

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Meccanica e termodinamica dei continui con applicazioni

**Relatore:**  
Prof. Roberto Zucchini

**Presentata da:**  
Nicolò Bacilieri

Anno Accademico 2017/2018



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>v</b>
<b>Introduzione</b>	<b>vii</b>
<b>1 Fondamenti di meccanica del continuo</b>	<b>1</b>
1.1 Corpi e moto . . . . .	1
1.2 Descrizione lagrangiana o euleriana . . . . .	2
1.3 Derivate temporali . . . . .	3
1.4 Deformazione . . . . .	4
<b>2 Leggi di bilancio</b>	<b>6</b>
2.1 Teorema del trasporto di Reynolds e leggi di bilancio generiche . . . . .	6
2.1.1 Variazione del volume . . . . .	8
2.2 Bilancio della massa . . . . .	9
2.3 Tensore di stress . . . . .	9
2.4 Bilancio del momento lineare . . . . .	12
2.5 Bilancio del momento angolare . . . . .	13
2.6 Bilancio dell'energia . . . . .	15
2.6.1 Lavoro e calore in fisica dei continui . . . . .	17
2.7 Disuguaglianza dell'entropia . . . . .	18
2.8 Riassunto delle leggi di bilancio e necessità delle relazioni costitutive . . . . .	20

2.8.1	Metodo di Coleman e Noll . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Meccanica dei fluidi</b>	<b>23</b>
3.1	Relazioni costitutive per fluidi Newtoniani . . . . .	23
3.2	Equazioni di Navier-Stokes ed applicazioni elementari . . . . .	25
3.2.1	Flusso di Couette stazionario . . . . .	25
3.2.2	Flusso stazionario in un condotto cilindrico inclinato . . . . .	27
3.3	Dinamica della vorticit� . . . . .	29
3.3.1	Equazione di Bernoulli . . . . .	30
3.3.2	Equazioni del moto in un sistema in rotazione . . . . .	30
	<b>Appendice</b>	<b>33</b>
	<b>A Definizioni ed identit� usate</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>



# Sommario

La fisica dei continui studia sistemi macroscopici nei casi in cui è possibile trascurare la struttura molecolare della materia sia negli aspetti meccanici che in quelli termodinamici. In questa tesi verranno analizzate le cinque leggi di bilancio universalmente valide per tutti i tipi di continui: bilancio della massa, bilancio del momento lineare, bilancio del momento angolare, bilancio dell'energia e disuguaglianza dell'entropia. Queste leggi conducono ad un insieme di equazioni e disequazioni differenziali alle derivate parziali che non sono sufficienti a determinare tutti i campi incogniti presenti in esse. Tale problema viene risolto facendo ricorso a relazioni costitutive di natura fenomenologica e di carattere non universale. Come applicazione verrà introdotto il metodo di Coleman e Noll che, tramite la disequazione dell'entropia, permette di vincolare le relazioni costitutive. Verrà quindi presentato un studio più approfondito dei fluidi newtoniani e verranno derivate le equazioni di Navier-Stokes, che ne reggono il moto. In particolare verranno studiati la dinamica dei fluidi in tipi di condotti diversi e la formazione di vortici in sistemi rotanti dovuta alla accelerazione di Coriolis.



# Introduzione

L'oggetto di questa tesi è lo studio dei corpi continui in generale e dei fluidi in particolare. Matematicamente un mezzo continuo è rappresentato da un insieme molto grande di punti materiali, porzioni infinitesime di materia che ad ogni istante di tempo occupano un punto geometrico dello spazio. Le proprietà fisiche di un punto materiale sono descritte mediante dei campi. Questi devono sottostare a leggi di bilancio universali di carattere sia meccanico sia termodinamico, valide per ogni continuo, indipendentemente dalla sua natura.

In fisica dei continui le leggi di bilancio fondamentali riguardano cinque grandezze: massa, momento lineare, momento angolare, energia ed entropia. Lo sviluppo di queste leggi porta ad un sistema di equazioni e disequazioni differenziali alle derivate parziali. Il numero di campi incogniti che esse contengono è però superiore a quello delle equazioni. È quindi necessario introdurre ulteriori leggi, dette relazioni costitutive, di natura non universale, in quanto dipendenti dal tipo di continuo considerato. Esistono relazioni costitutive diverse per i vari tipi di solidi e i fluidi presenti in natura. Infatti, tali relazioni possono essere usate per classificare i continui.

Intuitivamente, per fluido si intende un corpo che non possiede forma propria in grado di deformarsi in modo continuo ed indefinitamente quando sottoposto a forze esterne. Le forze sono di due tipi: forze volumetriche e sforzi. Un fluido in quiete può solo opporsi a sforzi normali, legati alla pressione, mentre se sottoposto a forze volumetriche o sforzi tangenziali si mette in moto. Questo approccio prescinde dalla struttura interna dei fluidi e considera solo la loro risposta ad azioni esterne.

La legge di bilancio del momento lineare, unita alle relazioni costitutive dei fluidi cosiddetti Newtoniani, permette di ottenere le equazioni di Navier-Stokes, che governano il loro moto. Come applicazione considereremo gli esempi di flusso in un condotto illimitato (flusso di Couette) e in un condotto cilindrico (flusso di Poiseuille). Infine tratteremo brevemente la vorticità nei fluidi in sistemi rotanti, conseguente all'accelerazione di Coriolis.



# Capitolo 1

## Fondamenti di meccanica del continuo

In questo capitolo si introducono le idee fondamentali ed i modelli matematici utilizzati nella meccanica del continuo.

### 1.1 Corpi e moto

In questa sezione si formalizzano matematicamente i concetti primitivi di corpo e moto. L'oggetto di studio della meccanica del continuo è il cosiddetto *corpo materiale*, detto semplicemente corpo, astrazione matematica di un "oggetto presente in natura". Un corpo è un insieme compatto misurabile i cui elementi sono un infinito numero di *particelle* o *punti materiali*<sup>1</sup>. Un punto materiale occupa ad ogni istante di tempo un punto geometrico. I punti materiali sono individuati specificando la loro *posizione*  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$  ad un tempo di riferimento, che assumeremo essere  $t = 0$ . Tutte le posizioni  $\mathbf{X}$  occupate dalle particelle formano un insieme  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  delle posizioni dei punti al tempo  $t = 0$ , detto *configurazione di riferimento* del corpo.

La configurazione di un corpo può cambiare in seguito ad un *moto* (mostrato in figura 1.1). Per descriverlo si utilizza una mappa<sup>2</sup>  $\chi$  tra le posizioni di riferimento  $\mathbf{X}$  e le posizioni  $\mathbf{x}$  assunte dalle particelle ad un tempo  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{B} \times I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{X}, t) &\mapsto \mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X}) := \chi(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

La mappa deve essere tale che all'origine del tempo ogni particella si trovi nella propria posizione di riferimento, cioè  $\chi_0(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}$ . Si assume che questa funzione e

---

<sup>1</sup>A differenza della meccanica classica, un punto materiale in meccanica del continuo non è dotato della proprietà chiamata *massa*.

<sup>2</sup>La dipendenza dal tempo delle funzioni verrà indicata con un pedice ove non ne siano richiesti altri.

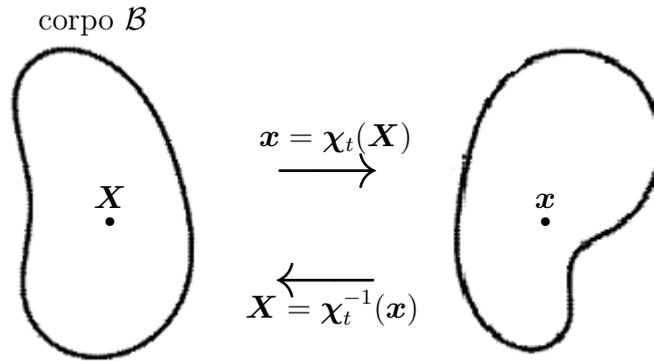


Figura 1.1: Un corpo in moto dalla propria configurazione di riferimento a quella al tempo  $t$ .

quelle che verranno introdotte successivamente siano invertibili e differenziabili fino ad ordini sufficienti, eccetto in punti, curve o superfici singolari. L'invertibilità comporta il fatto che non si possano trasformare volumi di materia in insiemi di misura nulla. La mappa 1.1 è quindi invertibile e vale:

$$\mathbf{X} = \chi_t^{-1}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

## 1.2 Descrizione lagrangiana o euleriana

Nella sezione precedente sono apparse le variabili spaziali  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{x}$ . In questa sezione vedremo come possono dar luogo a descrizioni fisiche differenti. Le grandezze o più in generale i fenomeni caratteristici della meccanica del continuo vengono descritti principalmente in due modi:

- descrizione *lagrangiana* o *materiale*: come variabile utilizza la posizione  $\mathbf{X}$  di una particella nella configurazione di riferimento; le componenti del vettore sono dette *coordinate materiali*. Queste coordinate individuano una singola particella  $p$  del corpo e permettono di studiare l'evoluzione di una grandezza fisica in riferimento a quella singola particella. Una grandezza descritta materialmente è del tipo  $Q = Q_t(\mathbf{X})$ ;
- descrizione *euleriana* o *spaziale*: come variabile utilizza la posizione  $\mathbf{x}$  di una particella al tempo  $t$ ; le componenti del vettore sono dette *coordinate spaziali*. Nella posizione individuata da queste coordinate, al variare del tempo, vengono a trovarsi particelle diverse. Una grandezza descritta spazialmente è del tipo  $Q = q_t(\mathbf{x})$ .

Per trasformare la descrizione della grandezza  $Q$  da lagrangiana a euleriana, e viceversa, si utilizzano le mappe 1.1 e 1.2:

$$\begin{aligned} Q_t(\mathbf{X}) &= q_t(\chi_t(\mathbf{X})), \\ q_t(\mathbf{x}) &= Q_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (1.3)$$

### 1.3 Derivate temporali

In questa sezione si vedrà come può essere studiato il moto di un corpo nelle due descrizioni appena introdotte. Il moto rappresentato dall'equazione 1.1, fissato  $\mathbf{X}$ , descrive, come funzione del tempo, la *traiettoria* di una particella. Si introduce, in descrizione lagrangiana, il campo di *velocità* della particella lungo la traiettoria:

$$\mathbf{V}_t(\mathbf{X}) := \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\chi_t}{dt}(\mathbf{X}) = \frac{\partial\chi_t}{\partial t}(\mathbf{X}) + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \chi_t)(\mathbf{X}) = \frac{\partial\chi_t}{\partial t}(\mathbf{X}), \quad (1.4)$$

dove  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0$ , e quello di *accelerazione*:

$$\mathbf{A}_t(\mathbf{X}) := \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{V}_t}{dt}(\mathbf{X}) = \frac{\partial\mathbf{V}_t}{\partial t}(\mathbf{X}) + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{V}_t)(\mathbf{X}) = \frac{\partial^2\chi_t}{\partial t^2}(\mathbf{X}). \quad (1.5)$$

Indicando lo *spostamento* di una particella con  $\mathbf{U}_t(\mathbf{X}) = \chi_t(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ , da cui  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{U}$ , si ottiene:

$$\mathbf{V}_t(\mathbf{X}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{X} + \mathbf{U}_t(\mathbf{X})) = \frac{\partial\mathbf{U}_t}{\partial t}(\mathbf{X}) \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_t(\mathbf{X}) = \frac{\partial^2\mathbf{U}_t}{\partial t^2}(\mathbf{X}). \quad (1.6)$$

In tutti questi casi sono state calcolate derivate temporali rispetto ad una particella fissata, ma in moto. In generale, per una grandezza  $Q$  in descrizione lagrangiana:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_t}{dt}(\mathbf{X}) &= \frac{\partial Q_t}{\partial t}(\mathbf{X}) + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} Q_t)(\mathbf{X}) = \frac{\partial Q_t}{\partial t}(\mathbf{X}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial Q}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Per ottenere la descrizione euleriana, richiamando 1.3:

$$\frac{d\mathbf{V}_t}{dt}(\mathbf{X}) = \frac{d\mathbf{v}_t}{dt}(\chi_t(\mathbf{X})) = \frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t}(\chi_t(\mathbf{X})) + \frac{\partial\chi_t}{\partial t}(\mathbf{X}) \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{v}_t)(\chi_t(\mathbf{X})), \quad (1.8)$$

da cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t(\mathbf{x}) &:= \frac{d\mathbf{v}_t}{dt}(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{d\mathbf{V}_t}{dt}(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\chi_t^{-1}(\mathbf{x})} = \frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t}(\chi_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{x}))) + \frac{\partial\chi_t}{\partial t}(\chi_t^{-1}(\mathbf{x})) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}_t)(\chi_t(\chi_t^{-1}(\mathbf{x}))) = \\ &= \frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}_t)(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t}(\mathbf{x}) + (\mathbf{v}_t(\mathbf{x}) \cdot \nabla)(\mathbf{v}_t(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (1.9)$$

sapendo che  $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}) = \frac{\partial\chi_t}{\partial t}(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\chi_t^{-1}(\mathbf{x})}$ .

In questo caso è stata calcolata una derivata temporale rispetto ad una posizione fissa nello spazio.

In generale, per una grandezza  $q$  corrispondente a  $Q$ :

$$\begin{aligned}\frac{dQ_t}{dt}(\mathbf{X}) &= \frac{dq_t}{dt}(\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})) = \frac{\partial q_t}{\partial t}(\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})) + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t}{\partial t}(\mathbf{X}) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} q_t(\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})), \\ \frac{dq_t}{dt}(\mathbf{x}) &= \frac{dQ_t}{dt}(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}_t^{-1}(\mathbf{x})} = \frac{\partial q_t}{\partial t}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) \cdot \nabla q_t(\mathbf{x}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Come è stato visto in 1.7 e 1.10, la derivata temporale può essere calcolata in due modi, definendo l'operatore *derivata temporale materiale*:

$$\frac{d}{dt} \equiv \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} & \text{per una grandezza in rappresentazione lagrangiana} \\ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla & \text{per una grandezza in rappresentazione euleriana} \end{cases}\tag{1.11}$$

Il termine  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  è detto *termine convettivo* ed è dovuto al moto del corpo nello spazio.

## 1.4 Deformazione

In questa sezione viene introdotto il concetto di deformazione di un corpo; essa può essere il risultato del moto di un corpo dalla propria configurazione di riferimento ad un'altra ed ora ne verranno illustrate brevemente alcune proprietà. Studiando un moto del tipo 1.1 si possono considerare le grandezze:

$$F_{ij} := \frac{\partial \chi_j}{\partial X_i}, \quad i, j = 1, 2, 3.\tag{1.12}$$

Esse sono le componenti del cosiddetto *tensore di deformazione materiale*:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} =: \nabla_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\chi},\tag{1.13}$$

in cui

$$J = \det(\underline{\mathbf{F}})\tag{1.14}$$

deve essere non nullo per garantire l'invertibilità del moto, poiché  $\mathbf{F}$  è la matrice jacobiana della mappa  $\boldsymbol{\chi}$ . Se la mappa  $\boldsymbol{\chi}$  non fosse invertibile si potrebbero avere segmenti materiali deformati a lunghezza nulla. Ogni componente rappresenta la variazione relativa di lunghezza di un segmento materiale del corpo. Il tensore lega un vettore infinitesimo della configurazione presente ad uno della configurazione al tempo  $t$  tramite:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \underline{\mathbf{F}}_t(\mathbf{X}).\tag{1.15}$$

Infatti, per definizione:

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}') - \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}' - \mathbf{X}) \cdot \underline{\mathbf{F}}_t(\mathbf{X}) + o(\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\|).\tag{1.16}$$

che nel limite  $\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}$  dà l'equazione 1.15.

Utilizzando lo spostamento  $\mathbf{U}$  di una particella (visto in 1.6) si dimostra che:

$$\underline{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\chi} = \nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{X}} \otimes (\mathbf{X} + \mathbf{U}) = \underline{\mathbf{I}} + \nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{U}, \quad (1.17)$$

con  $\underline{\mathbf{I}}$  matrice identità. Se  $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{I}}$  non c'è deformazione né rotazione e si ha avuto solamente la traslazione di un corpo rigido.

Le proprietà geometriche della configurazione presente del corpo sono descritte dalla metrica  $ds = \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}$  che, utilizzando 1.15, varia secondo la relazione:

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (d\mathbf{X} \cdot \underline{\mathbf{F}}) \cdot (d\mathbf{X} \cdot \underline{\mathbf{F}}) = d\mathbf{X} \cdot \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{F}}^T \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \underline{\mathbf{C}} d\mathbf{X}. \quad (1.18)$$

Si definisce  $\underline{\mathbf{C}} := \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{F}}^T$  il *tensore di deformazione di Green* che indica il cambiamento locale delle distanze tra particelle dovuto alla deformazione.

La variazione di volume infinitesimo tra le due configurazioni è:

$$\begin{aligned} dx^3 &= d\mathbf{x}_3 \cdot (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) = \\ &= (d\mathbf{X}_3 \cdot \underline{\mathbf{F}}) \cdot [(d\mathbf{X}_1 \cdot \underline{\mathbf{F}}) \times (d\mathbf{X}_2 \cdot \underline{\mathbf{F}})] = Jd\mathbf{X}_3 \cdot (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) = \\ &= JdX^3. \end{aligned} \quad (1.19)$$

usando l'identità A.12. Si osserva il significato fisico di  $J$ , che lega le variazioni di volume da una configurazione ad un'altra.

# Capitolo 2

## Leggi di bilancio

In questo capitolo si introduce il concetto di *legge di bilancio* e ci saranno vari approfondimenti legati alle grandezze che verranno studiate. In meccanica del continuo si utilizzano leggi di bilancio di grandezze fisiche per studiare i fenomeni legati ai corpi materiali. Una legge di bilancio deriva da principi della dinamica ed esprime come il valore della quantità fisica interessata possa variare in una regione o in un punto dello spazio. Le grandezze che studieremo approfonditamente sono: massa, momento lineare, momento angolare, energia ed entropia. Le leggi di bilancio non sono sufficienti a descrivere completamente un fenomeno, perciò successivamente verranno introdotte le *relazioni costitutive*, leggi fenomenologiche caratterizzanti i singoli corpi.

### 2.1 Teorema del trasporto di Reynolds e leggi di bilancio generiche

Prima di introdurre le leggi di bilancio è utile affrontare il teorema del trasporto di Reynolds poiché fornisce la variazione di una quantità fisica in un volume in moto. Si definisce *grandezza estensiva* una grandezza  $q$  esprimibile come:

$$q = \int_{\mathcal{V}} \rho_q dV, \quad (2.1)$$

dove  $\rho_q$  è la densità volumetrica<sup>1</sup> della grandezza nel volume materiale<sup>2</sup>  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  considerato. In descrizione euleriana, la derivata temporale di grandezze estensive, considerando il moto del volume materiale, si può calcolare, secondo la definizione analitica, come:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho_q(t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}_{t+\Delta t}} \rho_q(t + \Delta t) dV' - \int_{\mathcal{V}_t} \rho_q(t) dV}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup> $\rho_q = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ .

<sup>2</sup>Volume che contiene sempre le stesse particelle ed individua istante per istante un volume geometrico.

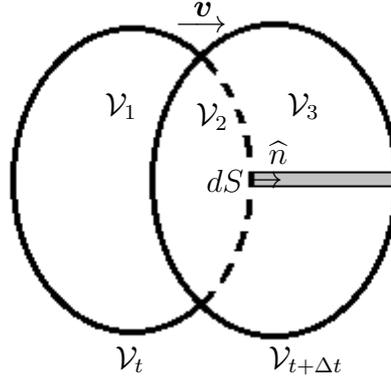


Figura 2.1: Indicazione dei volumi considerati durante la dimostrazione del teorema del trasporto

In base alla figura 2.1 si nota che  $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$  e  $\mathcal{V}_{t+\Delta t} = \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3$ , quindi sfruttando l'additività degli integrali:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}_2} [\rho_q(t) + \frac{\partial \rho_q(t)}{\partial t} \Delta t] dV_2 + \int_{\mathcal{V}_3} [\rho_q(t) + \frac{\partial \rho_q(t)}{\partial t} \Delta t] dV_3 - \int_{\mathcal{V}_2} \rho_q(t) dV_2 - \int_{\mathcal{V}_1} \rho_q(t) dV_1}{\Delta t}, \quad (2.3)$$

in cui:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}_2} [\rho_q(t) + \frac{\partial \rho_q(t)}{\partial t} \Delta t - \rho_q(t)] dV_2}{\Delta t} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial \rho_q(t)}{\partial t} dV, \quad (2.4)$$

poiché  $\mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_t$  per  $\Delta t \rightarrow 0$ . Per calcolare i termini restanti, sempre dalla figura 2.1, detti  $dS$  un elemento infinitesimo di superficie della frontiera  $\partial \mathcal{V}_t$ ,  $\hat{n}$  il versore normale uscente dal volume e  $\mathbf{v}$  la velocità del moto, si ha, rispettivamente per i volumi  $\mathcal{V}_3$  e  $\mathcal{V}_1$ , data la loro orientazione<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} dV_3 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS_3 = \Delta t \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_3, \\ dV_1 &= -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS_1 = -\Delta t \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}_3} [\rho_q(t) + \frac{\partial \rho_q(t)}{\partial t} \Delta t] dV_3 - \int_{\mathcal{V}_1} \rho_q(t) dV_1}{\Delta t} &= \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \oint_{S_3} [\rho_q(t) + \frac{\partial \rho_q(t)}{\partial t} \Delta t] \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_3 + \oint_{S_1} \rho_q(t) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_1 \right] &= \\ = \oint_{S_t} \rho_q(t) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, & \end{aligned} \quad (2.6)$$

poiché  $S_3 \rightarrow S_t$  e  $S_1 \rightarrow S_t$  per  $\Delta t \rightarrow 0$ . Se  $\rho_q$  è differenziabile su  $S_t$  si può applicare il *teorema della divergenza* A.16:

$$\oint_S \rho_q \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (\rho_q \mathbf{v}) dV. \quad (2.7)$$

<sup>3</sup>Un vettore superficie è definito come  $\mathbf{S} = S \hat{n}$

Sommando i termini in 2.4 e 2.7 si ottiene il *teorema del trasporto di Reynolds*:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho_q dV = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_q \mathbf{v}) \right] dV. \quad (2.8)$$

Fisicamente, il teorema dice che la variazione nel tempo di una grandezza estensiva in un volume materiale è dato da due contributi: uno dovuto al cambiamento nel tempo della densità della grandezza ed uno dovuto a  $\rho_q \mathbf{v}$ , la *densità di corrente convettiva* di  $q$ , causata dal moto del corpo nello spazio.

Una legge di bilancio di una grandezza fisica  $q$  contenuta in un volume materiale  $\mathcal{V}$  di superficie  $\partial\mathcal{V}$  solitamente ha la forma *globale* o integrale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho_q dV &= \int_{\mathcal{V}_t} \pi_q dV - \oint_{\partial\mathcal{V}_t} \phi_q \cdot d\mathbf{S}, \\ \frac{dq}{dt} &= \Pi_q - \Phi_q. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$\Pi_q$  indica il *rateo di produzione* di quella grandezza nella regione  $\mathcal{V}$  mentre  $\Phi_q$  il *flusso* uscente attraverso la frontiera  $\partial\mathcal{V}$ , sottratto secondo la convenzione della normale esterna. Rispettivamente essi hanno densità  $\pi_q$  e  $\phi_q$ . In particolare  $\phi_q$  è la *densità di corrente conduttiva* della grandezza e non è legata al moto del corpo. Utilizzando i teoremi della divergenza e del trasporto, confrontando gli integrali in 2.8 e 2.9, validi per qualsiasi volume materiale:

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_q \mathbf{v}) = \pi_q - \nabla \cdot \phi_q, \quad (2.10)$$

porta alla forma *locale* o differenziale di una legge di bilancio:

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} - \pi_q + \nabla \cdot (\rho_q \mathbf{v} + \phi_q) = 0. \quad (2.11)$$

### 2.1.1 Variazione del volume

Si può applicare il teorema del trasporto alla misura  $\text{vol}(\mathcal{V})$  di un volume materiale, avente densità unitaria ( $\rho_V = 1$ ):

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} dV, \\ \frac{d}{dt} \text{vol}(\mathcal{V}) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV = \int_{\mathcal{V}_t} \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \end{aligned} \quad (2.12)$$

In base a ciò che è stato detto sulle leggi di bilancio (2.9), la densità di rateo di produzione di volume è  $\pi_V = \nabla \cdot \mathbf{v}$ , mentre  $\phi_V = 0$ . Come conseguenza, se un corpo qualsiasi conserva il proprio volume, cioè è *incompressibile*, il campo di velocità deve essere solenoidale (a divergenza nulla) e si può esprimere come il rotore di un potenziale vettore  $\mathbf{w}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{w}. \quad (2.13)$$

## 2.2 Bilancio della massa

Sperimentalmente la massa di ogni volume materiale è conservata:

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

Attraverso la densità, che sarà indicata con  $\rho$  per semplicità, applicando il teorema del trasporto:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho dV = \int_{\mathcal{V}_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (2.15)$$

Poiché ciò vale per ogni volume materiale, si ottiene l'equazione di *bilancio della massa*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.16)$$

detta anche *equazione di continuità*. Confrontata con una legge di bilancio generica si nota che  $\pi_m = 0$  e  $\phi_m = 0$ , cioè non ci possono essere produzioni (creazione o distruzione) né flussi conduttivi di massa, ma solo convezione. Per questo si afferma che la massa è una quantità conservata.

Sviluppando la divergenza del prodotto (A.8) si può individuare la derivata materiale (1.11) della densità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.17)$$

Se il campo di velocità è solenoidale, il corpo è incompressibile e vale  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ .

Si può applicare l'equazione di continuità per ottenere una formulazione alternativa delle leggi di bilancio generiche. Consideriamo la densità specifica (per unità di massa)  $q^*$  di una grandezza  $q$ . La densità di  $q$  sarà  $\rho_q = \rho q^*$  e la corrispondente legge di bilancio:

$$\frac{\partial(\rho q^*)}{\partial t} - \pi_q + \nabla \cdot (\rho q^* \mathbf{v} + \phi_q) = 0. \quad (2.18)$$

Sviluppando le derivate dei prodotti:

$$q^* \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] + \rho \left( \frac{\partial q^*}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q^* \right) - \pi_q + \nabla \cdot \phi_q = 0, \quad (2.19)$$

si arriva alla forma:

$$\rho \frac{dq^*}{dt} - \pi_q + \nabla \cdot \phi_q = 0. \quad (2.20)$$

## 2.3 Tensore di stress

Prima di passare al momento lineare è utile soffermarsi sul concetto di forza in meccanica del continuo. La forza totale agente su un corpo può essere separata in due componenti,

una detta *forza di volume*, l'altra detta *forza di superficie*. La prima è un tipo di forza che viene applicata a tutte le particelle contenute nel volume  $\mathcal{V}$  considerato ed è generalmente è causata da interazioni a lungo raggio o da forze inerziali. Consideriamo una porzione  $\Delta\mathcal{V}$  del corpo di volume  $\Delta V$ : su di essa agisce una forza di volume  $\Delta\mathbf{F}_V = \Delta V \mathbf{f}_V$ , espressa attraverso la *densità di forza di volume*  $\mathbf{f}_V$ . La forza di volume totale agente su un corpo è quindi:

$$\mathbf{F}_V = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_V dV. \quad (2.21)$$

La seconda è un tipo di forza che agisce per contatto con la superficie  $\partial\mathcal{V}$  del corpo, per cui ha origine intermolecolare ed è causata da pressioni o attriti. Si considera una porzione della superficie  $\partial\mathcal{V}$  di un corpo con area  $\Delta S$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  normale uscente. Su di essa agisce una forza di superficie  $\Delta\mathbf{F}_S$ . Si assume l'esistenza del limite di  $\frac{\Delta\mathbf{F}_S}{\Delta S}$  per  $\Delta S \rightarrow 0$  e si definisce la *trazione* agente su un punto della superficie come:

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{F}_S}{dS}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t). \quad (2.22)$$

La forza di superficie totale agente su un corpo è quindi:

$$\mathbf{F}_S = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) dS. \quad (2.23)$$

La forza totale agente su un corpo è la somma di 2.21 e 2.23:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_V dV + \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) dS. \quad (2.24)$$

Si può dimostrare una relazione equivalente al terzo principio della dinamica. Dalla

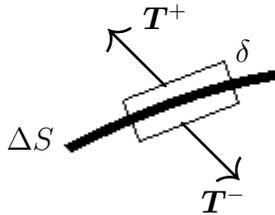


Figura 2.2: Un cilindro che racchiude la superficie  $\Delta S$ , con le basi parallele ad essa, di altezza  $\delta$ .

figura 2.2, nel limite  $\delta \rightarrow 0$ , mantenendo  $\Delta S$  finito, le forze di volume e quelle di superficie sulle pareti laterali del cilindro tendono a zero, facendo restare le trazioni sulle basi che danno la somma delle forze:

$$\mathbf{T}^+ \Delta S + \mathbf{T}^- \Delta S = 0. \quad (2.25)$$

Da cui, con la notazione precedente:

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{T}(-\hat{\mathbf{n}}). \quad (2.26)$$

Matematicamente la trazione è una funzione dispari della normale alla superficie considerata.

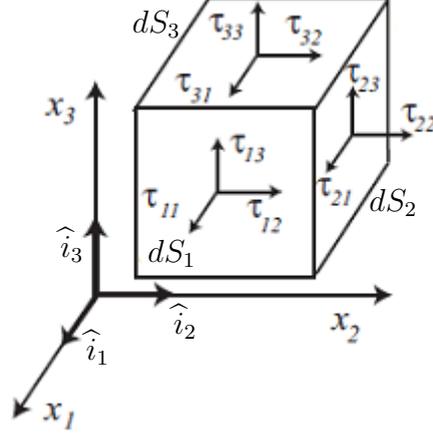


Figura 2.3: Rappresentazione delle componenti del tensore di stress.

Se adottiamo delle superfici infinitesime  $dS_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), come in figura 2.3 con normale parallela a  $\hat{\mathbf{i}}_j$  (vettore di una base ortonormale) nel verso positivo dell'asse coordinato  $x_j$ , le trazioni su di esse saranno  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{i}}_j)$  con componenti  $T_k(\hat{\mathbf{i}}_j) := \tau_{jk}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) che formano un tensore.  $\tau_{jk}$  è la componente  $k$ -esima della trazione esercitata sulla superficie  $dS_j$ . Tali componenti delle trazioni sono detti *sforzi* o *stress* da cui l'omonimo tensore:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Gli sforzi del tipo  $\tau_{jj}$ , elementi della diagonale, sono detti *normali*, gli altri *di taglio*.

Consideriamo ora un tetraedro infinitesimale (figura 2.4) con superfici  $dS_1$ ,  $dS_2$ ,  $dS_3$  con normali rispettivamente  $-\hat{\mathbf{i}}_1$ ,  $-\hat{\mathbf{i}}_2$ ,  $-\hat{\mathbf{i}}_3$  e  $dS$  obliqua, con normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , distante  $h$  dal vertice opposto. Il volume è  $dV = \frac{1}{3}hdS$ . Sulle superfici coordinate è possibile scomporre le trazioni come descritto in precedenza, mentre sulla superficie rimanente è applicata una trazione  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}})$ . Applicando la seconda legge della dinamica (in questo caso  $d\mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$ ) lungo la direzione  $x_k$ :

$$f_k dV + T_k(\hat{\mathbf{n}})dS - \tau_{1k}dS_1 - \tau_{2k}dS_2 - \tau_{3k}dS_3 = \rho \frac{dv_k}{dt} dV, \quad (2.28)$$

tenendo conto che  $dS_j = \hat{\mathbf{i}}_j \cdot d\mathbf{S} = n_j dS$  e dividendo per  $dS$ :

$$\frac{1}{3}hf_k + T_k(\hat{\mathbf{n}}) - n_1\tau_{1k} - n_2\tau_{2k} - n_3\tau_{3k} = \frac{1}{3}h\rho \frac{dv_k}{dt}, \quad (2.29)$$

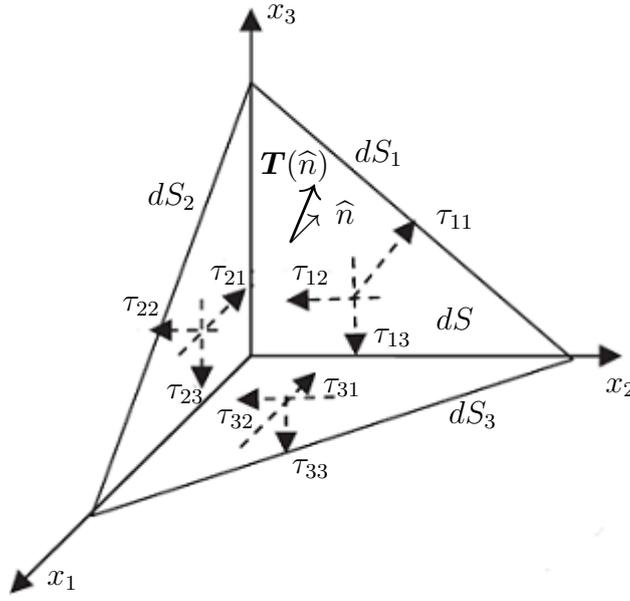


Figura 2.4: Rappresentazione delle trazioni su un tetraedro.

nel limite  $h \rightarrow 0$  si ottiene:

$$T_k(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{j=1}^3 n_j \tau_{jk}. \quad (2.30)$$

Segue la *formula di Cauchy* per il vettore trazione su una generica superficie con normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , che può essere calcolato come prodotto tra il versore normale alla superficie ed il tensore di stress:

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.31)$$

Utilizziamo la formula di Cauchy ed il teorema della divergenza per riscrivere la *forza totale* in 2.24:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f}_V + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) dV \quad (2.32)$$

## 2.4 Bilancio del momento lineare

Consideriamo una porzione di un corpo con volume  $\Delta V$ . La sua massa sarà  $\Delta m = \rho \Delta V$ . Il *momento lineare* che possiede è quindi  $\Delta \mathbf{P} = \Delta m \mathbf{v} = \rho \Delta V \mathbf{v}$ . La densità di momento lineare è  $\boldsymbol{\rho}_P = \rho \mathbf{v}$  e si può calcolare il momento lineare totale posseduto dal corpo:

$$\mathbf{P} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} dV. \quad (2.33)$$

Vale la *seconda legge della dinamica*:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (2.34)$$

nella quale si sostituisce al primo membro la formula della forza 2.32 ed al secondo si applica il teorema del trasporto 2.8, che permette di confrontare gli integrali di volume:

$$\mathbf{f}_V + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}). \quad (2.35)$$

Riordinando i termini si ottiene l'equazione del moto:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{f}_V + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0. \quad (2.36)$$

In questo caso  $\boldsymbol{\pi}_P = \mathbf{f}_V$  e  $\underline{\boldsymbol{\phi}}_P = -\underline{\boldsymbol{\tau}}$ , cioè la densità di rateo di produzione di momento lineare è uguale alla densità di forza di volume, mentre la sua densità di corrente è una grandezza tensoriale opposta al tensore di stress.

Si possono usare le identità A.9, A.10 e A.11:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{v} + \rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho\mathbf{v}) - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \\ & = \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{v} + \rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla\rho)\mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \\ & = \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{v} + \rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Si annulla il termine nelle parentesi quadre per la conservazione della massa in 2.17 e si ottiene:

$$\rho \left[ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0, \quad (2.38)$$

in cui tra parentesi quadre compare la derivata materiale della velocità e si può riformulare la seconda legge della dinamica nei termini di densità:

$$\rho\mathbf{a} - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0. \quad (2.39)$$

Per ottenere una legge di *bilancio dell'energia cinetica*, che verrà introdotta in seguito, si effettua il prodotto scalare tra la velocità e l'equazione del moto:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f}_V + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) = \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V + \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0. \quad (2.40)$$

## 2.5 Bilancio del momento angolare

Consideriamo sempre una porzione di volume materiale che misuri  $\Delta V$  con superficie di area  $\Delta S$ . Essa possiede un *momento angolare*  $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{x} \times \Delta \mathbf{P} = \mathbf{x} \times \rho \Delta V \mathbf{v}$ . La densità di momento angolare è  $\boldsymbol{\rho}_L = \mathbf{x} \times \rho\mathbf{v}$  e si può calcolare il momento angolare totale posseduto dal corpo:

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{x} \times \rho\mathbf{v} dV, \quad (2.41)$$

Vale la *seconda legge della dinamica per le rotazioni*:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (2.42)$$

nella quale  $\mathbf{M}$  è il *momento meccanico*. Anche in questo caso il momento meccanico avrà un contributo di volume ed uno di superficie. Sulla porzione del corpo considerata agiscono il momento della forza di volume  $\Delta\mathbf{M}_V = \mathbf{x} \times \Delta\mathbf{F}_V = \mathbf{x} \times \Delta V \mathbf{f}_V$  (da 2.21) e quello della forze di superficie  $\Delta\mathbf{M}_S = \mathbf{x} \times \Delta\mathbf{F}_S = \mathbf{x} \times \Delta S \mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{x} \times \Delta S(\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{x} \times (\Delta\mathbf{S} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}})$  (da 2.23 e 2.31). I contributi totali dei momenti meccanici agenti sono:

$$\mathbf{M}_V = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f}_V dV \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_S = \oint_{\partial V} \mathbf{x} \times (d\mathbf{S} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{x} \times \underline{\boldsymbol{\tau}}) dV, \quad (2.43)$$

dove si è usato:

$$\mathbf{x} \times (d\mathbf{S} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) = d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{x} \times \underline{\boldsymbol{\tau}}) \quad (2.44)$$

per applicare il teorema della divergenza. Il momento meccanico totale agente sul corpo è:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_V + \mathbf{M}_S = \int_V [\mathbf{x} \times \mathbf{f}_V + \nabla \cdot (\mathbf{x} \times \underline{\boldsymbol{\tau}})] dV. \quad (2.45)$$

Dato che per il teorema del trasporto:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int_{V_t} \left[ \frac{\partial(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}] \right] dV, \quad (2.46)$$

si ottiene, attraverso 2.42:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{f}_V + \nabla \cdot (\mathbf{x} \times \underline{\boldsymbol{\tau}}) = \frac{\partial(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}]. \quad (2.47)$$

Riordinando i termini otteniamo il *bilancio del momento angolare*:

$$\frac{\partial(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{x} \times \mathbf{f}_V + \nabla \cdot [(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v}) \otimes \mathbf{v} + \underline{\boldsymbol{\tau}} \times \mathbf{x}] = 0. \quad (2.48)$$

In questo caso  $\boldsymbol{\pi}_L = \mathbf{x} \times \mathbf{f}_V$  e  $\boldsymbol{\phi}_L = \underline{\boldsymbol{\tau}} \times \mathbf{x}$ , cioè la densità di rateo di produzione di momento angolare è uguale momento della forza di volume, mentre la sua densità di corrente è un tensore opposto al momento degli sforzi.

Usiamo:

$$\nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} \times \mathbf{x}) = -[\mathbf{x} \times (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) + * \underline{\boldsymbol{\tau}}] \quad (2.49)$$

con cui si può riscrivere 2.48 tenendo conto che  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = 0$ :

$$\mathbf{x} \times \left[ \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \right] + \nabla \cdot [(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}] - * \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0. \quad (2.50)$$

Ora si utilizza l'equazione del moto 2.36 per avere  $\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$  e quindi:

$$\nabla \cdot [(\mathbf{x} \times \rho\mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}] - \mathbf{x} \times [\nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] - * \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0. \quad (2.51)$$

Usando A.13 e A.14 invece si hanno:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot [(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}] = \nabla \cdot [\mathbf{v} \otimes (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v})] = \\
& = (\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) = \\
& = (\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{I}) \times \rho \mathbf{v} + \mathbf{x} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{v}) = \\
& = \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{v})\rho \mathbf{v} + \mathbf{x} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{v}) \quad \text{e} \\
& \mathbf{x} \times \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{x} \times \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) = \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{v})\rho \mathbf{v} + \mathbf{x} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Questi due termini sono uguali e la 2.51 si riduce a:

$$*\underline{\boldsymbol{\tau}} = 0. \tag{2.53}$$

Dalla definizione di  $*\underline{\boldsymbol{\tau}}$ :

$$(*\underline{\boldsymbol{\tau}})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \tau_{jk} \tag{2.54}$$

e ponendo  $i = 1$ , l'equazione 2.53 dà  $\tau_{23} - \tau_{32} = 0$ . Analogamente, per  $i = 2, 3$  si ottengono rispettivamente  $\tau_{31} - \tau_{13} = 0$  e  $\tau_{12} - \tau_{21} = 0$ . Poiché abbiamo ottenuto l'uguaglianza di tutti gli elementi non diagonali di  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$  il bilancio del momento angolare equivale alla *simmetria del tensore di stress*:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\boldsymbol{\tau}}^T. \tag{2.55}$$

## 2.6 Bilancio dell'energia

Una porzione di volume materiale di misura  $\Delta V$  possiede un'energia cinetica  $\Delta \mathcal{K} = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V v^2$  ed un'energia interna  $\Delta \mathcal{U} = \Delta m u^* = \rho \Delta V u^*$  data da particolari interazioni molecolari o atomiche che avvengono nel corpo considerato.

La densità di energia cinetica è  $\rho_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \rho v^2$  quindi l'energia cinetica totale posseduta da un corpo è:

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho v^2 dV. \tag{2.56}$$

La densità di energia interna è  $\rho_{\mathcal{U}} = \rho u^*$  quindi l'energia interna totale posseduta dal corpo è:

$$\mathcal{U} = \int_{\mathcal{V}} \rho u^* dV. \tag{2.57}$$

L'energia totale contenuta in un volume materiale è quindi:

$$E = \mathcal{K} + \mathcal{U} = \int_{\mathcal{V}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) dV \tag{2.58}$$

e la sua densità è  $\rho_E = \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right)$ .

Sperimentalmente vale la *prima legge della termodinamica*:

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{Q} + \mathcal{P}. \tag{2.59}$$

$\mathcal{Q}$ , che verrà chiamato *potenza termica*, è il calore scambiato dal corpo per unità di tempo in un qualsiasi processo termodinamico, mentre  $\mathcal{P}$ , la *potenza meccanica*, è il lavoro compiuto dalle forze esterne per unità di tempo.

La potenza meccanica è sempre data da un termine di volume ed uno di superficie. Come nei casi precedenti, si consideri una porzione del corpo di volume  $\Delta V$  e area  $\Delta S$ . La potenza esercitata dalla forza di volume sulla porzione del corpo è  $\Delta \mathcal{P}_V = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{F}_V = \mathbf{v} \cdot \Delta V \mathbf{f}_V$ . La potenza esercitata dalla forza di superficie nella stessa porzione è  $\Delta \mathcal{P}_S = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{F}_S = \mathbf{v} \cdot \Delta S \mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{v} \cdot \Delta S(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \Delta \mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})$  da cui i contributi totali alla potenza:

$$\mathcal{P}_V = \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V dV \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_S = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) dV. \quad (2.60)$$

Quindi la potenza totale è:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_V + \mathcal{P}_S = \int_V [\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})] dV. \quad (2.61)$$

Anche la potenza termica è data dai due contributi di volume e superficie. Per il primo consideriamo la densità di rateo di scambio di energia termica  $q_V$ . Il secondo invece è dato dalla densità di corrente termica conduttiva  $\mathbf{h}$ , legata allo scambio di calore attraverso la superficie del corpo. Per una porzione di volume  $\Delta V$  del corpo l'energia termica scambiata nell'unità di tempo è  $\mathcal{Q}_V = q_V \Delta V$ , mentre il calore scambiato per conduzione attraverso la superficie  $\Delta S$  per unità di tempo è  $\mathcal{Q}_S = -\mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{S}$ . Si possono esprimere i contributi totali di  $\mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{Q}_V = \int_V q_V dV \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_S = - \oint_{\partial V} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{h}) dV. \quad (2.62)$$

La potenza termica totale è quindi:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_V + \mathcal{Q}_S = \int_V (q_V - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{h}) dV. \quad (2.63)$$

Ora è possibile ricavare il *bilancio dell'energia totale* dalla prima legge della termodinamica 2.59 usando sempre il teorema del trasporto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \right] - \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V - q_V + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \mathbf{v} + \mathbf{h} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \right] = 0. \quad (2.64)$$

In questo caso  $\pi_E = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V + q_V$  e  $\phi_E = \mathbf{h} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}$ , cioè la densità di rateo di produzione di energia del corpo è uguale alla somma della potenza della forza di volume e della densità di rateo di scambio di energia termica, mentre la sua densità di corrente conduttiva è un vettore uguale alla differenza tra la densità di corrente termica conduttiva ed il prodotto tra la velocità ed il tensore di stress, di cui tra poco vedremo il significato.

Si possono espandere le derivate dei prodotti nel primo addendo dell'equazione 2.64:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial u^*}{\partial t} \right). \quad (2.65)$$

Per la divergenza, dall'identità A.8, si ha:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \mathbf{v} \right] = \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \right] = \\
& = \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \mathbf{v} \cdot [\nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla u^*] = \\
& = \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) (\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho) + \rho \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla u^*].
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Infine, usando l'identità A.14, ricordando la simmetria di  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ , si ottiene:

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}. \tag{2.67}$$

Ora si inseriscono 2.65, 2.66 e 2.67 nel bilancio dell'energia 2.64:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{2} v^2 + u^* \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \\
& + \mathbf{v} \cdot \left[ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \right] + \\
& + \rho \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u^* \right) - \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - q_V + \nabla \cdot \mathbf{h} = 0.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Nella prima riga dell'equazione è presente il termine di conservazione della massa visto in 2.17, nella seconda riga la derivata materiale 1.11 della velocità che porta al bilancio del momento lineare 2.39 ed infine nella terza riga si riconosce la derivata materiale dell'energia interna per unità di massa. Il tutto porta a formulare una legge di *bilancio dell'energia interna*:

$$\rho \frac{du^*}{dt} - \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - q_V + \nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \tag{2.69}$$

## 2.6.1 Lavoro e calore in fisica dei continui

Nel bilancio dell'energia interna compare il termine:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}, \tag{2.70}$$

prodotto diadico tra il tensore di stress ed il gradiente della velocità, che andremo ora ad analizzare per darne un'interpretazione maggiormente dettagliata. Se consideriamo un fluido ideale, lo stress deve essere isotropo ed avremo la relazione costitutiva:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = -\varpi \underline{\mathbf{I}}, \tag{2.71}$$

in cui compare il campo di *pressione*  $\varpi$ . Effettuando la sostituzione in 2.70 si ottiene:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} = -\varpi \underline{\mathbf{I}} \cdot \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} = -\varpi \nabla \cdot \mathbf{v}. \tag{2.72}$$

Ora confrontiamo questo termine con la potenza delle forze esterne che agiscono su una porzione del fluido di volume  $\Delta V$ . Per farlo, calcoliamo il lavoro meccanico  $\Delta\mathcal{L} = -\varpi\Delta V$  compiuto da esse nell'unità di tempo, richiamando 2.12:

$$\Delta\mathcal{P} = \frac{d\Delta\mathcal{L}}{dt} = -\varpi\frac{d}{dt}\Delta V = -\varpi(\nabla \cdot \mathbf{v})\Delta V. \quad (2.73)$$

Si ottiene:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} = \frac{\Delta\mathcal{P}}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta\mathcal{L}}{dt} = \frac{-\varpi\frac{d}{dt}\Delta V}{\Delta V} = -\varpi\nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.74)$$

Questo esempio permette di capire che  $\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$  corrisponde all'usuale lavoro meccanico della prima legge della termodinamica 2.59 ed è chiamata *potenza degli stress*. Il termine  $q_V$  corrisponde allo scambio di energia termica con l'esterno, mentre  $\mathbf{h}$  è il calore scambiato dal corpo per unità di superficie nell'unità di tempo. Si può affermare che la legge di bilancio dell'energia interna non è altro che una riformulazione della prima legge della termodinamica.

## 2.7 Disuguaglianza dell'entropia

Assegniamo ad una porzione di volume materiale l'entropia  $\Delta\mathcal{S} = s^*\Delta m = s^*\rho\Delta V$ . La densità di entropia è  $\rho_S = \rho s^*$  quindi l'entropia totale di un corpo è:

$$\mathcal{S} = \int_V \rho s^* dV. \quad (2.75)$$

Possiamo pensare che per l'entropia valga una legge di bilancio del tipo:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \Pi_S - \Phi_S. \quad (2.76)$$

In generale un termine  $\Pi_q$  di rateo di produzione di una grandezza  $q$ , o equivalentemente la sua densità  $\pi_q$ , può essere scomposto in un termine di scambio con l'esterno  $\Pi_q^{\text{ext}}$  ed in uno di produzione interna  $\Pi_q^{\text{int}}$ , quindi:

$$\Pi_q = \Pi_q^{\text{ext}} + \Pi_q^{\text{int}}. \quad (2.77)$$

Nelle precedenti leggi di bilancio affrontate, il termine  $\Pi_q^{\text{int}}$  è sempre stato nullo. Osserviamo che per la massa il rateo di produzione totale è nullo secondo la legge di conservazione; per il momento lineare ed il momento angolare il termine di produzione deriva solo da forze o momenti esterni perché, per la terza legge della dinamica, la somma delle forze e dei momenti interni, se ve ne sono, è nulla; per l'energia il termine di produzione è dato dalla potenza delle forze esterne e dallo scambio energetico con l'ambiente. Se consideriamo le leggi di bilancio di energia cinetica 2.40 e di energia interna 2.69, in entrambe compare il termine della potenza degli stress  $\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$  ma con segno opposto; ciò significa che esso deve essere un termine dissipativo, perché singolarmente le due forme di energia non si conservano in un sistema isolato, mentre se sommate esso scompare e si ottiene l'energia totale.

A differenza delle altre grandezze, per l'entropia il termine  $\Pi_S^{\text{int}}$  non è nullo ed è difficile da modellizzare. Per questo si adotta il *principio di Prigogine* secondo il quale:

$$\Pi_S^{\text{int}} \geq 0, \quad (2.78)$$

dove l'uguaglianza vale solo nel caso di processi termodinamici reversibili. Si ottiene che la produzione totale di entropia non è minore della produzione esterna e tornando alla 2.75, possiamo ottenere una disuguaglianza per l'entropia:

$$\begin{aligned} \Pi_S - \Pi_S^{\text{ext}} &= \Pi_S^{\text{int}} \geq 0; \\ \frac{dS}{dt} - \Pi_S^{\text{ext}} + \Phi_S &= \Pi_S^{\text{int}} \geq 0, \\ \frac{dS}{dt} &\geq \Pi_S^{\text{ext}} - \Phi_S. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ora cercheremo di dare un'espressione allo scambio con l'esterno ed al flusso. La *seconda legge dell'entropia* afferma che per un qualsiasi processo termodinamico deve valere:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{\Theta}, \quad (2.80)$$

dove  $\delta Q$  è il calore infinitesimo scambiato in quel processo e  $\Theta$  il campo di temperatura. L'uguaglianza vale solo in caso di processi termodinamici reversibili. Consideriamo una porzione di un corpo di volume  $\Delta V$  e superficie  $\Delta S$ ; assumiamo che l'entropia scambiata con l'esterno per unità di tempo in quel volume sia  $\Delta \Pi_S^{\text{ext}} = \frac{q_V}{\Theta} \Delta V$ . L'uguaglianza è possibile perché consideriamo un volume piccolo tale da avere tempi di rilassamento brevi ed essere in equilibrio termodinamico. Lo stesso vale per il contributo conduttivo  $\Delta \Phi_S = \frac{h}{\Theta} \cdot \Delta S$ . Per l'intero corpo si ha:

$$\Pi_S^{\text{ext}} = \int_V \frac{q_V}{\Theta} dV \quad \text{e} \quad \Phi_S = \oint_{\partial V} \frac{h}{\Theta} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \left( \frac{h}{\Theta} \right) dV \quad (2.81)$$

Ora possiamo riscrivere la 2.79:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho s^* dV \geq \int_{V_t} \left[ \frac{q_V}{\Theta} - \nabla \cdot \left( \frac{h}{\Theta} \right) \right] dV. \quad (2.82)$$

Adesso è possibile utilizzare il teorema del trasporto per ottenere la *disuguaglianza dell'entropia*:

$$\frac{\partial(\rho s^*)}{\partial t} - \frac{q_V}{\Theta} + \nabla \cdot \left( \rho s^* \mathbf{v} + \frac{h}{\Theta} \right) \geq 0. \quad (2.83)$$

In questo caso, come già visto,  $\pi_S = \frac{q_V}{\Theta}$  è la densità di rateo di scambio di entropia con l'esterno e  $\phi_S = \frac{h}{\Theta}$  è la densità del suo flusso conduttivo attraverso la superficie del corpo.

Esprimendo la legge nella forma 2.20 si ottiene la *disuguaglianza di Clausius-Duhem*:

$$\rho \frac{ds^*}{dt} - \frac{q_V}{\Theta} + \nabla \cdot \left( \frac{h}{\Theta} \right) \geq 0. \quad (2.84)$$

## 2.8 Riassunto delle leggi di bilancio e necessità delle relazioni costitutive

In questa sezione si riportano le leggi di bilancio ottenute, fondamento della meccanica del continuo.

Bilancio della massa (equazione di continuità):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.85)$$

Bilancio del momento lineare (equazione del moto):

$$\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0. \quad (2.86)$$

Bilancio del momento angolare (simmetria del tensore di stress):

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}^T = 0. \quad (2.87)$$

Bilancio dell'energia interna:

$$\rho \frac{du^*}{dt} - \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - q_V + \nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \quad (2.88)$$

Disuguaglianza di Clausius-Duhem dell'entropia:

$$\rho \frac{ds^*}{dt} - \frac{q_V}{\Theta} + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{h}}{\Theta} \right) \geq 0. \quad (2.89)$$

Le prime quattro costituiscono 5 equazioni scalari indipendenti più 3 vincoli al tensore di stress per 16 variabili indipendenti ( $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ ,  $u^*$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $s^*$  e  $\Theta$ ), considerando l'azione dei termini  $\mathbf{f}_V$  e  $q_V$  come nota. Esse sono leggi universali, valide per qualsiasi corpo. Servirebbero 11 equazioni addizionali per poter risolvere il problema. Queste dipendono dal tipo di continuo preso in considerazione, ad esempio un solido o un fluido, e sono dette *relazioni costitutive*. Le relazioni costitutive specificano le proprietà meccaniche e termiche di un particolare materiale basate sulla sua struttura interna o su un suo particolare comportamento in determinate condizioni. Generalmente queste relazioni legano i campi incogniti a campi scelti come fondamentali. Solitamente i campi fondamentali scelti sono  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  o  $\Theta$ . Le relazioni costitutive devono comunque essere tali da far rispettare la disuguaglianza dell'entropia in ogni processo termodinamico. Ora vedremo come l'assunzione delle ipotesi di Coleman e Noll renda la disuguaglianza di Clausius-Duhem un vincolo sui coefficienti di queste relazioni.

### 2.8.1 Metodo di Coleman e Noll

Il *metodo di Coleman e Noll*, applicato ai fluidi viscosi, permette di utilizzare la disuguaglianza di Clausius-Duhem per ottenere dei vincoli sui coefficienti delle relazioni

costitutive. Dalla disuguaglianza 2.89 si ottiene:

$$\rho \frac{ds^*}{dt} + \frac{1}{\Theta} (\nabla \cdot \mathbf{h} - q_V) - \frac{\mathbf{h}}{\Theta^2} \cdot \nabla \Theta \geq 0. \quad (2.90)$$

Sfruttando il bilancio dell'energia interna 2.88,  $\nabla \cdot \mathbf{h} - q_V = \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \rho \frac{du^*}{dt}$  e si ottiene la disuguaglianza di Clausius-Duhem rispetto all'energia interna:

$$-\rho \left( \frac{du^*}{dt} - \Theta \frac{ds^*}{dt} \right) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{\mathbf{h}}{\Theta} \cdot \nabla \Theta \geq 0. \quad (2.91)$$

A questo punto si introduce la densità specifica di *energia libera di Helmholtz*  $f^*$ :

$$f^* = u^* - \Theta s^*, \quad (2.92)$$

controparte di  $F = U - TS$  in termodinamica classica. Inserendo la densità specifica di energia libera nella disequazione 2.91 si ha:

$$-\rho \left( \frac{df^*}{dt} + s^* \frac{d\Theta}{dt} \right) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{\mathbf{h}}{\Theta} \cdot \nabla \Theta \geq 0. \quad (2.93)$$

Si assume una relazione costitutiva tra l'energia libera specifica e i campi fondamentali del tipo:

$$f^* = f^*(\rho, \Theta). \quad (2.94)$$

In questo modo la 2.93 diventa:

$$-\rho \left( \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial f^*}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{dt} + s^* \frac{d\Theta}{dt} \right) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{\mathbf{h}}{\Theta} \cdot \nabla \Theta \geq 0. \quad (2.95)$$

A titolo illustrativo, consideriamo un fluido viscoso per cui vale la relazione costitutiva:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = -\varpi \mathbf{I} + \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.96)$$

in cui il tensore  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  è un termine deviatorio rispetto ad un fluido perfetto 2.71. Sostituendo la relazione costitutiva nella 2.95 si ottiene:

$$\begin{aligned} & -\rho \left[ \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \left( \frac{\partial f^*}{\partial \Theta} + s^* \right) \frac{d\Theta}{dt} \right] - \varpi \nabla \cdot \mathbf{v} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{\mathbf{h}}{\Theta} \cdot \nabla \Theta = \\ & = -\rho \left[ \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \left( \frac{\partial f^*}{\partial \Theta} + s^* \right) \frac{d\Theta}{dt} \right] + \frac{\varpi}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{\mathbf{h}}{\Theta} \cdot \nabla \Theta = \\ & = -\rho \left( \frac{\partial f^*}{\partial \rho} - \frac{\varpi}{\rho^2} \right) \frac{d\rho}{dt} - \rho \left( \frac{\partial f^*}{\partial \Theta} + s^* \right) \frac{d\Theta}{dt} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{\mathbf{h}}{\Theta} \cdot \nabla \Theta \geq 0, \end{aligned} \quad (2.97)$$

dove sono state usate le relazioni 2.72 e 2.17. Secondo l'ipotesi del metodo di Coleman e Noll, il segno ed il valore assoluto delle derivate temporali totali  $\frac{d\rho}{dt}$  e  $\frac{d\Theta}{dt}$  possono assumere valori arbitrari nell'istante iniziale di tempo e quindi anche in un generico istante di tempo. Per questo, per soddisfare la disuguaglianza di Clausius-Duhem, è necessario che i loro coefficienti siano uguali a zero, quindi:

$$\begin{aligned} s^* &= -\frac{\partial f^*}{\partial \Theta}, \\ \varpi &= \rho^2 \frac{\partial f^*}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

relazioni analoghe a quelle note in termodinamica classica  $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$  e  $P = -\frac{\partial F}{\partial V}$ . Con questa ipotesi la 2.97 si riduce a:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{h}}{\Theta} \cdot \nabla \Theta \geq 0. \quad (2.99)$$

Riprendendo la definizione dell'energia libera 2.92 si ottiene:

$$u^* = f^* + \Theta s^* = f^* - \Theta \frac{\partial f^*}{\partial \Theta}. \quad (2.100)$$

In questo modo i campi incogniti  $s^*$ ,  $\varpi$  e  $u^*$  sono espressi in termini di  $f^*$  e delle sue derivate.

Adottando il modello di Navier-Stokes, che sarà mostrato in dettaglio nel prossimo capitolo, si ha:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\beta \underline{\mathbf{D}}^{\text{st}}, \quad (2.101)$$

dove  $\underline{\mathbf{D}}^{\text{st}}$  è il tensore rateo di deformazione 3.3 senza traccia. Inoltre, come relazione costitutiva, si assume anche la *legge di Fourier* per la conduzione del calore:

$$\boldsymbol{h} = -\kappa \nabla \Theta, \quad (2.102)$$

dove compare il coefficiente di conducibilità termica  $\kappa$ . Usando queste relazioni costitutive la disuguaglianza 2.99 diventa:

$$2\beta \underline{\mathbf{D}}^{\text{st}} \cdot \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\text{st}} + \frac{\kappa}{\Theta} (\nabla \Theta)^2 \geq 0. \quad (2.103)$$

Effettuando il prodotto diadico tra  $\underline{\mathbf{D}}^{\text{st}}$  e  $\nabla \otimes \boldsymbol{v}$  solo la parte senza traccia di quest'ultimo non dà un risultato nullo. La disuguaglianza 2.103, contenendo solo operatori definiti positivi, impone un vincolo sui coefficienti delle relazioni costitutive, cioè  $\beta \geq 0$  e  $\kappa \geq 0$ .

# Capitolo 3

## Meccanica dei fluidi

In questo capitolo verrà approfondito lo studio dei fluidi detti Newtoniani, fino ad arrivare alla formulazione delle equazioni di Navier-Stokes, che governano il loro moto, di cui si mostreranno alcune applicazioni.

### 3.1 Relazioni costitutive per fluidi Newtoniani

Per un fluido Newtoniano in generale si ha la relazione costitutiva:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = -\varpi \underline{\mathbf{I}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.1)$$

Il primo addendo, che contiene il campo di *pressione*  $\varpi$ , è dovuto al fatto che in un fluido in equilibrio le forze di superficie devono essere normali alla superficie stessa, mentre il secondo è un tensore simmetrico che rappresenta gli sforzi di taglio originati dal moto relativo delle particelle di fluido, detti sforzi viscosi.

Consideriamo il tensore  $\nabla \otimes \mathbf{v}$ ; esso è decomponibile in parte simmetrica e parte antisimmetrica:

$$\nabla \otimes \mathbf{v} = \frac{1}{2}[\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T] + \frac{1}{2}[\nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T]. \quad (3.2)$$

La prima parte è associata alla deformazione del fluido in moto, la seconda alla rotazione senza deformazione, perciò quest'ultima non provoca stress viscosi. La parte simmetrica definisce il tensore *rateo di deformazione*  $\underline{\mathbf{D}}$  mentre quella antisimmetrica il tensore di rotazione  $\underline{\mathbf{R}}$ :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}} &:= \frac{1}{2}[\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T], \\ \underline{\mathbf{R}} &:= \nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Quindi avremo:

$$\nabla \otimes \mathbf{v} = \underline{\mathbf{D}} + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{R}}. \quad (3.4)$$

Supponiamo che ci sia una relazione lineare tra sforzi viscosi e rateo di deformazione:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}}, \quad (3.5)$$

in cui  $\underline{\mathbf{A}}$  è un tensore di quarto rango, che deve essere simmetrico, poiché anche  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $\underline{\mathbf{D}}$  lo sono. Si consideri una rotazione del tensore rateo di deformazione data dalla matrice ortogonale  $\underline{\mathcal{R}}$ :

$$\underline{\mathbf{D}} \rightarrow \underline{\mathcal{R}}\underline{\mathbf{D}}\underline{\mathcal{R}}^T = \underline{\mathcal{R}} \otimes \underline{\mathcal{R}} \cdot \underline{\mathbf{D}}. \quad (3.6)$$

Anche gli stress viscosi dovranno subire la stessa trasformazione:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \rightarrow \underline{\mathcal{R}} \otimes \underline{\mathcal{R}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathcal{R}} \otimes \underline{\mathcal{R}} \cdot (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}}). \quad (3.7)$$

Per garantire l'invarianza rotazionale è necessario che il tensore  $\underline{\mathbf{A}}$  commuti con il tensore  $\underline{\mathcal{R}} \otimes \underline{\mathcal{R}}$ , cioè:

$$\underline{\mathcal{R}} \otimes \underline{\mathcal{R}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathcal{R}} \otimes \underline{\mathcal{R}}. \quad (3.8)$$

L'equazione è soddisfatta se le componenti di  $\underline{\mathbf{A}}$  sono espresse come combinazione lineare di prodotti di delta di Kronecker:

$$A_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (3.9)$$

da cui si ricava  $\beta = \gamma$ , poiché, data la simmetria, gli indici  $i$  e  $j$  sono interscambiabili. Quindi dalla 3.5:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha \text{tr}(\underline{\mathbf{D}})\underline{\mathbf{I}} + 2\beta\underline{\mathbf{D}}. \quad (3.10)$$

Il tensore di stress risulta:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = [\alpha \text{tr}(\underline{\mathbf{D}}) - \varpi]\underline{\mathbf{I}} + 2\beta\underline{\mathbf{D}}. \quad (3.11)$$

Si definisce *pressione media* il valore medio degli sforzi normali:

$$\overline{\varpi} := -\frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\boldsymbol{\tau}}), \quad (3.12)$$

da cui, per la 3.11:

$$\overline{\varpi} = \varpi - \left(\alpha + \frac{2}{3}\beta\right)\text{tr}(\underline{\mathbf{D}}) = \varpi - \left(\alpha + \frac{2}{3}\beta\right)\nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.13)$$

L'*assunzione di Stokes* afferma che pressione e pressione media debbano coincidere. L'ipotesi è ragionevole perché gli sforzi viscosi, essendo trasversali, non dovrebbero contribuire alla pressione. Perciò, indipendentemente dalla divergenza della velocità,  $\alpha = -\frac{2}{3}\beta$  e si ottengono il tensore degli sforzi viscosi:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\beta \left( \underline{\mathbf{D}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\mathbf{D}})\underline{\mathbf{I}} \right) := 2\beta\underline{\mathbf{D}}^{\text{st}} \quad (3.14)$$

e la relazione costitutiva per i fluidi Newtoniani:

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = -\varpi\underline{\mathbf{I}} + 2\beta\underline{\mathbf{D}}^{\text{st}}. \quad (3.15)$$

$\underline{\mathbf{D}}^{\text{st}}$  è il tensore  $\underline{\mathbf{D}}$  senza traccia definito nella 3.14 e  $\beta$  prende il nome di coefficiente di *viscosità dinamica*. Abbiamo già visto, come conseguenza della disuguaglianza 2.103, che  $\beta$  deve essere non negativo.

## 3.2 Equazioni di Navier-Stokes ed applicazioni elementari

Sostituendo la relazione costitutiva appena trovata nell'equazione del moto 2.86 è possibile ricavare le *equazioni di Navier-Stokes*:

$$\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V + \nabla \varpi - 2\nabla \cdot (\beta \underline{\mathbf{D}}^{st}) = 0. \quad (3.16)$$

Si può assumere omogenea la viscosità dinamica ed ottenere:

$$\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V + \nabla \varpi - \beta \left[ \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] = 0. \quad (3.17)$$

Questa ipotesi richiede ulteriormente che le variazioni spaziali di temperatura siano piccole in quanto di solito  $\beta$  dipende fortemente dalla temperatura.

Se il fluido è incompressibile, che abbiamo visto in 2.12 equivalere al fatto che il campo di velocità è solenoidale, le equazioni di Navier-Stokes diventano:

$$\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V + \nabla \varpi - \beta \nabla^2 \mathbf{v} = 0. \quad (3.18)$$

Quando si possono trascurare gli effetti viscosi si ottiene l'*equazione di Eulero* per un fluido ideale:

$$\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V + \nabla \varpi = 0. \quad (3.19)$$

### 3.2.1 Flusso di Couette stazionario

Supponiamo che un fluido newtoniano incompressibile scorra nella regione di spazio  $z > 0$  e che sia limitato in  $z = 0$  da una superficie superiore rigida di massa trascurabile in moto con velocità  $\mathbf{V}_0$  nella direzione  $x$  e in  $z = h$  da una superficie inferiore immobile, sulla quale le velocità sono nulle (figura 3.1). Assumiamo che il fluido si muova in direzione  $x$

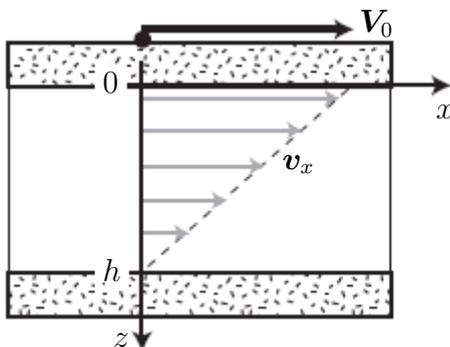


Figura 3.1: Flusso di Couette.

e che la velocità e la pressione dipendano solo da  $z$ . L'ipotesi sulla velocità rende nullo il termine convettivo  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ . La sola forza agente è il peso del fluido lungo la direzione  $z$ , quindi  $\mathbf{f}_V = \rho\mathbf{g}$ . Le equazioni di Navier-Stokes 3.18 per un moto stazionario diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 & \text{(componente } x), \\ \frac{\partial \varpi}{\partial z} - \rho g = 0 & \text{(componente } z), \end{cases} \quad (3.20)$$

con condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v_x(z=0) = V_0, \\ v_x(z=h) = 0, \\ \varpi(z=0) = \varpi_0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Integrando l'equazione per l'asse  $z$  si ottiene l'*equazione barometrica*:

$$\varpi(z) = \varpi_0 + \rho g z, \quad (3.22)$$

nota anche come *legge di Stevino*. Lungo l'asse  $x$  invece abbiamo:

$$v_x(z) = c_1 z + c_2, \quad (3.23)$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti di integrazione da determinare. Dalle condizioni al contorno 3.21 si ottengono  $c_2 = V_0$  e  $c_1 = -\frac{V_0}{h}$ , quindi:

$$v_x(z) = \frac{V_0}{h}(h - z). \quad (3.24)$$

Le componenti non nulle del rateo di deformazione sono  $D_{xz} = D_{zx} = -\frac{V_0}{2h}$  perciò le componenti non nulle del tensore di stress sono:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -\varpi_0 - \rho g z \quad \text{e} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\beta \frac{V_0}{h}. \quad (3.25)$$

Si nota che gli sforzi di taglio sono costanti in tutto il fluido.

Si definisce *portata* (per unità di lunghezza) la grandezza:

$$Q = \int_0^h v_x(z) dz \quad (3.26)$$

che in questo caso vale:

$$Q = \frac{1}{2} V_0 h. \quad (3.27)$$

Dividendo la portata per la profondità del condotto si ottiene la velocità media del fluido:

$$\bar{v}_x = \frac{V_0}{2}. \quad (3.28)$$

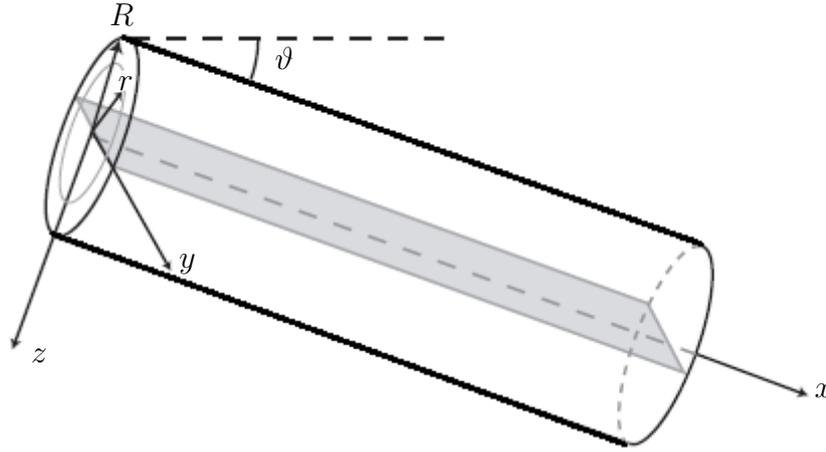


Figura 3.2: Condotta cilindrico inclinato

### 3.2.2 Flusso stazionario in un condotto cilindrico inclinato

Consideriamo un fluido newtoniano incompressibile che scorre lungo la direzione  $x$  in un condotto cilindrico con sezione di raggio  $R$ , inclinato di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale, come in figura 3.2. Sulle pareti del condotto, che sono ferme, la velocità del fluido deve essere nulla e inoltre, per simmetria, essa dipenderà solamente dalla coordinata radiale  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ , perciò si userà  $v_x = u(r)$ . Anche in questo caso il termine di convezione sarà nullo. Si assume inoltre che la pressione non dipenda dalla coordinata  $x$ . In questo caso le equazioni di Navier-Stokes 3.18 per le componenti  $x$ ,  $y$  e  $z$ , nel caso stazionario, sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \rho g \sin \vartheta + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \\ \frac{\partial \varpi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \varpi}{\partial z} - \rho g \cos \vartheta = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

dove per la prima componente si è usata la parte radiale del laplaciano in coordinate cilindriche. Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} u(r = R) = 0, \\ \varpi(z = 0) = \varpi_0. \end{cases} \quad (3.30)$$

La seconda equazione di 3.29 dice che la pressione non dipende da  $y$ , quindi lungo l'asse  $z$  l'equazione barometrica è:

$$\varpi(z) = \varpi_0 + \rho g z \cos \vartheta. \quad (3.31)$$

Per l'asse  $x$  si possono effettuare due integrazioni successive e ottenere:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\rho g \sin \vartheta}{\beta} \frac{r^2}{2} + c_1 \Rightarrow u = -\frac{\rho g \sin \vartheta}{\beta} \frac{r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2. \quad (3.32)$$

Per evitare singolarità in  $r = 0$  deve essere  $c_1 = 0$  mentre, per le condizioni al contorno 3.30,  $c_2 = \frac{\rho g \sin \vartheta}{4\beta} R^2$ , quindi:

$$u(r) = \frac{\rho g \sin \vartheta}{4\beta} (R^2 - r^2) \quad (3.33)$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$v_x(y, z) = \frac{\rho g \sin \vartheta}{4\beta} (R^2 - y^2 - z^2). \quad (3.34)$$

Il profilo della velocità ha la forma di un paraboloide ed è noto come *flusso di Poiseuille*. Il fluido ha una velocità massima al centro del condotto:

$$v_{\max} = u(0) = \frac{\rho g \sin \vartheta}{4\beta} R^2. \quad (3.35)$$

Le componenti non nulle del rateo di deformazione sono  $D_{xy} = D_{yx} = -\frac{\rho g \sin \vartheta}{4\beta} y$  e  $D_{xz} = D_{zx} = -\frac{\rho g \sin \vartheta}{4\beta} z$ , perciò le componenti non nulle del tensore di stress sono:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} &= -\varpi_0 - \rho g z \cos \vartheta, \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} &= -\frac{\rho g y \sin \vartheta}{2}, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\frac{\rho g z \sin \vartheta}{2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

In questo caso gli sforzi di taglio dipendono dalla posizione ma non dal coefficiente di viscosità.

La portata, cioè il volume di fluido che attraversa una sezione del condotto per unità di tempo, è (utilizzando la 3.33):

$$Q = 2\pi \int_0^R r u(r) dr = \rho g \sin \vartheta \frac{\pi R^4}{8\beta}. \quad (3.37)$$

Dividendo la portata per la sezione del condotto si ottiene la velocità media del fluido:

$$\bar{v}_x = \rho g \sin \vartheta \frac{R^2}{8\beta} = \frac{v_{\max}}{2} \quad (3.38)$$

Questa soluzione è stata trovata sotto l'ipotesi di flusso in regime *laminare*. Si parla di regime laminare quando il moto del fluido avviene per scorrimento di strati paralleli gli uni sugli altri; questo significa che le *linee di flusso*, curve tangenti istante per istante al campo di velocità, non si intersecano mai tra di loro. Sperimentalmente si osserva che questa ipotesi è verificata solo in certi casi. Si definisce *numero di Reynolds* per il flusso in un condotto cilindrico la quantità adimensionale:

$$\text{Re} := \frac{2R\rho\bar{v}_x}{\beta}. \quad (3.39)$$

Nel problema che stiamo considerando, quando esso supera un valore critico ( $\sim 2200$ ), la corrente non presenta più un comportamento stazionario e laminare e si parla di regime *turbolento*.

### 3.3 Dinamica della vorticità

Consideriamo due punti vicini all'interno di un fluido individuati dai vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ . La velocità relativa di questi due punti è:

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{x} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) = d\mathbf{x} \cdot \underline{\mathbf{D}} + \frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \underline{\mathbf{R}}, \quad (3.40)$$

dove si è usata la decomposizione 3.4. Si definisce *vorticità* il campo  $\boldsymbol{\omega}$  dato dal rotore della velocità:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (3.41)$$

A seguito della definizione si ha che la vorticità è un campo solenoidale:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (3.42)$$

Un flusso per il quale  $\boldsymbol{\omega}$  è nullo è detto *irrotazionale*. Richiamando la definizione del tensore di rotazione 3.3, si osserva che:

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_k. \quad (3.43)$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_k &= \sum_{k,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \sum_{l,m=1}^3 (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \\ &= \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = (\nabla \otimes \mathbf{v})_{ij} - (\nabla \otimes \mathbf{v})_{ij}^T = R_{ij}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Si è mostrato in questo modo che il tensore  $\underline{\mathbf{R}}$  è legato alla rotazione di un fluido, come era stato accennato in precedenza. La relazione inversa di 3.43 è:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{*\underline{\mathbf{R}}}{2}. \quad (3.45)$$

Infatti:

$$(*\underline{\mathbf{R}})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} R_{jk} = \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} \omega_l = 2 \sum_{l=1}^3 \delta_{il} \omega_l = 2\omega_i. \quad (3.46)$$

Tornando alla velocità relativa 3.40, usando la relazione 3.43, si ha, per la componente  $i$ -esima:

$$dv_i = \sum_{j=1}^3 dx_j D_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 dx_j R_{ji} = \sum_{j=1}^3 dx_j D_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jik} \omega_k dx_j, \quad (3.47)$$

ovvero:

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{x} \cdot \underline{\mathbf{D}} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}). \quad (3.48)$$

Possiamo affermare che la velocità di un punto rispetto ad un altro si scompone in un termine di velocità di spostamento tra i punti ed in uno di rotazione del secondo attorno al primo con velocità angolare:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2}. \quad (3.49)$$

### 3.3.1 Equazione di Bernoulli

Riprendiamo ora l'equazione di Eulero 3.19, valida per un fluido incompressibile in condizione di viscosità trascurabile. Si può esprimere il termine convettivo dell'accelerazione come:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (3.50)$$

Supponiamo che il vettore  $\mathbf{f}_V$  contenga solo forze per unità di massa conservative e quindi  $\mathbf{f}_V = -\rho\nabla G$ , dove  $G$  è un potenziale indipendente dal tempo. Se  $\rho$  è funzione solamente della pressione, ed in tal caso il flusso è detto *barotropico*, è possibile porre  $\frac{\varpi}{\rho} = \int \frac{d\varpi}{\rho}$ . La relazione ottenuta è detta *equazione di Bernoulli*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2} + G + \int \frac{d\varpi}{\rho}\right) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.51)$$

L'espressione fra parentesi è detta *funzione di Bernoulli*:

$$B := \frac{v^2}{2} + G + \int \frac{d\varpi}{\rho}. \quad (3.52)$$

Se consideriamo un flusso stazionario, l'equazione di Bernoulli diventa:

$$\nabla B = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.53)$$

Poiché  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  è perpendicolare a  $\mathbf{v}$ , il prodotto scalare di  $\mathbf{v}$  per l'equazione 3.53 dà:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla B = 0, \quad (3.54)$$

che significa che lungo le linee di flusso la quantità  $B$  è conservata:

$$\frac{v^2}{2} + G + \int \frac{d\varpi}{\rho} = \text{cost.} \quad (3.55)$$

L'equazione non afferma altro che la costanza dell'energia di una particella del fluido. Analogamente, anche lungo le linee di vorticosità (tangenti al campo  $\boldsymbol{\omega}$ ) tale quantità è conservata. Inoltre, se il flusso è irrotazionale, la funzione di Bernoulli è costante in tutto il dominio del fluido. Se la sola forza agente sul fluido è il peso, quindi  $G = gz$ , e la densità non dipende dalla pressione, lungo le linee di flusso si ottiene:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + \varpi = \text{cost}, \quad (3.56)$$

che è la forma dell'equazione di Bernoulli nota in fluidodinamica elementare.

### 3.3.2 Equazioni del moto in un sistema in rotazione

È noto dalla fisica di base che l'accelerazione  $\mathbf{a}_I$  vista da un sistema di riferimento inerziale differisce da quella  $\mathbf{a}_R$  vista in un sistema di riferimento in rotazione con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$  per due termini, infatti:

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}). \quad (3.57)$$

Il termine  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$  è l'*accelerazione di Coriolis* e dipende dalla velocità del punto preso in considerazione. Il termine  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$  è l'*accelerazione centripeta* e dipende dalla posizione del punto rispetto all'asse di rotazione del sistema. L'equazione di Navier-Stokes 3.17 per un fluido soggetto alla forza peso in un sistema in rotazione si può riscrivere, sopprimendo il pedice  $R$ , come:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{g}_{\text{eff}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{\nabla\varpi}{\rho} - \frac{\beta}{\rho} \left[ \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] = 0. \quad (3.58)$$

dove  $\mathbf{g}_{\text{eff}} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$  rappresenta il campo gravitazionale effettivo agente sul fluido.

Possiamo utilizzare l'equazione per giustificare qualitativamente la formazione di cicloni ed anticicloni nell'atmosfera terrestre. Osserviamo che le correnti atmosferiche tendono ad andare da punti ad alta pressione a punti a bassa pressione. In presenza dell'accelerazione di Coriolis si ha però una deviazione delle correnti e questo provoca vorticità. Nel caso di un ciclone, cioè un vortice attorno a zone di bassa pressione, le correnti ruoteranno in senso antiorario nell'emisfero boreale ed in senso orario nell'emisfero australe. Gli anticicloni, vortici attorno a zone di alta pressione, ruotano in senso orario nell'emisfero boreale ed in senso antiorario in quello australe.



# Appendice A

## Definizioni ed identità usate

Nella tesi verranno identificati, salvo diversa indicazione, con la notazione  $\varphi$  campi scalari, con  $\mathbf{a}$  campi vettoriali e con  $\underline{\mathbf{A}}$  campi tensoriali di secondo rango o superiore. Le componenti dei campi sono indicate con  $a_i$  o  $A_{ij}$ . I simboli  $\otimes$ ,  $\cdot$ ,  $\times$  e  $\cdot\cdot$  indicano rispettivamente le operazioni di prodotto tensoriale, prodotto scalare, prodotto vettoriale e prodotto diadico. Gli operatori  $\nabla$ ,  $\nabla\cdot$  e  $\nabla\times$  indicano rispettivamente gradiente, divergenza e rotore. Il gradiente di un vettore è indicato con  $\nabla\otimes$ . Di seguito vengono elencate le definizioni adottate:

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.1})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (\text{A.3})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{A.4})$$

$$(\mathbf{a} \cdot \underline{\mathbf{B}})_i = \sum_{j=1}^3 a_j B_{ji} \quad (\text{A.5})$$

$$(\mathbf{a} \times \underline{\mathbf{B}})_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{ikl} a_k B_{lj} \quad (\text{A.6})$$

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij} \quad (\text{A.7})$$

Ora verranno elencate le identità utilizzate:

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \otimes (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes (\nabla \varphi) \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{A.11})$$

$$(\mathbf{w} \cdot \underline{\mathbf{A}}) \cdot [(\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{A}}) \times (\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{A}})] = \det(\underline{\mathbf{A}})\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \otimes (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \otimes \mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\nabla \otimes \mathbf{b}) \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{b} \cdot \underline{\mathbf{A}}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) + \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \nabla \otimes \mathbf{b} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{tr}(\nabla \otimes \mathbf{a}) = \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.15})$$

$$\oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV \quad (\text{A.16})$$



# Bibliografia

- [1] Z. Martinec. *Continuum Mechanics (lecture notes)*. 2003.
- [2] R. Abeyaratne. *Continuum Mechanics*. 1988.
- [3] L.E. Malvern. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Inc. 1969.
- [4] S. Zuccher. *Note di Fluidodinamica*. 2018.
- [5] M. Bonafede. *Fisica del Sistema Terra*. 2016.
- [6] S. Lanzoni. *Le equazioni della meccanica dei fluidi*. Università di Padova.
- [7] F. Irgens. *Continuum Mechanics*. Springer. 2008