{C}_6 in A e B , che vengono mandati nella stessa retta;

3. Punto quadruplo non ordinario (Capitolo 5): in questo caso il centro di proiezione è stato scelto in modo che la proiezione fosse genericamente iniettiva e due punti di \mathcal{C}_6 , A e B , e le loro rispettive tangenti t_A e t_B , venissero mandati nello stesso punto. In questo caso la singolarità ottenuta è un punto quadruplo e non doppio poichè, come nel caso precedente, oltre ad A e B , anche t_A e t_B finiscono nello stesso punto, quindi A , B ed i due punti di \mathcal{C}_6 infinitamente vicini ad A e B sono mandati tutti sul punto singolare, ma siamo in presenza di un rivestimento genericamente $1 : 1$;
4. Oscnodo (Capitolo 6): in questo caso il centro di proiezione è stato scelto in modo che due punti di \mathcal{C}_6 , A e B , fossero mandati nello stesso punto e le rispettive tangenti a \mathcal{C}_6 , finissero in una stessa retta. Per questo motivo la singolarità ottenuta è un punto doppio e non quadruplo poichè questa volta le tangenti non vengono mandate in un punto ma in una retta r , che è l'unica tangente principale della singolarità. Anche i due piani osculatori O_A e O_B vengono mandati su r e questo comporta che i due rami distinti della curva \mathcal{C} proiezione della \mathcal{C}_6 si incontrino nel punto singolare P con molteplicità 3, quindi in tre punti infinitamente vicini che stanno sulla retta tangente. Questo è quindi un oscnodo un po' particolare; nel caso generale infatti i due rami della curva nell'oscnodo si intersecano in tre punti infinitamente vicini che stanno su una conica non degenera (la conica osculatrice a \mathcal{C} in P).

Capitolo 1

Premesse

L'intento di questo capitolo è quello di introdurre i concetti necessari allo sviluppo della tesi. La maggior parte delle nozioni è ripresa da [1], dunque è ad esso che si rimanda qualora si volessero approfondire i particolari che si è pensato di omettere per non appesantire eccessivamente la trattazione. Quando non specificato, l'ambiente in cui si lavorerà sarà sempre \mathbb{C} .

1.1 Polinomi omogenei

In questa sezione verranno mostrate alcune proprietà e caratteristiche dei polinomi omogenei che saranno utilizzate nel seguito.

Notazione 1.1.1.

Si indicherà con $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in \mathbb{C} e con $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in \mathbb{C} di grado minore o uguale ad n .

Definizione 1.1.1.

Un polinomio $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ si dice omogeneo se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado.

Notazione 1.1.2.

I polinomi omogenei verranno indicati tendenzialmente in lettera maiuscola, quelli non omogenei in lettera minuscola, lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei a coefficienti in \mathbb{C} e di grado d , più il polinomio nullo, verrà indicato con $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$.

Definiamo ora le operazioni di omogeneizzazione e deomogeneizzazione su un polinomio.

Definizione 1.1.2.

Sia $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ di grado d . Il polinomio omogeneizzato di f rispetto a x_0 è il polinomio $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ definito nel seguente modo: $F(x_0, \dots, x_n) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$.

Definizione 1.1.3.

Sia $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo di grado d . Il deomogeneizzato di F rispetto a x_0 è il polinomio $F(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Osservazione 1.1.1.

È possibile osservare che l'omogeneizzato di un polinomio è un polinomio omogeneo e che il deomogeneizzato di un polinomio omogeneo è quasi sempre un polinomio non omogeneo (per esempio, omogeneizzando rispetto a x_0 il polinomio $x_1^2 + x_2^2$ si ottiene ancora $x_1^2 + x_2^2$). Inoltre si può verificare che, dato $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, il deomogeneizzato dell'omogeneizzato di f coincide con f stesso. Non è invece vero, in generale, che dato $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo, l'omogeneizzato del deomogeneizzato di F coincide con F stesso. Più precisamente ciò è vero se e solo se x_0 non divide F .

Di seguito si enunciano due importanti risultati sui polinomi omogenei che verranno sfruttati nel corso della trattazione.

Proposizione 1.1.1.

1. Un polinomio non nullo $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ è omogeneo di grado d se e solo è verificata la seguente identità polinomiale in $\mathbb{C}[t, x_0, \dots, x_n]$:

$$F(tx_0, \dots, tx_n) = t^d F(x_0, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

2. (Identità di Eulero) Se $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_n$, allora:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_k} = nF \quad (1.2)$$

Proposizione 1.1.2.

Dato $F(x_0, x_1) \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_d$ non nullo, $d \geq 1$, esistono d coppie contate con molteplicità $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2, i = 1, \dots, d$, tutte diverse da $(0, 0)$ e tali che:

$$F(x_0, x_1) = \prod_{i=1}^d (a_i x_1 - b_i x_0) \quad (1.3)$$

Inoltre tali coppie sono uniche a meno dell'ordine e di coefficienti di proporzionalità non nulli $c_i, i = 1, \dots, d$ tali che $\prod_{i=1}^d c_i = 1$.

Dimostrazione.

Posto $r = \max_i \{i \in \mathbb{N}; x_0^i | F\}$, si ha $F(x_0, x_1) = x_0^r G(x_0, x_1)$ con G omogeneo, $\deg G = d - r$ e $x_0 \nmid G(x_0, x_1)$. Da queste proprietà di G segue che deve necessariamente esserci un suo monomio che ha parte letterale uguale a x_1^{d-r} (derivante dal monomio che prima della divisione aveva parte letterale uguale a $x_0^r x_1^{d-r}$). Da ciò segue che, detto f il deomogeneizzato di G rispetto a x_0 , cioè $f(x_1) = G(1, x_1)$, si ha $\deg f = d - r$ poichè il monomio in questione rimane invariato dalla deomogeneizzazione ed il grado di f non può chiaramente superare quello di G . Poichè $f(x_1) \in \mathbb{C}[x_1]$ e \mathbb{C} è algebricamente chiuso, $\exists d_1, \dots, d_{d-r}, e_1, \dots, e_{d-r} \in \mathbb{C}$ tali che:

$$f(x_1) = \prod_{j=1}^{d-r} (e_j x_1 - d_j)$$

Poichè $x_0 \nmid G(x_0, x_1)$ ed f è il deomogeneizzato di G , omogeneizzando f si riottiene G . Si ha quindi:

$$G(x_0, x_1) = x_0^{d-r} \prod_{j=1}^{d-r} \left(e_j \frac{x_1}{x_0} - d_j \right) = \prod_{j=1}^{d-r} (e_j x_1 - d_j x_0)$$

Ponendo $a_i = 0, i = 1, \dots, r$, $a_i = e_{i-r}, i = r + 1, \dots, d$, $b_i = -1, i = 1, \dots, r$, $b_i = d_{i-r}, i = r + 1, \dots, d$ si ha:

$$F(x_0, x_1) = \prod_{i=1}^d (a_i x_1 - b_i x_0)$$

Le coppie (a_i, b_i) sono le coppie cercate. La loro unicità a meno dell'ordine e di coefficienti moltiplicativi segue dall'unicità della fattorizzazione di un polinomio su \mathbb{C} . \square

Osservazione 1.1.2.

Se nella proposizione 1.1.2 si considerano le coppie (a_i, b_i) come punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ esse sono uniche esclusivamente a meno dell'ordine poichè in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 [a_i, b_i] = [\rho a_i, \rho b_i]$ se $\rho \neq 0$. Poichè il punto $[a_i, b_i]$ annulla il polinomio $a_i x_1 - b_i x_0$, diamo la seguente definizione:

Definizione 1.1.4.

Nelle notazioni della proposizione precedente, le coppie $[a_i, b_i] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ si dicono radici del polinomio omogeneo $F(x_0, x_1)$; quindi la proposizione 1.1.2 ci dice che un polinomio omogeneo di $\mathbb{C}[x_0, x_1]$ di grado d ha esattamente d radici contate con molteplicità.

Esempio 1.1.1.

Si consideri $F(x_0, x_1) = 6x_0^5 + 11x_0^4 x_1 - 19x_0^3 x_1^2 + 6x_0^2 x_1^3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_5$. Poichè F è omogeneo, si può applicare il procedimento descritto nella proposizione precedente per trovare le sue radici.

1. Si raccoglie x_0 : $F(x_0, x_1) = x_0^2(6x_0^3 + 11x_0^2 x_1 - 19x_0 x_1^2 + 6x_1^3)$
2. Si scrive G : $G = 6x_0^3 + 11x_0^2 x_1 - 19x_0 x_1^2 + 6x_1^3$
3. Si calcola il deomogeneizzato di G : $f(x_1) = G(1, x_1) = 6x_1^3 - 19x_1^2 + 11x_1 + 6$
4. Si fattorizza f : $f(x_1) = (2x_1 - 3)(x_1 - 2)(3x_1 + 1)$
5. Si omogeneizza f riottenendo G : $G(x_0, x_1) = x_0^3(2\frac{x_1}{x_0} - 3)(\frac{x_1}{x_0} - 2)(3\frac{x_1}{x_0} + 1) = (2x_1 - 3x_0)(x_1 - 2x_0)(3x_1 + x_0)$
6. Si sostituisce G nell'espressione di F : $F(x_0, x_1) = x_0^2(2x_1 - 3x_0)(x_1 - 2x_0)(3x_1 + x_0)$
7. Si scrivono le radici (a meno di multipli) di F : $[0, -1], [2, 3], [1, 2], [3, -1]$.

Si riporta infine lo sviluppo di Taylor per polinomi in più variabili.

Teorema 1.1.3.

Sia $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $\deg(f) = d$, e sia $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Posto

$f_{i_1, \dots, i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ si ha il seguente sviluppo di Taylor per f centrato in \underline{a} :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(\underline{a}) + \sum_{i=1}^n f_i(\underline{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2=1}^n f_{i_1, i_2}(\underline{a})(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) + \\ &\dots + \frac{1}{d!} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n f_{i_1, \dots, i_d}(\underline{a})(x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_d} - a_{i_d}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.2 Nozioni di geometria proiettiva

In questa sezione vengono introdotti alcuni elementi di geometria proiettiva che serviranno successivamente per affrontare l'argomento della tesi. Saranno considerate note alcune nozioni di base, quali ad esempio quelle di spazio proiettivo, coordinate omogenee e proiettività; per maggiori dettagli si rimanda a [1].

Notazione 1.2.1.

Si indicherà con \mathbb{P}^n lo spazio proiettivo di dimensione n su \mathbb{C} e con \mathbb{A}^n lo spazio affine su \mathbb{C} di dimensione n .

Notazione 1.2.2.

Dati punti $P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}^n$, si indicherà con $L(P_1, \dots, P_t)$ il più piccolo sotto-spazio proiettivo contenente P_1, \dots, P_t . Presi $v_1, \dots, v_t \in \mathbb{C}^{n+1}$ tali che $P_i = [v_i]$ $i = 1, \dots, t$, si ha che $L(P_1, \dots, P_t) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_t \rangle)$. Di conseguenza, poichè $\dim(\langle v_1, \dots, v_t \rangle) \leq t$ vale anche che $L(P_1, \dots, P_t) \leq t - 1$.

Definizione 1.2.1.

Dati i punti $P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}^n$, si dice che essi sono linearmente indipendenti se $\dim(L(P_1, \dots, P_t)) = t - 1$.

Osservazione 1.2.1.

Poichè $\dim(L(P_1, \dots, P_t))$ può essere al massimo n , è chiaro che P_1, \dots, P_t non possono essere linearmente indipendenti se $t > n + 1$. Esiste tuttavia una generalizzazione del concetto di indipendenza lineare fornita dalla seguente definizione.

Definizione 1.2.2.

Dati i punti $P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}^n$, si dice che essi sono in posizione generale se:

- $t \leq n + 1$ e P_1, \dots, P_t sono linearmente indipendenti;
- $t > n + 1$ e comunque si scelgano $n + 1$ punti tra P_1, \dots, P_t essi sono linearmente indipendenti.

Si richiamano ora le rappresentazioni di rette e piani in \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^3 mediante equazioni cartesiane e parametriche; con tecniche analoghe si possono dare equazioni cartesiane e parametriche per sottospazi k -dimensionali di \mathbb{P}^n .

Osservazione 1.2.2.

Si considerino due punti $A = [a]$, $B = [b] \in \mathbb{P}^2$ con $a = (a_0, a_1, a_2)$, $b = (b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^3$. Se A e B sono linearmente indipendenti, cioè se:

$$rk \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 2$$

equazioni parametriche per la retta $r = L(A, B)$ sono:

$$r : \begin{cases} x_0 = sa_0 + tb_0 \\ x_1 = sa_1 + tb_1 \\ x_2 = sa_2 + tb_2 \end{cases} \quad [s, t] \in \mathbb{P}^1 \quad (1.5)$$

Un'equazione cartesiana di r è invece:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Si considerino ora tre punti $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c] \in \mathbb{P}^3$ con $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^4$. Se A e B sono linearmente indipendenti, cioè se:

$$rk \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2$$

equazioni parametriche per la retta $r = L(A, B)$ sono:

$$r : \begin{cases} x_0 = sa_0 + tb_0 \\ x_1 = sa_1 + tb_1 \\ x_2 = sa_2 + tb_2 \\ x_3 = sa_3 + tb_2 \end{cases} \quad [s, t] \in \mathbb{P}^1 \quad (1.6)$$

Equazioni cartesiane per r si ottengono invece imponendo:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2$$

Se A, B, C sono linearmente indipendenti, cioè se:

$$rk \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 3$$

equazioni parametriche per il piano $\pi = L(A, B, C)$ sono:

$$\pi : \begin{cases} x_0 = sa_0 + tb_0 + uc_0 \\ x_1 = sa_1 + tb_1 + uc_1 \\ x_2 = sa_2 + tb_2 + uc_2 \\ x_3 = sa_3 + tb_2 + uc_3 \end{cases} \quad [s, t, u] \in \mathbb{P}^2 \quad (1.7)$$

Un'equazione cartesiana per π si ottiene infine imponendo:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

È possibile verificare che la scelta dei rappresentanti dei punti modifica le equazioni ma non le rette ed i piani rappresentati.

Vengono introdotti ora due strumenti fondamentali per affrontare l'argomento principale della trattazione: il *cono proiettante* e le *proiezioni*.

Definizione 1.2.3.

Sia J un sottoinsieme di \mathbb{P}^n e sia $P \in \mathbb{P}^n$ un punto. Il cono proiettante J da P è l'unione $C_J(P)$ di tutte le rette contenenti P ed un punto di J :

$$C_P(J) = \cup_{Q \in J} L(P, Q) \quad (1.8)$$

Definizione 1.2.4.

Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano e sia $P \in \mathbb{P}^n \setminus H$. La proiezione di \mathbb{P} di centro P su H è l'applicazione:

$$\begin{aligned} \pi_{P,H} : \mathbb{P} \setminus \{P\} &\mapsto H \\ Q &\mapsto L(P, Q) \cap H \end{aligned} \quad (1.9)$$

Osservazione 1.2.3.

Si osservi innanzitutto che il cono proiettante è definito su un qualunque sottoinsieme e non necessariamente su un sottospazio proiettivo. Se però J è un sottospazio è possibile mostrare che $C_P(J) = L(J, P)$. Inoltre se $J = \mathbb{P}^n$, il cono proiettante coincide con l'insieme di tutte le rette passanti per P . Si noti che, se J è un sottoinsieme di \mathbb{P}^n , si ha $\pi_{P,H}(J) = H \cap C_P(J)$.

Forniamo infine la definizione di proiezione di centro un sottospazio.

Definizione 1.2.5.

Siano H e F sottospazi proiettivi sghembi di \mathbb{P}^n di dimensione rispettivamente h e $f = n - h - 1$. Si chiama proiezione di centro F su H l'applicazione:

$$\begin{aligned} \pi_{F,H} : \mathbb{P}^n \setminus F &\mapsto H \\ P &\mapsto L(F, P) \cap H \end{aligned} \quad (1.10)$$

Si osservi che l'applicazione è ben definita grazie alla formula di Grassman.

1.2.1 Carte affini

Consideriamo lo spazio \mathbb{P}^n ed un suo punto $P = [x_0, \dots, x_n]$. A P è associata la retta vettoriale di $\mathbb{C}^{n+1} \langle (x_0, \dots, x_n) \rangle$, che può anche essere vista come la retta affine, indicata con r , di \mathbb{A}^{n+1} passante per l'origine e per il punto (x_0, \dots, x_n) ; si ha dunque una corrispondenza biunivoca tra i punti di \mathbb{P}^n e le rette di \mathbb{A}^{n+1} passanti per l'origine. Siano ora H e \tilde{H}_0 gli iperpiani di \mathbb{A}^{n+1} di equazioni $H : x_0 = 1$ e $\tilde{H}_0 : x_0 = 0$. Se $(x_0, \dots, x_n) \notin \tilde{H}_0$, cioè se $x_0 \neq 0$, la retta r interseca H in un unico punto $(1, x_1, \dots, x_n)$. Ciò significa che esiste una corrispondenza biunivoca tra H e le rette per l'origine che non giacciono su \tilde{H}_0 . Denotando H_0 con l'iperpiano di \mathbb{P}^n di equazione $x_0 = 0$, cioè $H_0 = \mathbb{P}(\tilde{H}_0)$, si ha che una corrispondenza biunivoca sussiste anche tra

$\mathbb{P}^n \setminus H_0$ e H . Più precisamente si ha:

$$\begin{aligned} j : \quad H &\mapsto \mathbb{P}^n \setminus H_0 & j^{-1} : \quad \mathbb{P}^n \setminus H_0 &\mapsto H \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \\ (1, x_1, \dots, x_n) &\mapsto [1, x_1, \dots, x_n] & [x_0, \dots, x_n] &\mapsto \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{aligned}$$

Identificando H con \mathbb{A}^n si ottiene:

$$\begin{aligned} j_0 : \quad \mathbb{A}^n &\mapsto \mathbb{P}^n \setminus H_0 & j_0^{-1} : \quad \mathbb{P}^n \setminus H_0 &\mapsto \mathbb{A}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto [1, x_1, \dots, x_n] & [x_0, \dots, x_n] &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{aligned}$$

Definizione 1.2.6.

L'applicazione j_0 è detta *applicazione di passaggio a coordinate omogenee rispetto a x_0* , j_0^{-1} è detta *applicazione di passaggio a coordinate non omogenee rispetto a x_0* ; H_0 è detto *iperpiano improprio di $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus H_0$ rispetto a x_0* ed i suoi punti sono detti *punti impropri rispetto a x_0* . I punti di $\mathbb{P}^n \setminus H_0$ sono detti *punti propri rispetto a x_0* .

Osservazione 1.2.4.

Tale costruzione permette di passare, con le dovute accortezze, dal proiettivo all'affine agevolando dunque lo studio delle curve algebriche, che verranno introdotte nella sezione successiva. Essa consente inoltre di visualizzare, ad esempio, il piano proiettivo come un piano affine a cui abbiamo aggiunto una retta all'infinito e lo spazio proiettivo tridimensionale come uno spazio affine tridimensionale a cui abbiamo aggiunto un piano all'infinito (si noti che spesso si utilizzeranno i termini *retta all'infinito* e *piano all'infinito* rispettivamente al posto di *retta impropria* e *piano improprio*). Si osservi infine che quanto fatto rispetto alla coordinata x_0 può essere generalizzato ad una qualsiasi coordinata $x_i, i = 0, \dots, n$ tramite le applicazioni:

$$\begin{aligned} j_i : \quad \mathbb{A}^n &\mapsto \mathbb{P}^n \setminus H_i \\ (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) &\mapsto [x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_i^{-1} : \quad \mathbb{P}^n \setminus H_i &\mapsto \mathbb{A}^n \\ [x_0, \dots, x_n] &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{aligned}$$

1.3 Curve algebriche piane

Si introdurranno ora le curve algebriche piane ed alcune loro proprietà che verranno approfondite nel seguito.

Definizione 1.3.1.

Due polinomi $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ si dicono *proporzionali* se esiste $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tale che $g = \alpha f$.

Osservazione 1.3.1.

Indicata con \sim la relazione di proporzionalità tra polinomi della precedente definizione, si ha che \sim è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.3.2.

Si dice *curva di algebraica* \mathbb{A}^2 una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $\mathbb{C}[x, y]$. Se $f(x, y)$ è un rappresentante della curva, si dice che l'equazione:

$$f(x, y) = 0 \tag{1.11}$$

è un'equazione della curva. Si chiama inoltre *supporto della curva* l'insieme $C \subset \mathbb{A}^2$ formato da tutti e soli i punti di \mathbb{A}^2 che soddisfano l'equazione (1.11). Il grado di $f(x, y)$ si dice *grado della curva*.

Osservazione 1.3.2.

A priori la definizione di supporto dipende dal rappresentante della curva scelto. Tuttavia se al posto di f si sceglie come rappresentante g , per definizione esiste $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tale che $g = \alpha f$ e di conseguenza si ha $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 0$; questo mostra che la definizione è ben posta. Lo stesso ragionamento si applica alla definizione di grado di una curva.

Notazione 1.3.1.

Nel seguito a volte si indicheranno con lo stesso simbolo, con abuso di notazione, una curva ed il suo supporto.

Osservazione 1.3.3.

È possibile fornire una definizione di curve algebriche anche nel piano proiettivo ma è necessario compiere un'osservazione preliminare. Consideriamo un polinomio $f(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ non costante ed un punto

$P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$, tale che $f(p_0, p_1, p_2) = 0$. Dato un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{C}^*$ non è detto che $f(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha p_3) = 0$ dunque, poichè $[p_1, p_2, p_3] = [\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha p_3]$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*$, non ha senso dire se le coordinate di P soddisfano o meno l'equazione $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ poichè tale proprietà dipende dalla scelta del rappresentante di P . Questo non accade se al posto di f si considera $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo non costante. Detto infatti d il grado di F , per la (1.1) si ha $F(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha p_3) = \alpha^d F(p_0, p_1, p_2)$ e dunque:

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^* \quad F(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha p_3) = 0 \Leftrightarrow F(p_0, p_1, p_2) = 0$$

Da ciò segue che considerando polinomi omogenei anzichè polinomi qualsiasi ha senso dire se le coordinate di P soddisfano o meno l'equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ poichè tale proprietà non dipende dalla scelta del rappresentante di P .

Quanto osservato precedentemente garantisce che la seguente definizione sia ben posta.

Definizione 1.3.3.

Si dice curva algebrica di \mathbb{P}^2 una classe di proporzionalità di polinomi omogenei non costanti di $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Se $F(x_0, x_1, x_2)$ è un rappresentante della curva, si dice che l'equazione:

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{1.12}$$

è un'equazione della curva. Si chiama inoltre supporto della curva l'insieme $C \subset \mathbb{P}^2$ formato da tutti e soli i punti di \mathbb{P}^2 che soddisfano l'equazione (1.12). Il grado di $F(x_0, x_1, x_2)$ si dice grado della curva.

Osservazione 1.3.4.

Analogamente al caso affine le definizioni di supporto e grado della curva sono ben definite.

Definizione 1.3.4.

Una curva algebrica di \mathbb{A}^2 (risp. \mathbb{P}^2) si dice curva affine (risp. proiettiva). Detto n il grado della curva essa si dice

Retta, se $n = 1$

Conica, se $n = 2$

Cubica, se $n = 3$

Quartica, quintica ecc... se $n = 4, 5, \dots$

Definizione 1.3.5.

Sia $C : F[x_0, x_1, x_2] = 0$ e sia $F = F_1^{\mu_1} F_2^{\mu_2} \dots F_t^{\mu_t}$ la scomposizione di F in fattori irriducibili. Indicate con $C_i : F_i(x_0, x_1, x_2) = 0$ le curve descritte dai polinomi F_i , diremo che C_1, \dots, C_t sono le componenti irriducibili di C e che μ_i è la molteplicità della componente irriducibile C_i . Scriveremo inoltre $C = \mu_1 C_1 \cup \dots \cup \mu_t C_t$. Si osservi che in queste ipotesi il supporto di C è l'unione dei supporti delle C_i .

Definizione 1.3.6.

Nelle notazioni della definizione precedente se $t = 1$ C si dice irriducibile, mentre se $\mu_1 = \dots = \mu_t = 1$ C si dice ridotta.

Osservazione 1.3.5.

Si osservi che se una curva è irriducibile non è detto che il polinomio che la descrive sia irriducibile poichè può essere $C : F_1^k = 0$, $k > 1$. Inoltre per studiare una curva può essere comodo considerarne la ridotta (cioè una curva con le stesse componenti irriducibili ma tutte di molteplicità uno) e tenere alla fine conto del fatto che ciascuna componente C_i è contata μ_i volte. Con modifiche molto semplici è possibile inoltre dare le due definizioni precedenti anche nel caso affine. Si osservi infine che la fattorizzazione in irriducibili di un polinomio è unica a meno di fattori moltiplicativi, che non modificano comunque l'aspetto geometrico della curva.

Definizione 1.3.7.

Date una proiettività di \mathbb{P}^2 $T([x_0, x_1, x_2]) = [a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2]$, dove $\det(a_{ij}) \neq 0$, ed una curva $C : F(x_0, x_1, x_2) = 0$, posto $G = F(a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$ e detta \mathcal{D} la curva descritta da G si dice che \mathcal{D} è la trasformata di C tramite T^{-1} e si scrive $\mathcal{D} = T^{-1}(C)$.

Una definizione analoga si può dare per le affinità e le curve affini di \mathbb{A}^2 .

Osservazione 1.3.6.

Preso ora:

$$T^{-1}([x_0, x_1, x_2]) = [b_{00}x_0 + b_{01}x_1 + b_{02}x_2, b_{10}x_0 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2, b_{20}x_0 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2]$$

si ha:

$$G(b_{00}x_0 + b_{01}x_1 + b_{02}x_2, b_{10}x_0 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2, b_{20}x_0 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2) = F(x_0, x_1, x_2)$$

quindi \mathcal{C} è la trasformata di \mathcal{D} tramite $(T^{-1})^{-1} = T$. Si osserva inoltre che se $P \in \mathcal{D}$ allora $T(P) \in \mathcal{C}$ e viceversa se $Q \in \mathcal{C}$ allora $T^{-1}(Q) \in \mathcal{D}$ (questo giustifica il nome dato a \mathcal{D}). Analogamente accade nel caso affine. Quanto visto legittima la seguente definizione.

Definizione 1.3.8.

Due curve proiettive (risp. affini) \mathcal{C} e \mathcal{D} si dicono proiettivamente (risp. affinemente) equivalenti se esiste una proiettività (risp. affinità) T di \mathbb{P}^2 (risp. \mathbb{A}^2) tale che $\mathcal{C} = T(\mathcal{D})$.

Osservazione 1.3.7.

E' importante notare che il grado di una curva, la sua riducibilità o irriducibilità, il numero, il grado e le molteplicità delle sue componenti irriducibili sono invarianti per affinità e per proiettività (si veda per es. [1]). Ciò consentirà di studiare le curve mediante altre ad esse equivalenti ma più semplici a seconda delle necessità.

Per agevolare lo studio delle curve, sarà spesso comodo potersi muovere dall'affine al proiettivo e viceversa. Per fare ciò si introducono quindi due strumenti: la *chiusura proiettiva* e l'*affinizzazione*.

Definizione 1.3.9.

Data una curva \mathcal{C} di \mathbb{A}^2 di equazione $f(x, y) = 0$ e detto $F(x_0, x_1, x_2)$ l'omogeneizzato di f rispetto a x_0 (in cui le variabili x, y sono state rinominate rispettivamente in x_1, x_2) si chiama *chiusura proiettiva* $\bar{\mathcal{C}}$ di \mathcal{C} la curva proiettiva $\bar{\mathcal{C}} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$. I punti di $\bar{\mathcal{C}} \cap H_0$ si dicono *punti impropri* di \mathcal{C} rispetto a x_0 .

Osservazione 1.3.8.

Per definizione si ha che, preso un qualsiasi punto $P \in \mathcal{C}$, la sua immagine tramite j_0 appartiene a $\bar{\mathcal{C}}$, cioè $j_0(P) \in \bar{\mathcal{C}}$. Viceversa, preso un qualsiasi punto $Q \in \bar{\mathcal{C}} \setminus (\bar{\mathcal{C}} \cap H_0)$, si ha che $j_0^{-1}(Q) \in \mathcal{C}$. Applicare la chiusura proiettiva ad una curva affine significa quindi immergere il piano affine in quello

proiettivo ed aggiungere alla curva i suoi punti impropri (che chiameremo anche *punti all'infinito*); per calcolare questi ultimi è sufficiente risolvere l'equazione $F(0, x_1, x_2) = 0$.

Definizione 1.3.10.

Data una curva proiettiva $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$, si dice affinnizzata di \mathcal{C} rispetto a x_0 , e si indica con \mathcal{C}^ , la curva affine $\mathcal{C}^* : f(x, y) = 0$, dove $f(x, y)$ è il deomogeneizzato di $F(x_0, x_1, x_2)$ rispetto alla variabile x_0 (in cui le variabili x_1, x_2 sono state rinominate rispettivamente x, y).*

Osservazione 1.3.9.

Da quanto visto sulle operazioni di omogeneizzazione e deomogeneizzazione, segue immediatamente che l'affinnizzata di una chiusura proiettiva coincide sempre con la curva di partenza, mentre la chiusura proiettiva di un'affinnizzata coincide con la curva di partenza se e solo se $x_0 \nmid F(x_0, x_1, x_2)$.

Osservazione 1.3.10.

Si osservi che quanto fatto rispetto alla variabile x_0 può essere fatto analogamente con le variabili x_1 e x_2 .

1.3.1 Intersezioni di curve

Si analizzeranno ora le proprietà delle curve proiettive legate alle loro intersezioni. Nel caso affine valgono, con le dovute accortezze, considerazioni analoghe; in particolare si danno definizioni analoghe alla 1.3.11 e 1.3.12, mentre il corrispettivo del teorema 1.3.1 è più debole.

Definizione 1.3.11.

Siano $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva proiettiva, r una retta di \mathbb{P}^2 di equazioni (1.5) e $P = [a_0s_0 + b_0t_0, a_1s_0 + b_1s_0, a_2s_0 + b_2s_0] \in r$. Posto $F|_r(s, t) := F(sa_0 + tb_0, sa_1 + tb_1, sa_2 + tb_2)$ si definisce $I(\mathcal{C}, r, P)$ la molteplicità di intersezione tra r e \mathcal{C} in P nel seguente modo:

$$I(\mathcal{C}, r, P) = \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathcal{C} \\ m & \text{se } [s_0, t_0] \text{ è una radice di molteplicità } m \text{ di } F|_r(s, t) \\ \infty & \text{se } r \subset \mathcal{C} \end{cases} \quad (1.13)$$

Osservazione 1.3.11.

Si osservi che la definizione è ben posta in quanto i tre casi sono a due a due incompatibili e coprono tutte le possibilità; in particolare l'incompatibilità tra il secondo ed il terzo segue dal fatto che se $r \subset \mathcal{C}$ allora il polinomio $F|_r(s, t)$ è il polinomio nullo dunque non ha radici di molteplicità finita. Inoltre si può dimostrare che questa definizione non dipende dalla rappresentazione parametrica scelta per r . Se $r \not\subset \mathcal{C}$, le radici di $F|_r(s, t)$ danno le intersezioni tra \mathcal{C} ed r .

Teorema 1.3.1.

Date una curva proiettiva $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ ed una retta r di \mathbb{P}^2 tale che $r \not\subset \mathcal{C}$, vale la seguente identità:

$$\deg(F) = \sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r, P) \quad (1.14)$$

Dimostrazione.

Poichè $r \not\subset \mathcal{C}$ nessun P ha molteplicità ∞ , dunque la sommatoria è ben definita. Inoltre $I(\mathcal{C}, r, P) \neq 0$ solo nei punti d'intersezione tra la curva e la retta, dunque la sommatoria si riduce a $\sum_{P \in r \cap \mathcal{C}} I(\mathcal{C}, r, P)$. Ma questo equivale a sommare le molteplicità delle radici di $F|_r$, dunque il risultato segue dalla 1.3. \square

Definizione 1.3.12.

Siano \mathcal{C} una curva proiettiva e $P \in \mathbb{P}^2$. Si chiama molteplicità di \mathcal{C} in P , e si indica con $m_P(\mathcal{C})$, il minimo delle molteplicità d'intersezione tra r e \mathcal{C} in P al variare di r nel fascio di rette di centro P .

Osservazione 1.3.12.

Per come è definita la molteplicità di intersezione si ha che $0 \leq m_P(\mathcal{C}) \leq \deg(\mathcal{C})$. Infatti la molteplicità può essere minimo 0, nel caso in cui $P \notin \mathcal{C}$ e massimo $\deg(\mathcal{C})$ poichè $\deg(F|_r) = \deg(F)$ ed una radice di $F|_r$ può avere al più molteplicità pari a $\deg(F|_r)$.

Definizione 1.3.13.

Se $m_P(\mathcal{C}) = 1$ si dice che P è un punto semplice di \mathcal{C} . Se $m_P(\mathcal{C}) = m > 1$ si dice che P è un punto m -plo di \mathcal{C} . La curva \mathcal{C} si dice non singolare se tutti i suoi punti sono semplici, singolare altrimenti.

Osservazione 1.3.13.

E' possibile dimostrare che la molteplicità di un punto rispetto ad una curva è invariante per proiettività e ciò sarà molto utile nello studio dei punti multipli di una curva.

Per calcolare agevolmente la molteplicità di \mathcal{C} in un punto, si può utilizzare il seguente teorema.

Teorema 1.3.2.

Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva proiettiva e sia $P \in \mathbb{P}^2$; \mathcal{C} ha molteplicità m in P se si annullano tutte le derivate parziali di ordine $m-1$ e ne esiste almeno una di ordine m che non si annulla.

Per la dimostrazione si rimanda a [1].

Osservazione 1.3.14.

Grazie alla (1.2) l'annullarsi delle derivate ordine $m-1$ assicura l'annullarsi anche di quelle di ordine $m-2$ e così via fino ad arrivare a 0, cioè al polinomio non derivato. Questa constatazione consente di evitare di verificare che P appartenga o meno a \mathcal{C} poichè l'annullarsi di tutte le derivate di un dato ordine, come si è visto, implica automaticamente l'appartenenza di P a \mathcal{C} . Ciò non vale invece nell'affine, dove è possibile trovare un polinomio f ed un punto Q tali che Q annulli tutte le derivate di un ordine ma $f(Q) \neq 0$ (ad esempio $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ e $Q = (0, 0)$).

Definizione 1.3.14.

Siano $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva proiettiva e $P \in \mathcal{C}$. Se $m_P(\mathcal{C}) = 1$ allora esiste un'unica retta r tale che $I(\mathcal{C}, r, P) > 1$ e tale retta è detta la tangente¹ a \mathcal{C} in P .

Osservazione 1.3.15.

La definizione ha senso perchè è possibile mostrare che la tangente è effettivamente unica e che ha equazione:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P)x_2 = 0 \quad (1.15)$$

¹Dal latino tangere, ossia toccare

Definizione 1.3.15.

Siano \mathcal{C} una curva proiettiva e $P \in \mathcal{C}$ di molteplicità $m_P(\mathcal{C})$. Si chiama tangente principale a \mathcal{C} in P una retta r tale che $I(\mathcal{C}, r, P) > m_P(\mathcal{C})$.

Osservazione 1.3.16.

Si noti che se il punto è semplice le due definizioni coincidono. Inoltre è possibile mostrare che le tangenti principali sono al più quante la molteplicità del punto e che sono esattamente quante la molteplicità del punto se contate con molteplicità. Si rimanda a [1] per maggiori dettagli a riguardo.

Definizione 1.3.16.

Siano \mathcal{C} una curva proiettiva e $P \in \mathcal{C}$ di molteplicità $m_P(\mathcal{C})$. Sia inoltre ζ il numero di tangenti principali distinte a \mathcal{C} in P . Se $m_P(\mathcal{C}) \geq 2$ e $\zeta = m_P(\mathcal{C})$ si dice che P è un punto multiplo ordinario mentre se $\zeta < m_P(\mathcal{C})$ si dice che P è un punto multiplo non ordinario.

Osservazione 1.3.17.

Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva affine, e sia $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ la decomposizione in componenti omogenee di f ; si mostra che $O = (0, 0)$ è un punto di molteplicità m per f se e solo $f_0 = \dots = f_{m-1} = 0$ e $f_m \neq 0$; inoltre in questa ipotesi, si vede che le tangenti principali si ottengono dalla decomposizione di $f_m(x, y) = 0$; la curva $f_m(x, y) = 0$ viene detta il cono tangente a \mathcal{C} in P . Chiaramente se $m = 1$ è possibile vedere immediatamente l'equazione dell'unica tangente a \mathcal{C} in $(0, 0)$ poichè essa è $f_1 = 0$. La curva $\bar{\mathcal{C}}$ chiusura proiettiva di \mathcal{C} rispetto a x_0 può essere studiata nel punto $[1, 0, 0]$ deomogeneizzando rispetto a x_0 e lavorando in \mathbb{A}^2 come si è detto. Se invece vogliamo studiare $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$ in un punto $P = (a, b)$, possiamo utilizzare lo sviluppo di f intorno a P dato dal teorema 1.1.3, oppure, con una affinità T , portare P in O e studiare la curva $T(\mathcal{C})$ nell'origine.

Diamo infine la definizione di flesso.

Definizione 1.3.17.

Un punto semplice P di una curva proiettiva \mathcal{C} è un flesso se, detta r la tangente a \mathcal{C} in P si ha $I(\mathcal{C}, r, P) \geq 3$. Inoltre un flesso si dice di specie k se $I(\mathcal{C}, r, P) = 2 + k$. Se $k = 1$ il flesso si dice ordinario, non ordinario altrimenti.

Osservazione 1.3.18.

Tutte le nozioni viste fin'ora, quali ad esempio, come si è già osservato, la molteplicità d'intersezione tra una retta ed una curva e la molteplicità di un punto per una curva, sono invarianti per proiettività ed affinità (si veda ad esempio [1]).

Capitolo 2

Punti semplici e punti singolari

In questo capitolo studieremo una curva algebrica piana mediante l'analisi dei suoi punti semplici e dei suoi punti multipli (soprattutto doppi). Ci si concentrerà in particolare sul comportamento di una curva in un punto doppio rispetto alle sue tangenti principali.

Notazione 2.0.1.

D'ora innanzi con 'curva' intenderemo sempre una curva algebrica piana, affine o proiettiva.

Osservazione 2.0.1.

Sebbene il nostro interesse sia rivolto alle curve proiettive, l'ambiente principalmente utilizzato sarà quello affine, poichè meglio si presta allo scopo; infatti quello che proponiamo di fare è studiare una curva localmente attorno ad un suo punto. Per passare dal proiettivo all'affine si utilizzerà l'affinizzata di una curva, mettendosi in una carta affine opportuna, per poi tornare nel proiettivo mediante la chiusura proiettiva. Come si è visto nello scorso capitolo, data una curva proiettiva, la chiusura proiettiva della sua affinizzata rispetto a x_2 non coincide con la curva originaria se e solo se x_2 divide il polinomio che la descrive, cioè se la retta $x_2 = 0$ è una sua componente, eventualmente multipla di molteplicità i se x_2^i divide il polinomio. In tal caso basterà semplicemente studiare la curva privata di tale retta e tenere conto di quest'ultima alla fine della discussione.

2.1 Come usare le proiettività per semplificare i calcoli

In questa sezione si mostrerà come trasformare una curva proiettiva in una ad essa equivalente, in modo che un suo punto ed una sua tangente principale vengano a coincidere rispettivamente con il punto $[0, 0, 1]$ e con la retta $x_0 = 0$. Questo viene fatto tramite una proiettività, mantenendo quindi la molteplicità d'intersezione e tutte le altre proprietà invarianti per proiettività. Se partiamo da una curva affine \mathcal{C} questo significa che possiamo fare in modo che un punto semplice Q di \mathcal{C} , proprio o improprio, e la tangente a \mathcal{C} in Q , che sia una retta propria o la retta impropria, siano portati rispettivamente in $O = (0, 0)$ e in $y = 0$.

Osservazione 2.1.1.

Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva proiettiva e sia $Q = [\alpha_0, \alpha, \alpha_2]$ un suo punto. Siano poi $r : a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = 0$ la tangente a \mathcal{C} in Q e $s : a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$ una retta passante per Q tale che $s \neq r$. Sotto queste ipotesi si ha:

$$rk \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = 2$$

Possiamo dunque scegliere $a_{20}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}$ tali che:

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \neq 0$$

Con queste scelte si ha che ad A è associata una ben definita proiettività:

$$T : \begin{cases} y_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

tale che $T(Q) = [0, 0, 1]$. Inoltre indicata con:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

l'inversa di A , si ha che la tangente r viene mandata da T in $a_{00}(b_{00}y_0 + b_{01}y_1 + b_{02}y_2) + \dots$ che è $y_0 = 0$, mentre \mathcal{C} va in $T(\mathcal{C}) : F(b_{00}y_0 + b_{01}y_1 + b_{02}y_2, \dots) = 0$. Abbiamo dunque ottenuto una curva proiettivamente equivalente a quella data ed abbiamo portato Q ed r in ciò che volevamo. È interessante notare che la scelta di a_{20}, a_{21}, a_{22} non è univoca e ciò comporta la possibilità di portare anche un altro punto della curva in un punto dato.

Esempio 2.1.1.

Nelle notazioni dell'osservazione precedente, prendiamo ad esempio $r : 2x_0 + x_1 - x_2 = 0$ e $Q = [1, 1, 3]$. Una possibile scelta di T è:

$$T : \begin{cases} y_0 = 2x_0 + x_1 - x_2 \\ y_1 = x_0 - x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

Infatti si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

2.2 Comportamento di una curva algebrica in un punto semplice

Si analizzerà adesso il comportamento di una curva affine in un suo punto semplice e ciò che vedremo si potrà utilizzare anche per studiare le curve proiettive mediante quanto detto nell'osservazione 2.0.1. L'idea generale consiste nell'utilizzare curve ausiliarie abbastanza semplici per approssimare il comportamento della funzione vicino al punto; più precisamente se si vuole studiare il punto $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{C}$ si utilizzeranno funzioni del tipo:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots \\ y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

La scelta della curva ausiliaria varia da caso a caso ma comunque deve essere tale da fornire una buona approssimazione della curva originaria nel punto che si sta studiando, cioè per t vicino a 0. Posto:

$$f(x(t), y(t)) = h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{h''(0)}{2}t^2 + \dots$$

si ha che più è alta la molteplicità di $t = 0$ come radice di $h(t)$ più l'approssimazione è buona, cioè la sua bontà aumenta all'aumentare del numero di derivate che si annullano per $t = 0$.

Osservazione 2.2.1.

Consideriamo una curva affine $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ ed un suo punto semplice che, per quanto visto nella sezione precedente, possiamo sempre supporre essere $O = (0, 0)$. Poichè $O \in \mathcal{C}$, si ha $f(0, 0) = 0$ e dunque lo sviluppo di Taylor di f centrato in $(0, 0)$ è:

$$f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} y \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} y^2 \right) + \dots$$

Inoltre, sempre per quanto visto nella sezione precedente, possiamo supporre che f sia della forma:

$$f(x, y) = y + ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 \dots$$

in modo cioè che la tangente in O sia l'asse $x : y = 0$. Grazie a questi accorgimenti si ha che la molteplicità d'intersezione tra la tangente e la curva è data dalla molteplicità di 0 come radice del polinomio:

$$f(x, 0) = ax^2 + dx^3 + \dots$$

In pratica, indicata con k la potenza più piccola con cui compare x in $f(x, 0)$, si ha che la molteplicità cercata è proprio k . Esaminiamo alcuni casi:

1. $k = 2$, cioè $a \neq 0$: in tal caso scegliamo come famiglia di curve ausiliarie la seguente:

$$\Gamma_\lambda : \begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

che al variare di t descrivono le parabole di equazione $y = \lambda x^2$. Per calcolare la molteplicità di intersezione tra \mathcal{C} e Γ_λ scriviamo innanzitutto la risolvente:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda t^2 + at^2 + b\lambda t^3 + dt^3 + \dots = (\lambda + a)t^2 + (\dots)t^3 + \dots$$

Da ciò si evince che tutte le parabole della famiglia intersecano la curva con molteplicità 2, ad eccezione di $\Gamma_{-a} : y = -ax^2$, che la interseca

invece con molteplicità almeno 3 ed è detta *parabola osculatrice*¹ a \mathcal{C} in O .

2. $k = 3$, cioè $a = 0$ e $d \neq 0$: vediamo cosa succede se consideriamo come famiglia di curve ausiliarie di nuovo Γ_λ . Si ha:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda t^2 + (\dots)t^3 + \dots$$

e quindi la molteplicità di intersezione tra una parabola della famiglia e la curva è sempre due, tranne nel caso $\lambda = 0$. Tuttavia prendendo $\lambda = 0$ si otterrebbe la parabola degenera $y = 0$, che è proprio la retta tangente alla curva nell'origine. Si ha dunque che questo tipo di approssimazione non fornisce alcuna informazione aggiuntiva ed è quindi conveniente prendere una nuova famiglia di curve ausiliarie. La scelta più comoda consiste nel considerare le curve della seguente famiglia:

$$\Delta_\lambda : \begin{cases} x = t \\ y = \lambda t^3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

che al variare di t descrivono le cubiche di equazione $y = \lambda x^3$. Con calcoli analoghi al caso precedente si ha:

$$f(t, \lambda t^3) = (\lambda + d)t^3 + (\dots)t^4 + \dots$$

da cui segue che tutte le Δ_λ intersecano la curva con molteplicità 3, ad eccezione di Δ_{-d} , che la interseca invece con molteplicità pari almeno a 4 ed è detta *cubica osculatrice* a \mathcal{C} in O ;

3. $k > 3$, cioè $a = d = 0$: lo stesso ragionamento si può sempre applicare utilizzando curve del tipo:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \lambda t^{2k} \end{cases}$$

se la molteplicità d'intersezione tra la tangente $y = 0$ e \mathcal{C} in O è $2k$, e curve del tipo:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \lambda t^{2k+1} \end{cases}$$

¹Dal latino osculari, ossia baciare

se la molteplicità d'intersezione tra $y = 0$ e \mathcal{C} in O è $2k + 1$. È possibile inoltre mostrare che $y = 0$ è anche la tangente in O alla curva osculatrice, per la quale O è un punto di flesso. Si osservi che, per quanto detto, in un punto semplice esiste sempre, a seconda della molteplicità d'intersezione tra la tangente nel punto alla curva e la curva stessa, una ed una sola curva osculatrice tra quelle del tipo:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \lambda t^n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

2.3 Comportamento di una curva algebrica in un punto doppio

Osservazione 2.3.1.

Consideriamo una curva affine $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ ed un suo punto doppio che possiamo supporre essere $O = (0, 0)$. Con questa supposizione si ha che f non può avere termini di grado 0 e di grado 1 rispettivamente poichè non passerebbe per O ed avrebbe un'unica tangente, dunque f è della forma:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + \dots$$

Le due tangenti principali a \mathcal{C} in O sono della forma:

$$r_{\alpha, \beta} : \begin{cases} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \beta t \end{cases}$$

e sono le uniche due la cui molteplicità di intersezione con \mathcal{C} è superiore a 2. Poichè:

$$f(\alpha t, \beta t) = a\alpha^2 t^2 + b\alpha\beta t^2 + c\beta^2 t^2 + \dots = (a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2)t^2 + (\dots)t^3 + \dots$$

si ha che le uniche due rette la cui molteplicità d'intersezione con \mathcal{C} è almeno 3, cioè le due tangenti principali, sono quelle tali che $a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 = 0$. Infatti, come già detto in 1.3.17, l'equazione del cono tangente a \mathcal{C} in O è $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$. Si osservi che, se contate con molteplicità, le tangenti principali sono in ogni caso due poichè si sta lavorando in \mathbb{C} e quindi un'equazione di secondo grado ha sempre due soluzioni contate con molteplicità, che possono eventualmente coincidere.

Definizione 2.3.1.

Un punto doppio si dice nodo se è ordinario, cioè se ha due tangenti principali distinte, e punto non ordinario se non lo è, cioè se ha un'unica tangente principale doppia.

Nodi 2.3.2.

Vogliamo adesso analizzare le diverse tipologie di nodi a seconda della configurazione delle due tangenti principali ed attraverso curve ausiliarie, in modo analogo a quanto fatto per punti semplici. Consideriamo una curva \mathcal{C} con un nodo: non è restrittivo supporre che esso sia nell'origine O e che le tangenti principali siano i due assi $r : x = 0$ e $s : y = 0$. Con queste ipotesi la curva è $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ con f della forma:

$$f(x, y) = xy + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + \dots$$

Studiamo il comportamento della curva rispetto ad una tangente per volta ed iniziamo con s . La molteplicità d'intersezione tra questa tangente e \mathcal{C} può essere calcolata osservando che è uguale alla molteplicità di 0 come radice del polinomio $f(x, 0) = ax^3 + ex^4 + \dots$, inoltre basterà limitarci ai seguenti due casi poichè la molteplicità è almeno 3 ed è possibile mostrare che il comportamento dipende solo dalla molteplicità d'intersezione tra la tangente s e la curva \mathcal{C} :

1. $I(\mathcal{C}, s, O) = 3$: ciò si verifica se e solo se $a \neq 0$. In tal caso è comodo considerare come famiglia di curve ausiliarie le Γ_λ . Calcolando l'intersezione tra \mathcal{C} ed una generica Γ_λ si trova:

$$f(t, \lambda t^2) = (\lambda + a)t^3 + (\dots)t^4 + \dots$$

e dunque si vede subito che tutte le parabole intersecano \mathcal{C} in O con molteplicità 3, ad eccezione di Γ_{-a} che invece la interseca almeno con molteplicità 4, dunque sarà proprio questa a fornire informazioni aggiuntive sul comportamento della curva nel nodo.

2. $I(\mathcal{C}, s, O) = 4$: ciò si verifica se e solo se $a = 0$ ed $e \neq 0$. In tal caso conviene considerare come famiglia di curve ausiliarie le Δ_λ poichè, analogamente a quanto accadeva nel caso del punto semplice, le Γ_λ non

sarebbero d'alcun aiuto. Calcolando l'intersezione tra \mathcal{C} e la generica Δ_λ si trova:

$$f(t, \lambda t^3) = (\lambda + e)t^4 + (\dots)t^5 + \dots$$

e dunque si osserva che tutte le cubiche intersecano \mathcal{C} in O con molteplicità 4, ad eccezione di Δ_{-e} che invece la interseca almeno con molteplicità 5, dunque sarà questa la cubica che descriverà meglio il comportamento di un ramo della curva nel nodo.

Procedendo per induzione si osserva che il comportamento del nodo dipende solo dalla molteplicità. È inoltre possibile condurre un'analisi analoga anche rispetto alla tangente r .

Alla luce dell'osservazione precedente si ha che la seguente definizione è ben posta.

Definizione 2.3.2.

Siano \mathcal{C} una curva affine, $P \in \mathcal{C}$ un suo nodo ed r, s le due tangenti principali a \mathcal{C} in P . Si dice che P è un flecnodo se $I(\mathcal{C}, r, P) = 3$ e $I(\mathcal{C}, s, P) > 3$, o viceversa. Si dice che P è un biflecnodo se $I(\mathcal{C}, r, P) > 3$ e $I(\mathcal{C}, s, P) > 3$

Punti doppi non ordinari 2.3.3.

Vogliamo ora analizzare le diverse tipologie di punti doppi non ordinari, basandoci, come nel caso precedente, sul comportamento della curva rispetto alle due tangenti principali, in questo caso coincidenti. Come di consueto, possiamo supporre che il punto non ordinario sia in O e la tangente principale sia l'asse x (contato due volte), $r : y^2 = 0$. Con queste ipotesi si ha che la curva è $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ con:

$$f(x, y) = y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^4 + \dots$$

Analogamente a quanto visto per i nodi, anche in questo caso la molteplicità d'intersezione tra r e \mathcal{C} in O è almeno 3. Consideriamo alcuni casi:

1. $I(\mathcal{C}, r, O) = 3$: ciò si verifica se e solo se $a \neq 0$. Se decidessimo di utilizzare come famiglia di funzioni ausiliarie le Γ_λ otterremo:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda^2 t^4 + at^3 + bt^2 \lambda t^2 + \dots = at^3 + (\dots)t^4 + \dots$$

e dunque tutte le parabole intersecherebbero \mathcal{C} con molteplicità 3 e non otterremmo alcun'informazione aggiuntiva; se invece decidessimo di usare le funzioni Δ_λ otterremmo:

$$f(t, \lambda t^3) = \lambda^2 t^6 + at^3 + \dots = at^3 + (\dots)t^4 + \dots$$

e quindi, anche in questo caso, tutte le cubiche intersecherebbero \mathcal{C} con molteplicità 3. Conviene allora scegliere come famiglia di curve ausiliarie la seguente:

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} x(t) = \lambda t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

che al variare di t descrivono le curve di equazione $x^3 = \lambda^3 y^6$. Se infatti intersechiamo \mathcal{C} con una generica Σ_λ otteniamo:

$$f(\lambda t^2, t^3) = t^6 + a(\lambda t^2)^3 + b(\lambda t^2)^2 t^3 + \dots = (1 + a\lambda^3)t^6 + (\dots)t^7 + \dots$$

da cui si evince che tutte le Σ_λ intersecano \mathcal{C} con molteplicità 6, tranne $\Sigma_{\bar{\lambda}}$, dove $\bar{\lambda}^3 = -\frac{1}{a}$, che la interseca invece con molteplicità pari almeno a 7. Si osservi che, poichè il campo su cui lavoriamo è \mathbb{C} , esistono tre radici cubiche di $-\frac{1}{a}$ ma, poichè nell'equazione $x^3 = \lambda^3 y^6$ compare solo λ^3 , esse descrivono la stessa curva. In questo caso O si chiama *cuspid* di 1° specie.

2. $I(\mathcal{C}, r, O) = 4$: ciò si verifica se e solo se $a = 0$ e $e \neq 0$. In tal caso conviene utilizzare come famiglia di funzioni ausiliarie le Γ_λ . Si ha infatti:

$$f(t, \lambda t^2) = \lambda^2 t^4 + bt^2 \lambda t^2 + ct(\lambda t^2)^2 + \dots = (\lambda^2 + b\lambda + e)t^4 + (\dots)t^5 + \dots$$

da cui si deduce che tutte le Γ_λ intersecano \mathcal{C} con molteplicità 4 ad eccezione di Γ_{λ_1} e Γ_{λ_2} , che invece intersecano la curva con molteplicità almeno 5, dove λ_1 e λ_2 sono le radici, eventualmente coincidenti, dell'equazione $\lambda^2 + b\lambda + e = 0$. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, l'analisi termina, ed il punto O è detto *tacnodo*, se invece si ha un'unica parabola osculatrice (doppia) $\Gamma_{\bar{\lambda}}$, dove $\bar{\lambda}$ è l'unica soluzione di $\lambda^2 + b\lambda + e = 0$, bisogna distinguere i seguenti due sottocasi.

- (a) $I(\Gamma_{\bar{\lambda}}, \mathcal{C}, O) = 5$: in questo caso non si riuscirà ad approssimare \mathcal{C} meglio di così; O si chiama *cuspidi di 2° specie*.
- (b) $I(\Gamma_{\bar{\lambda}}, \mathcal{C}, O) > 5$: in tal caso per ottenere più informazioni è comodo utilizzare la seguente famiglia di curve ausiliarie:

$$\Phi_{\mu} : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \bar{\lambda}t^2 + \mu t^3 \end{cases}$$

Intersecando una generica Φ_{μ} con \mathcal{C} si osserva che tutte le cubiche Φ_{μ} intersecano \mathcal{C} con molteplicità ≥ 6 ad eccezione di due, eventualmente coincidenti, che si trovano risolvendo l'equazione di secondo grado in μ ottenuta ponendo uguale a 0 il coefficiente del termine di sesto grado di $f(t, \bar{\lambda}t^2 + \mu t^3)$. Se le radici sono μ_1, μ_2 , con $\mu_1 \neq \mu_2$, allora ci sono due cubiche, Φ_{μ_1} e Φ_{μ_2} , che hanno molteplicità d'intersezione con \mathcal{C} in $O \geq 7$; abbiamo separato i rami della curva al 2° ordine ed il punto O è un *oscnodo*. Se le due cubiche osculatrici sono coincidenti, cioè se $\mu_1 = \mu_2 = \bar{\mu}$, bisognerà ragionare come nel caso in cui le due parabole osculatrici erano coincidenti. Precisamente se $I(\Phi_{\bar{\mu}}, \mathcal{C}, O) = 7$ non si riuscirà ad approssimare \mathcal{C} meglio di così, e il punto O è una *cuspidi di 3° specie*. Se invece $I(\Phi_{\bar{\mu}}, \mathcal{C}, O) > 7$, si considera una famiglia di quartiche:

$$\Psi_{\gamma} : \begin{cases} x = t \\ y = \bar{\lambda}t^2 + \bar{\mu}t^3 + \gamma t^4 \end{cases}$$

e si procede analogamente.

Riassumendo, dati \mathcal{C} una curva e $P \in \mathcal{C}$ un punto doppio per \mathcal{C} si procede così:

1. Si determinano le due tangenti principali
 - (a) Due tangenti distinte r e s : P è un nodo.
 - (b) Una tangente doppia r : punto non ordinario la cui natura va indagata utilizzando il punto 2.
2. Si studia il comportamento di r
 - (a) $I(\mathcal{C}, r, P) = 3$: P è una cuspidi di I specie e non c'è altro da dire.

- (b) $I(\mathcal{C}, r, P) = 4$: bisogna calcolare le parabole osculatrici in P :
 - i. Due parabole distinte: P è un tacnodo e non c'è altro da dire.
 - ii. Un'unica parabola osculatrice Ω : P non è un tacnodo e va studiato mediante il punto 3.
- 3. Si studia il comportamento di Ω :
 - (a) $I(\Omega, \mathcal{C}, P) = 5$: P è una cuspidi di II specie e non c'è altro da dire.
 - (b) $I(\Omega, \mathcal{C}, P) \geq 6$: bisogna calcolare le cubiche osculatrici in P :
 - i. Due cubiche osculatrici distinte: P è un oscnodo e non c'è altro da dire.
 - ii. Un'unica cubica osculatrice X : se $I(X, \mathcal{C}, P) = 7$ allora P è una cuspidi di III specie, altrimenti si prosegue lo studio in modo analogo a quello visto sin'ora. Si noti che l'analisi può essere sempre portata a termine poichè si conclude in un numero finito di passi.

2.3.1 Il grafico di una curva reale intorno ad un suo punto doppio

Rimane da analizzare l'aspetto grafico dei punti singolari descritti. Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva con $f \in \mathbb{R}[x, y]$ e sia P un suo punto doppio. Utilizziamo l'analisi fatta sopra per \mathcal{C} curva complessa. Osserviamo che i disegni riportati di seguito rappresentano solo la parte reale della curva complessa considerata.

1. Nodo ordinario: è caratterizzato dalla presenza di due tangenti principali distinte.
2. Cuspidi di prima specie: è caratterizzata dalla presenza di un'unica tangente principale, con la curva che sta localmente in entrambi i semipiani formati dalla tangente.
3. Tacnodo: è caratterizzato da due rami della curva che si toccano in esso. Le due parabole osculatrici, e quindi i due rami, stanno dalla stessa parte della tangente principale se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, mentre stanno ciascuna in una delle due parti opposte se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Chiaramente quanto appena detto riguarda solo la parte reale della curva e vale solo se λ_1 e λ_2 sono

reali. Se λ_1 e λ_2 sono complessi coniugati e non reali, allora il punto è un tacnodo isolato.

4. Cuspide di seconda specie: è caratterizzata dalla presenza di una sola parabola osculatrice e dal fatto che la curva sta localmente in uno dei due semipiani individuati dall'unica tangente principale.
5. Oscnodo: è caratterizzato dalla presenza di due cubiche osculatrici e dal fatto che la curva ha due rami che stanno localmente in uno dei due semipiani individuati dalla tangente principale.

Si riportano di seguito i disegni dei punti doppi descritti con in evidenza le relative curve osculatrici:



Figura 2.1: Esempio di nodo con le due tangenti principali in giallo

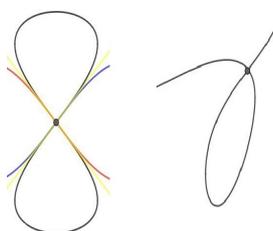


Figura 2.2: Esempio di biflecnode, a sinistra, con le due tangenti principali in giallo e le due cubiche osculatrici in rosso e blu, e di flecnodo, a destra

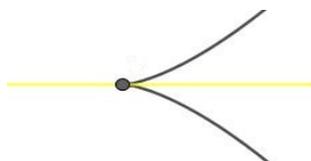


Figura 2.3: Esempio di cuspide di I specie con l'unica tangente principale in giallo

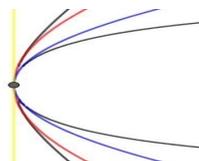


Figura 2.4: Esempio di tacnodo con $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Si evidenziano in giallo la tangente principale, in blu e rosso le parabole osculatrici

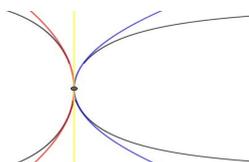


Figura 2.5: Esempio di tacnodo con $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Si evidenziano in giallo la tangente principale, in blu e rosso le parabole osculatrici



Figura 2.6: Esempio di cuspidi di II specie. Si evidenziano in giallo la tangente principale ed in rosso la parabola osculatrice

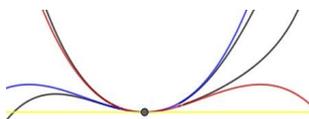


Figura 2.7: Esempio di oscnodo. Si evidenziano in giallo la tangente principale ed in blu e rosso le due cubiche osculatrici.

Capitolo 3

Costruzione tramite proiezione di curve con un punto m-plo ordinario

In questo capitolo e nei successivi si mostreranno degli esempi di curve proiettive singolari ottenute mediante la proiezione di particolari curve, dette *curve razionali normali*. In questo in particolare si farà vedere la costruzione di un punto triplo ordinario e si fornirà un metodo per costruire un punto multiplo ordinario di qualsiasi ordine.

3.1 Curve razionali normali

Definizione 3.1.1.

Si chiama *morfismo di Veronese* l'applicazione:

$$\begin{aligned} v_{n,d} : \quad \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^q \\ [x_0, \dots, x_n] &\rightarrow [x_0^d, \dots, x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \dots, x_n^d] \end{aligned} \quad (3.1)$$

con $i_0 + \dots + i_n = d$ e $q = \binom{n+d}{d} - 1$. L'immagine di $v_{n,d}$ è detta *varietà di Veronese di dimensione n in grado d* .

Definizione 3.1.2.

La varietà di Veronese di dimensione 1 e grado d è detta *curva razionale*

normale standard di grado d e si indica con \mathcal{C}_d . Si chiama curva razionale normale di grado d una qualunque curva proiettivamente equivalente a \mathcal{C}_d .

Osservazione 3.1.1.

Nel caso $n = 1$, cioè nel caso in cui la varietà di Veronese sia una curva razionale normale standard, si ha $q = \binom{1+d}{d} - 1 = d$, dunque $\mathcal{C}_d \subset \mathbb{P}^d$.

3.2 Costruzione per proiezione di una quartica con un punto triplo ordinario

Consideriamo la quartica razionale normale standard $\mathcal{C}_4 \subset \mathbb{P}^4$:

$$\mathcal{C}_4 : \begin{cases} x_0 = t^4 \\ x_1 = t^3 s \\ x_2 = t^2 s^2 \\ x_3 = t s^3 \\ x_4 = s^4 \end{cases} \quad [t, s] \in \mathbb{P}^1$$

Scegliamo su di essa tre punti distinti: $F_0 = [1, 0, 0, 0, 0]$, $F_4 = [0, 0, 0, 0, 1]$ e $U = [1, 1, 1, 1, 1]$. Il piano $\pi := L(F_0, F_4, U)$ ha equazioni:

$$\pi : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Vogliamo proiettare con centro una retta \mathcal{L} su un piano \mathcal{T} , che deve essere sghembo con \mathcal{L} (si veda 1.2.5) in modo che $\pi(F_0) = \pi(F_4) = \pi(U)$. Per la nostra proiezione dobbiamo quindi trovare una retta $\mathcal{L} \subset \pi$ che non intersechi \mathcal{C}_4 . Una possibile scelta è:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_0 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Infatti:

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{C}_4 : \begin{cases} t^3 s - t^2 s^2 = 0 \\ t^3 s - t s^3 = 0 \\ t^4 + 2s^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \vee s = 0 \vee t = s \\ t = 0 \vee s = 0 \vee t = s \vee t = -s \\ (t = 0, s = 0) \vee t = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} s \vee t = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} s \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione del sistema è $t = s = 0$, ma questi valori dei parametri sono inammissibili, quindi $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}_4 = \emptyset$. Osserviamo inoltre che $\mathcal{L} = L([2, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 0])$.

L'ultimo elemento da trovare, per poter definire la proiezione voluta, è un piano \mathcal{T} che sia sghembo con \mathcal{L} . Scegliamo quindi il piano:

$$\mathcal{T} : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Questa scelta va bene poichè:

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{L} : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_0 - 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

cioè $\mathcal{T} \cap \mathcal{L} = \emptyset$, quindi \mathcal{T} e \mathcal{L} sono sghembi.

Possiamo a questo punto considerare la proiezione:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}} : \mathbb{P}^4 \setminus \mathcal{L} &\mapsto \mathcal{T} \\ P &\mapsto L(\mathcal{L}, P) \cap \mathcal{T} \end{aligned}$$

e calcolare $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(\mathcal{C}_4)$. Poichè il punto P è un punto di \mathcal{C}_4 , esso sarà della forma $P_{[t,s]} = [t^4, t^3s, t^2s^2, ts^3, s^4]$. Per calcolare $\gamma_{[t,s]} := L(\mathcal{L}, P_{[t,s]})$ osserviamo innanzitutto che $\gamma_{[t,s]}$ ha sicuramente dimensione proiettiva uguale a 2, poichè \mathcal{L} è sghemba con \mathcal{C}_4 , dunque il suo corrispondente vettoriale sarà un sottospazio di dimensione 3. Inoltre, poichè $\mathcal{L} = L([2, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 0])$, si ha:

$$\gamma_{[t,s]} = L([2, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 0], [t^4, t^3s, t^2s^2, ts^3, s^4])$$

dobbiamo dunque imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ t^4 & t^3s & t^2s^2 & ts^3 & s^4 \end{pmatrix} = 3$$

Notando che:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ t^4 & t^2s^2 & ts^3 \end{vmatrix} = ts^2(s-t)$$

si vede che questo minore è non nullo tranne che nei casi $t = 0 \vee s = 0 \vee t = s$. Si può quindi imporre che i suoi orlati abbiano determinante nullo per trovare equazioni cartesiane di $\gamma_{[t,s]}$ per $t \neq 0, s \neq 0, t \neq s$ e trattare separatamente questi casi. Si ha:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ t^4 & t^2s^2 & ts^3 & t^3s \end{vmatrix} = (ts^3 - t^2s^2)x_1 + (t^3s - ts^3)x_2 + (t^2s^2 - ts^3)x_3$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ t^4 & t^2s^2 & ts^3 & s^4 \end{vmatrix} = (ts^3 - t^2s^2)x_0 + (t^4 - 2s^4)x_2 + (2s^4 - t^4)x_3 + (2t^2s^2 - 2ts^3)x_4$$

Dunque:

$$\gamma_{[t,s]} : \begin{cases} (ts^3 - t^2s^2)x_1 + (t^3s - ts^3)x_2 + (t^2s^2 - ts^3)x_3 = 0 \\ (ts^3 - t^2s^2)x_0 + (t^4 - 2s^4)x_2 + (2s^4 - t^4)x_3 + (2t^2s^2 - 2ts^3)x_4 = 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda invece i tre casi esclusi, si ha $\gamma_{[0,s]} = \gamma_{[t,0]} = \gamma_{[t,t]} = \pi$ poichè esiste un unico piano per una retta ed un punto esterno ad essa e, per costruzione, sappiamo già che $\mathcal{L} \subset \pi$ e $F_0, F_4, U \in \pi$. Per trovare $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(\mathcal{C}_4)$, calcoliamo infine $\gamma_{[t,s]} \cap \mathcal{T}$:

$$\gamma_{[t,s]} \cap \mathcal{T} : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ (ts^3 - t^2s^2)x_1 + (t^3s - ts^3)x_2 = 0 \\ (ts^3 - t^2s^2)x_0 + (t^4 - 2s^4)x_2 = 0 \end{cases}$$

Da cui se $s \neq 0, t \neq 0$ e $s \neq t$:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2s^4 - t^4}{ts^3 - t^2s^2} x_2 \\ x_1 = \frac{ts^3 - t^3s}{ts^3 - t^2s^2} x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Si ha dunque:

$$\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(P_{[t,s]}) = [2s^4 - t^4, ts^3 - t^3s, ts^3 - t^2s^2, 0, 0] =: Q_{[t,s]}, \quad \text{se } s \neq 0, t \neq 0, s \neq t$$

Si osservi che:

$$\gamma_{[0,s]} \cap \mathcal{T} = \gamma_{[t,0]} \cap \mathcal{T} = \gamma_{[t,t]} \cap \mathcal{T} = [1, 0, 0, 0, 0]$$

e tale punto coincide proprio con $Q_{[s,t]}$ per $t = 0 \vee s = 0 \vee s = t$, dunque $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(P_{[s,t]}) = Q_{[s,t]} \quad \forall [s,t] \in \mathbb{P}^1$: abbiamo quindi trovato equazioni parametriche per $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}$. Si noti inoltre che ci si aspetta che il punto $[1, 0, 0, 0, 0]$ sia triplo ordinario poichè esso è proiezione di tre punti distinti di \mathcal{C}_4 .

Per analizzare meglio la curva ottenuta è conveniente vedere $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(\mathcal{C}_4)$ come una curva di \mathbb{P}^2 con le coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 (ciò è lecito poichè tutti i suoi punti hanno $x_3 = x_4 = 0$) e trovarne l'equazione cartesiana. A tal fine si consideri la seguente curva proiettiva:

$$\mathcal{D} : \underbrace{x_1^4 - x_2^4 - 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^3 - 2x_0x_2^3 + 3x_0x_1x_2^2 - x_0x_1^2x_2}_{:=F(x_0, x_1, x_2)} = 0$$

Sostituendo in $F(x_0, x_1, x_2)$ le coordinate di $Q_{[s,t]}$ si ottiene 0, dunque tutti i punti di $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(\mathcal{C}_4)$ soddisfano $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, cioè $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(\mathcal{C}_4) \subseteq \mathcal{D}$. Bisogna ora mostrare l'inclusione contraria: sia $P = [x_0, x_1, x_2] \in \mathcal{D}$. Da $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ si ricava che $x_0(2x_2^3 - 3x_1x_2^2 + x_1^2x_2) = x_1^4 - x_2^4 - 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^3$. Se $2x_2^3 - 3x_1x_2^2 + x_1^2x_2 \neq 0$ ($\Leftrightarrow x_2 \neq 0, x_2 \neq x_1, x_2 \neq \frac{1}{2}x_1$) possiamo moltiplicare per questo termine le coordinate di P ed otteniamo $[x_0(2x_2^3 - 3x_1x_2^2 + x_1^2x_2), x_1(2x_2^3 - 3x_1x_2^2 + x_1^2x_2), x_2(2x_2^3 - 3x_1x_2^2 + x_1^2x_2)] = [x_1^4 - x_2^4 - 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^3, 2x_1x_2^3 - 3x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2, 2x_2^4 - 3x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2]$. Questo stesso punto è $Q_{[s,t]}$ per $t = x_1 - x_2$ e $s = x_2$. Rimangono infine da esaminare i casi $x_2 = 0 \vee x_2 = x_1 \vee x_2 = \frac{1}{2}x_1$. Sostituendo in $F(x_0, x_1, x_2) = 0$

si vede che tutti e tre corrispondono al punto $[1, 0, 0]$, che è $Q_{[1,1]}$. Questo dimostra che $\mathcal{D} \subseteq \pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(\mathcal{C}_4)$ e quindi che $\mathcal{D} = \pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(\mathcal{C}_4)$.

Adesso che abbiamo un'equazione cartesiana di \mathcal{D} possiamo studiare i punti singolari della curva. Per farlo deomogeneizziamo rispetto ad x_0 ed otteniamo la curva:

$$\mathcal{D}^* : \underbrace{x^4 - y^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 - 2y^3 + 3xy^2 - x^2y}_{:=f(x,y)} = 0$$

Grazie all'osservazione 1.3.17 si vede subito che $O = (0, 0)$ è un punto triplo ed il cono tangente a \mathcal{D}^* in O è $f_3(x, y) = 0$, cioè $2y^3 - 3xy^2 + x^2y = 0$ cioè:

$$y(2y - x)(y - x) = 0$$

Vi sono quindi tre tangenti principali distinte:

$$r_1^* : y = 0, r_2^* : 2y - x = 0, r_3^* : y - x = 0$$

e di conseguenza O è punto ordinario. Per trovare le tangenti principali a \mathcal{D} in $[1, 0, 0]$ è sufficiente applicare la chiusura proiettiva alle tre rette trovate ottenendo:

$$r_1 : x_2 = 0, \quad r_2 : 2x_2 - x_1 = 0, \quad r_3 : x_2 - x_1 = 0$$

L'ultima cosa che vogliamo mostrare è che r_1, r_2, r_3 provengono dalle tre tangenti principali a \mathcal{C}_4 nei punti F_0, F_4, U . Analizziamo quindi i tre casi singolarmente:

- $P_{[s,t]} = F_0$

Per calcolare la tangente a \mathcal{C}_4 in F_0 ci mettiamo nella carta affine

$U_0 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{P}^4; x_0 \neq 0\}$. Si ha:

$$\mathcal{C}_4 \cap U_0 : \begin{cases} y_1 = u \\ y_2 = u^2 \\ y_3 = u^3 \\ y_4 = u^4 \end{cases}$$

dove $u = \frac{s}{t}$ e $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ $i = 1, \dots, 4$. Si osservi che poichè la coordinata x_0 di $P_{[s,t]}$ è t^4 e siamo nella carta affine $x_0 \neq 0$, si ha $t \neq 0$ e quindi $u = \frac{s}{t}$

è ben definita. La tangente a $\mathcal{C}_4 \cap U_0$ nel punto $R_u := (u, u^2, u^3, u^4)$ si ottiene imponendo:

$$rk \begin{pmatrix} y_1 - u & y_2 - u^2 & y_3 - u^3 & y_4 - u^4 \\ 1 & 2u & 3u^2 & 4u^3 \end{pmatrix} = 1$$

dove la seconda riga è ottenuta derivando R_u rispetto ad u per ottenere il vettore tangente. Poichè $F_0 = R_0$ per trovare la tangente in F_0 bisogna imporre:

$$rk \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

ottenendo così $y_2 = y_3 = y_4 = 0$. La tangente a \mathcal{C}_4 si ottiene leggendo questa retta in \mathbb{P}^4 , cioè $r_0 : x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Per trovare $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(r_{F_0})$ calcoliamo prima $L(\mathcal{L}, r_{F_0})$. Si ha:

$$r_0 = L([1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0])$$

quindi:

$$L(\mathcal{L}, r_{F_0}) = L([2, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0])$$

da cui si ricava $L(\mathcal{L}, r_{F_0}) : x_3 - x_2 = 0$. Si ha quindi:

$$\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(r_{F_0}) = L(\mathcal{L}, r_{F_0}) \cap \mathcal{T} : \begin{cases} x_3 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

che letta in \mathbb{P}^2 diventa $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(r_{F_0}) : x_2 = 0$.

- $P_{[s,t]} = F_4$

Con calcoli analoghi a quelli precedenti si trova che:

$$r_{F_4} = L([0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1])$$

Per trovare $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(r_{F_4})$ calcoliamo prima $L(\mathcal{L}, r_{F_4})$. Si ha:

$$L(\mathcal{L}, r_{F_4}) = L([2, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1])$$

da cui si ricava $L(\mathcal{L}, r_{F_4}) : x_2 - x_1 = 0$. Si ha quindi:

$$\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(r_{F_4}) = L(\mathcal{L}, r_{F_4}) \cap \mathcal{T} : \begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

che letta in \mathbb{P}^2 diventa $\pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(r_{F_4}) : x_2 - x_1 = 0$.

- $P_{[s,t]} = U$

Con calcoli analoghi ai precedenti si trova che:

$$r_U = L([4, 3, 2, 1, 0], [0, 1, 2, 3, 4])$$

Per trovare $\pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(r_U)$ calcoliamo prima $L(\mathcal{L}, r_U)$. Si ha:

$$L(\mathcal{L}, r_U) = L([2, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 0], [4, 3, 2, 1, 0], [0, 1, 2, 3, 4])$$

da cui si ricava $L(\mathcal{L}, r_U) : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Si ha quindi:

$$\pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(r_U) = L(\mathcal{L}, r_U) \cap \mathcal{T} : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

che letta in \mathbb{P}^2 diventa $\pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(r_U) : x_1 - 2x_2 = 0$.

Abbiamo dunque fatto vedere che:

$$\pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(r_{F_0}) = r_1 \quad \pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(r_{F_4}) = r_3 \quad \pi_{\mathcal{L},\mathcal{T}}(r_U) = r_2$$

che è proprio quello che si voleva mostrare. In definitiva quindi si ha che $[1, 0, 0]$ è la proiezione di F_0, F_4, U e le sue tangenti principali sono le proiezioni delle tangenti a \mathcal{C}_4 in quei tre punti.

3.3 Costruzione per proiezione di una curva con un punto m-plo ordinario

Con una costruzione analoga è possibile costruire una curva di grado $m + 1$ con un punto m -plo ordinario. Più precisamente il procedimento da utilizzare è il seguente:

1. Si scelgono m punti distinti P_1, \dots, P_m sulla \mathcal{C}_{m+1} ;
2. Si trova $L(P_1, \dots, P_m)$, il sottospazio $m-1$ dimensionale di \mathbb{P}^{m+1} passante per i punti scelti precedentemente (essendo \mathcal{C}_{m+1} una curva razionale normale siamo sicuri che i P_1, \dots, P_m sono linearmente indipendenti: si veda ad esempio [6]);

3. Si determina \mathcal{L} , un sottospazio $m-2$ dimensionale di $L(P_1, \dots, P_m)$ che non intersechi \mathcal{C}_{m+1} ;
4. Si trova \mathcal{T} , un piano di \mathbb{P}^{m+1} sghembo con \mathcal{L} ;
5. Si calcola la proiezione di \mathcal{C}_{m+1} su \mathcal{T} di centro \mathcal{L} e si ottiene così $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(\mathcal{C}_{m+1})$, che è proprio la curva cercata: infatti se P è il punto $P = \pi(P_1) = \dots = \pi(P_m)$, si vede facilmente che P è multiplo di molteplicità m per $\pi_{\mathcal{L}, \mathcal{T}}(\mathcal{C}_{m+1})$ e che il cono tangente in P alla curva è costituito dalle proiezioni a due a due distinte delle tangenti in \mathcal{C}_{m+1} in P_1, \dots, P_m .

3.4 Una curva di grado $m+1$ con un punto m -plo è razionale

È possibile mostrare che tutte le curve algebriche piane di grado m e con un punto $(m-1)$ -plo sono razionali, trovandone esplicitamente una parametrizzazione. Per farlo si può procedere come segue. Detto P il punto $(m-1)$ -plo della curva \mathcal{C} si considera \mathcal{F} , il fascio di rette per P ; la generica retta di \mathcal{F} è descritta da due parametri omogenei λ e μ . Si calcola poi l'intersezione tra una retta r di \mathcal{F} e \mathcal{C} , quando r è diversa dalle $m-1$ tangenti principali; poichè r incontra $m-1$ volte \mathcal{C} in P per il Teorema 1.3.1. avrà un'unica altra intersezione con \mathcal{C} ; si scartano le $m-1$ soluzioni corrispondenti a P e la soluzione rimanente è un punto di \mathcal{C} che viene quindi descritto da equazioni parametriche in λ e μ . Con questo procedimento si trovano equazioni parametriche per \mathcal{C} , che dunque è razionale. Vediamo ora un esempio di applicazione di questo procedimento.

Esempio 3.4.1.

Consideriamo:

$$\mathcal{C} : x_0x_1^3 - x_0x_1x_2^2 + x_2^4 = 0$$

Deomogeneizzando rispetto a x_0 si ottiene $\mathcal{C}^* : x^3 - xy^2 + y^4 = 0$. Per 1.3.17. si vede subito che $O = (0, 0)$ è un punto triplo di \mathcal{C}^* ed il suo cono tangente è $x^3 - xy^2 = 0$, cioè $x(x+y)(x-y) = 0$. Dunque le tre tangenti principali a \mathcal{C}^* in O sono:

$$r_1^* : x = 0, r_2^* : x - y = 0, r_3^* : x + y = 0$$

Tornando nel proiettivo si ha quindi che $P = [1, 0, 0]$ è un punto triplo ordinario di \mathcal{C} le cui tangenti principali sono:

$$r_1 : x_1 = 0 \quad r_2 : x_1 - x_2 = 0 \quad r_3 : x_1 + x_2 = 0$$

Il fascio di rette per P è dato da $r_{[\alpha, \beta]} : \alpha x_1 + \beta x_2 = 0$, $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$. Poichè da esso vanno escluse r_1 , r_2 ed r_3 , dobbiamo supporre $\beta \neq 0$, $\beta \neq \alpha$, $\beta \neq -\alpha$. Calcoliamo quindi l'intersezione:

$$r_{[\alpha, \beta]} \cap \mathcal{C} : \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ x_0 x_1^3 - x_0 x_1 x_2^2 + x_2^4 = 0 \end{cases}$$

Supponendo $\alpha \neq 0$ si ha:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\beta}{\alpha} x_2 \\ -\frac{\beta^3}{\alpha^3} x_0 x_2^3 + \frac{\beta}{\alpha} x_0 x_2^3 + x_2^4 = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$x_2^3 \left(-\frac{\beta^3}{\alpha^3} x_0 + \frac{\beta}{\alpha} x_0 + x_2 \right) = 0$$

Questa equazione ha quattro soluzioni: $x_2 = 0$, di molteplicità 3, ed $x_0 = -\frac{\alpha^3}{\alpha^2 \beta - \beta^3} x_2$. Si noti che $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, dunque la prima soluzione corrisponde al punto P che, come ci si aspettava, è contato tre volte essendo un punto triplo; la seconda è invece quella che darà il punto cercato ed è ben definita per le ipotesi fatte sui coefficienti α e β . Svolgendo i calcoli, si ha quindi:

$$r_{[\alpha, \beta]} \cap \mathcal{C} \setminus P = [\alpha^4, \alpha^2 \beta^2 - \beta^4, \alpha \beta^3 - \alpha^3 \beta] =: Q_{[\alpha, \beta]}$$

Rimane da trattare la situazione $\alpha = 0$: in tal caso si ha:

$$r_{[0, 1]} \cap \mathcal{C} : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_0 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso abbiamo una soluzione tripla, $x_1 = x_2 = 0$, corrispondente a P ed una semplice, $x_0 = x_2 = 0$, corrispondente al punto $[0, 1, 0]$, che si ottiene da $Q_{[\alpha, \beta]}$ proprio per $\alpha = 0$. Si noti infine che per $\beta = 0 \vee \beta = \alpha \vee \beta = -\alpha$ si ha $Q_{[\alpha, \beta]} = P$, esattamente come ci si aspettava

essendo P un punto triplo. Abbiamo quindi trovato equazioni parametriche per \mathcal{C} :

$$\begin{cases} x_0 = \alpha^4 \\ x_1 = \alpha^2\beta^2 - \beta^4 \\ x_2 = \alpha\beta^3 - \alpha^3\beta \end{cases} \quad [\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$$

Capitolo 4

Rivestimento doppio di una cubica con una cuspid

In questo capitolo si mostrerà un esempio di proiezione che dà un rivestimento doppio di una cubica con una cuspid, necessariamente di prima specie, per mettere in evidenza, come la scelta del centro della proiezione sia importante ai fini del risultato; infatti nei capitoli successivi vi sono esempi di costruzioni molto simili che danno però applicazioni genericamente iniettive sulla curva piana, la quale può presentare singolarità di tipi diversi.

4.1 Rivestimento doppio di una cubica con una cuspid di prima specie

Consideriamo la sestica razionale normale standard $\mathcal{C}_6 \subset \mathbb{P}^6$:

$$\mathcal{C}_6 : \begin{cases} x_0 = t^6 \\ x_1 = t^5 s \\ x_2 = t^4 s^2 \\ x_3 = t^3 s^3 \\ x_4 = t^2 s^4 \\ x_5 = t s^5 \\ x_6 = s^6 \end{cases} \quad [s, t] \in \mathbb{P}^1$$

Scegliamo su di essa due punti: $A = F_0 = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ e $B = F_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$. La prima cosa da fare è trovare la retta $r = L(A, B)$ e per farlo è sufficiente imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$r : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

su cui dobbiamo scegliere un punto che sia diverso da A e da B : prendiamo $T = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$. Il passo successivo è calcolare i piani osculatori a \mathcal{C}_6 in A ed in B che denoteremo rispettivamente con O_A e O_B : per farlo calcoleremo i piani osculatori nei corrispondenti punti dell'affinizzata di \mathcal{C}_6 ed omogeneizzeremo i risultati ottenuti. Un generico punto di \mathcal{C}_6 è del tipo $P = [t^6, t^5s, t^4s^2, t^3s^3, t^2s^4, ts^5, s^6]$ e, se vogliamo calcolare O_A , possiamo supporre $t \neq 0$ poichè A si ottiene per $s = 0, t \neq 0$. Posto $u = \frac{s}{t}$ si ha dunque $P = [1, u, u^2, u^3, u^4, u^5, u^6]$, da cui se ci mettiamo nella carta affine U_0 con coordinate $y_1, \dots, y_6, y_i = \frac{x_i}{x_0}$, troviamo:

$$\mathcal{C}_6 \cap U_0 : \begin{cases} y_1 = u \\ y_2 = u^2 \\ y_3 = u^3 \\ y_4 = u^4 \\ y_5 = u^5 \\ y_6 = u^6 \end{cases}$$

e quindi $P = P(u) = (u, u^2, u^3, u^4, u^5, u^6)$. Calcolando le derivate prime e seconde si ottiene:

$$\frac{\partial P(u)}{\partial u} = (1, 2u, 3u^2, 4u^3, 5u^4, 6u^5), \quad \frac{\partial^2 P(u)}{\partial u^2} = (0, 2, 6u, 12u^2, 20u^3, 30u^4)$$

da cui, osservando che A si ottiene da $P(u)$ per $u = 0$:

$$\frac{\partial P(u)}{\partial u} \Big|_{u=0} = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \frac{\partial^2 P(u)}{\partial u^2} \Big|_{u=0} = (0, 2, 0, 0, 0, 0)$$

il piano osculatore in A si ottiene dunque imponendo:

$$rk \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Omogeneizzando rispetto ad x_0 si ottiene:

$$O_A : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

Con calcoli del tutto analoghi a quelli appena visti si trova:

$$O_B : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

A questo punto bisogna scegliere $\bar{A} \in O_A, \bar{A} \neq A$ e $\bar{B} \in O_B, \bar{B} \neq B$. Una possibile scelta è:

$$\bar{A} = F_1 = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] \quad \bar{B} = F_5 = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]$$

Dobbiamo ora calcolare $L(O_A, O_B)$, per farlo osserviamo che $O_A = L(F_0, F_1, F_2)$ e $O_B = L(F_4, F_5, F_6)$, dunque:

$$L(O_A, O_B) = L(F_0, F_1, F_2, F_4, F_5, F_6) : x_3 = 0$$

L'ultimo punto da scegliere è $D \in L(O_A, O_B) \setminus (O_A \cup O_B \cup r)$, dunque una possibilità è prendere $D = [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]$. Calcoliamo equazioni per

$\mathcal{W} = L(\overline{A}, \overline{B}, T, D)$: sue equazioni cartesiane sono date da:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

Osservando che:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è un minore di rango 4, è sufficiente imporre:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_5 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_5 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_5 & x_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\mathcal{W} : \begin{cases} x_0 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Per definire la proiezione di centro \mathcal{W} è necessario trovare un piano sghembo con \mathcal{W} ed una possibile scelta è:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Infatti:

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{W} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_0 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L} \cap \mathcal{W} = \emptyset$$

Possiamo a questo punto considerare la proiezione di centro \mathcal{W} , che ha dimensione 3, su \mathcal{L} che ha dimensione 2:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}} : \mathbb{P}^6 \setminus \mathcal{W} &\mapsto \mathcal{L} \\ P &\mapsto L(\mathcal{W}, P) \cap \mathcal{L} \end{aligned}$$

e calcolare $\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(\mathcal{C}_6)$.

Preso $P_{[t,s]} = [t^6, t^5s, t^4s^2, t^3s^3, t^2s^4, ts^5, s^6] \in \mathcal{C}_6$, equazioni cartesiane per $\gamma_{[t,s]} := L(P_{[t,s]}, \mathcal{W}) = L(P, \bar{A}, \bar{B}, T, D)$ si ottengono imponendo:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^6 & t^5s & t^4s^2 & t^3s^3 & t^2s^4 & ts^5 & s^6 \end{pmatrix} = 5$$

Osserviamo che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t^6 & t^5s & t^4s^2 & t^3s^3 & ts^5 \end{vmatrix} = t^3s^3 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0, s \neq 0$$

Supponendo quindi $t \neq 0, s \neq 0$ bisogna imporre:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^6 & t^5 s & t^4 s^2 & t^3 s^3 & t s^5 & t^2 s^4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^6 & t^5 s & t^4 s^2 & t^3 s^3 & t s^5 & s^6 \end{vmatrix} = 0$$

da cui:

$$\gamma_{[t,s]} : \begin{cases} s^3 t^3 x_0 + (s^6 - t^6) x_3 - s^3 t^3 x_6 = 0 \\ s^3 t^3 x_2 + (s^4 t^2 - s^2 t^4) x_3 - s^3 t^3 x_4 = 0 \end{cases} \quad t \neq 0, s \neq 0$$

Con calcoli analoghi si trova che:

$$\gamma_{[0,1]} = \gamma_{[1,0]} = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Intersecando con \mathcal{L} si ottiene:

$$\gamma_{[t,s]} \cap \mathcal{L} : \begin{cases} x_0 = x_1 = x_2 = x_5 = 0 \\ (s^6 - t^6) x_3 - s^3 t^3 x_6 = 0 \\ (s^4 t^2 - s^2 t^4) x_3 - s^3 t^3 x_4 = 0 \end{cases} \quad t \neq 0, s \neq 0$$

e $\gamma_{[1,0]} \cap \mathcal{L} = \gamma_{[0,1]} \cap \mathcal{L} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$. In definitiva si ha che un generico punto di $\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(\mathcal{C}_6)$ è della forma:

$$Q_{[t,s]} := [0, 0, 0, s^3 t^3, s^4 t^2 - s^2 t^4, 0, s^6 - t^6]$$

che può essere visto come il punto $[s^3 t^3, s^4 t^2 - s^2 t^4, s^6 - t^6]$ di \mathbb{P}^2 ; per comodità rinominiamo inoltre le variabili chiamando x_3, x_4, x_6 rispettivamente x_0, x_1, x_2 . Mediante l'utilizzo del software CoCoA ([5]) si trova che la curva rappresentata dalle equazioni parametriche trovate è:

$$\mathcal{C} : \underbrace{3x_0^2 x_1 + x_1^3 - x_0^2 x_2}_{F(x_0, x_1, x_2)} = 0$$

Passiamo quindi a studiare \mathcal{C} . La prima cosa da osservare è che abbiamo ottenuto una cubica partendo da una sestica, ragion per cui ci aspettiamo che:

$$\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}|_{\mathcal{C}_6} : \mathcal{C}_6 \mapsto \mathcal{C}$$

sia un rivestimento doppio di \mathcal{C} , cioè che la proiezione sia $2 : 1$. Prima di dedicarci a questo analizziamo però eventuali punti singolari di \mathcal{C} : per farlo deomogeneizziamo rispetto a x_2 ed otteniamo l'affinizzata:

$$\mathcal{C}^* : 3x^2y - y^3 + x^2 = 0$$

Si vede subito che \mathcal{C}^* ha una cuspidi di 1° specie in $O = (0, 0)$ con tangente principale (doppia) $x = 0$, quindi \mathcal{C} ha una cuspidi in $Q = [0, 0, 1]$ con tangente principale $x_0 = 0$. Svolgendo i calcoli è possibile mostrare che la tangente a \mathcal{C} in ogni suo punto R è l'immagine tramite la proiezione delle due tangenti a \mathcal{C}_6 nei due punti che vengono mandati in R . L'unica eccezione si ha per il punto Q , in cui vengono mandati non solo i due punti A e B ma anche le rispettive tangenti a \mathcal{C}_6 , t_A e t_B . Questo significa che oltre ad A e B anche altri due punti di \mathcal{C} "infinitamente vicini" rispettivamente ad A e a B vengono mandati su Q . Ci si aspetterebbe dunque che Q sia un punto quadruplo, ma poichè la proiezione, come mostreremo a breve, è $2 : 1$ esso è doppio. L'unica tangente principale, contata due volte, a \mathcal{C} in Q è data dalle immagini, tramite la proiezione, di O_A e O_B . Mostriamo ora che $\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}|_{\mathcal{C}_6}$ dà un rivestimento doppio di \mathcal{C} . Per farlo osserviamo che:

$$Q_{[t,s]} = [0, 0, 0, s^3t^3, s^4t^2 - s^2t^4, s^6 - t^6] = [0, 0, 0, -s^3t^3, s^2t^4 - s^4t^2, t^6 - s^6] = Q_{[-s,t]}$$

Ciò significa che $\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(P_{[t,s]}) = \pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(P_{[-s,t]})$, cioè ogni punto di \mathcal{C} è immagine di (esattamente) due punti distinti di \mathcal{C}_6 . Dunque $\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}|_{\mathcal{C}_6} : \mathcal{C}_6 \mapsto \mathcal{C}$ è $2 : 1$ e quindi è un rivestimento doppio di \mathcal{C} .

Capitolo 5

Costruzione tramite proiezione di un punto quadruplo non ordinario

Dopo aver mostrato la costruzione di un punto triplo ordinario mediante proiezione, si vuole ora fornire un esempio di punto quadruplo non ordinario, sempre ottenuto tramite opportuna proiezione di una curva razionale normale standard. Si noter  che la costruzione   molto simile a quella del rivestimento doppio della cubica ma il risultato ottenuto sar  del tutto differente; il motivo di tale diversit  verr  spiegato in seguito.

5.1 Punto quadruplo non ordinario

Consideriamo la sestica razionale standard $\mathcal{C}_6 \subset \mathbb{P}^6$:

$$\mathcal{C}_6 : \begin{cases} x_0 = t^6 \\ x_1 = t^5 s \\ x_2 = t^4 s^2 \\ x_3 = t^3 s^3 \\ x_4 = t^2 s^4 \\ x_5 = t s^5 \\ x_6 = s^6 \end{cases} \quad [s, t] \in \mathbb{P}^1$$

Scegliamo su di essa due punti: $A = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ e $B = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$. Per quanto visto in 4.1, indicando ancora con O_A e O_B i piani osculatori a \mathcal{C}_6 rispettivamente in A ed in B , si ha che:

$$L(A, B) : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad O_A : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \quad O_B : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad L(O_A, O_B) : x_3 = 0$$

Bisogna ora scegliere $T \in L(A, B) \setminus \{A, B\}$, $\bar{A} \in O_A \setminus \{A\}$, $\bar{B} \in O_B \setminus \{B\}$ e $D \in L(O_A, O_B) \setminus (O_A \cup O_B \cup L(A, B))$. Prendiamo dunque \bar{A} e \bar{B} come in 4.1, T e D differenti:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] & \bar{B} &= [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0] \\ T &= [2, 0, 0, 0, 0, 0, 1] & D &= [1, 1, 1, 0, 1, 1, 1] \end{aligned}$$

Il passo successivo è calcolare $\mathcal{W} := L(\bar{A}, \bar{B}, T, D)$, per farlo è sufficiente imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

A tal fine osserviamo che:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

dunque imponendo che gli orlati di tale minore siano nulli si ottengono equazioni cartesiane per \mathcal{W} :

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_5 & x_6 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_5 & x_6 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_5 & x_6 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\mathcal{W} : \begin{cases} x_0 + x_2 - 2x_6 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_0 + x_4 - 2x_6 = 0 \end{cases}$$

L'ultimo elemento da trovare è un piano \mathcal{L} che sia sghembo con \mathcal{W} . Possiamo scegliere \mathcal{L} come in 4.1, cioè:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

La verifica del fatto che \mathcal{W} e \mathcal{L} sono sghembi è analoga a quella dei casi visti precedentemente. Possiamo ora considerare la seguente proiezione:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{W},\mathcal{L}} : \mathbb{P}^6 \setminus \mathcal{W} &\mapsto \mathcal{L} \\ P &\mapsto L(\mathcal{W}, P) \cap \mathcal{L} \end{aligned}$$

e concentrarci su $\pi_{\mathcal{W},\mathcal{L}}(\mathcal{C}_6)$. La prima cosa da fare è calcolare $\gamma_{[t,s]} := L(\mathcal{W}, P_{[t,s]})$ dove $P_{[t,s]}$ è il generico punto di \mathcal{C}_6 : $P_{[t,s]} = [t^6, t^5s, t^4s^2, t^3s^3, t^2s^4, ts^5, s^6]$

A tal fine bisogna imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ t^6 & t^5s & t^4s^2 & t^3s^3 & t^2s^4 & ts^5 & s^6 \end{pmatrix} = 5$$

Per farlo osserviamo che:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ t^6 & t^5s & t^3s^3 & ts^5 & s^6 \end{vmatrix} = s^3t^3$$

dunque tale minore è non nullo se e solo se $s \neq 0, t \neq 0$. Supponendo che $s \neq 0, t \neq 0$ equazioni cartesiane di $\gamma_{[t,s]}$ sono quindi date da:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_3 & x_5 & x_6 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ t^6 & t^5s & t^3s^3 & ts^5 & s^6 & t^4s^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_3 & x_5 & x_6 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ t^6 & t^5s & t^3s^3 & ts^5 & s^6 & t^2s^4 \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\gamma_{[t,s]} : \begin{cases} s^3t^3x_0 + s^3t^3x_2 + (2s^6 - t^6 - s^2t^4)x_3 - 2s^3t^3x_6 = 0 \\ s^3t^3x_0 + (2s^6 - t^6 - s^4t^2)x_3 + s^3t^3x_4 - 2s^3t^3x_6 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi che:

$$\gamma_{[t,s]} \cap \mathcal{L} : \begin{cases} s^3t^3x_0 + s^3t^3x_2 + (2s^6 - t^6 - s^2t^4)x_3 - 2s^3t^3x_6 = 0 \\ s^3t^3x_0 + (2s^6 - t^6 - s^4t^2)x_3 + s^3t^3x_4 - 2s^3t^3x_6 = 0 \\ x_0 = x_1 = x_2 = x_5 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a x_4 e x_6 si trova:

$$\gamma_{[t,s]} \cap \mathcal{L} : \begin{cases} x_4 = \frac{s^4t^2 - s^2t^4}{s^3t^3}x_3 \\ x_6 = \frac{2s^6 - t^6 - s^2t^4}{2s^3t^3}x_3 \\ x_0 = x_1 = x_2 = x_5 = 0 \end{cases}$$

Dunque il generico punto della proiezione è della forma:

$$Q_{[t,s]} := \pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(P_{[s,t]}) = [0, 0, 0, 2s^3t^3, 2s^4t^2 - 2s^2t^4, 0, 2s^6 - t^6 - s^2t^4]$$

che può essere identificato con il punto, che continuiamo a chiamare $Q_{[t,s]}$, di \mathbb{P}^2 con coordinate omogenee $[2s^3t^3, 2s^4t^2 - 2s^2t^4, 2s^6 - t^6 - s^2t^4]$.

Bisogna ora analizzare i casi $[t, s] = [1, 0]$ e $[t, s] = [0, 1]$, che erano stati

precedentemente esclusi. Per trovare $\gamma_{[1,0]}$ bisogna imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Osservando che:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

ed orlando questo minore si ottiene:

$$\gamma_{[1,0]} : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Con calcoli analoghi si trova $\gamma_{[0,1]} = \gamma_{[1,0]}$.

Si ha quindi $\gamma_{[1,0]} \cap \mathcal{L} = \gamma_{[0,1]} \cap \mathcal{L} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$. Essendo:

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1] = Q_{[1,0]} = Q_{[0,1]}$$

si ha $\gamma_{[1,0]} \cap \mathcal{L} = Q_{[1,0]}$ e $\gamma_{[0,1]} \cap \mathcal{L} = Q_{[0,1]}$. In definitiva si ha quindi $\gamma_{[s,t]} \cap \mathcal{L} = Q_{[s,t]} \quad \forall [s,t] \in \mathbb{P}^1$ e da ciò segue che tutti e soli i punti di $\mathcal{C} := \pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(\mathcal{C}_6)$ sono quelli della forma $Q_{[s,t]}$: ciò vuol dire che abbiamo ottenuto delle equazioni parametriche di \mathcal{C} . Mediante l'utilizzo del software CoCoA ([5]) si trova che \mathcal{C} è descritta dalla seguente equazione cartesiana:

$$\mathcal{C} : \underbrace{25x_0^4x_1^2 + 14x_0^2x_1^4 + 2x_1^6 - 20x_0^4x_1x_2 - 6x_0^2x_1^3x_2 + 4x_0^4x_2^2}_{:=F(x_0, x_1, x_2)} = 0$$

Per studiare i punti singolari di \mathcal{C} deomogeneizziamo $F(x_0, x_1, x_2)$ rispetto a x_2 , ed otteniamo l'affinizzata:

$$\mathcal{C}^* : \underbrace{25x^4y^2 + 14x^2y^4 + 2y^6 - 20x^4y - 6x^2y^3 + 4x^4}_{:=f(x,y)} = 0$$

Dall'equazione precedente si osserva subito che \mathcal{C}^* ha un punto quadruplo in $(0,0)$ il cui cono tangente è $4x^4 = 0$. Ciò vuol dire che vi è un'unica tangente principale contata quattro volte e di equazione $x = 0$, dunque il punto non è ordinario. Tornando nel proiettivo si ha di conseguenza che \mathcal{C} ha un punto quadruplo non ordinario in $Q = [0,0,1]$. Per capire il motivo per cui il punto ottenuto è quadruplo è utile vedere in cosa vengono mandati dalla proiezione le rette tangenti ed i piani osculatori a \mathcal{C}_6 in A e B . Iniziamo dalla retta tangente in A : in maniera del tutto analoga a quella già vista in 3.2, si trova che la retta cercata è $t_A : x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, dunque il generico punto di t_A è della forma $S_{[a,b]} = [a, b, 0, 0, 0, 0]$. Per trovare la proiezione di t_A calcoliamo la proiezione del suo generico punto, quindi calcoliamo $\alpha_{[a,b]} = L(S_{[a,b]}, W)$. Per farlo possiamo come al solito imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Osservando che:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a$$

possiamo orlare tale minore supponendo $a \neq 0$ e trattare il caso $a = 0$ separatamente. Equazioni cartesiane per $\alpha_{[a,b]}$ sono date quindi da:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_5 & x_6 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_5 & x_6 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque:

$$\alpha_{[a,b]} : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e di conseguenza $\alpha_{[a,b]} \cap \mathcal{L} = [0, 0, 1] = Q$. Il caso $a = 0$ corrisponde a dover proiettare il punto $[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$, che però appartiene a \mathcal{W} e pertanto la sua proiezione non è definita. Poichè però tutta la tangente t_A viene mandata in $[0, 0, 1]$ si può definire appositamente la proiezione modificandola solo in $[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$ in modo che $\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}([0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]) = [0, 0, 1]$ (con l'identificazione definita precedentemente). Con calcoli analoghi si trova che t_B viene mandata in $[0, 0, 1]$ e sia O_A che O_B vengono mandati nell'unica tangente principale di \mathcal{C} in Q . Alla luce di ciò si ha quindi che Q è un punto quadruplo perchè non solo A e B vengono mandati in esso, ma anche le loro tangenti t_A e t_B . Questo significa che oltre ad A e B anche altri due punti di \mathcal{C} "infinitamente vicini" rispettivamente ad A e a B vengono mandati su Q , che è quindi immagine di quattro punti di \mathcal{C} e di conseguenza è quadruplo. Questo fenomeno è molto simile a quanto accade proiettando la cubica gobba \mathcal{C}_3 di \mathbb{P}^3 su un piano da un punto che sta su una tangente a \mathcal{C}_3 .

Capitolo 6

Costruzione tramite proiezione di un oscnodo

Consideriamo la sestica razionale normale standard $\mathcal{C}_6 \subset \mathbb{P}^6$:

$$\mathcal{C}_6 : \begin{cases} x_0 = t^6 \\ x_1 = t^5 s \\ x_2 = t^4 s^2 \\ x_3 = t^3 s^3 \\ x_4 = t^2 s^4 \\ x_5 = t s^5 \\ x_6 = s^6 \end{cases} \quad [s, t] \in \mathbb{P}^1$$

Scegliamo su di essa due punti: $A = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ e $B = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$.

Per quanto visto in 4.1, indicando ancora con O_A e O_B i piani osculatori a \mathcal{C}_6 rispettivamente in A ed in B , si ha che:

$$L(A, B) : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad O_A : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \quad O_B : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad L(O_A, O_B) : x_3 = 0$$

Bisogna ora scegliere $T \in L(A, B) \setminus \{A, B\}$, $\bar{A} \in O_A \setminus \{A\}$, $\bar{B} \in O_B \setminus \{B\}$ e $D \in L(O_A, O_B) \setminus (O_A \cup O_B \cup L(A, B))$. Prendiamo dunque:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= [1, 0, 1, 0, 0, 0, 0] & \bar{B} &= [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1] \\ T &= [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1] & D &= [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]\end{aligned}$$

Il passo successivo è calcolare $\mathcal{W} := L(\bar{A}, \bar{B}, T, D)$, per farlo è sufficiente imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Per farlo osserviamo che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

dunque imponendo che gli orlati di tale minore siano nulli si ottengono equazioni cartesiane per \mathcal{W} :

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 & x_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\mathcal{W} : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_5 = 0 \\ x_0 - x_2 + x_4 - x_6 = 0 \end{cases}$$

L'ultimo elemento da trovare è un piano \mathcal{L} che sia sghembo con \mathcal{W} . Possiamo scegliere:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Possiamo ora considerare la seguente proiezione:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}} : \mathbb{P}^6 \setminus \mathcal{W} &\mapsto \mathcal{L} \\ P &\mapsto L(\mathcal{W}, P) \cap \mathcal{L} \end{aligned}$$

e concentrarci su $\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(\mathcal{C}_6)$. La prima cosa da fare è calcolare $\gamma_{[t,s]} := L(\mathcal{W}, P_{[t,s]})$ dove $P_{[t,s]}$ è il generico punto di \mathcal{C}_6 : $P_{[t,s]} = [t^6, t^5s, t^4s^2, t^3s^3, t^2s^4, ts^5, s^6]$

A tal fine bisogna imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ t^6 & t^5s & t^4s^2 & t^3s^3 & t^2s^4 & ts^5 & s^6 \end{pmatrix} = 5$$

Per farlo osserviamo che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t^6 & t^5s & t^4s^2 & t^3s^3 & t^2s^4 \end{vmatrix} = -s^3t^3$$

dunque tale minore è non nullo se e solo se $s \neq 0, t \neq 0$. Supponendo che $s \neq 0, t \neq 0$ equazioni cartesiane di $\gamma_{[t,s]}$ sono quindi date da:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t^6 & t^5s & t^4s^2 & t^3s^3 & t^2s^4 & ts^5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t^6 & t^5s & t^4s^2 & t^3s^3 & t^2s^4 & s^6 \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\gamma_{[t,s]} : \begin{cases} s^3 t^3 x_1 + (s^5 t - s t^5) x_3 - s^3 t^3 x_5 = 0 \\ s^3 t^3 x_0 - s^3 t^3 x_2 + (s^6 - s^4 t^2 + s^2 t^4 - t^6) x_3 + s^3 t^3 x_4 - s^3 t^3 x_6 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi che:

$$\gamma_{[t,s]} \cap \mathcal{L} : \begin{cases} s^3 t^3 x_1 + (s^5 t - s t^5) x_3 - s^3 t^3 x_5 = 0 \\ s^3 t^3 x_0 - s^3 t^3 x_2 + (s^6 - s^4 t^2 + s^2 t^4 - t^6) x_3 + s^3 t^3 x_4 - s^3 t^3 x_6 = 0 \\ x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a x_5 e x_6 si trova:

$$\gamma_{[t,s]} \cap \mathcal{L} : \begin{cases} x_5 = \frac{s^5 t - s t^5}{s^3 t^3} x_3 \\ x_6 = \frac{s^6 - s^4 t^2 + s^2 t^4 - t^6}{s^3 t^3} x_3 \\ x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi che il generico punto della proiezione è della forma:

$$Q_{[t,s]} := \pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(P_{[s,t]}) = [0, 0, 0, s^3 t^3, 0, s^5 t - s t^5, s^6 - s^4 t^2 + s^2 t^4 - t^6]$$

che può essere identificato con il punto, che continuiamo a chiamare $Q_{[t,s]}$, di \mathbb{P}^2 con coordinate omogenee $[s^3 t^3, s^5 t - s t^5, s^6 - s^4 t^2 + s^2 t^4 - t^6]$.

Bisogna ora analizzare i casi $[t, s] = [1, 0]$ e $[t, s] = [0, 1]$, che erano stati precedentemente esclusi. Per trovare $\gamma_{[1,0]}$ bisogna imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Osservando che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

ed orlando questo minore si ottiene:

$$\gamma_{[1,0]} : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Con calcoli analoghi si trova $\gamma_{[0,1]} = \gamma_{[1,0]}$.

Si ha quindi $\gamma_{[1,0]} \cap \mathcal{L} = \gamma_{[0,1]} \cap \mathcal{L} = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$. Essendo:

$$[0, 0, 0, 0, 0, 1] = Q_{[1,0]} = Q_{[0,1]}$$

si ha $\gamma_{[1,0]} \cap \mathcal{L} = Q_{[1,0]}$ e $\gamma_{[0,1]} \cap \mathcal{L} = Q_{[0,1]}$. In definitiva si ha quindi $\gamma_{[s,t]} \cap \mathcal{L} = Q_{[s,t]} \quad \forall [s,t] \in \mathbb{P}^1$ e da ciò segue che tutti e soli i punti di $\mathcal{C} := \pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}(\mathcal{C}_6)$ sono quelli della forma $Q_{[s,t]}$: ciò vuol dire che abbiamo ottenuto delle equazioni parametriche di \mathcal{C} . Mediante l'utilizzo del software CoCoA ([5]) si trova che \mathcal{C} è descritta dalla seguente equazione cartesiana:

$$\mathcal{C} : \underbrace{16x_0^4x_1^2 + 8x_0^2x_1^4 + x_1^6 - 16x_0^4x_2^2 - 4x_0^2x_1^2x_2^2 - x_0^2x_2^4}_{:=F(x_0, x_1, x_2)} = 0$$

Per studiare i punti singolari di \mathcal{C} deomogeneizziamo $F(x_0, x_1, x_2)$ rispetto a x_2 , ed otteniamo l'affinizzata:

$$\mathcal{C}^* : \underbrace{16x^4y^2 + 8x^2y^4 + y^6 - 16x^4 - 4x^2y^2 - x^2}_{:=f(x,y)} = 0$$

Dall'equazione di \mathcal{C}^* si vede subito che $O = (0, 0)$ è un punto doppio non ordinario poichè il suo cono tangente è $-x^2 = 0$ e quindi l'unica tangente principale (doppia) è la retta $r : x = 0$. Per studiare che tipo di singolarità è O dobbiamo innanzitutto calcolare $I(\mathcal{C}^*, r, O)$. Per farlo scriviamo r in

forma parametrica, $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ e la intersechiamo con \mathcal{C}^* ottenendo la

risolvente $t^6 = 0$. Da ciò si ricava che $I(\mathcal{C}^*, r, O) = 6$. Con una tecnica analoga a quanto visto nel capitolo 2 quando il punto doppio ha una sola tangente principale con molteplicità d'intersezione in O con \mathcal{C} uguale a 4, qui possiamo utilizzare la famiglia di cubiche:

$$\Theta_\lambda : \begin{cases} x = \lambda t^3 \\ y = t \end{cases}$$

Intersecando la generica Θ_λ con \mathcal{C}^* si ottiene la risolvente:

$$t^6(1 - \lambda^2) + t^8(-2\lambda^2) + t^{10}(8\lambda^2) + t^{12}(-8\lambda^4) + t^{14}(6\lambda^4) = 0$$

Dunque tutte le Θ_λ intersecano \mathcal{C}^* con molteplicità 6, ad eccezione di Θ_1 e Θ_{-1} che invece la intersecano con molteplicità 8. Si hanno dunque due cubiche osculatrici distinte e di conseguenza O è un oscnodo per \mathcal{C}^* , cioè $O = [0, 0, 1]$ è un oscnodo per \mathcal{C} con tangente principale $x_0 = 0$. Anche in questo per capire cosa è successo dobbiamo vedere dove sono state mandate t_A e t_B , le tangenti a \mathcal{C}_6 rispettivamente in A e B , ed i piani osculatori O_A e O_B . Per quanto visto negli esempi precedenti si ha che i punti di t_A sono tutti e soli quelli della forma $S_{[a,b]} = [a, b, 0, 0, 0, 0, 0]$. Per trovare la proiezione di t_A dobbiamo quindi calcolare prima di tutto $\alpha_{[a,b]} = L(S_{[a,b]}, W)$. Per farlo possiamo come al solito imporre:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Osservando che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a$$

possiamo orlare tale minore supponendo $a \neq 0$ e trattare il caso $a = 0$ separatamente. Equazioni cartesiane per $\alpha_{[a,b]}$ sono date quindi da:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 & x_6 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 & x_6 & x_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque:

$$\alpha_{[a,b]} : \begin{cases} x_3 = 0 \\ bx_0 - ax_1 - bx_2 + bx_4 + ax_5 - bx_6 = 0 \end{cases}$$

e di conseguenza $\alpha_{[a,b]} \cap \mathcal{L} = [0, b, a]$. Per quanto riguarda il caso $a = 0$ con calcoli analoghi si trova che $\alpha_{[0,1]} = [0, 1, 0]$ e quindi $\alpha_{[a,b]} \cap \mathcal{C} = [0, b, a] \quad \forall [a, b]$. I punti di questa forma descrivono al variare di a e b la retta di \mathcal{L} di equazione $s : x_0 = 0$, cioè la proiezione $\pi_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}$ induce una biezione tra la tangente t_A a \mathcal{C}_6 in A e la tangente principale a \mathcal{C} in O . La tangente t_B a \mathcal{C} in B si comporta in modo analogo, e O_A e O_B vengono mandati in s . In questo caso quindi $[0, 0, 1]$ è doppio e non quadruplo poichè t_A e t_B non vanno a finire in un unico punto ma in una retta, cioè O è immagine di due soli punti, A e B , e non di 4 come in 5.1 .

Bibliografia

- [1] Sernesi Edoardo, (2000), *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino
- [2] Vanzo Davide, (2010), *Curve razionali normali e loro proiezioni*
- [3] Alzati Alberto, (2006), *Note di Geometria 3*
- [4] Gimigliano Alessandro, (2017), *Appunti di geometria proiettiva*
- [5] John Abbott, Anna Maria Bigatti, Lorenzo Robbiano, *CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra*. Available at <http://cocoa.dima.unige.it>
- [6] Harris Joe, (1995), *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer,

Ringraziamenti

La prima persona a cui va un doveroso, ma ancor di più sincero, ringraziamento è la Prof.ssa Monica Idà, per le sue grandi doti di professionalità, disponibilità e cortesia. Grazie a lei scrivere questa tesi è stato un piacere più che un dovere: è suo merito infatti l'aver saputo individuare per me un argomento perfettamente in linea con i miei interessi, a cui mi ha fatto appassionare volta per volta, e nell'approfondimento del quale mi ha seguito costantemente. Inutile dire che senza di lei questa tesi non sarebbe stata scritta.

Un altro importante ringraziamento va ai miei genitori, per il loro affetto, perché mi hanno permesso di studiare in tutti questi anni ed hanno sempre creduto in me. È anche merito loro se fin da piccolo ho compreso l'importanza dell'istruzione ed ho imparato ad apprezzare sin in fondo la cultura in tutte le sue sfaccettature, decidendo infine di intraprendere il mio percorso universitario. A tal proposito penso sia giusto ringraziarli anche per avermi convinto, con non troppa facilità, a trasferirmi a Bologna, facendomi così ricredere su quella che pensavo sarebbe stata un'esperienza costellata di difficoltà e che invece si è rivelata essere estremamente utile per la mia maturazione ed il mio arricchimento personale.

Ringrazio poi il resto della mia famiglia: i miei zii ed i miei cugini, ma soprattutto i miei nonni, ognuno dei quali ha saputo trasmettermi qualcosa della propria esperienza. In particolare voglio ringraziare mia nonna Anna, per il suo costante affetto e per la sua costante apprensione, ma anche per l'avermi fatto scoprire fin da piccolo qualcosa che tanti anni dopo sarebbe stato per me un importante strumento di svago nei momenti di studio più intensi: la cucina.

Giusto a proposito dello svago, ritengo che questo, essendo un importante fattore di crescita personale, rivesta, a modo suo, un ruolo significativo nel percorso universitario, che proprio sulla crescita personale pone uno dei suoi fondamenti. Mi sembra quindi giusto ringraziare anche i miei amici: Clelia, la mia coinquilina, per essersi ormai rassegnata ai miei momenti di "follia"; Erminia ed Alessio, per aver provato, forse invano, ad insegnarmi a prendere la vita con più leggerezza; Francesco, insostituibile collega di studio notturno e reporter di politica internazionale; Irene, instancabile compagna di sagre ed aggiornamento pagine web; Lorenzo, fedele accompagnatore a teatro e paziente ascoltatore delle mie lamentele sulle stagioni liriche; ed infine ultime, ma assolutamente non ultime, Benedetta e Lucia, incallite giocatrici di carte e geniali co-creatrici di Jenna.

Chiaramente ci sarebbero moltissime altre persone da ringraziare ma, come direbbe Fermat: "sono troppo meravigliose per poter stare nel margine troppo ristretto di questa pagina".