

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**ANALISI TOPOLOGICA
DELL'ILLUSIONE OTTICA DEL VASO
DI RUBIN**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
ADELE VALERII

Sessione I
Anno Accademico 2017/2018

Alla mia famiglia.

Indice

1	La teoria delle catastrofi	9
1.1	Modello Matematico	9
1.2	Un modello dell'aggressione	10
1.2.1	Costruzione del modello dell'aggressione	11
1.2.2	La catastrofe a cuspidi	15
1.3	Il teorema di classificazione	18
2	Modellazione non lineare della percezione multistabile	23
2.1	Introduzione	24
2.2	Percezione	24
2.3	Continuità	26
2.4	Motivazione per un modello	27
2.5	Figure ambigue	29
3	Il vaso di Rubin	35
3.1	Costruzione dell'esperimento	35
3.1.1	Fasi preliminari	36
3.1.2	Costruzione definitiva	47
3.2	Progettazione esperimenti	51
3.2.1	Rubin_23	53
3.2.2	Rubin_25	56
3.2.3	Rubin_21	58
3.2.4	Rubin_22	61

4	Sperimentazione	65
4.1	Costruzione sperimentazione	65
4.2	Risultati sperimentazione	69
4.3	Analisi risultati	69
4.3.1	Analisi preliminare	69
4.3.2	Analisi finale	70
5	Conclusioni	75
6	Appendice	77
	Bibliografia	103

Introduzione

La costruzione di modelli matematici serve per descrivere fenomeni. Il metodo più diffuso nella costruzione di modelli di questo tipo è il calcolo differenziale ideato da Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Tuttavia, le equazioni differenziali usate come linguaggio descrittivo presentano un limite intrinseco: possono descrivere soltanto quei fenomeni di trasformazione in cui il cambiamento avviene in maniera graduale e continua. In termini matematici le soluzioni di un'equazione differenziale devono essere funzioni differenziabili. Sono relativamente pochi i fenomeni che hanno un andamento regolare e ordinato; al contrario il mondo è pieno di trasformazioni improvvise e di imprevedibili discontinuità che richiedono l'uso di funzioni che non sono differenziabili.

E' stato quindi elaborato un metodo matematico per descrivere i fenomeni discontinui e divergenti. Questo metodo è potenzialmente in grado di descrivere l'evoluzione dei sistemi in ogni manifestazione naturale, e perciò comporta una vasta generalità; può essere applicato con particolare efficacia in quelle situazioni in cui le forze e motivazioni che cambiano gradualmente portano a cambiamenti improvvisi del comportamento. Per questo motivo il metodo è stato chiamato "teoria delle catastrofi". La teoria delle catastrofi è stata elaborata da René Thom dell'Istituto di studi scientifici superiori di Bures-sur-Yvette in Francia. La teoria fa largo uso della topologia ed il suo coinvolgimento è dovuto al fatto che le forze che sono presenti nella natura possono essere descritte mediante superfici di equilibrio uniformi; ed è quando l'equilibrio si spezza che avviene la "catastrofe". Il problema dunque per la teoria delle catastrofi è quello di descrivere la forma di tutte le possibili superfici di equilibrio. R. Thom ha risolto questo problema

mediante alcune strutture basilari che egli chiama catastrofi elementari.

In questo elaborato si vuole andare ad applicare la teoria delle catastrofi alla figura ambigua del vaso di Rubin. In particolare, si vuole vedere se la percezione multistabile di questa figura ambigua è modellizzabile tramite la catastrofe elementare a forma di cuspid.

In particolare, nel capitolo 1, riguardante la teoria delle catastrofi, viene presentata la teoria e un esempio di applicazione di questa per la costruzione del modello di aggressione del cane. Dopo aver mostrato che il comportamento del cane può essere modellizzato tramite una catastrofe a cuspid si passerà al teorema di classificazione, in cui vengono presentate le sette catastrofi elementari.

Nel capitolo 2 si parte dalla definizione di figura multistabile e si propone un modello sperimentale non lineare sull'ipotesi che il grafico di questa relazione sia l'insieme di equilibrio di un sistema dinamico. Poi si mostra come, in congiunzione con il principio di singolarità minima, il modello implica la catastrofe a cuspid della geometria in uno specifico esempio percettivo.

Nel capitolo 3 presento la costruzione dell'esperimento, effettuata tramite il software dinamico GeoGebra, durante la quale l'obiettivo che mi sono proposta è stato cercare di costruire l'immagine del vaso di Rubin in modo da poter variare due parametri, detti parametri di controllo, che ho pensato essere a , l'appiattimento del profilo, e c , il calibro, in modo da poter studiare il variare della percezione umana in funzione di questi, così da poter applicare la teoria delle catastrofi e costruire la *superficie di controllo*.

Nel capitolo 4 presento la costruzione della sperimentazione e un'analisi dei risultati di questa.

Capitolo 1

La teoria delle catastrofi

1.1 Modello Matematico

[3]La costruzione di modelli matematici serve per descrivere fenomeni. Anzi, quando questo tipo di modelli si rivela particolarmente efficace, si dice che esso non solo descrive i fenomeni, ma li “spiega”.

Il metodo più diffuso nella costruzione di modelli di questo tipo è il calcolo differenziale ideato da Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

Tuttavia, le equazioni differenziali usate come linguaggio descrittivo presentano un limite intrinseco: possono descrivere soltanto quei fenomeni di trasformazione in cui il cambiamento avviene in maniera graduale e continua. In termini matematici le soluzioni di un'equazione differenziale devono essere funzioni differenziabili.

Sono relativamente pochi i fenomeni che hanno un andamento regolare e ordinato; al contrario il mondo è pieno di trasformazioni improvvise e di imprevedibili discontinuità che richiedono l'uso di funzioni che non sono differenziabili.

E' stato quindi elaborato un metodo matematico per descrivere i fenomeni discontinui e divergenti. Questo metodo è potenzialmente in grado di descrivere l'evoluzione dei sistemi in ogni manifestazione naturale, e perciò comporta una vasta generalità; può essere applicato con particolare efficacia in quelle situazioni in cui le forze e motivazioni che cambiano gradualmente portano a cambiamenti improvvisi del comportamento. Per questo motivo il metodo è stato chiamato

“teoria delle catastrofi”.

La teoria delle catastrofi è stata elaborata da René Thom dell’Istituto di studi scientifici superiori di Bures-sur-Yvette in Francia. Egli espone la sua teoria in un libro pubblicato nel 1972, *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*.

La teoria fa largo uso della topologia ed il suo coinvolgimento è dovuto al fatto che le forze che sono presenti nella natura possono essere descritte mediante superfici di equilibrio uniformi; ed è quando l’equilibrio si spezza che avviene la catastrofe. Il problema dunque per la teoria delle catastrofi è quello di descrivere la forma di tutte le possibili superfici di equilibrio.

R. Thom ha risolto questo problema mediante alcune strutture basilari che egli chiama *catastrofi elementari*. Per processi determinati da non più di quattro fattori, R. Thom ha dimostrato che si danno esattamente sette catastrofi elementari.

1.2 Un modello dell’aggressione

Per chiarire la natura dei modelli derivati dalla teoria delle catastrofi incomincio con il considerare un modello di aggressione nel cane.

Konrad Z. Lorenz ha notato che il comportamento aggressivo è influenzato da due forze in conflitto fra loro: collera e paura, e ha ipotizzato che nel cane queste componenti possono essere misurate con una certa attendibilità. La collera di un cane è correlata al grado di apertura della bocca e di esposizione della dentatura; la paura si manifesta da quanto appiattisce le orecchie verso la nuca. Prendendo l’espressione del muso come indicatore dello stato emotivo del cane, si può cercare di stabilire in che misura il suo comportamento varia in funzione dell’umore.

Se è presente soltanto una delle componenti emozionali del conflitto, la risposta del cane è relativamente facile da prevedere. Se il cane è adirato allora ci si può attendere un’azione di tipo aggressivo, come l’attacco. Quando il cane è spaventato ma non si provoca la sua collera, l’attacco diventa improbabile e il cane molto verosimilmente batterà in ritirata. La previsione è univoca anche quando non sia presente nessuno stimolo; in questo caso è probabile che il cane manifesti un tipo

di comportamento neutrale, non connesso né all'aggressione né alla sottomissione. E che cosa succede se il cane si trova a provare nello stesso istante collera e paura? In questo caso le due componenti che lo influenzano sono direttamente in conflitto. I modelli semplici che non sono in grado di esprimere la discontinuità potrebbero in questo caso prevedere che i due stimoli si annullino a vicenda, dando come risultato un comportamento neutrale. Questa previsione dimostra appieno l'insufficienza esplicativa di tali modelli semplicistici, poiché la neutralità è di fatto l'ultimo dei comportamenti probabili. Quando un cane è nello stesso tempo in preda alla collera e alla paura sono alte le probabilità di un comportamento fortemente polarizzato in un senso o nell'altro: il cane può attaccare o abbandonare, ma non rimarrà indifferente.

Il punto di forza del modello derivato dalla teoria delle catastrofi è che si può rendere conto di questa distribuzione bimodale delle probabilità. E ancora, il modello fornisce una base per prevedere, in particolari circostanze, quale comportamento sceglierà il cane.

1.2.1 Costruzione del modello dell'aggressione

Per costruire il modello, anzitutto si rappresentano i due parametri di controllo, collera e paura, su due assi in un piano orizzontale, che si chiamerà *superficie di controllo*. Il comportamento del cane viene poi misurato su un terzo asse, l'asse del comportamento, che è perpendicolare ai primi due. Si assume che esiste una serie continua di possibili comportamenti: dalla ritirata completa, all'atto di acquattarsi, di schermirsi, alla neutralità, al ringhiare e arruffare il pelo fino all'attaccare. I modi di comportamento più aggressivi sono indicati come valori alti sull'asse del comportamento, quelli meno aggressivi con i valori bassi. Per ogni punto sulla *superficie di controllo* (cioè per ogni combinazione di ira e paura) esiste almeno un comportamento più probabile, che si rappresenta con un punto direttamente superiore al punto della superficie di controllo, collocato ad un'altezza corrispondente al comportamento. Ci sarà così un solo punto per il comportamento in corrispondenza di molti punti sulla superficie di controllo, nei quali predomini la collera o la

paura. Verso il centro del grafico tuttavia, dove la collera e la paura approssimativamente si equivalgono, ogni punto appartenente alla superficie di controllo ha due punti di comportamento, uno con i valori alti sull'asse del comportamento, che rappresenta l'azione di aggressione, l'altro con i valori bassi che rappresenta l'atto di sottomissione. Si può inoltre segnare un terzo punto, che verrà sempre a cadere tra questi due, che rappresenta il comportamento più neutrale meno probabile. Se si individuano i punti di comportamento per l'intera superficie di controllo e li si uniscono tra loro, essi formeranno una superficie continua: la *superficie di comportamento* [fig1.1].

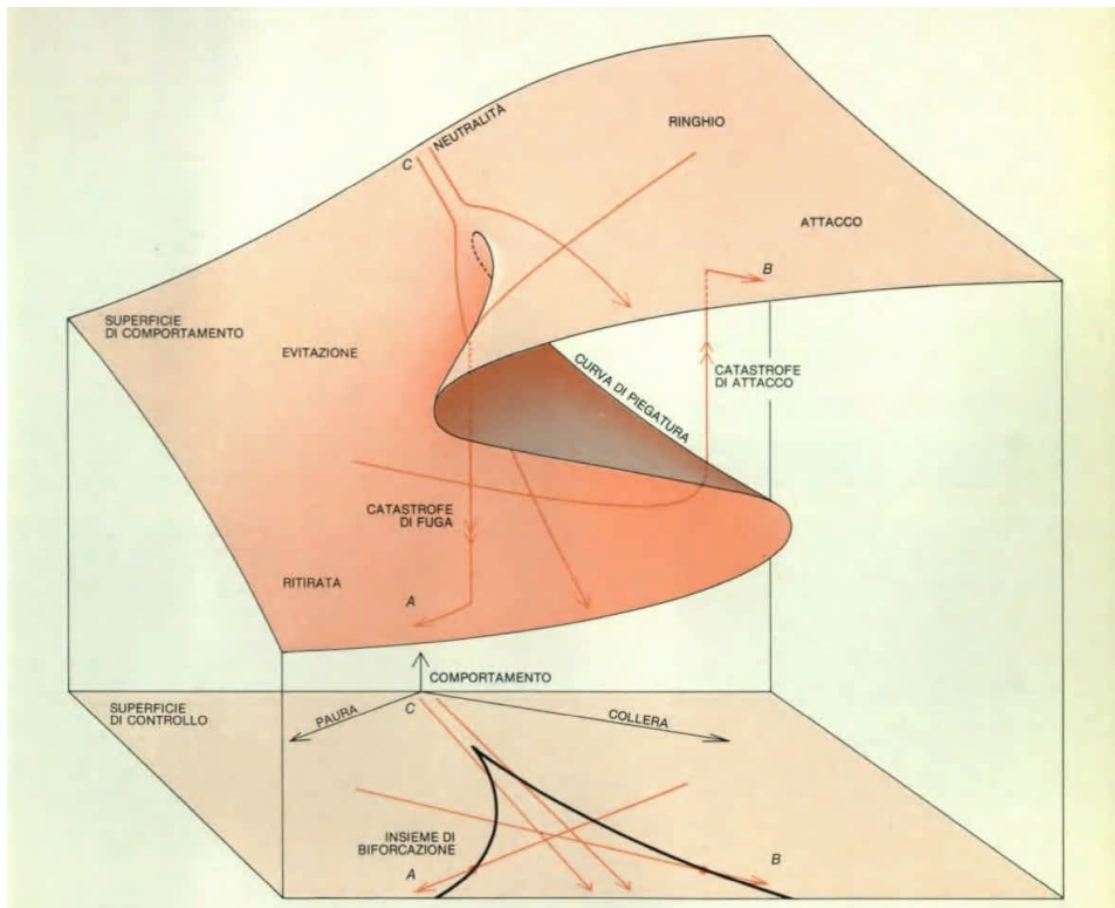


Figura 1.1: *superficie di controllo e superficie di comportamento*

La superficie presenta nel suo complesso una pendenza, dai valori alti, dove è predominante la collera, fino ai valori bassi nella regione in cui lo stato prevalente è la paura; ma la pendenza non è la caratteristica più tipica della superficie. La teoria delle catastrofi rivela che al centro della superficie deve esserci una piega doppia e continua, che dà luogo ad una rientranza senza grinze verso la parte posteriore della superficie che alla fine scompare in un punto in cui i tre piani della piega si fondono. E' la piega che conferisce a questo modello le sue caratteristiche più interessanti. Ciascun punto della *superficie di comportamento* rappresenta il comportamento più probabile del cane, con l'eccezione di quelli che vengono a cadere nel mezzo della piega, che rappresentano il comportamento meno probabile. Con la teoria delle catastrofi si può ricavare la forma dell'intera superficie dal fatto che il comportamento è bimodale per alcuni dei punti di controllo.

Per comprendere come questo modello possa prevedere il comportamento, si deve considerare la reazione del cane agli stimoli che cambiano.

Si suppone che la condizione emozionale del cane sia di neutralità e che possa essere rappresentata da un punto all'origine della *superficie di controllo*. Il comportamento del cane, dato dal punto corrispondente sulla *superficie di comportamento*, è anch'esso di neutralità.

Se in seguito alcuni stimoli fanno crescere l'ira del cane senza influenzarne la paura, il comportamento cambia gradualmente, spostandosi sulla superficie di comportamento a quote superiori, verso posizioni di maggiore aggressività; se la collera è aumentata abbastanza, il cane attacca [fig1.2].

Se ora la paura del cane comincia ad aumentare mentre la collera rimane ad un livello elevato, il punto che rappresenta lo stato emozionale sulla *superficie di controllo* si sposterà verso il centro del grafico. Il punto che rappresenta il comportamento deve evidentemente seguirlo, ma poichè la pendenza della *superficie di comportamento* in questa regione non è accentuata, il comportamento cambia soltanto leggermente, e il cane continua ad essere aggressivo. Man mano che la paura continua a crescere, però, il punto del comportamento raggiunge infine il bordo della piega.

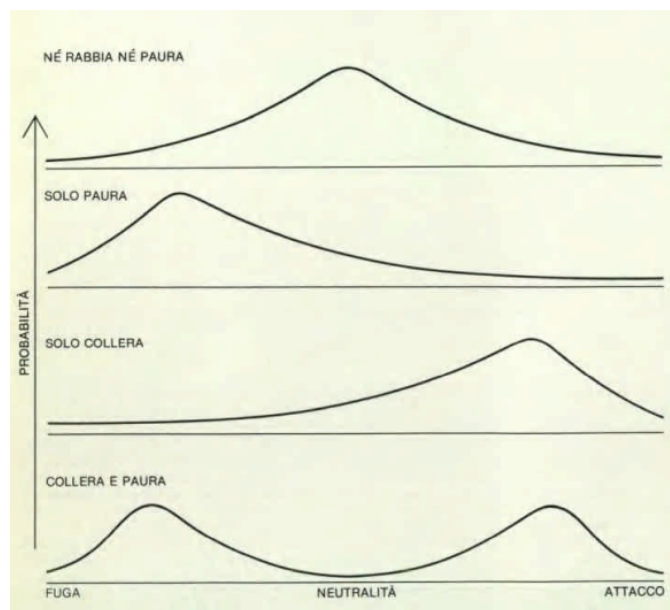


Figura 1.2: *comportamento del cane*

E qui si evidenziano le originali e illuminanti proprietà di questo modello. Al bordo della piega il piano lungo il quale si è spostato il punto del comportamento si piega all'ingiù, e viene perciò ad annullarsi; con un ulteriore aumento della paura, la superficie scompare. La situazione comportamentale deve perciò cadere perpendicolarmente sulla superficie inferiore del grafico, che rappresenta modi di comportarsi assai diversi. Gli stati aggressivi del piano superiore non sono più possibili: si verifica un cambiamento improvviso, anzi catastrofico, un atteggiamento più mite.

Il modello dunque prevede che se un cane adirato si impaurisce progressivamente, alla fine interromperà il suo attacco e si ritirerà. Il cambiamento improvviso del comportamento potrebbe essere chiamato catastrofe di fuga.

Il grafico permette inoltre di individuare un modello opposto di comportamento: una catastrofe di attacco.

In uno stato iniziale dominato dalla paura il comportamento del cane rimane stabilmente sul piano inferiore, ma in seguito ad un adeguato aumento di collera passa dalla parte opposta della piega saltando di colpo al piano superiore, corrispondente

a uno stato emozionale più aggressivo. In altre parole, un cane spaventato, messo in una situazione in cui la rabbia aumenta costantemente, può attaccare improvvisamente.

Si considera infine il comportamento di un cane, il cui umore iniziale è di neutralità, quando la collera e la paura aumentano contemporaneamente. Il punto di comportamento si trova all'inizio nell'origine, e sotto l'influenza di stimoli in conflitto tra loro si sposta su una linea retta verso la parte anteriore del grafico. Arrivato però alla singolarità che la superficie presenta dove inizia a piegarsi, il punto si deve spostare sul piano superiore quando il cane diventa più aggressivo o sul piano inferiore quando il cane diventa meno aggressivo. Il piano che viene scelto dipende in modo critico dall'umore appena prima che raggiunga la singolarità. Il grafico è detto divergente: un cambiamento lieve nelle condizioni iniziali dà luogo, nella condizione finale, ad un cambiamento molto rilevante.

1.2.2 La catastrofe a cuspidi

La linea che segna i bordi della piega nella *superficie di comportamento*, dove il piano superiore e il piano inferiore si flettono per formare il piano intermedio, è chiamata *curva di piegatura*. Proiettata sulla *superficie di controllo* dà luogo ad una curva a forma di cuspidi; per questo il modello è chiamato *catastrofe a cuspidi*. E' una delle più semplici catastrofi elementari, e si è dimostrata la più utilizzabile. La cuspidi sulla superficie di controllo è detta *insieme di biforcazione* della catastrofe a cuspidi e definisce le soglie entro cui si verificano i cambiamenti improvvisi. Fino a che lo stato del sistema si mantiene all'esterno della cuspidi, il comportamento varia in maniera graduale e continua in funzione dei parametri di controllo. Anche sulla soglia della cuspidi non si osserva nessun cambiamento brusco. Quando il punto di controllo continua il percorso attraverso la cuspidi, è inevitabile una catastrofe.

In ogni punto all'interno della biforcazione ci sono due possibili modi di comportarsi; al di fuori di essa c'è solo un modo possibile. E ancora, ci sono all'interno della cuspidi solo due modi di comportamento, anche se nel punto corrispondente

la *superficie di comportamento* presenta tre piani [fig1.3].

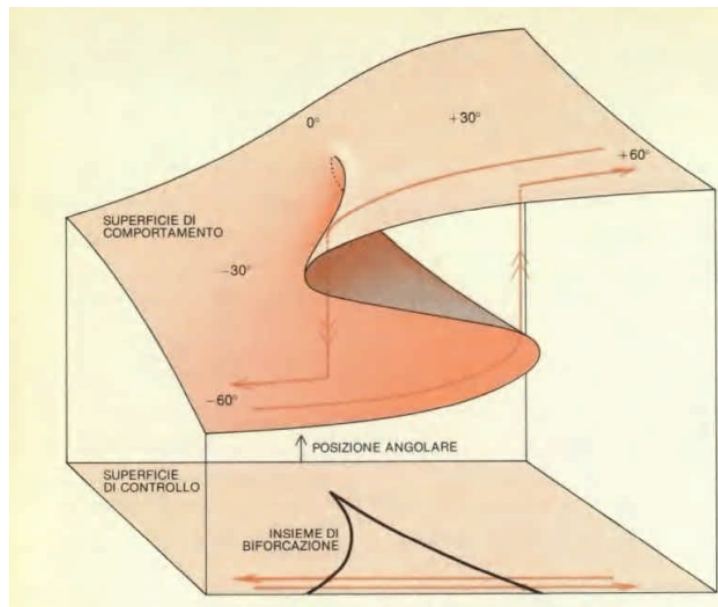


Figura 1.3: *catastrofe a cuspidi*

Ciò in quanto il piano che si trova nella regione centrale della piega è formato da punti che rappresentano il comportamento meno probabile. Il piano intermedio è inserito nel grafico soprattutto affinché la superficie di comportamento risulti omogenea e continua; il punto di comportamento non occupa mai il piano intermedio. Anzi, non esiste alcun percorso sulla *superficie di controllo*, che potrebbe condurre il punto di comportamento sul piano intermedio. Ogniqualvolta la curva di piegatura viene attraversata, il punto “salta” dal piano superiore al piano inferiore, e viceversa.

La costruzione di questo modello inizialmente si è basata su un'ipotesi deterministica, ossia che il comportamento del cane avrebbe potuto essere previsto in base al suo umore così come veniva esternato dall'atteggiamento del muso. La bimodalità del grafico che ne risulta potrebbe sembrare in un primo tempo un elemento in grado di minare questa ipotesi, poiché l'esistenza di due possibili maniere di comportarsi per uno stato emozionale dato rende impossibile una previsione univoca.

Effettivamente se si conosce soltanto lo stato emozionale attuale (e se questo stato viene a cadere nella regione bimodale del grafico) non si può prevedere cosa farà il cane. Tuttavia se si considera un altro fattore nel momento in cui si fanno le previsioni, il determinismo di questo modello viene rinforzato, rendendo contemporaneamente il modello più complesso e sofisticato.

Il comportamento del cane può essere previsto se si conosce, oltre al suo stato emozionale attuale, anche la storia recente delle sue emozioni.

Caratteristiche della catastrofe a cuspidi

Una caratteristica costante che accomuna tutte le catastrofi a cuspidi è che il comportamento è bimodale su una parte del dominio e che si osservano cambiamenti improvvisi nel passaggio da un modo di comportarsi all'altro. Inoltre, il cambiamento improvviso presenta costantemente l'effetto chiamato isteresi, e cioè la transizione dal piano superiore a quello inferiore non avviene nello stesso punto in cui avviene quella dal piano inferiore a quello superiore.

Il cambiamento improvviso non avviene nel mezzo della cuspidi, bensì solo quando viene raggiunto l'insieme di biforcazione.

Un'altra caratteristica è che all'interno della cuspidi, dove il comportamento si fa bimodale, la zona centrale sull'asse del comportamento diventa inaccessibile.

Infine, il modello implica la possibilità di una divergenza, in modo che una leggera perturbazione nello stato iniziale del sistema può avere come conseguenza una differenza assai rilevante nello stato finale.

Queste cinque qualità, bimodalità, transizioni improvvise, isteresi, inaccessibilità e divergenza, sono correlate tra loro dal modello stesso. Se una qualsiasi di queste qualità si evidenzia in un processo, bisognerebbe ricercare le altre quattro, e se se ne trova più di una, allora il processo dovrebbe essere considerato passabile di una descrizione per mezzo della catastrofe a cuspidi.

La catastrofe a cuspidi è una figura tridimensionale: due dimensioni servono per i parametri di controllo e una terza serve per l'asse del comportamento. Di fatto, l'asse del comportamento non è detto che rappresenti la variazione di un singolo comportamento. Tuttavia, la teoria delle catastrofi dimostra che è sempre possibile

selezionare una singola variabile e tracciare la *superficie di comportamento* soltanto rispetto a quell'asse, così da ottenere il grafico tridimensionale. Se si riduce il grafico a due dimensioni, ne risulta un modello ancora più semplice: la catastrofe a piega. Nella catastrofe a piega c'è un solo parametro di controllo; lo *spazio di controllo* è una linea retta e l'insieme di biforcazione è un unico punto su quella linea. Lo *spazio di comportamento* è una parabola, metà della quale rappresenta gli stati stabili, e l'altra metà quelli instabili. Le due regioni sono separate da un punto di piegatura direttamente sopra il punto di biforcazione.

1.3 Il teorema di classificazione

La catastrofe a piega può essere considerata come una sezione trasversale della curva di piegatura della catastrofe a cuspidale. A sua volta, la cuspidale può essere considerata come una quantità di catastrofi a piega, con un nuovo punto di singolarità nell'origine. Sullo stesso schema si possono costruire catastrofi più complicate, di dimensioni superiori: ognuna di queste è formata da tutte le catastrofi di ordine inferiore, più una nuova singolarità nell'origine.

Se lo *spazio di controllo* diventa tridimensionale mentre lo *spazio di comportamento* resta ad una dimensione, si può costruire un'unica catastrofe a quattro dimensioni. La *superficie di comportamento* diventa un'ipersuperficie a tre dimensioni, e anziché essere piegata lungo delle curve, come nella catastrofe a cuspidale, è piegata lungo delle intere superfici, configurazione questa che non può facilmente essere visualizzata. L'insieme di biforcazione non consiste più di curve che formano una cuspidale a due dimensioni, ma è costituito da superfici a tre dimensioni che si intersecano dando luogo a cuspidi ai loro bordi. All'origine compare una nuova singolarità, detta catastrofe a coda di rondine [fig1.4].

E' impossibile rappresentare la catastrofe a coda di rondine in modo completo, per l'impossibilità di disegnare immagini a quattro dimensioni. Si può tuttavia rappresentare graficamente il suo insieme di biforcazione, che è tridimensionale, e da questo disegno è possibile derivare alcune intuizioni geometriche circa la coda

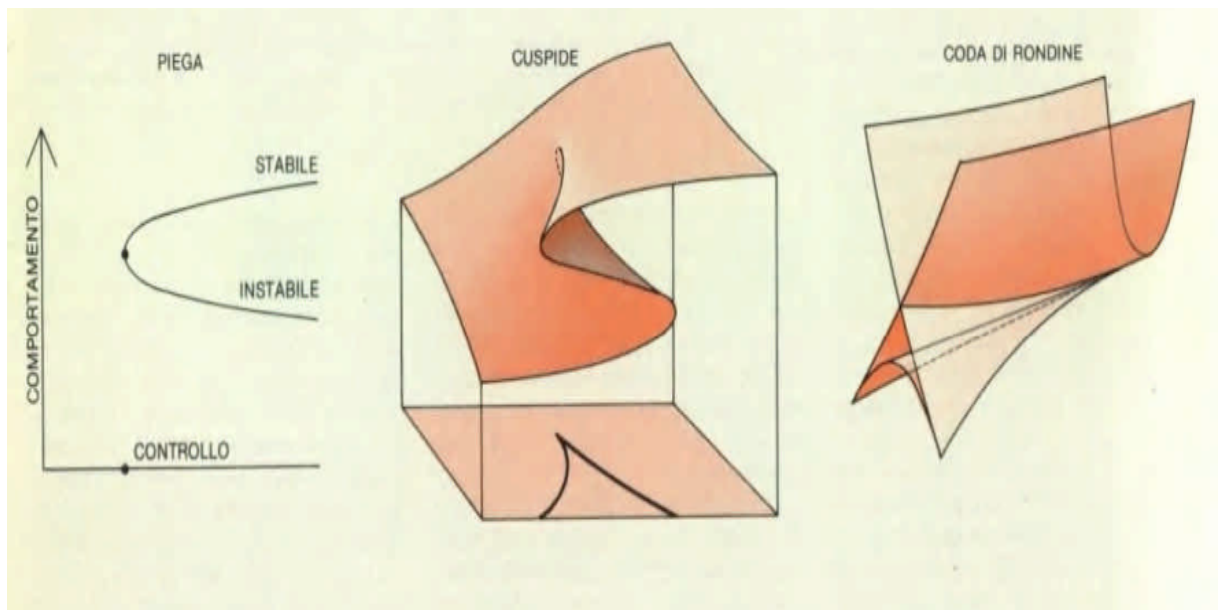


Figura 1.4: *catastrofe a cuspidi, piega e coda di rondine*

di rondine, allo stesso modo in cui è possibile descrivere la catastrofe a cuspidi disegnando il suo insieme di biforcazione (la cuspidi) in due dimensioni, e ricordando che la *superficie di comportamento* è bimodale sopra la parte interna della cuspidi.

Se si aggiunge ancora un altro parametro di controllo, si forma una catastrofe a cinque dimensioni.

La piega, la cuspidi e la coda di rondine appaiono anche qui come sezioni, e una nuova singolarità viene associata ad una “tasca” formata dall’interpenetrazione di parecchie superfici. La forma di questa tasca, o delle sue sezioni, ha suggerito il nome di catastrofe a farfalla. Nella catastrofe a farfalla anche l’insieme di biforcazione è a quattro dimensioni e perciò non può essere disegnato. Lo si può illustrare solo mediante sezioni a due o tre dimensioni [fig1.5].

Ci sono ancora due catastrofi a cinque dimensioni, che si formano quando lo *spazio di controllo* ha tre dimensioni e lo *spazio di comportamento* ha due dimensioni. Sono chiamate la catastrofe a ombelico iperbolico e la catastrofe a ombelico ellit-

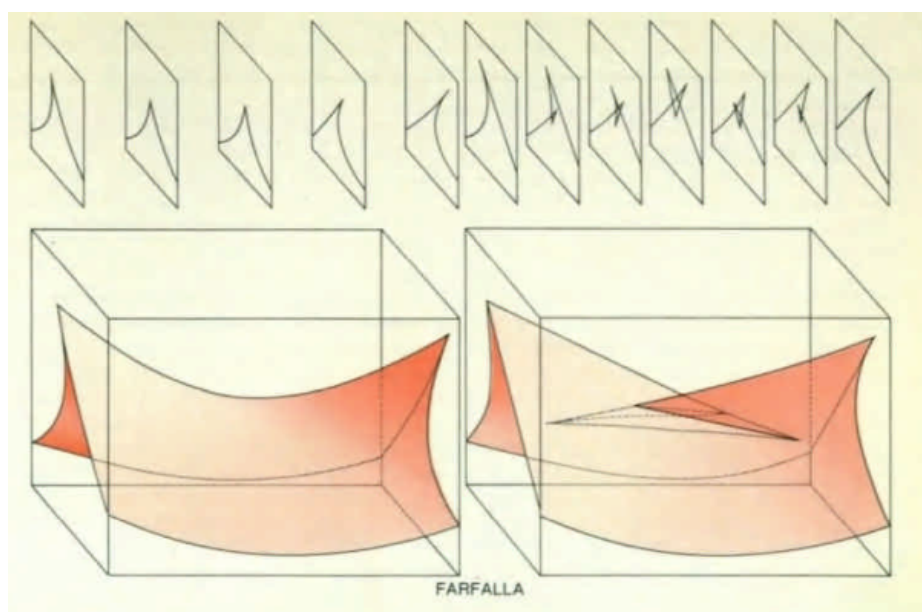


Figura 1.5: *catastrofe a farfalla*

tico [fig1.6].

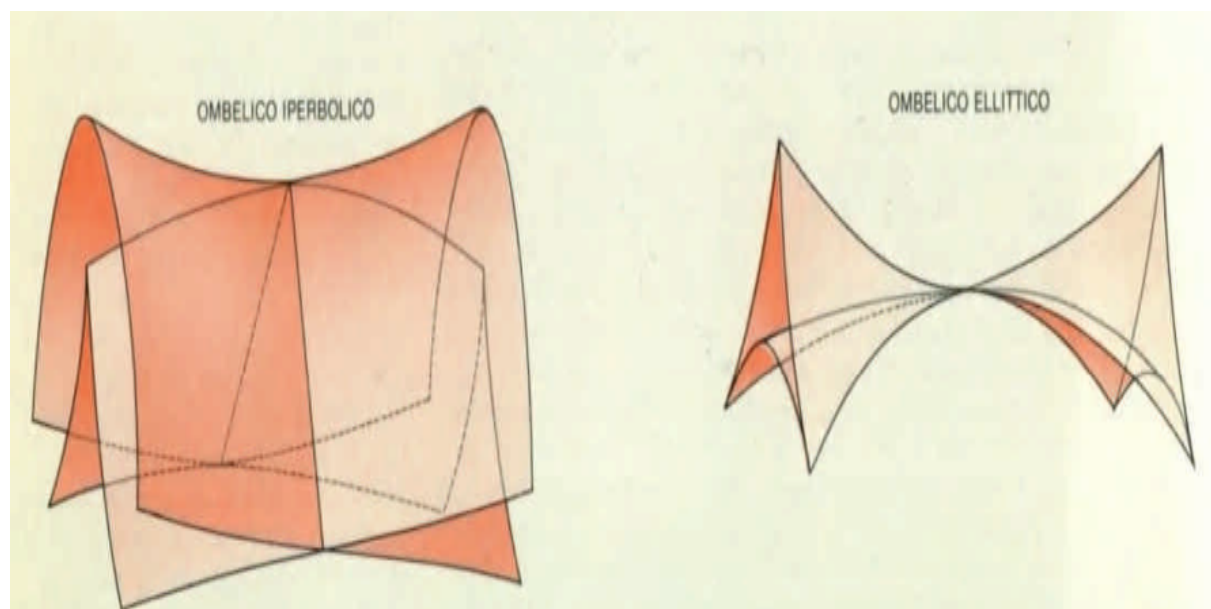


Figura 1.6: *catastrofe a ombelico iperbolico ed ellittico*

Come nel caso della coda di rondine, i loro insiemi di biforcazione consistono di superfici con i bordi a cuspidi, e possono essere disegnate dal momento che sono a tre dimensioni.

Infine, la catastrofe a sei dimensioni generata da uno spazio di controllo a quattro dimensioni e da uno spazio di comportamento a due dimensioni è chiamata ombelico parabolico. La sua geometria è complessa, e ancora una volta si può rappresentare geometricamente solo il suo insieme di biforcazione [fig1.7].

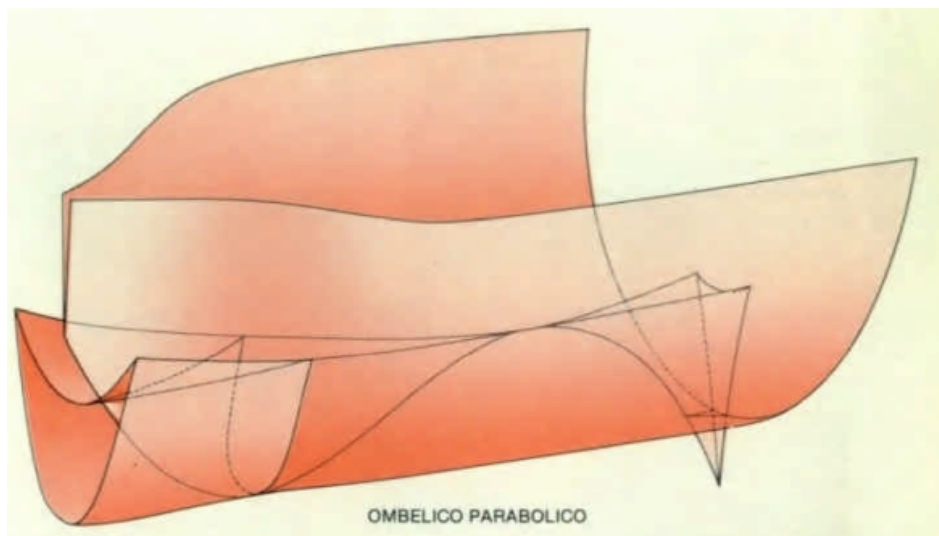


Figura 1.7: *catastrofe a ombelico parabolico*

Col crescere del numero delle dimensioni dello *spazio di controllo* e dello *spazio del comportamento* si può costruire una serie infinita di catastrofi. Il matematico russo V. I. Arnold le ha classificate fino almeno a 25 dimensioni. Per modelli che riguardano fenomeni del mondo reale, tuttavia, le 7 descritte sopra sono le più importanti, poichè sono le uniche che hanno uno spazio di controllo che non ha più di quattro dimensioni. Una classe particolarmente comune di processi, quelli determinati dalla posizione nello spazio e nel tempo, non possono richiedere uno *spazio di controllo* con più di quattro dimensioni, poichè il nostro mondo ha solo tre dimensioni spaziali e una temporale.

CATASTROFE		DIMENSIONI DI CONTROLLO	DIMENSIONI DI COMPORTAMENTO	FUNZIONE	DERIVATA PRIMA
CUSPIDI	PIEGA	1	1	$\frac{1}{3}x^3 - ax$	$x^2 - a$
	CUSPIDE	2	1	$\frac{1}{4}x^4 - ax - \frac{1}{2}bx^2$	$x^3 - a - bx$
	CODA DI RONDINE	3	1	$\frac{1}{5}x^5 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3$	$x^4 - a - bx - cx^2$
	FARFALLA	4	1	$\frac{1}{6}x^6 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3 - \frac{1}{4}dx^4$	$x^5 - a - bx - cx^2 - dx^3$
OMBELICHI	IPERBOLICO	3	2	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$	$3x^2 + a + cy$ $3y^2 + b + cx$
	ELLITTICO	3	2	$x^3 - xy^2 + ax + by + cx^2 + cy^2$	$3x^2 - y^2 + a + 2cx$ $-2xy + b + 2cy$
	PARABOLICO	4	2	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$	$2xy + a + 2cx$ $x^2 + 4y^3 + b + 2dy$

Sette catastrofi elementari descrivono tutte le possibili discontinuità nei fenomeni controllati da non più di quattro fattori. Ciascuna delle catastrofi è associata a una funzione in cui i parametri di controllo sono rappresentati come coefficienti (a, b, c, d) e il comportamento del sistema è determinato dalle variabili (x, y). In ogni modello di catastrofe, la superficie di comportamento è il grafico di tutti i punti in cui la derivata prima di questa funzione è uguale a zero o, se vi sono due derivate prime, i punti in cui sono entrambe uguali a zero.

Figura 1.8: *classificazione: sette catastrofi elementari*

Capitolo 2

Modellazione non lineare della percezione multistabile

Una figura multistabile è una figura ambigua in cui si può facilmente passare da un'interpretazione all'altra.

[1]Le figure multistabili mostrano che la relazione di stimolo-percettività non è una funzione a valore singolo. Si propone quindi un modello sperimentale non lineare sull'ipotesi che il grafico di questa relazione sia l'insieme di equilibrio di un sistema dinamico. Per semplicità e per ottenere previsioni verificabili, si considera un sistema le cui biforcazioni sono di tipo gradiente e quindi genericamente descritte dalle catastrofi elementari. Si motiva questo modello generale, e poi si mostra come, in congiunzione con il principio di singolarità minima, implica la catastrofe a cuspide della geometria in uno specifico esempio percettivo. Il modello incorpora alcune caratteristiche osservate della percezione multistabile, come l'isteresi e gli effetti di pregiudizio. Nonostante sia un modello continuo è compatibile con la dicotomia soggettiva della percezione bistabile. Il modello crea predizioni testabili che possono essere facilmente estese ad altri specifici esempi di percezione multistabile.

2.1 Introduzione

Tra i diversi fenomeni associati alla percezione ci sono le figure multistabili o ambigue. Probabilmente la più famosa è il Cubo di Necker (Necker, 1832) che può apparire concavo o convesso [fig2.1].

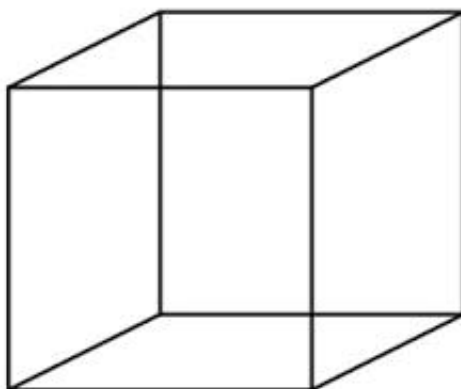


Figura 2.1: *Cubo di Necker*

Qui si vorrebbe discutere la rilevanza dei modelli non lineari, cioè le catastrofi elementari di Thom, di alcuni di questi fenomeni, con particolare riguardo agli effetti di piccole deformazioni della figura e alla presenza dell'isteresi.

2.2 Percezione

Una visione semplicistica della percezione può portare alla seguente forma. I dati sensibili causati da un oggetto, o da uno stimolo, sono trasformati dal cervello, e i risultati sono registrati in un deposito come la percezione. Schematicamente,

stimolo \rightarrow elaborazione \rightarrow percezione

Al di sotto dei processi del cervello si includono alcune attività del sistema nervoso come la ricezione iniziale dello stimolo e il processo preliminare del nervo ottico. In pratica, qualsiasi oggetto fornisce al cervello certi stimoli (taglia, colore, luminosità, etc.) che possono essere incorporati in un singolo stimolo multistabile. Il fenomeno della percezione multistabile mostra che un singolo stimolo può dare origine a più che una sola percezione. Al contrario, stimoli differenti possono portare alla medesima percezione. Quindi uno schema può essere più appropriato:

set di stimoli \rightarrow elaborazione \rightarrow set di percezioni

Siano:

\mathcal{S} = un set di stimoli

\mathcal{P} = un set di percezioni

Esattamente quale set dipende dal contesto; in un esperimento \mathcal{S} sarà il set di stimoli presentati nell'esperimento, o qualche naturale estensione di questo, e allo stesso modo per quanto riguarda \mathcal{P} .

Se la percezione fosse un processo valutato singolarmente, si dovrebbe essere in grado di rappresentare l'elaborazione del cervello come una funzione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}$, assegnando a ciascuno stimolo la percezione corrispondente. Così, uno stimolo multivariabile s è percepito come la percezione $f(s)$. In generale questo non è appropriato e c'è bisogno di una funzione o relazione multivalutata. Così, se $a \in \mathcal{S}$, $p \in \mathcal{P}$, e a è percepita qualche volta come p , si scrive $a \rightarrow p$. Quindi \rightarrow è una relazione tra \mathcal{S} e \mathcal{P} , in cui il processo cognitivo è rappresentato dal grafico

$$\mathcal{B} = \{(a, p) \in \mathcal{S} \times \mathcal{P} | a \rightarrow p\}$$

[fig2.2] Qui ciascuno stimolo a può dare origine a p , q o r come percezioni, quindi $a \rightarrow p$, $a \rightarrow q$, $a \rightarrow r$. Il grafico contiene tre punti: (a, p) , (a, q) , (a, r) . Quindi il grafico cattura quali percezioni sono possibili per ogni stimolo dato.

Fino ad ora tutto quello che si è dato fa pensare che il processo cognitivo sia una "scatola nera" da formalizzare matematicamente.

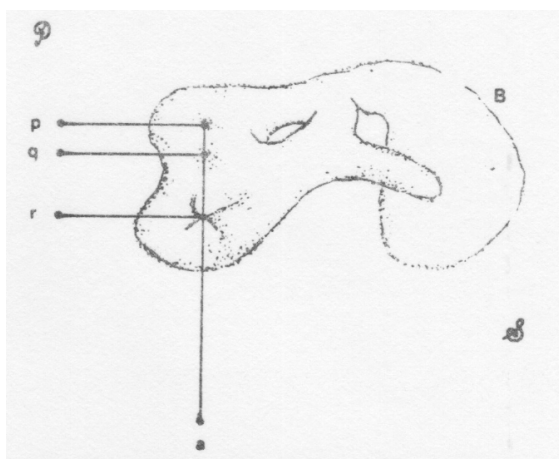


Figura 2.2: *Relazione multivalutata tra \mathcal{S} , stimoli, e \mathcal{P} , percezioni*

2.3 Continuità

C'è un certo numero di prove in cui, almeno in situazioni semplici, la percezione obbedisce a leggi di quasi-continuità. Piccoli cambiamenti nello stimolo portano, quando è possibile, a piccoli cambiamenti nella percezione.

La più comune formalizzazione della continuità è in termini di spazi topologici. Prendendo \mathcal{S} e \mathcal{P} come spazi topologici si può dare al grafico \mathcal{B} la topologia indotta dalla topologia prodotto $\mathcal{S} \times \mathcal{P}$. Sperimentalmente, il set di stimoli \mathcal{S} potrà avere una topologia inerente alla sua parametrizzazione sulla lunghezza, posizione, luminosità, etc. Per la percezione un'affermazione corrispondente deve essere più a tentativo. Infatti, si può discutere dell'esistenza di percezioni solo dalla loro definizione in termini di strutture come risonanze, cambiamenti chimici, o qualche altra caratteristica fisica. Qui non si farà questo, ma si prenderanno come entità non definite, come punti e linee nella geometria assiomatica di Hilbert.

In alcuni casi la percezione sembra continua. Per esempio la lunghezza o l'intensità delle percezioni adeguate formano un continuo 1-dimensionale. Il colore forma un continuo di dimensione 2, o 3 se si include anche la luminosità. In altri casi un parametro naturale di un set di stimoli può essere discreto, per esempio il numero di punti in un diagramma. Qui la posizione relativa di n punti forma un continuo $2(n - 1)$ -dimensionale. Un piccolo set di stimoli può essere descritto adeguata-

mente da solo parametri discreti. Alcune volte l'apparente discreto riflette una rottura del continuo in grandi pezzi e la mancanza di connessione tra i pezzi può cambiare se viene adottato un diverso punto di vista. La preoccupazione qui è prevalentemente per il continuo e come il discreto può apparire consistente con il modello. I continui matematici sono varietà.

2.4 Motivazione per un modello

Si suppone quindi che \mathcal{S} e \mathcal{P} possano essere rappresentati da varietà, e che il grafico \mathcal{B} sia una sottovarietà di $\mathcal{S} \times \mathcal{P}$.

La dimensione di \mathcal{S} è sotto controllo nell'esperimento, mentre quella di \mathcal{P} no. In matematica si può ammettere la possibilità che la dimensione di \mathcal{P} sia un numero grande, anche se siamo portati a rappresentare \mathcal{P} come 1-dimensionale.

Se la dimensione di \mathcal{B} è maggiore della dimensione di \mathcal{S} , allora gli stimoli daranno un continuo di percezioni, di dimensione

$$\max(\dim\mathcal{P}, \dim\mathcal{B} - \dim\mathcal{S})$$

e non un set finito. Quindi per osservare il comportamento del modello, possiamo assumere $\dim\mathcal{B} = \dim\mathcal{S}$, come in [fig2.3]. L'ipotesi più semplice è che \mathcal{B} derivi da un set di percezioni di equilibrio dei diversi oggetti in \mathcal{S} , e che alcuni di questi equilibri siano stabili e altri instabili. Questo richiede una forma di dinamica.

Più fisicamente, si può supporre che la percezione sia una struttura dissipativa nelle dinamiche del cervello, che coinvolgono la chimica, i collegamenti neurali, etc., e che la stabilità corrisponde alla locale minimizzazione della produzione di entropia. L'intenzione è quindi di non assumere che \mathcal{P} sia dovunque una varietà, è ragionevole iniziare con il caso più semplice con l'ipotesi che sia una varietà nella regione d'interesse. Oppure possiamo considerare il cervello come un sistema cognitivo: un sistema alto-dimensionale sulla varietà \mathcal{M} , e supporre che le percezioni siano attrattori su di esso in modo che \mathcal{P} possa essere descritto come una varietà. Se ci sono solo attrattori puntiformi, l'ipotesi della varietà è automaticamente vera,

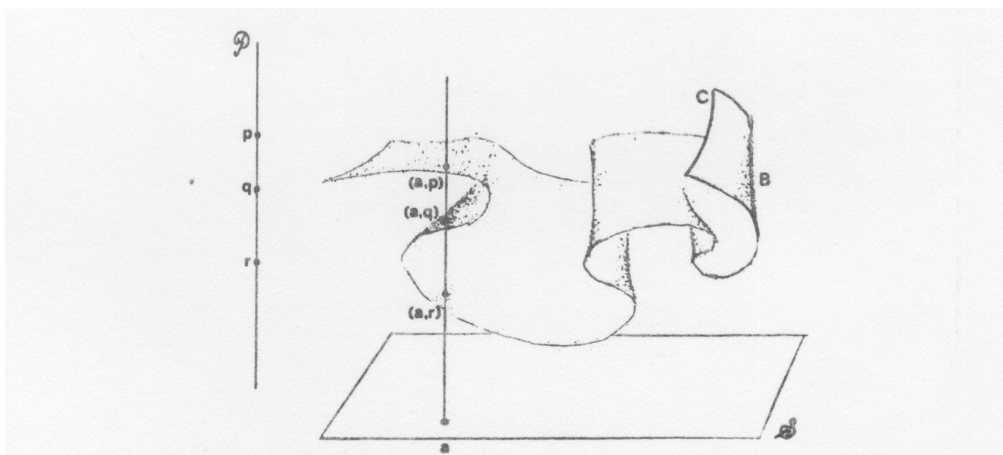


Figura 2.3: *Relazione tra le varietà \mathcal{S} e \mathcal{P} , nel cui grafico è presente anche la varietà \mathcal{B} con il bordo limite \mathcal{C}*

dato che \mathcal{P} coincide con \mathcal{M} . Se ci sono attrattori più complessi come cicli limite, possono corrispondere a punti su una varietà diversa dallo spazio degli stati del cervello.

Queste ipotesi, riguardanti il cervello, hanno portato a formulare il seguente modello di percezione.

- Il set di stimoli è la varietà \mathcal{S} ;
- Il set di percezioni è la varietà \mathcal{P} ;
- C'è una funzione a valori reali liscia $c : \mathcal{S} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}$;
- Il grafico \mathcal{B} del processo cognitivo è un sottoinsieme di $\mathcal{S} \times \mathcal{P}$ dato dai punti critici di c per le variabili in \mathcal{P} . Cioè

$$\mathcal{B} = \{(a, p) | (\partial/\partial p_i)(a, p) = 0, 1 \leq i \leq n\} = \mathcal{M}_c$$

dove (p_1, \dots, p_n) sono coordinate della varietà \mathcal{P} .

In qualunque interpretazione, si insisterà sul fatto che il minimo locale per c sono le percezioni all'equilibrio stabile, e queste si possono osservare. Gli altri, il massimo

locale, i punti di sella, etc., sono di equilibrio instabile.

Questo modello non è necessariamente quello giusto, ma gli argomenti precedenti mostrano che è ragionevole.

2.5 Figure ambigue

Fisher (1967) ha introdotto i disegni ambigui in [fig2.4].

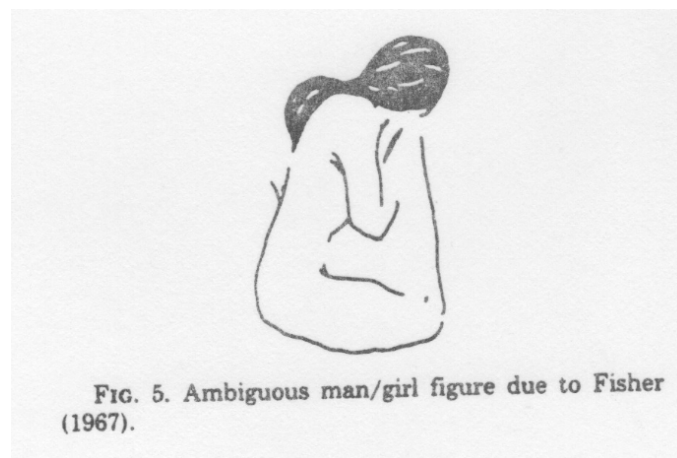


Figura 2.4: *Figura ambigua: uomo/donna di Fisher*

Ha trovato che questa figura ambigua è percepita con più o meno la stessa frequenza come la faccia di un uomo o una donna inginocchiata. Si denotino queste percezioni con i punti p_1 e p_2 in \mathcal{P} . Nei termini del nostro modello generale, si suppone che per questo stimolo la funzione $c_a : p \rightarrow c(a, p)$ abbia un minimo in corrispondenza con queste due percezioni. Cioè $c(a, p) > c(a, p_i)$ per p vicino a p_i , $i = (1, 2)$ dove $a \in \mathcal{S}$ denota lo stimolo di [fig2.4]. Attneave (1971) ha mostrato che queste funzioni possono tendere a formare un processo di isteresi, inserendo la [fig2.5] nella sequenza, e guardando la sequenza da sinistra (dove l'immagine è percepita più come uomo) o da destra (dove l'immagine è percepita più come donna). Nei termini del nostro modello generale questi risultati hanno un'interpretazione naturale.

La [fig2.5] proviene da una famiglia continua di diagrammi. Quindi con un pro-

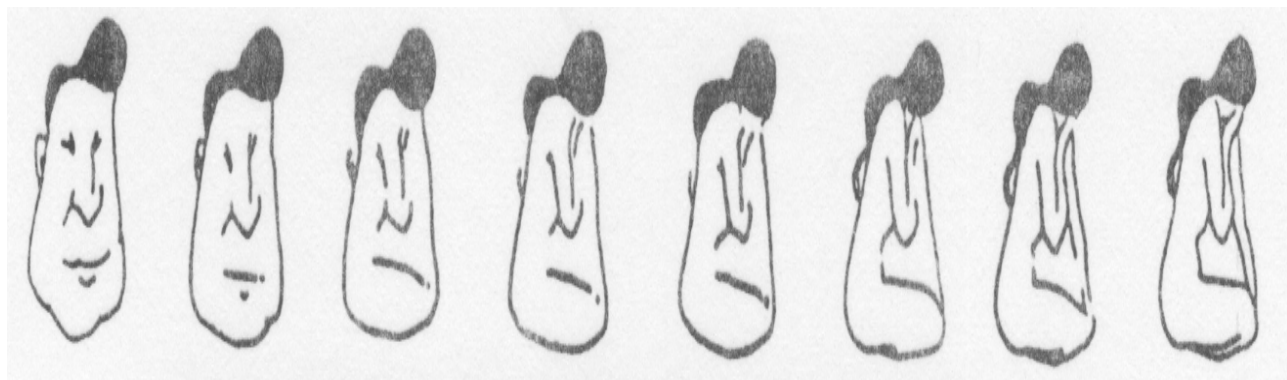


Figura 2.5: Sequenza della figura ambigua di Fisher fatta da Attneave

gramma grafico si potrebbe interpolare in maniera sufficiente le figure per creare una sequenza animata. Si prenda $0 \leq \alpha \leq 1$ come parametro per il continuo, che forma uno spazio \mathcal{S} di stimoli, e si consideri la diversa percezione di uomo e donna come punti di uno spazio multidimensionale \mathcal{P} . Si nota che finché le percezioni dell'uomo dalle figure vicine sono simili ma non identiche \mathcal{P} non sembra un set discreto. Sembra di avere un continuo variare di percezioni.

Di seguito adotteremo il “Principio di minima singolarità” per cui supponiamo che non ci siano più singolarità di quelle che siamo portati a supporre dall'evidenza sperimentale (Il rasoio di Occam).

In linea con tale principio, si suppone che per $\alpha = 0$, cioè la figura non ambigua a sinistra, abbia un minimo locale sul punto di equilibrio corrispondente alla percezione dell'uomo e non abbia altri punti critici, e allo stesso modo per $\alpha = 1$ con la donna. Le osservazioni di Attneave (1971) giustificano la [fig2.6], dove \mathcal{P} è mostrato schematicamente come 1-dimensionale e le due curve non possono continuare fino a destra o sinistra per il fatto che ai due estremi abbiamo unicità. Non possono allontanarsi all'infinito mentre rimangono stabili mentre cambia α .

Così, queste curve di equilibrio stabile devono finire nei punti della piega [fig2.7].

Non abbiamo informazioni sull'equilibrio instabile di quando si incontrano, quindi

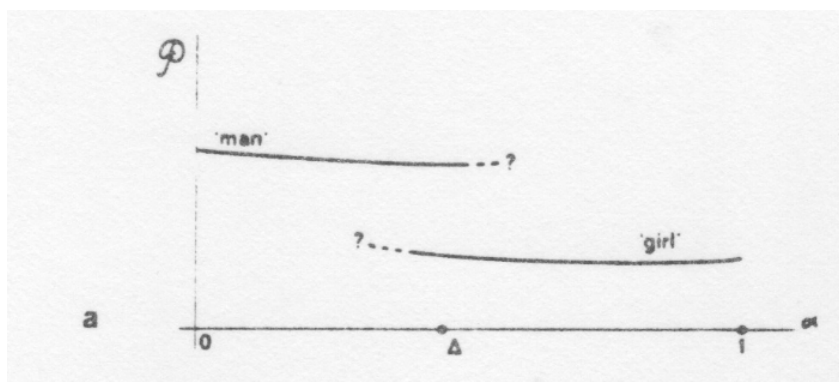


Figura 2.6: a

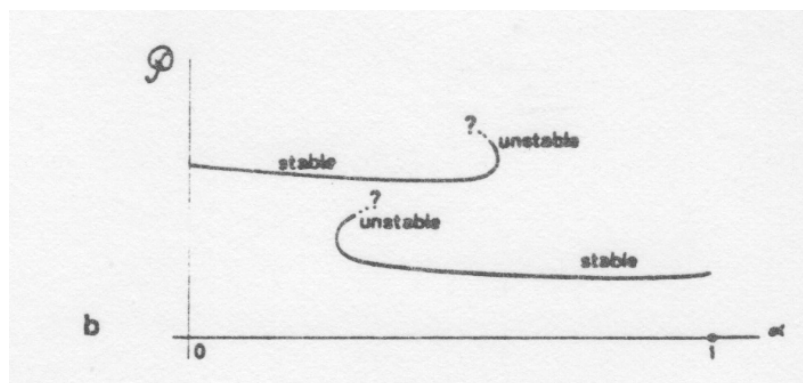


Figura 2.7: b

questo potrebbe andare all'infinito [fig2.8].

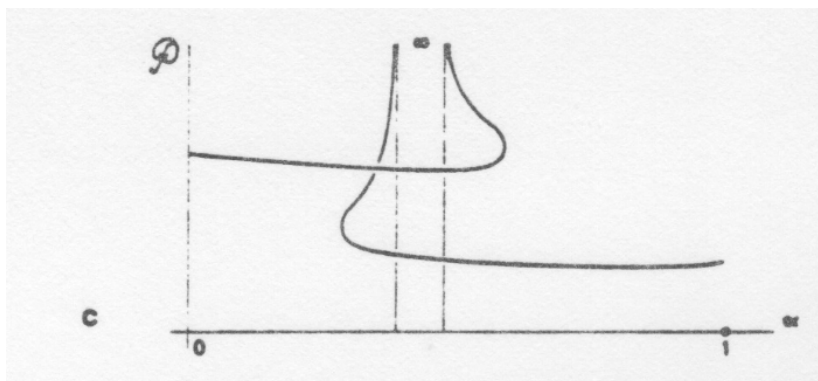


Figura 2.8: *c*

Infatti, se l'uomo e la donna sono in una differente componente connessa di \mathcal{P} potrebbero andare all'infinito. E' più ragionevole evitare queste assunzioni separate nella singolarità all'infinito e accettare la possibilità che esse si congiungano [fig2.9], supponendo dalla minima singolarità che non incontrino altre pieghe durante il percorso.

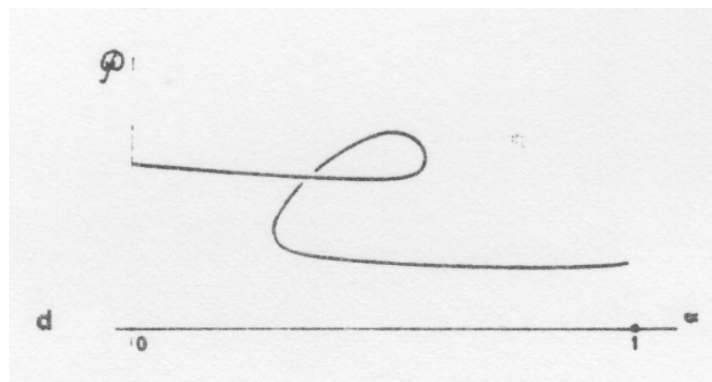
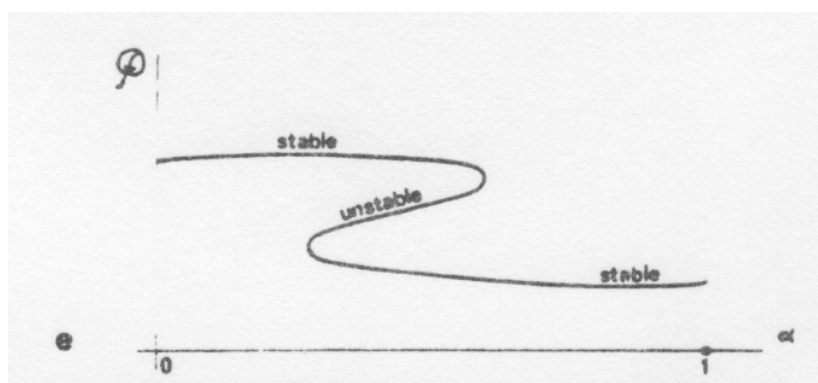
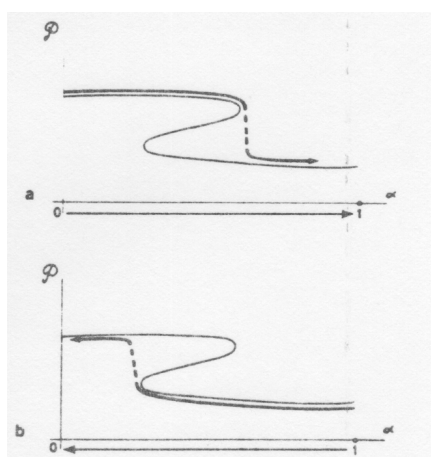


Figura 2.9: *d*

Se $\dim \mathcal{P} \geq 2$, possiamo passare dalla [fig2.9] alla [fig2.10]; se la $\dim \mathcal{P} = 1$, che non è molto plausibile, si può passare direttamente alla [fig2.10]. Si può spiegare l'osservazione di Attneave dell'effetto di pregiudizio tramite il principio di continuità: mentre l'oggetto a cambia continuamente, la percezione p rimane nella

Figura 2.10: e

stessa falda di \mathcal{M}_c finché la falda esiste. All'attraversamento della piega, p salta su un'altra falda della varietà, come in [fig2.11](a) e [fig2.11](b).

Figura 2.11: *Isteresi dentro alla catastrofe naturale del modello di Attneave(1971)*

Una forte aggiunta di rumore statistico può rendere lo stato c un minimo assoluto e non un minimo locale, dato che l'approssimazione è meno buona vicino alle singolarità. Questo elimina l'isteresi. Però, la [fig2.4] rimane stabile in uno stato o in un altro per un periodo ragionevole di tempo.

La spontaneità del saltare da un'interpretazione all'altra è presumibilmente una caratteristica dell'attività del cervello, di cui si cerca di modellizzare gli effetti. La possibilità di questi eventi porta chiare implicazioni per le procedure sperimentali.

Come nel lavoro di Attneave gli esperimenti hanno minimizzato questi effetti.

Capitolo 3

Il vaso di Rubin

[fig3.1] Il vaso di Rubin è una famosa serie di ambigue figure bidimensionali sviluppate intorno al 1915 dallo psicologo danese Edgar Rubin. Rubin raccolse in due volumi alcuni esempi di figure, in lingua danese *Synsoplevede figurer* (“Figure visive”)[2]; egli incluse un certo numero di esempi, ma quello che è diventato il più famoso è certamente quello del vaso.

Nel vaso di Rubin si possono distinguere due profili neri su sfondo bianco, oppure un calice bianco su sfondo nero. Tutte le figure di questo tipo possono sempre essere interpretate in due modi: una figura delle due viene focalizzata, l'altra assume la funzione di sfondo. Se si focalizza prima una figura piuttosto che un'altra dipende da soggetto a soggetto.

3.1 Costruzione dell'esperimento

Sulla base del capitolo due ho pensato che potesse essere valido il modello di catastrofe a cuspidi anche per il vaso di Rubin. Per questo, l'obiettivo che mi sono proposta durante la costruzione dell'esperimento è stato cercare di costruire l'immagine del vaso di Rubin in modo da poter variare due parametri, detti parametri di controllo, che abbiamo pensato essere a , l'*appiattimento* del profilo, e c , il *calibro*,

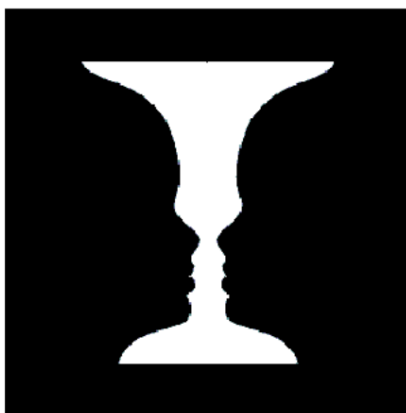


Figura 3.1: *Il vaso di Rubin*

in modo da poter studiare il variare della percezione umana in funzione di questi, così da poter applicare la teoria delle catastrofi e costruire la *superficie di controllo*.

3.1.1 Fasi preliminari

Per la costruzione dell'immagine del vaso di Rubin, ho iniziato utilizzando il programma Mathematica e cercando una funzione che avesse un certo numero di “gobbe”, ossia punti di massimo e minimo, in modo che potesse rappresentare un profilo umano.

Partendo da una funzione $f'(x) = (-x - l) * (x - m) * (x - p)$, derivata della funzione $f(x)$ avente come $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ e $f'(x) = 0$ per $x = l, m, p$ ho ottenuto una funzione che rappresentasse la parte di profilo contenente il naso [fig3.2]. Per ottenere il resto del profilo ho provato ad aumentare il numero di zeri di $f'(x)$ inserendo altri parametri come zeri, ma non sono riuscita ad ottenere qualcosa di facilmente controllabile. Con questa costruzione infatti, si arrivava ad avere una funzione di ottavo grado in cui gli zeri della derivata prima erano

parametri controllati ognuno tramite uno slider, e questo non permetteva di avere solo due slider come parametri di controllo in modo da far variare l'*appiattimento* del profilo e il *calibro* durante l'esperimento.

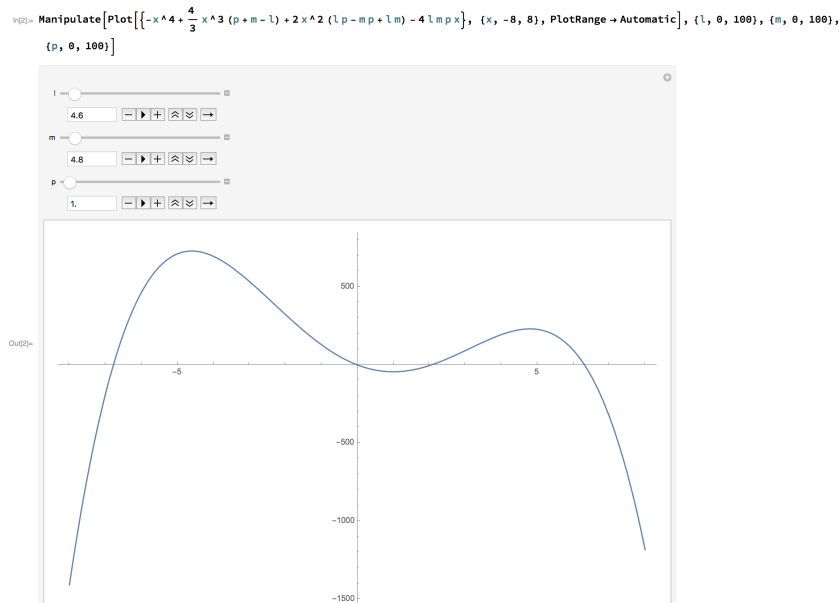


Figura 3.2: *Profilo.prova.Mathematica*

Ho quindi deciso di provare ad utilizzare il software dinamico GeoGebra. Inizialmente ho provato ad inserire sul nuovo software il lavoro precedentemente svolto su Mathematica, ma anche in questo caso l'elevato numero di parametri corrispondenti agli zeri della derivata prima non ha permesso un facile controllo dell'immagine [fig3.3].

Successivamente ho deciso di inserire su GeoGebra direttamente l'immagine del profilo umano, senza provare a creare la funzione, come in [fig3.4].

In [fig3.4] è stata inserita l'immagine del profilo e ho lavorato sul primo parametro di controllo, ossia lo slider a , che rappresenta l'*appiattimento* del profilo. Come si vede in [fig3.4] inserendo i punti A, B, C, D in funzione dello slider a , ossia:

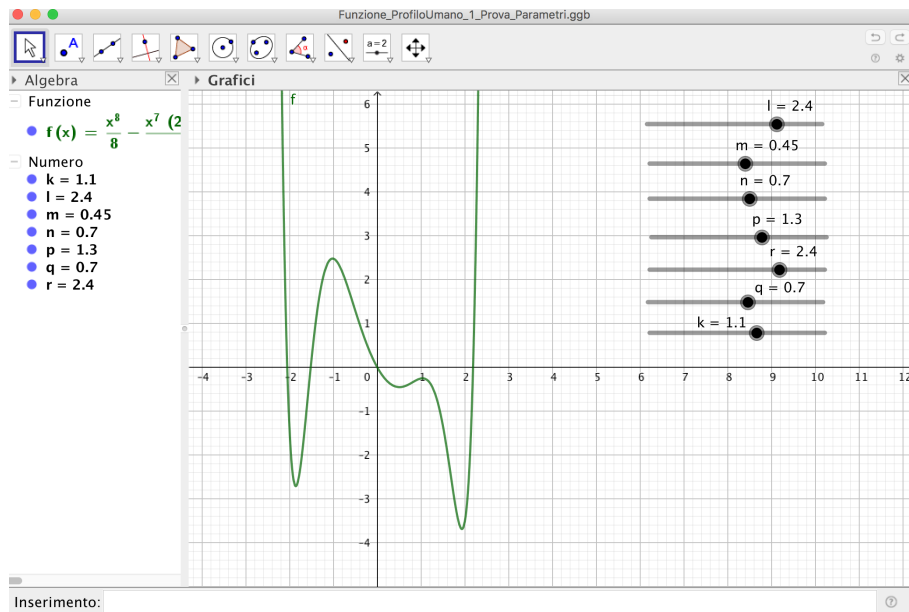


Figura 3.3: *Profilo.prova1.GeoGebra*

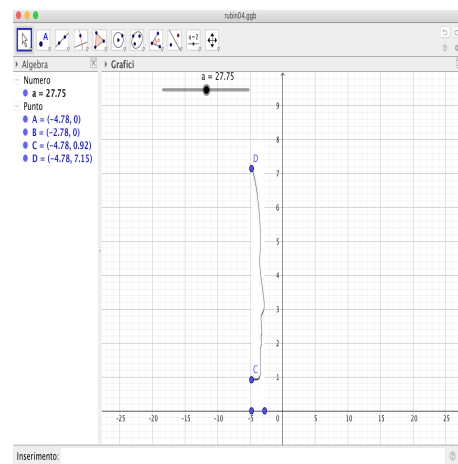
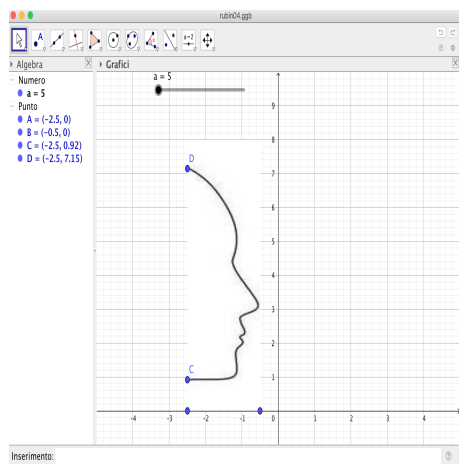


Figura 3.4: *Profilo.prova2.GeoGebra*

$A = (-2 - a/10, 0)$, $B = ((-a)/10, 0)$, $C = (-2 - a/10, 0.91796)$ e $D = (-2 - a/10, 7.14842)$ sono riuscite ad ottenere il profilo appiattito/non appiattito giocando sullo “schacciamento” dell’immagine.

Per costruire la parte restante dell’immagine, sono state fatte alcune prove su GeoGebra.

Inizialmente si è provato a costruire il segmento circolare nel seguente modo [fig3.5]:

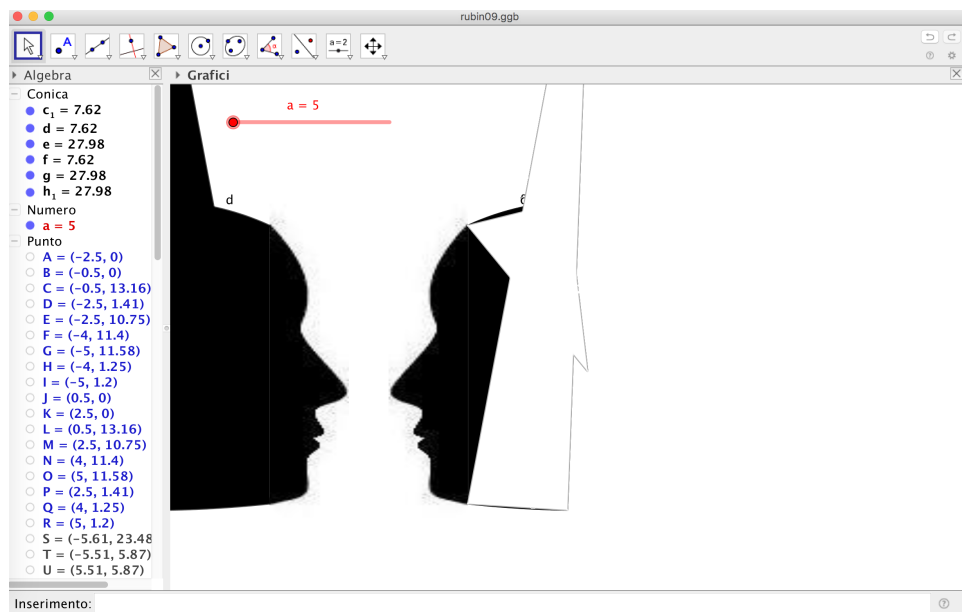


Figura 3.5: *Profilo.prova3a).GeoGebra*

- al livello 1 in nero: settore circolare per tre punti;
- asse dei due segmenti per quei tre punti;
- il punto di incontro degli assi è il centro della circonferenza;
- al livello 2 in bianco: triangolo avente per vertici il centro della circonferenza e i due estremi del segmento.

Questa costruzione però non ha funzionato perché le costruzioni del segmento circolare non erano controllabili, infatti i settori circolari e i triangoli della costruzione uscivano dall'immagine [fig3.6]. Questa immagine aveva quindi una buona costruzione del parametro di controllo riguardante l'appiattimento del profilo, come si può vedere dall'incremento dello slider a nella [fig3.6], però la costruzione fatta in questo modo del resto del volto non avrebbe permesso di controllare la parte riguardante il vaso.

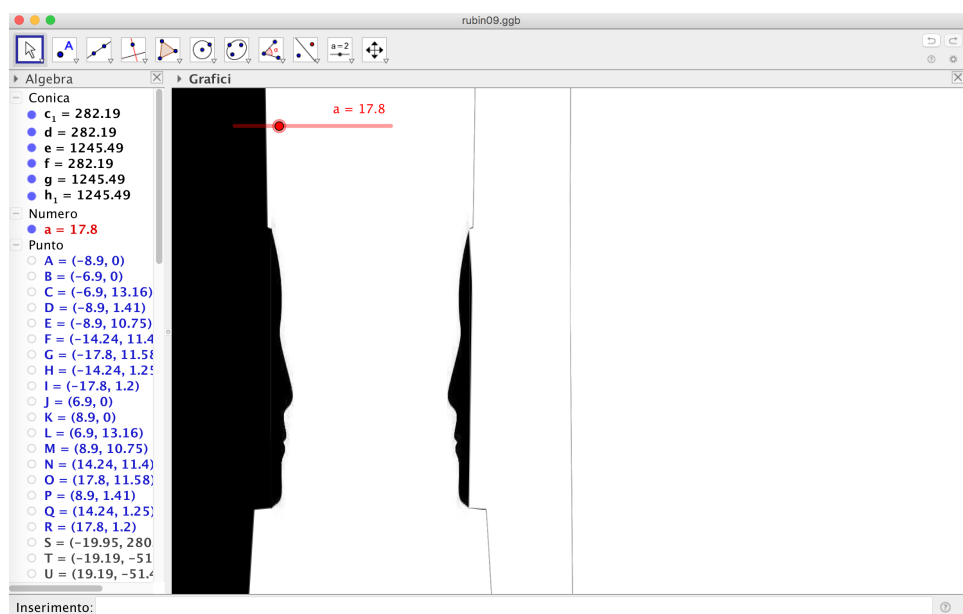


Figura 3.6: *Profilo.prova3b).GeoGebra*

Dopo ulteriori prove sulla costruzione di curve per il volto, si è deciso di prendere l'immagine del vaso di Rubin e ritagliarla in due rettangoli come in [fig3.7].

In questo modo sono riuscita a costruire una buona immagine che rappresentasse il vaso di Rubin e nella quale si potesse lavorare sui due parametri di controllo. Di seguito presento le immagini prese dal file Geogebra rubin_10 nelle quali si vede il lavoro fatto sul parametro a , che controlla l'*appiattimento* del profilo. Si osserva che per $a = 0$ i profili sono pronunciati e che per $a = 10$ sono appiattiti. Questo

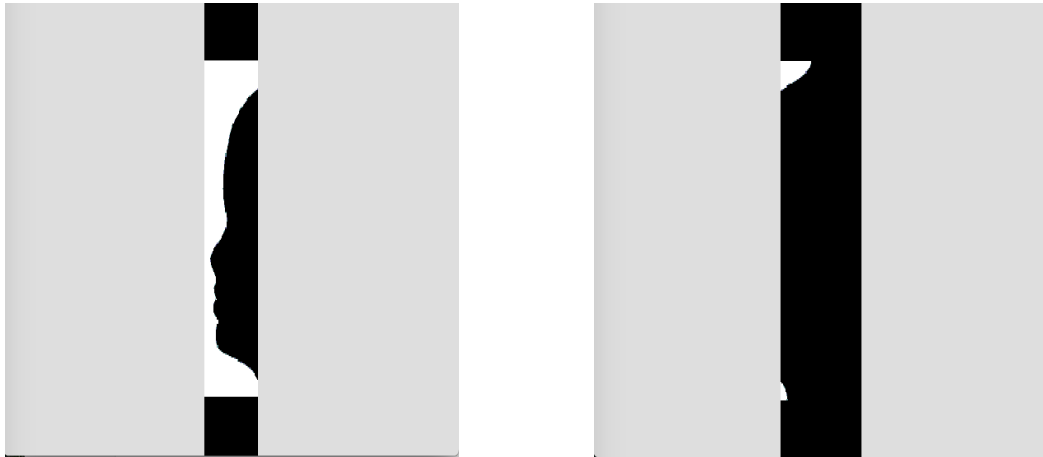


Figura 3.7: *Profilo: immagine tagliata*

è stato fatto lasciando fissi i punti A, B, F, E e inserendo D e L in funzione dello slider a , $D = (-1 - a/10, 0)$ e $L = (-1 - a/10, 6.77882)$, con analogo discorso per i punti simmetrici della costruzione [fig3.8].

Queste immagini hanno dato un buon riscontro sul fatto di prendere lo slider a , rappresentante l'*appiattimento* del profilo, come primo parametro di controllo dell'esperimento. Questo perché attraverso questa costruzione e il varirare di a siamo in grado di studiare come varia la percezione umana dei profili nella figura ambigua del vaso di Rubin.

Successivamente si è cercato il secondo parametro di controllo.

Come primo tentativo si è pensato alla traslazione dell'immagine verso destra, per rendere più/meno evidente il vaso. Come si vede in [fig3.9], utilizzando la retta $f = b$, con b slider, come retta rispetto alla quale ho costruito la simmetria per i profili e lo slider b come slider di traslazione per i punti dell'immagine, si immaginava di analizzare la percezione umana del vaso tramite questa costruzione.

In realtà, con questa costruzione, anche se il vaso traslava verso destra, rimaneva comunque evidente e quindi la traslazione verso destra non ha rappresentato un buon parametro di controllo.

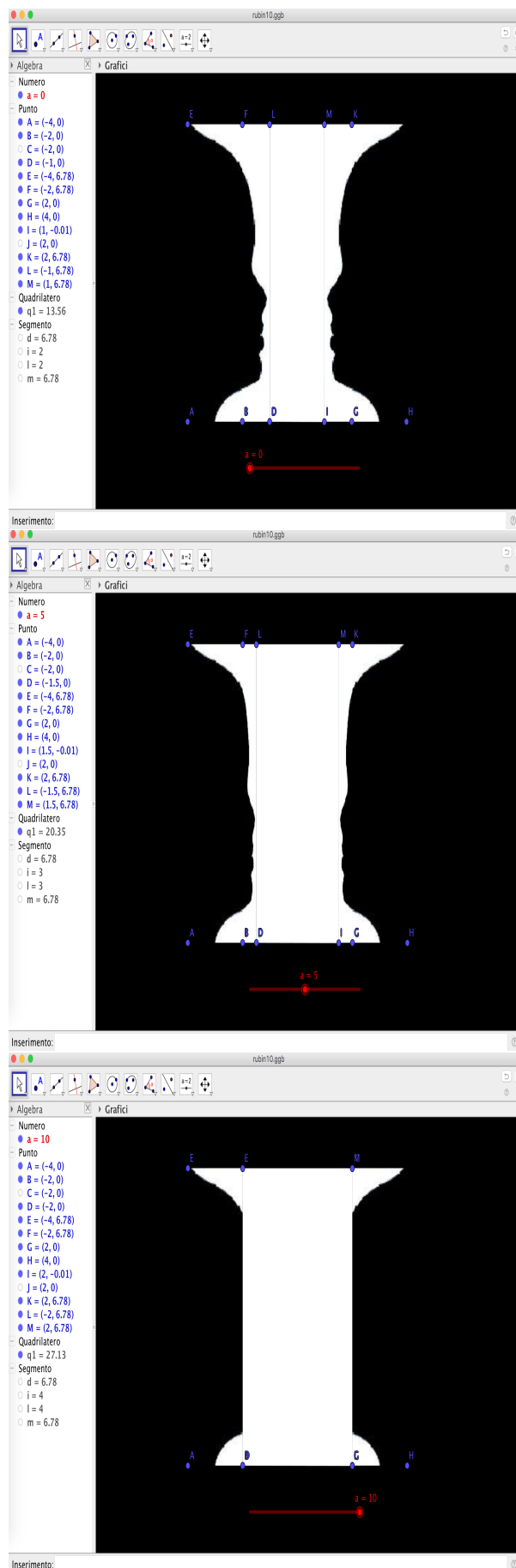


Figura 3.8: rubin_10

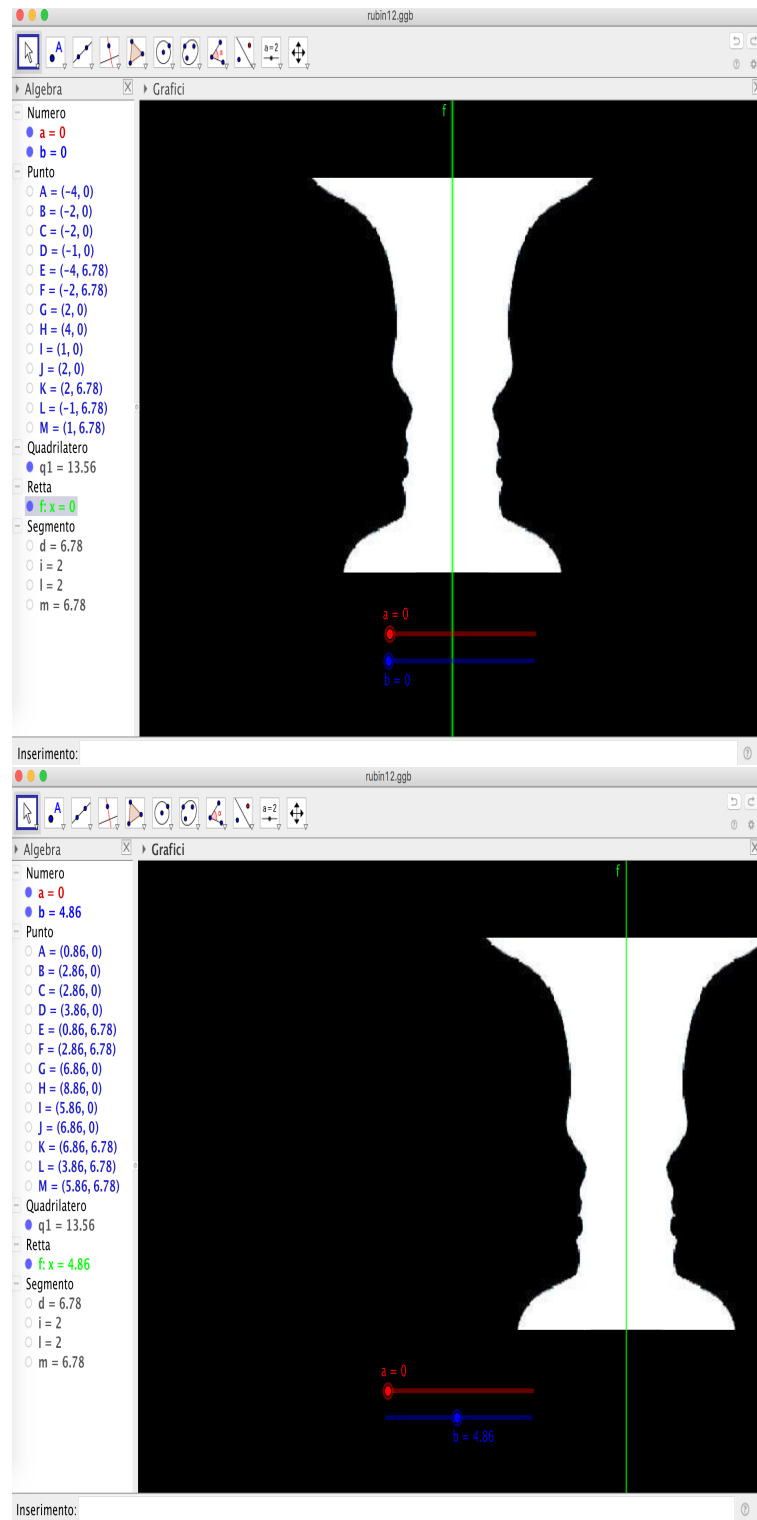


Figura 3.9: rubin_12

Ho continuato la ricerca di un parametro di controllo che potesse controllare la percezione del vaso.

Quello che ha convinto è stato prendere come parametro di controllo il *calibro* del vaso, in particolare usando, inizialmente, lo slider b per allontanare i profili in modo da allargare il vaso fino quasi a farlo scomparire [fig3.10].

Successivamente, determinati i due parametri di controllo, ho cercato un modo per creare un unico slider che li collegasse e che permettesse di controllare la figura durante l'esperimento. Inizialmente, come si vede in [fig3.11], si è preso lo slider c tale che $a = c$ e $b = 10 - c$. Ma questo non è stato un buon tentativo per i seguenti motivi:

- Il vaso si allargava troppo velocemente in confronto all'appiattimento dei profili;
- La simmetria rispetto alla retta $f = b$ non è stata una buona costruzione perché per alcuni valori di a e b le quattro figure si intersecavano.

Abbiamo quindi cercato un modo per controllare meglio appiattimento profili e allargamento vaso.

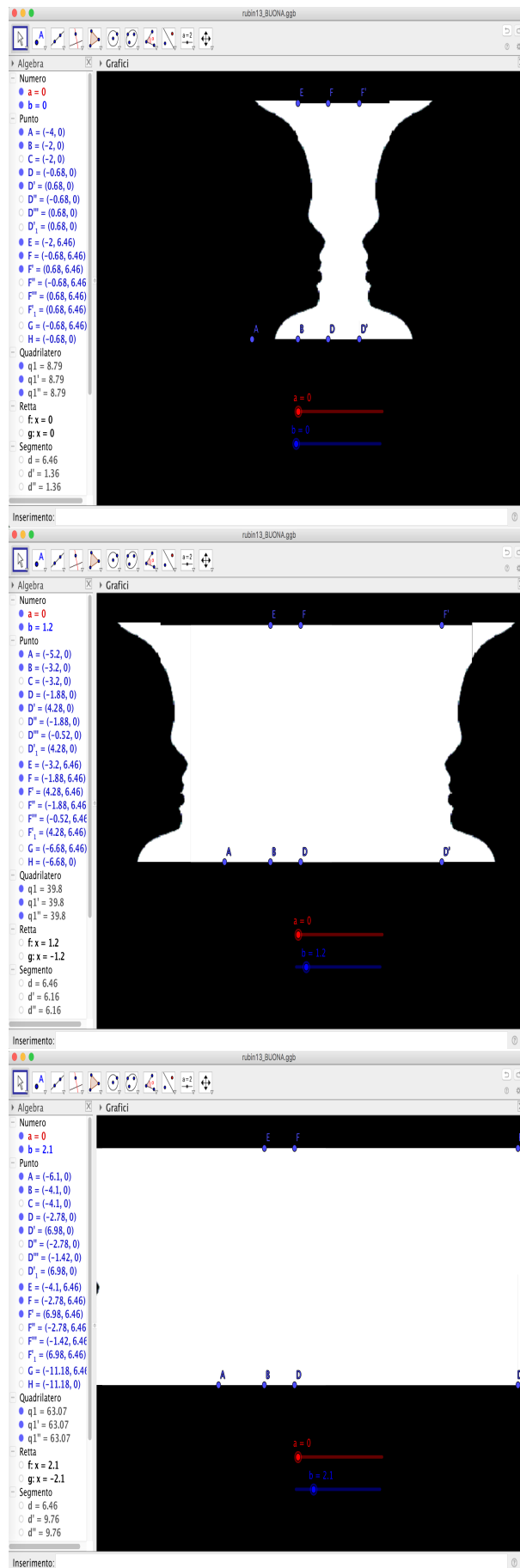


Figura 3.10: rubin_13

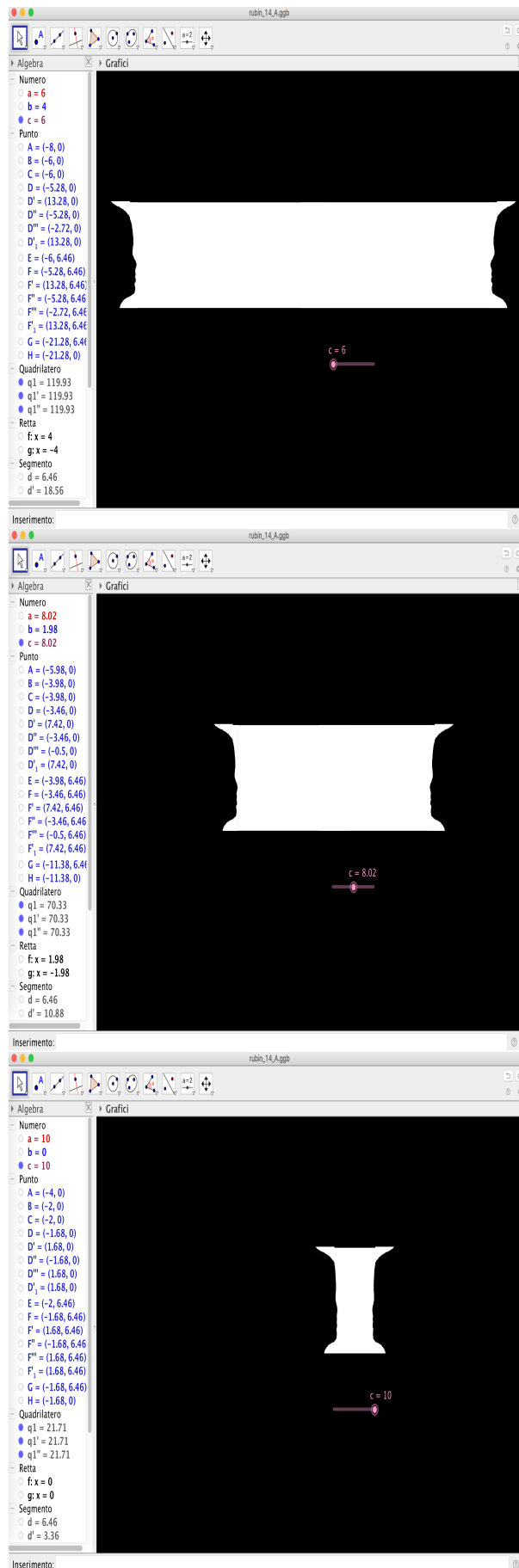


Figura 3.11: rubin_14

3.1.2 Costruzione definitiva

La costruzione dell'immagine usata nella sperimentazione è quella ottenuta a partire dal file GeoGebra rubin_20.

In questo file ho iniziato inserendo su GeoGebra le figure fig1 e fig2 come mostrato in [fig3.7].

A questi due rettangoli ho inserito i punti base $A(2, 0)$ e $B(4, 0)$ di fig1 e $C(0.68, 0)$ e $D(2, 0)$ di fig2. Successivamente ho preso i punti $G(0.68, 0.84)$, $F(0.68, 5.75)$ e $E(0.68, 6.59)$ come punti rilevanti dell'immagine perché sul bordo del vaso e del rettangolo.

A questo punto, ho creato la retta $f : x = 0$ e ho fatto la simmetria di fig1 e fig2 rispetto a questa retta, creando così l'immagine statica del vaso di Rubin.

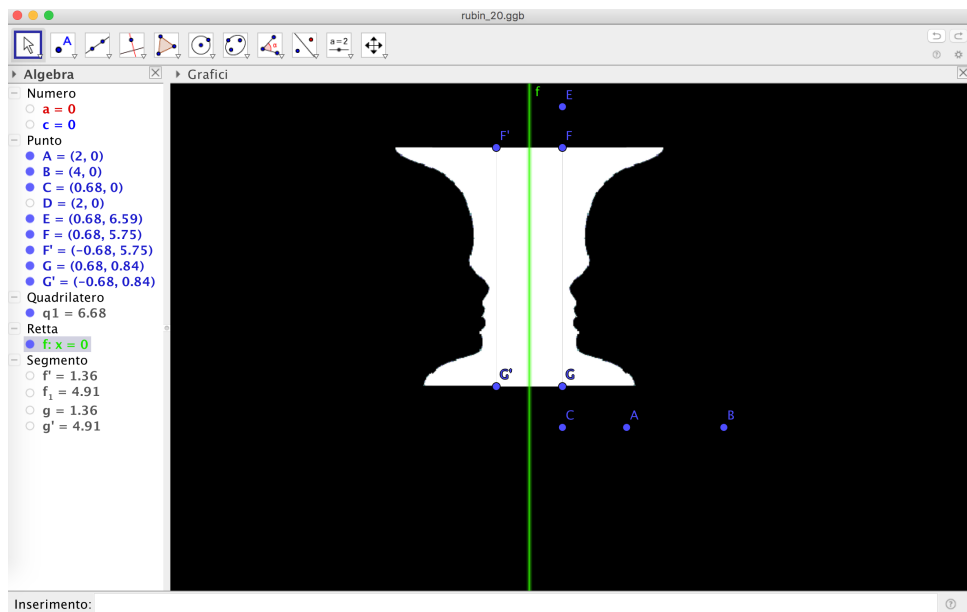


Figura 3.12: *rubin_20.GeoGebra*

Ho quindi creato i due slider a e c , che rappresentano i due parametri di controllo dell'esperimento.

Lo slider a , come detto in precedenza è un parametro che controlla l'*appiattimento* dei profili, e lo fa nel seguente modo: il punto C , estremo della fig1, è definito come

$C = (0.68 + a/10 + c, 0)$, e di conseguenza i punti G, F e E sono definiti come $G = (0.68 + a/10 + c, 0.84)$, $F = (0.68 + a/10 + c, 5.75)$ e $E = (0.68 + a/10 + c, 6.59)$. Così, all'aumentare di a i punti sul lato sinistro del rettangolo della fig1 si avvicinano all'altro lato del rettangolo, schiacciando così il profilo. Analogamente succede all'immagine simmetrica, facendo sì che entrambi i profili si schiaccino all'aumentare di a [fig3.13].

Lo slider c è un parametro che controlla la *larghezza del vaso* nel seguente modo: i punti sono definiti come $A = (2 + c, 0)$, $B = (4 + c, 0)$, $C = (0.68 + a/10 + c, 0)$, $D = (2 + c, 0)$, $E = (0.68 + a/10 + c, 6.59)$, $F = (0.68 + a/10 + c, 5.75)$ e $G = (0.68 + a/10 + c, 0.84)$. Abbiamo quindi controllato l'allargamento del vaso traslando i punti verso l'esterno dell'immagine, allontanando cioè i profili dall'asse di simmetria [fig3.14].

Come ultimo parametro abbiamo creato lo slider b , che ha come funzione di collegare gli sliders a e c . L'abbiamo inserito perché l'allargamento del vaso avveniva troppo velocemente rispetto all'appiattimento dei profili.

Per l'esperimento abbiamo creato quattro file diversi, in modo da studiare la percezione della figura ambigua e creare una superficie di controllo.

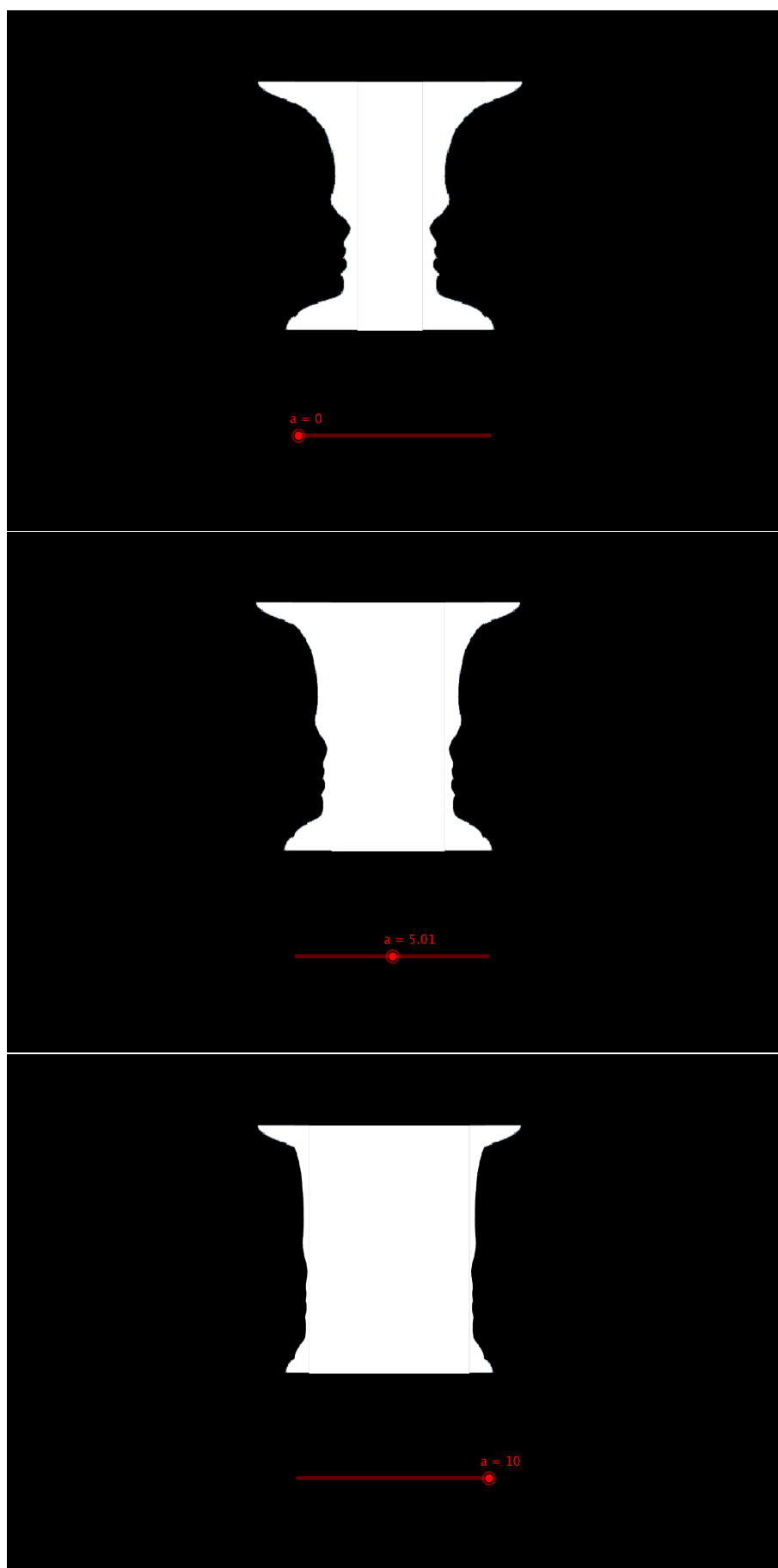
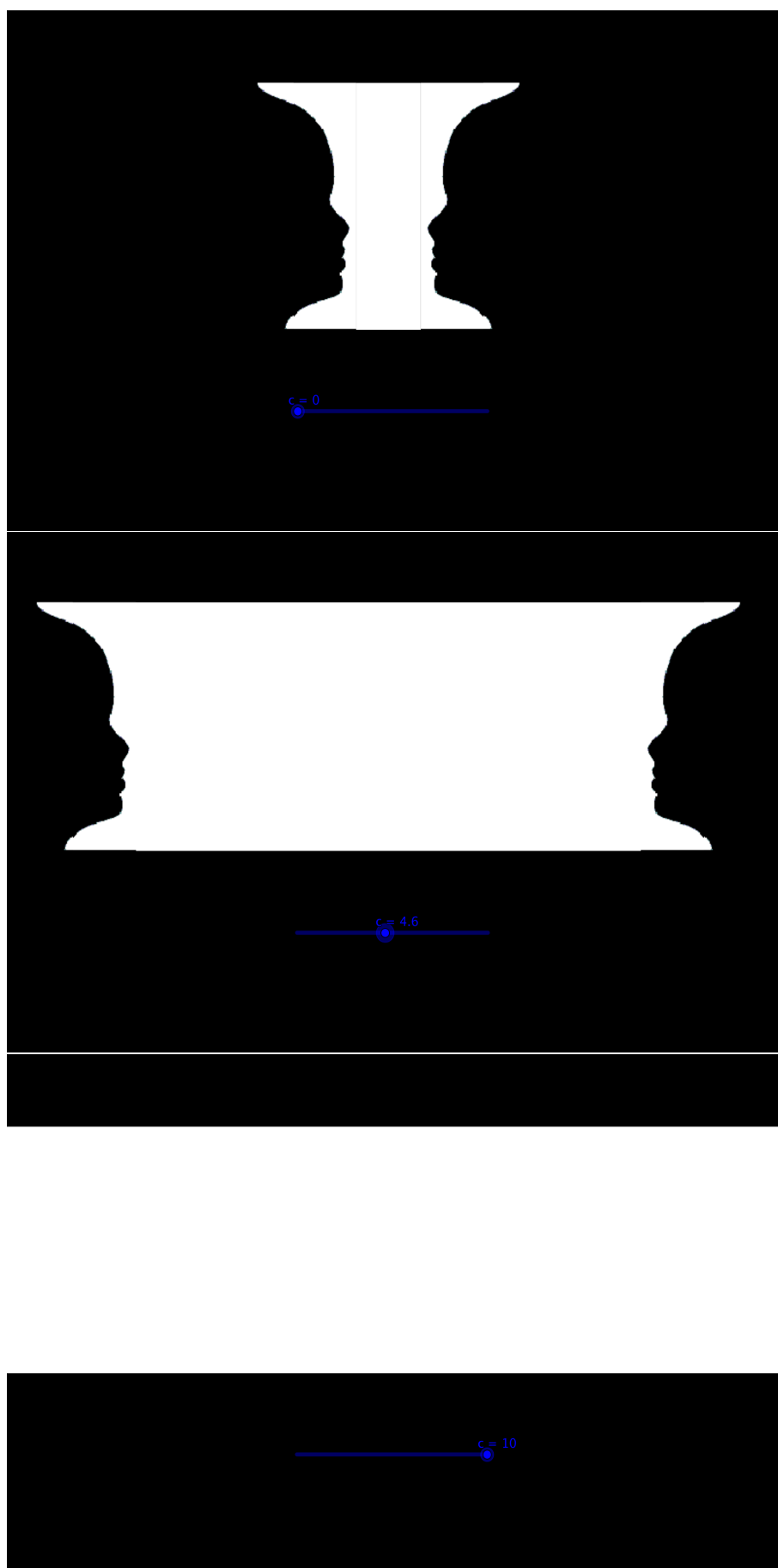


Figura 3.13: *rubin_20.GeoGebra* : slider a

Figura 3.14: *rubin_20.GeoGebra* : slider c

3.2 Progettazione esperimenti

Per il primo percorso, corrispondente all'esperimento `rubin_23`, ho pensato di vedere come varia la percezione umana partendo da a minimo, cioè $a = 0$, corrispondente ai profili non appiattiti, e c massimo, cioè $c = 10$, corrispondente al "non vaso", incrementando a e diminuendo c , fino ad arrivare ad $a = 10$ e $c = 0$, cioè profili appiattiti e vaso definito. Questo perché, sempre sulla base del capitolo due, ho pensato che potesse essere un buon percorso per rappresentare il modello di catastrofe a cuspidi [fig3.15].

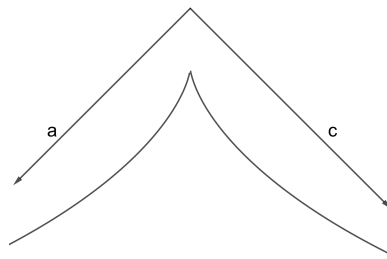


Figura 3.15: *Cuspide*

Successivamente ho pensato di analizzare il percorso un po' più in alto, per questo ho creato un file, `rubin_25`, che facesse variare i parametri a e c in un range tra 0 e 8, così da analizzare la cuspidi più in alto, vicino al punto singolare [fig3.16].

Ho pensato a due ulteriori percorsi [fig3.17]. Entrambi che partono da qualcosa che non è niente, né vaso né profili, per arrivare alla figura ambigua, in due modi diversi però. Nel file `rubin_21` parto da qualcosa che non è niente, passo attra-

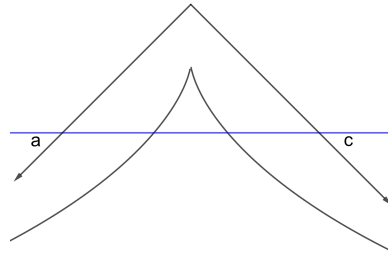


Figura 3.16: *Cuspide tagliata*

verso i profili pronunciati, e arrivo alla figura ambigua. Nel file rubin_22 parto da qualcosa che non è niente, passo attraverso il vaso, che si vede molto più dei profili, e arrivo alla figura ambigua.

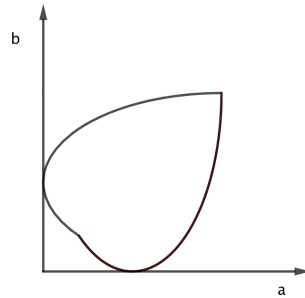


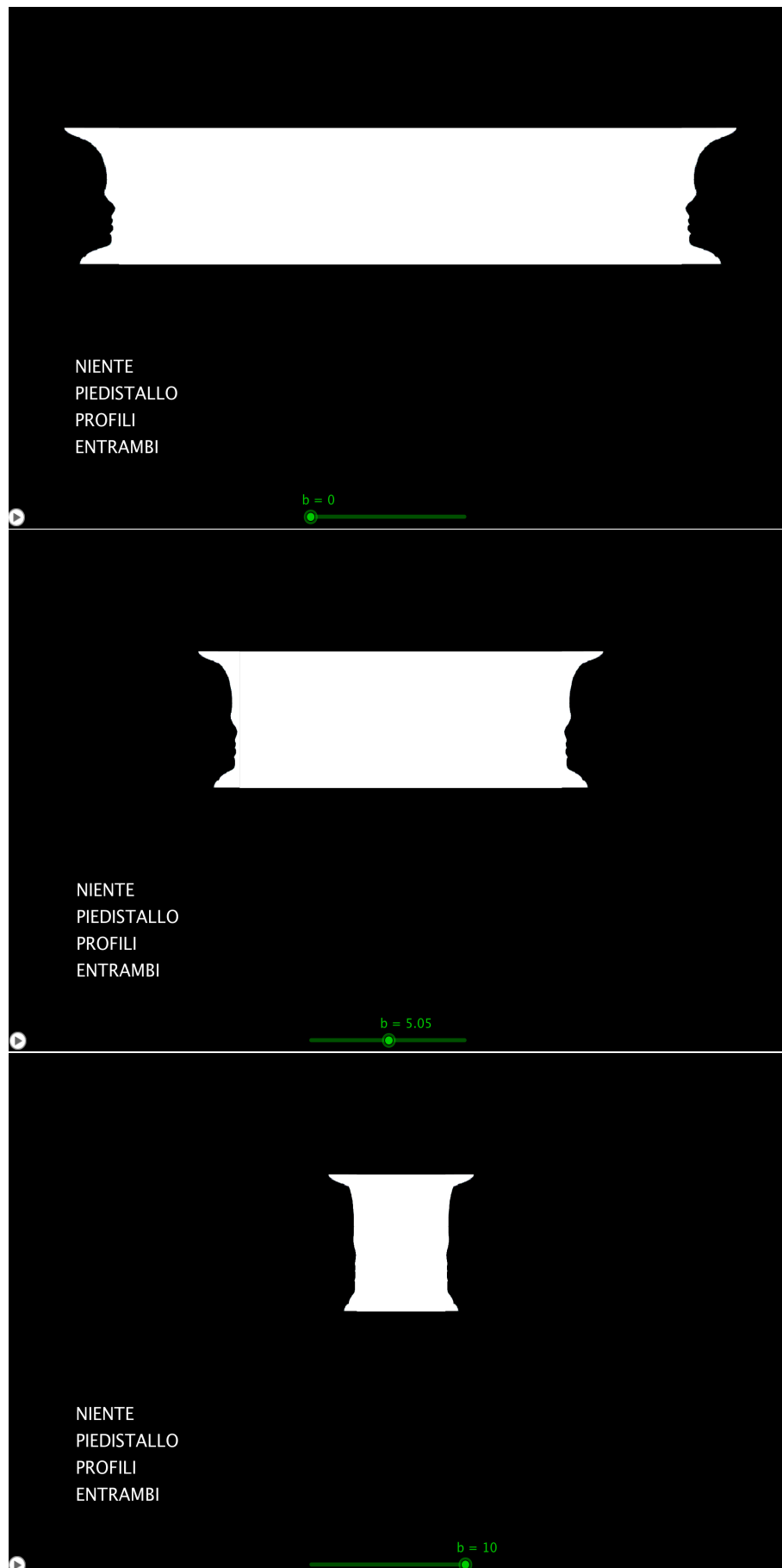
Figura 3.17: *Percorsi in rubin_21 e rubin_22*

3.2.1 Rubin_23

Con questa costruzione abbiamo voluto rappresentare due percorsi diversi: da solo profili a solo vaso [fig3.18], e viceversa [fig3.19].

I parametri sono definiti come:

$$a = b; c = 10 - b$$

Figura 3.18: *rubin_23.Geogebra*

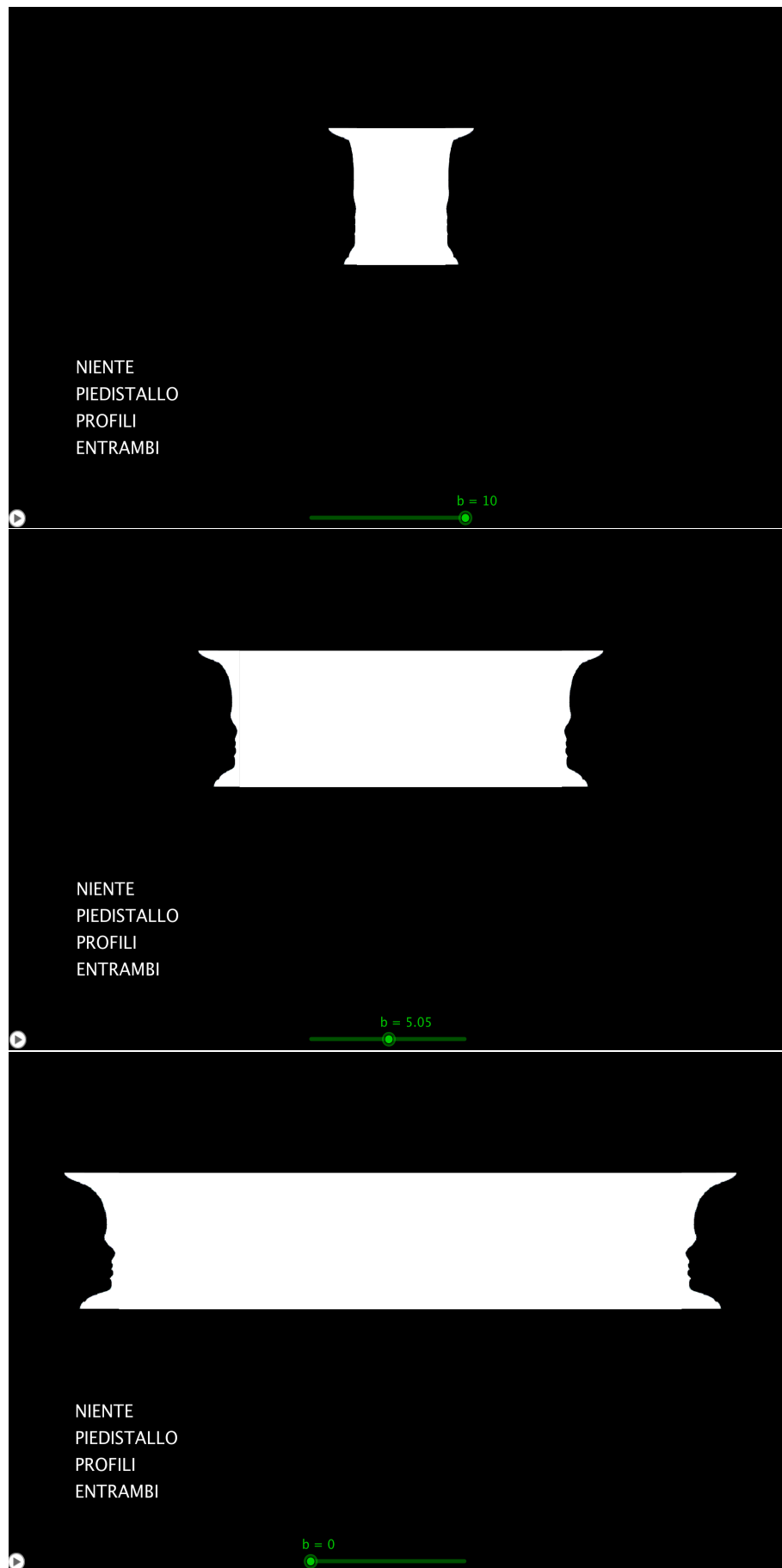


Figura 3.19: *rubin_23.Geogebra*

3.2.2 Rubin_25

[fig3.20] I parametri sono definiti come:

$$a = b; c = 8 - b$$

Con questo file si analizza il percorso visto in rubin_23, ma tagliato in un punto più alto della cuspide. Infatti si vede che il punto di arrivo non è più solo vaso, $c = 0$ e $a = 10$, ma $a = 8$, cioè i profili si vedono ancora.

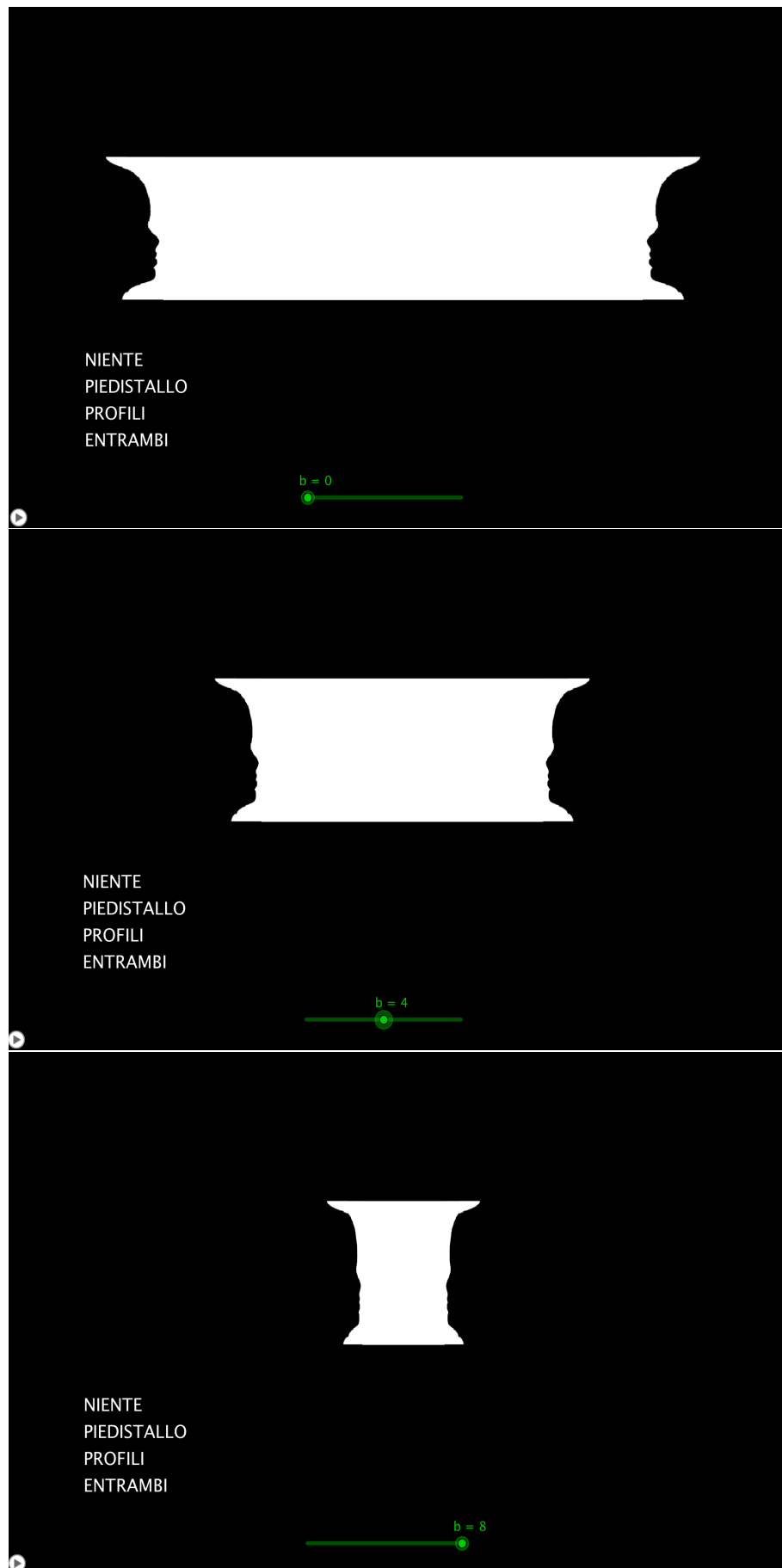


Figura 3.20: *rubin_25.Geogebra*

3.2.3 Rubin_21

I parametri sono definiti come:

$$b; a = 10 - 2\sqrt{10b - b^2}; c = 10 - \sqrt{100 - b^2}$$

Con questo file parto da qualcosa che non è niente [fig3.21], passo attraverso i profili pronunciati, e arrivo alla figura ambigua [fig3.22].

In particolare si osserva che nella costruzione eseguita lo slider b varia in un range da 10 a 2 perché è proprio per $b = 2$ che si ha la figura ambigua. Per $b \in [0, 2[$ si ha la rientranza della “foglia”, che porta l’immagine ad arrivare a solo vaso, e questo non interessa in questa fase dell’esperimento.

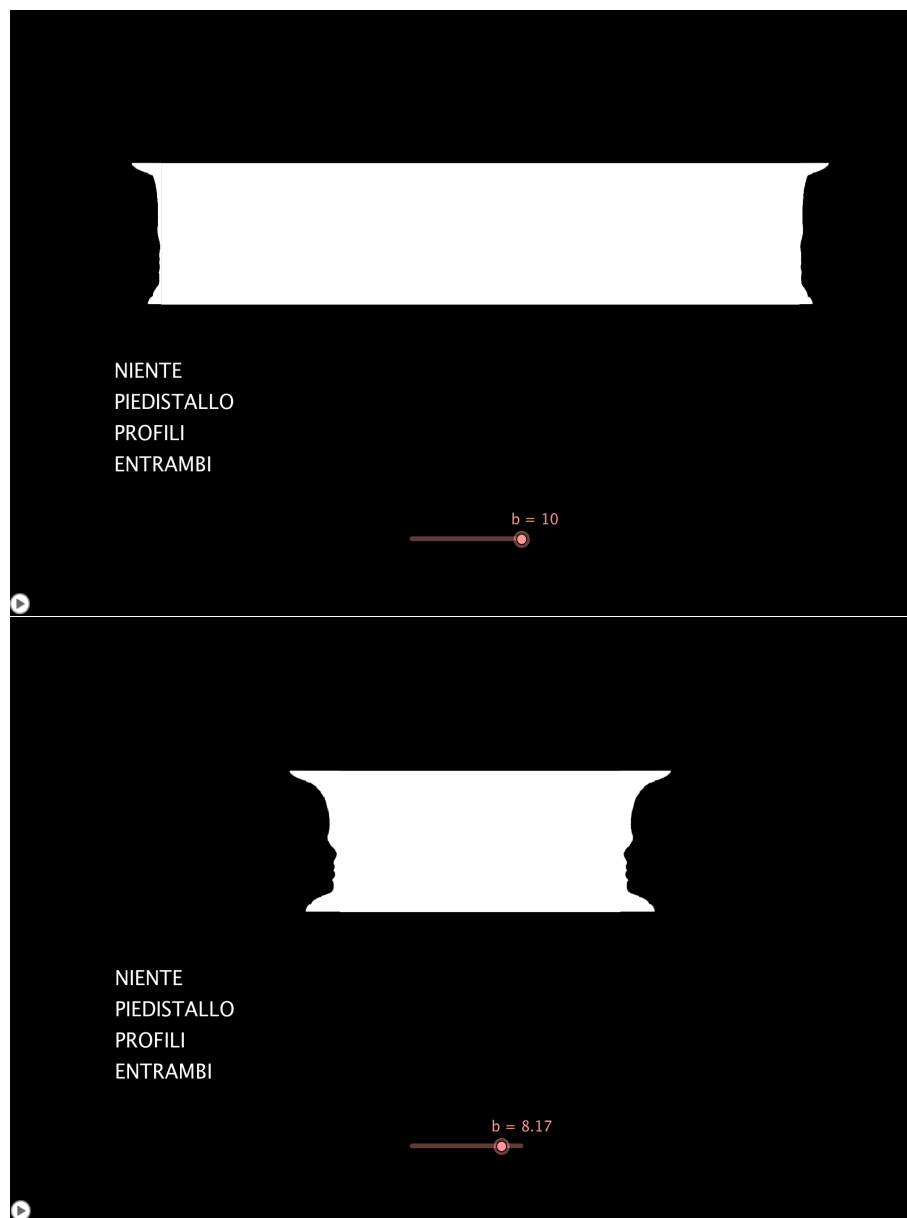
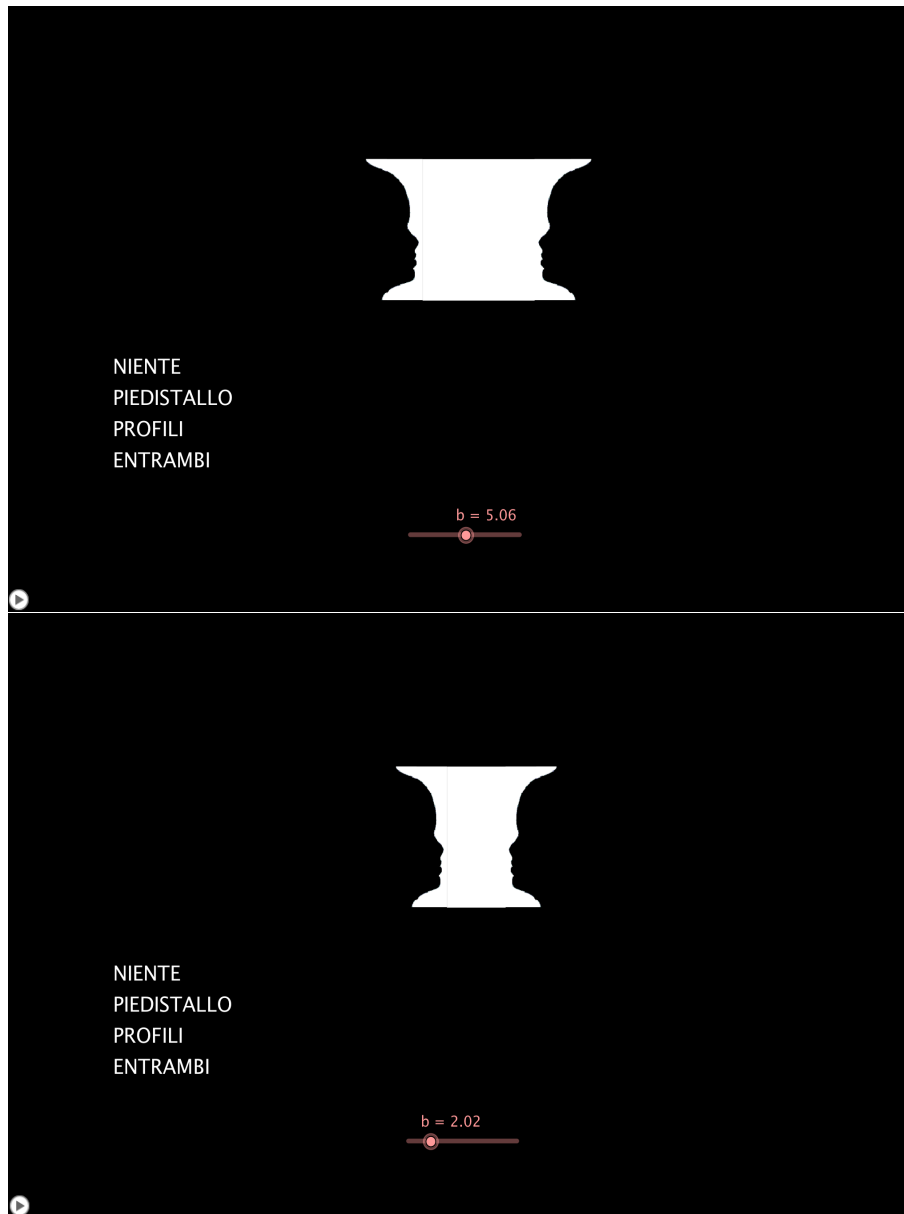


Figura 3.21: *rubin_21.Geogebra*

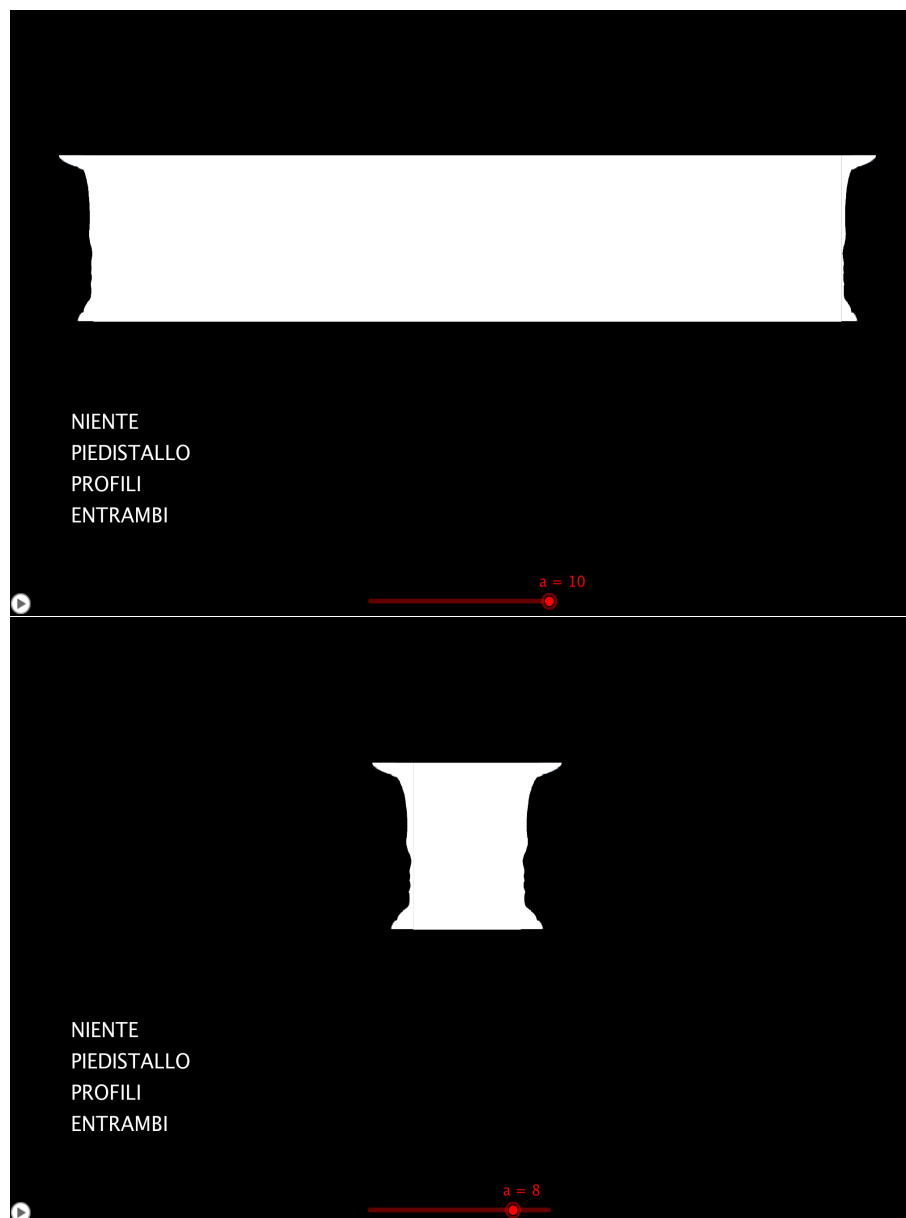
Figura 3.22: *rubin_21.Geogebra*

3.2.4 Rubin_22

I parametri sono definiti come:

$$b; a = 10 - 2\sqrt{10b - b^2}; c = 10 - \sqrt{100 - b^2}$$

Con questo file parto da qualcosa che non è niente [fig3.23], passo attraverso il vaso, che si vede molto più dei profili, e arrivo alla figura ambigua [fig3.24]. Analogamente a rubin_21 lo slider b varia in un range da 10 a 2.

Figura 3.23: *rubin_22.Geogebra*

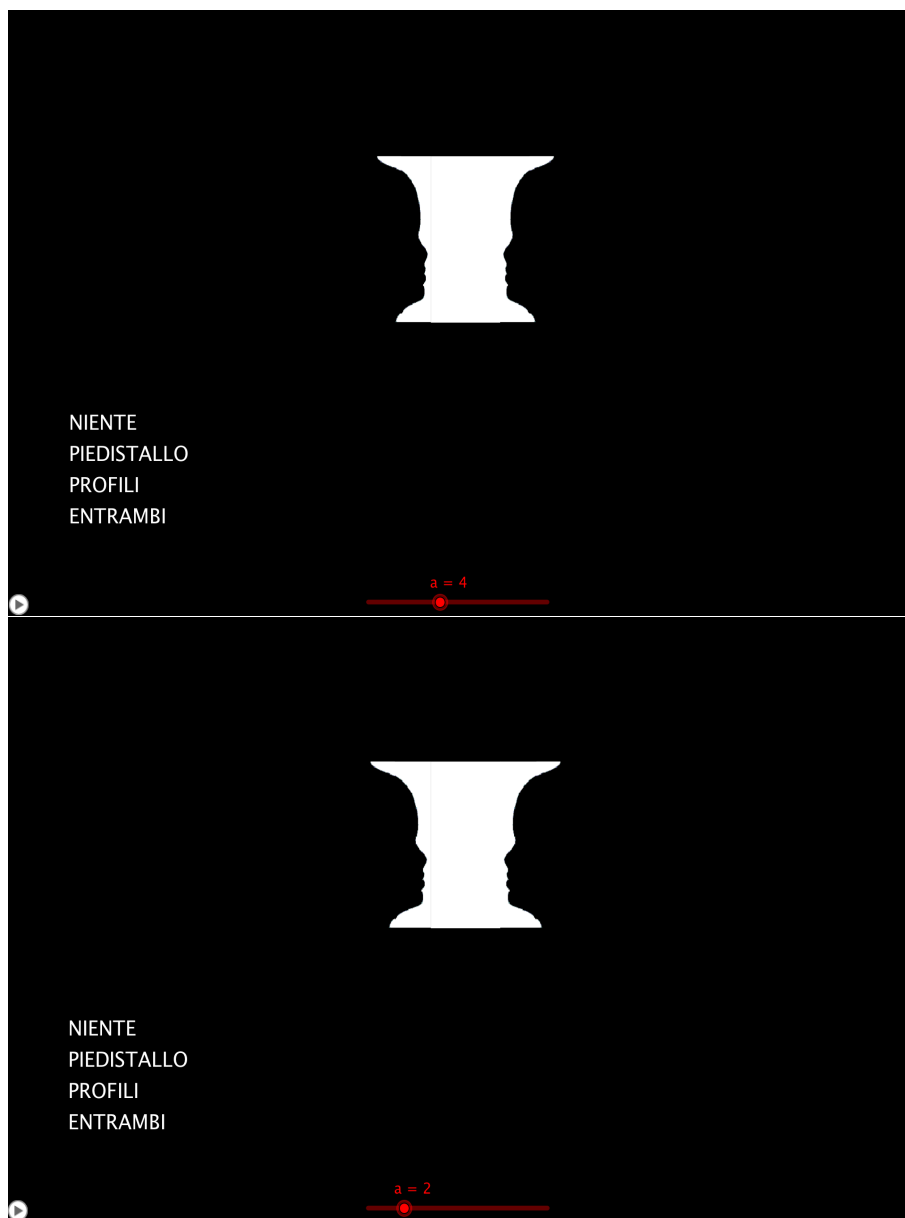


Figura 3.24: *rubin_22.Geogebra*

Capitolo 4

Sperimentazione

4.1 Costruzione sperimentazione

Per la sperimentazione ho utilizzato sei file video sulla base dei file GeoGebra costruiti nel capitolo precedente. In particolare, ho inserito in ogni file GeoGebra l'animazione dello slider e ho fatto partire il video nel momento in cui partiva lo slider, così che ad un certo istante del video corrisponde un valore del parametro del mio slider.

Il file `Registrazione_Rubin_23_1` rappresenta il percorso solo profili \rightarrow solo vaso, mentre il file `Registrazione_Rubin_23_2` rappresenta il percorso solo vaso \rightarrow solo profili. I files `Registrazione_Rubin_25_1` e `Registrazione_Rubin_25_2` rappresentano i percorsi tagliati in un punto più alto della cuspide. Infine, i files `Registrazione_Rubin_21` e `Registrazione_Rubin_22` rappresentano i percorsi niente \rightarrow figura ambigua passando, rispettivamente, attraverso profili pronunciati e vaso.

Ho quindi deciso di provare le mie costruzioni preliminari su otto soggetti di prova nel seguente modo:

- ho dato loro il foglio della guida alla sperimentazione [fig4.1];

GUIDA SPERIMENTAZIONE

1. COSA PUOI VEDERE NELLE SEGUENTI IMMAGINI?

- O qualcosa che non è **niente**
- O **un vaso**
- O **due profili**
- O qualcosa che è **entrambi** che si alternano rapidamente

2. COSA MI DEVI DIRE?

- Cosa vedi delle precedenti cose elencate quando partiamo:
NIENTE - VASO - PROFILI - ENTRAMBI
- Se eventualmente cambia ciò che percepisci nell'immagine tocca la barra spaziatrice

Figura 4.1: *Guida sperimentazione.prova*

- ho fatto vedere loro i video, facendo una piccola pausa tra un video e un altro;
- ho segnato su un file Excel gli eventuali istanti di transizione.

I risultati su questi otto soggetti di prova non sono stati inseriti nei risultati della sperimentazione vera e propria, ma sono stati usati come campione per vedere se la mia idea di sperimentazione era adeguata, ed eventualmente per apportare alcune modifiche.

Infatti, in seguito alla prova della sperimentazione su questi soggetti, è emerso il fatto che, nell'immagine così modificata del vaso di Rubin a causa della variazione dei parametri, il vaso "allargato" non era più un vaso ma somigliava di più ad un piedistallo. Quindi nella sperimentazione vera e propria ho usato il nome piedistallo.

Di seguito si può osservare la guida alla sperimentazione utilizzata su 66 soggetti [fig4.2].

Inoltre, durante la sperimentazione, affinché i risultati non fossero influenzati da un possibile ordine dei video, ho testato i video sulle persone in ordine diverso: ad ogni gruppo di 8 persone ho proposto una determinata combinazione.

GUIDA SPERIMENTAZIONE

1. COSA PUOI VEDERE NELLE SEGUENTI IMMAGINI?

- O qualcosa che non è **niente**
- O **un piedistallo**
- O **due profili**
- O qualcosa che è **entrambi** che si alternano rapidamente

2. COSA MI DEVI DIRE?

- Cosa vedi delle precedenti cose elencate quando partiamo:
NIENTE – PIEDISTALLO – PROFILI – ENTRAMBI
- Se eventualmente cambia ciò che percepisci nell'immagine tocca la barra spaziatrice

Figura 4.2: *Guida sperimentazione*

4.2 Risultati sperimentazione

I risultati della sperimentazione sono stati registrati su una tabella “Sperimentazione Excel.xlsx” [fig6.1, fig6.2, fig6.3, fig6.4, fig6.5, fig6.6, fig6.7, fig6.8, fig6.9, fig6.10, fig6.11, fig6.12]. In questa tabella, per ogni soggetto, ho segnato l’età, se è destro o mancino, qual è il suo corso di studi e lo schema combinatorio dei video applicato. In particolare, ho fatto questo per vedere se uno di questi parametri poteva influenzare i risultati della sperimentazione. In questo primo file ho registrato gli istanti, in secondi, in cui i soggetti mi dicevano di vedere un certo “salto” dell’immagine.

Successivamente ho creato un nuovo file Excel in cui ho convertito i secondi in valori dei parametri corrispondenti. Per fare questo ho operato nel seguente modo: ad esempio, per il file Registrazione_Rubin_23_1 della durata di 43 secondi, ho inserito sull’asse delle ascisse i secondi, t , sull’asse delle ordinate lo slider b , e ho fatto la retta passante per $(0, 0)$ e $(43, 10)$. Da qui è venuto che:

$$b = \frac{10t}{43}; a = \frac{10t}{43}; c = 10 - \frac{10t}{43}$$

Analogamente per gli altri file ho creato le rette di conversione da secondi a valori dei parametri.

In questo modo ho raccolto tutti i dati nel file “File Excel dati.xlsx” [fig6.13, fig6.14, fig6.15, fig6.16, fig6.17, fig6.18].

Successivamente da questa tabella ho eliminato le celle corrispondenti a soggetti che in qualcuno dei file non avevano evidenziato istanti di transizione “File Excel dati copia.xlsx” [fig6.19, fig6.20, fig6.21, fig6.22, fig6.23, fig6.24].

4.3 Analisi risultati

4.3.1 Analisi preliminare

Inizialmente, per analizzare i risultati si è pensato, per i file Registrazione_Rubin_23_1, 23_2, 25_1 e 25_2 di prendere gli ultimi istanti in cui i soggetti hanno visto un

“salto” dell’immagine e successivamente di fare la media dei valori per ogni file. Per i file *Registrazione_Rubin_21* e *22*, siccome ci sono stati alcuni casi con diverse transizioni, e siccome siamo in una zona instabile, si è pensato di prendere il primo momento in cui si manifesta l’instabilità.

L’idea di prendere le medie dei valori per ogni file non è stata una buona idea siccome facendo la retta passante per *Rubin_23_1* e *Rubin_25_1* e quella passante per *Rubin_23_2* e *Rubin_25_2*, si è visto che queste due rette avevano intersezione molto distante dalla zona d’interesse e quindi non si è potuto studiare il fenomeno della cuspidale.

4.3.2 Analisi finale

Siccome l’idea di fare la media di tutti i valori dei parametri per ogni file non ha portato a qualcosa che somigliasse alla cuspidale ho pensato di prendere, per ogni soggetto, la coppia di rette in cui la prima passa per il punto P_1 , avente come coordinate i parametri a e c di *Rubin_23_1*, e per il punto P_2 avente come coordinate i parametri a e c di *Rubin_25_1*, e la seconda che passa per i punti P_3 e P_4 , avente come coordinate i parametri a e c di *Rubin_23_2* e *Rubin_25_2*.

Nel “File Excel dati copia.xlsx” nelle colonne A, B, C, D ho i tempi di transizione dei file *Registrazione_Rubin_23_1/2* e *Registrazione_Rubin_25_1/2*, nelle colonne G, H, J, K, M, N, P, Q ho i valori dei parametri a e c corrispondenti e nelle colonne S, T ho le x e le y dei punti di intersezione delle rette passanti per *Rubin_23_1* e *Rubin_25_1* e *Rubin_23_2* e *Rubin_25_2*.

Siccome ho visto una grande dispersione di questi punti, ho fatto la media delle x e delle y dei punti di intersezione, trovando il centroide ed evidenziandolo [fig4.3].

In particolare, ho osservato che i soggetti corrispondenti alle celle 5 – 28 – 53 del “File Excel dati copia.xlsx” sono vicini al centroide ed ho quindi deciso di andare ad osservare come sono fatte le rette di questi soggetti inserendole su GeoGebra [fig4.4], per vedere se con queste rette si raggiunge la configurazione a cuspidale.

Ho quindi guardato solo su questi tre soggetti il comportamento degli altri due

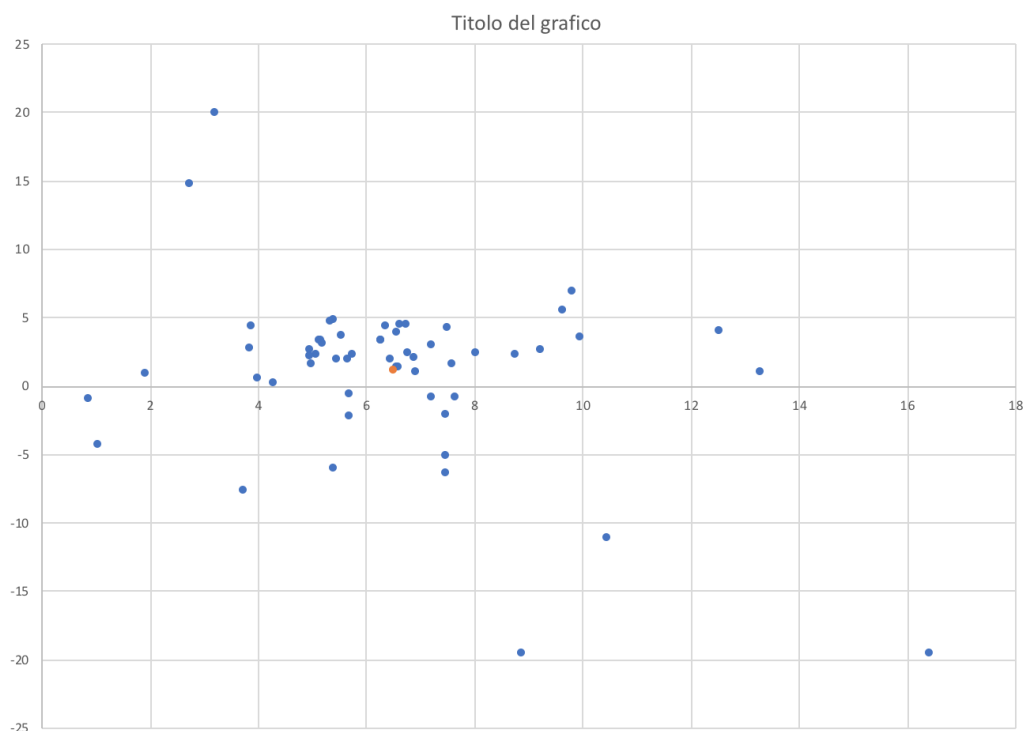


Figura 4.3: Grafico dispersione

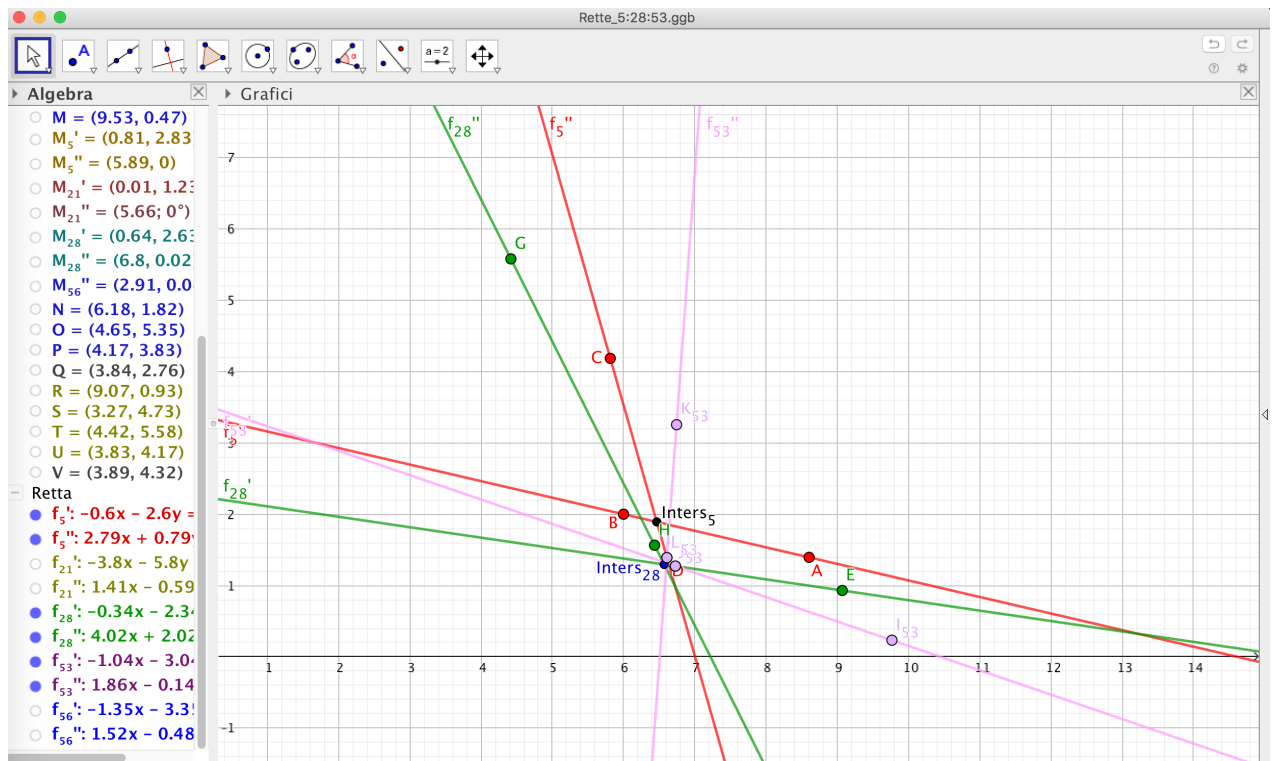


Figura 4.4: Rette celle 5 – 28 – 53

esperimenti Rubin_21 e Rubin_22. Anche in questo caso ho creato una tabella di conversione istanti \rightarrow parametri, analogamente a quanto fatto prima [fig6.25, fig6.26].

Analizzando questa tabella si osserva innanzitutto che per il soggetto della cella 53 del file “File Excel dati copia.xlsx” non si può fare uno studio che porti alla configurazione di cuspide perché il soggetto non ha riscontrato dei momenti di transizione in Rubin_21 e Rubin_22.

Per gli altri due soggetti ho inserito nel file GeoGebra i punti M'_5 , M''_5 , M'_{28} e M''_{28} aventi coordinate (a, c) dove a e c rappresentano il valore dei parametri in Rubin_21 e Rubin_22 [fig4.5].

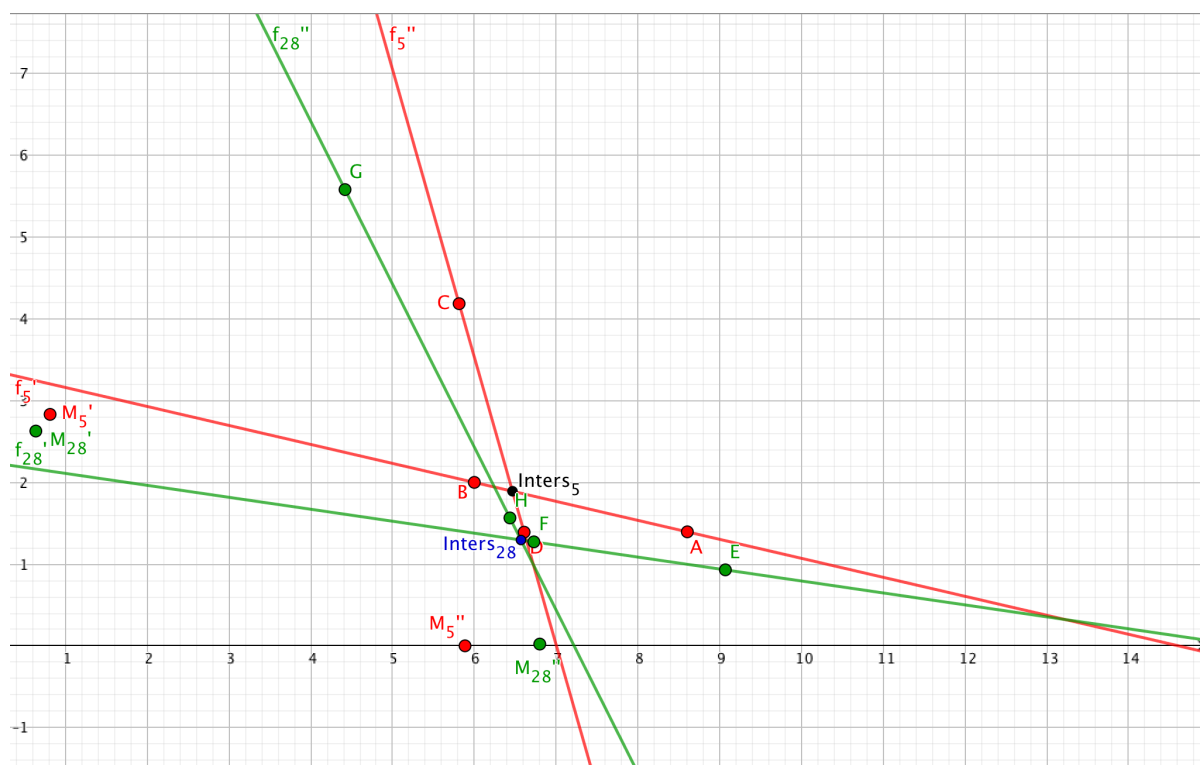


Figura 4.5: Rette celle 5 – 28

Si osserva che il comportamento del soggetto “rosso” è anomalo perché da Rubin_23_1 a Rubin_25_1 i parametri a e b decrescono, invece da Rubin_23_2 a Rubin_25_2

crescono. Quindi qui non sembra ragionevole avere un modello a cuspidi.

Dalla [fig4.5] si vede che il “verde” non è attendibile perché ha la cuspidi molto spostata, come si può vedere dalla posizione dei punti relativi a Rubin_21 e Rubin_22.

Sono quindi andata a cercare dei soggetti che avessero la cuspidi più vicina.

Sono andata ad analizzare la cella 56: questo soggetto in Rubin_21 vede sempre profili e si vede che il punto M''_{56} , corrispondente all'istante di transizione in Rubin_22, cade nella regione instabile dietro la cuspidi [fig4.6].

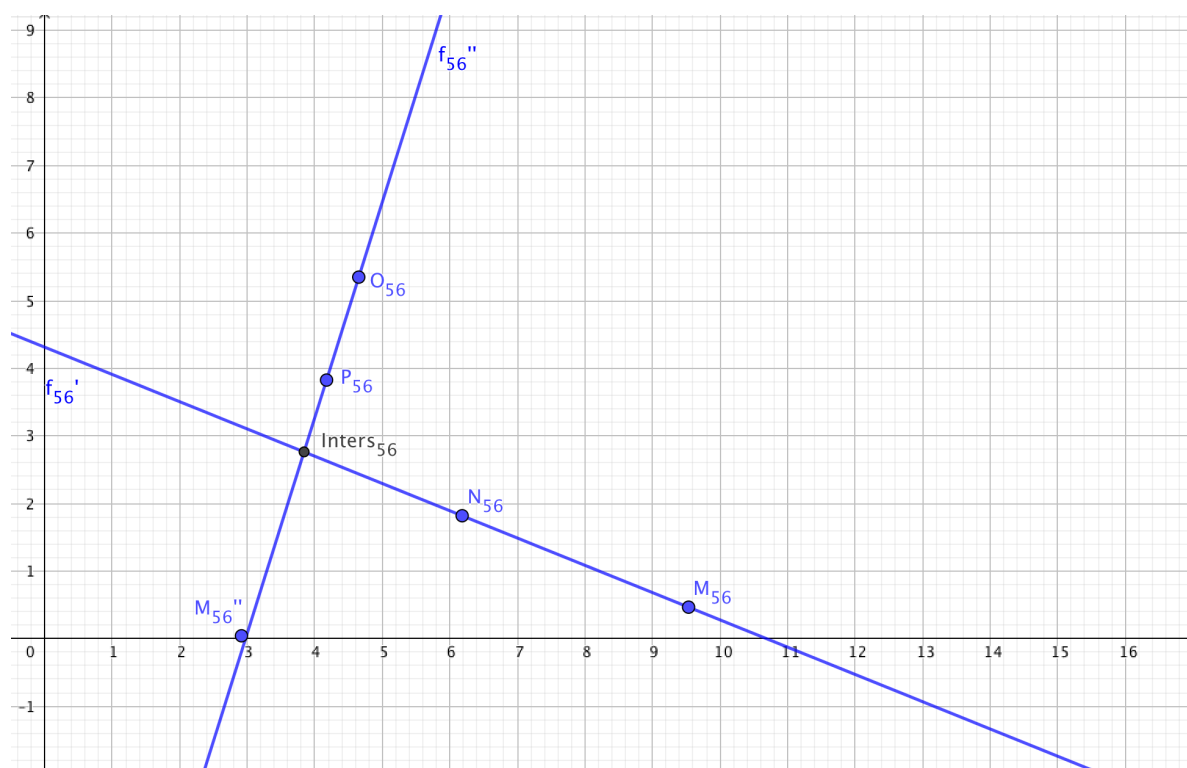


Figura 4.6: *Rette cella 56*

Da quest'ultima analisi si può dedurre che il foglio “pedistallo” è più instabile rispetto al foglio “profili”.

Capitolo 5

Conclusioni

Questa tesi si è focalizzata sull'applicazione della teoria delle catastrofi per la costruzione di un modello matematico riguardante la percezione multistabile dell'immagine ambigua del vaso di Rubin. In particolare, si è partiti dall'osservare l'applicazione di questa teoria a due casi: il modello di aggressione del cane e la figura ambigua uomo/donna di Fisher. Si è osservato che per entrambi questi esempi la percezione poteva essere modellizzata tramite una catastrofe a cuspidi e quindi si è scelto di provare a costruire un esperimento che potesse mostrare se la figura ambigua del vaso di Rubin potesse essere modellizzata con una catastrofe a cuspidi. Si è quindi visto che per alcuni soggetti della sperimentazione ci si è avvicinati alla cuspidi e che il foglio "pedistallo" è più instabile rispetto al foglio "profili" nella percezione di questa immagine.

<http://www.dm.unibo.it/~ferri/files/SupplValerii.htm>

Capitolo 6

Appendice

Persona	Età	sn/dx	Studi	Schema	Inizio Rubin_23_1	Inizio Rubin_21
Fede	22 anni		Ingegneria	1 niente	niente	
Sara	22 anni		Biologia	1 profili	niente	
Terry	21 anni		Matematica	1 profili	niente	
Anna	19 anni		biologia	1 profili	niente	
Francesca	21 anni		matematica	1 profili	niente	
Sara	23 anni		matematica	1 profili	niente	
Costanza	12 anni		terza media	1 profili	niente	
Tommy	20 anni		Ingegneria	1 niente	niente	
Persona	Età	sn/dx	Studi	Schema	Inizio Rubin_23_1	Inizio Rubin_21
1	22	dx	matematica	1 profili	niente	
2	20	dx	biologia	1 profili	niente	
3	23		matematica	1 profili	niente	
4	25	dx	matematica	1 profili	niente	
5	20		fisica	1 profili	niente	
6	22		fisica	1 profili	niente	
7	23		matematica	1 profili	niente	
8	23	sn	matematica	1 profili	niente	
9	23	dx	matematica	2 profili	niente	
10	19	dx	farmacia	2 profili	niente	
11	22	dx	matematica	2 profili	niente	
12	23	dx	matematica	2 profili	niente	
13	16	dx	liceo scient.	2 profili	niente	
14	52	dx	ingegnere	2 profili	niente	
15	21	dx	architettura	2 profili	niente	
16	54	dx	maestra	2 profili	niente	
17	17	dx	liceo scient.	3 profili	niente	
18	82	dx	maestra	3 profili	niente	
19	42	sn	impiegata	3 profili	niente	
20	12	dx	medie	3 profili	niente	
21	13	sn	medie	3 profili	niente	
22	39	dx	impiegato	3 profili	profili	
23	23	dx	infermiera	3 profili	niente	
24	52	dx	ingegnere	3 profili	niente	
25	17	dx	liceo scient.	4 profili	niente	
26	11	dx	medie	4 profili	niente	
27	18	dx	liceo scient.	4 profili	niente	
28	26	sn	lettere classiche	4 profili	profili	
29	52	dx	itis	4 profili	niente	
30	20	dx	matematica	4 profili	niente	
31	27	dx	biologia	4 profili	profili	
32	28	dx	fisica	4 profili	niente	
33	40	dx	matematica	5 profili	niente	
34	23	sn	matematica	5 profili	niente	
35	15	dx	liceo scient.	5 profili	niente	
36	14	dx	liceo scient.	5 profili	niente	
37	22	dx	matematica	5 profili	niente	
38	20	dx	matematica	5 profili	niente	
39	28	dx	matematica	5 profili	niente	
40	20	dx	chimica	5 profili	niente	

Figura 6.1: *sperimentazione_1*

41	23 dx	matematica	6 profili	niente
42	23 sn	fisica	6 profili	niente
43	20 dx	matematica	6 profili	niente
44	22 dx	matematica	6 profili	niente
45	20 dx	matematica	6 profili	niente
46	21 dx	matematica	6 profili	niente
47	20 dx	matematica	6 profili	niente
48	20 dx	matematica	6 profili	profili
49	20 dx	matematica	7 profili	profili
50	23 dx	matematica	7 profili	niente
51	20 dx	ctf	7 profili	profili
52	22 dx	matematica	7 profili	niente
53	19 sn	matematica	7 profili	niente
54	19 dx	farmacia	7 profili	niente
55	20 dx	chimica	7 profili	profili
56	21 dx	fisica	7 profili	niente
57	22 dx	fisica	8 profili	niente
58	21 dx	biologia	8 profili	niente
59	22 dx	biologia	8 profili	niente
60	25 dx	geologia	8 profili	niente
61	25 dx	biologia	8 profili	niente
62	23 dx	ingegneria	8 profili	profili
63	25 dx	ingegneria	8 profili	niente
64	25 dx	ingegneria	8 profili	niente
65	23 dx	italianistica	1 profilo	niente
66	24 dx	italianistica	1 profilo	niente

Figura 6.2: *sperimentazione_2*

Istante di transizione Rubin_23_1
 00:14->profili
 00:27->entrambi/00:30->vaso
 00:33->vaso
 00:22->entrambi/00:37->vaso
 00:11->entrambi/00:31->vaso
 00:07->vaso/00:12->entrambi/00:31->vaso
 00:26->entrambi/00:32->vaso
 00:31->vaso
 Istante di transizione Rubin_23_1
 00:12->entrambi/00:29->pedistallo
 00:22->entrambi/00:31->pedistallo
 00:37->niente/00:42->pedistallo
 00:34->pedistallo
 00:13->pedistallo/00:21->profili/00:29_piedistallo
 00:37->pedistallo
 00:33->entrambi/00:41->pedistallo
 00:31->pedistallo

 00:35->pedistallo
 00:31->pedistallo
 00:41->pedistallo
 00:31->pedistallo
 00:22->entrambi/00:41->pedistallo
 00:30->pedistallo
 00:30->pedistallo
 00:18->entrambi/00:32->pedistallo

 00:42->pedistallo
 00:37->pedistallo
 00:34->pedistallo
 00:21->entrambi/00:37->pedistallo
 00:32->pedistallo
 00:32->pedistallo
 00:36->pedistallo
 00:39->pedistallo

 00:24->pedistallo
 00:27->pedistallo
 00:19->niente/00:28->pedistallo
 00:32->pedistallo
 00:23->pedistallo
 00:32->pedistallo
 00:36->pedistallo
 00:25->niente/00:39->pedistallo

 00:29->pedistallo
 00:34->pedistallo
 00:32->pedistallo
 00:28->niente/00:42->pedistallo
 00:29->pedistallo
 00:33->pedistallo
 00:35->pedistallo
 00:31->pedistallo

Figura 6.5: *sperimentazione_5*

00:29->niente/00:40->pedistallo
00:37->pedistallo
00:18->entrambi/00:29->pedistallo
00:25->niente/00:39->pedistallo
00:24->niente/00:34->pedistallo
00:26->niente/00:39->pedistallo
00:24->niente/00:39->pedistallo
00:32->pedistallo

00:24->pedistallo
00:30->entrambi/00:40->pedistallo
00:26->pedistallo
00:35->pedistallo
00:29->pedistallo
00:26->pedistallo
00:27->entrambi/00:35->pedistallo
00:39->pedistallo

00:34->niente/00:41->pedistallo
00:34->entrambi/00:39->pedistallo
00:23->pedistallo
00:32->pedistallo
00:36->pedistallo
00:23->entrambi/00:42->pedistallo
00:26->pedistallo
00:36->pedistallo

00:41->pedistallo
00:25->pedistallo

Figura 6.6: *sperimentazione_6*

Istante di transizione Rubin_21
 00:07->profili/00:36->entrambi
 00:03->profili/00:07->entrambi/00:09->vaso/00:14->entrambi/00:23->vaso/00:31->entrambi
 00:04->profili/00:14->entrambi
 00:04->profili/00:14->profili/00:13->entrambi/00:25->vaso/00:30->entrambi
 00:03->profili/00:11->entrambi
 00:03->profili/00:08->entrambi/00:21->vaso
 00:04->profili/00:20->entrambi
 00:04->profili/00:10->entrambi
 Istante di transizione Rubin_21
 00:04->profili/00:12->entrambi
 00:05->profili/00:21->entrambi
 00:03->profili/00:20->entrambi/00:26->profili/00:33->entrambi
 00:08->profili/00:27->pedistallo
 00:06->profili/00:22->pedistallo/00:33->profili
 00:04->profili/00:14->entrambi
 00:02->profili/00:09->entrambi
 00:08->entrambi

 00:02->profili/00:24->entrambi
 00:05->profili/00:15->entrambi/00:21->pedistallo
 00:04->profili/00:16->entrambi
 00:04->profili/00:16->entrambi
 00:03->profili/00:28->entrambi
 00:02->profili/00:10->entrambi
 00:02->profili/00:11->entrambi
 00:06->profili/00:36->entrambi

 00:04->profili/00:09->entrambi
 00:06->profili/00:14->entrambi
 00:05->profili/00:19->entrambi
 00:03->profili/00:10->entrambi
 00:05->profili/00:16->entrambi
 00:22->entrambi
 00:02->profili/00:17->entrambi
 00:03->profili/00:24->entrambi

 00:10->entrambi
 00:09->profili/00:29->entrambi
 00:04->profili
 00:22->entrambi
 00:04->profili/00:27->entrambi
 00:10->profili
 00:13->entrambi
 00:04->profili/00:15->entrambi

 00:05->profili/00:15->entrambi
 00:04->profili/00:14->entrambi
 00:06->profili/00:14->entrambi
 00:04->profili/00:18->entrambi
 00:05->profili/00:16->entrambi
 00:06->profili/00:15->entrambi
 00:04->profili/00:16->entrambi
 00:09->entrambi

Figura 6.7: *sperimentazione_7*

```
00:05->profil/00:36->entrambi
00:13->profil/00:36->entrambi
00:07->profil/00:13->entrambi
00:05->profil/00:20->entrambi
00:05->profil/00:22->entrambi
00:05->profil/00:19->entrambi
00:06->profil/00:16->entrambi
00:19->entrambi

00:03->profil/00:13->entrambi
00:18->entrambi
00:05->profil/00:15->entrambi
00:03->profil/00:16->entrambi
00:04->profil/00:14->entrambi
00:18->entrambi
00:04->profil/00:20->entrambi

00:03->profil/00:20->entrambi
00:02->profil/00:12->entrambi
00:04->profil/00:14->entrambi
00:03->profil
00:04->profil/00:18->entrambi
00:04->entrambi/00:19->profil
00:05->profil/00:10->entrambi
00:05->profil/00:17->entrambi

00:06->profil
00:04->profil/0:18->entrambi
```

Figura 6.8: *sperimentazione_8*

Istante di transizione Rubin_23_2	Istante di transizione Rubin_22
00:32->vaso	00:07->vaso/00:28->profili/00:38->entrambi
00:11->vaso/00:27->entrambi/00:34->profili	00:07->vaso/00:28->entrambi
00:04->niente/00:13->profili	00:06->vaso/00:17->entrambi
00:09->niente/00:19->profili	00:03->vaso/00:22->profili/00:37->entrambi
00:16->entrambi/00:32->profili	00:06->vaso/00:15->entrambi
00:15->profili	00:02->vaso/00:14->profili/00:25->entrambi
00:06->niente/00:17->profili	00:04->vaso/00:13->entrambi
00:19->niente/00:25->profili	00:06->vaso/00:26->entrambi
Istante di transizione Rubin_23_2	Istante di transizione Rubin_22
00:14->niente/00:25->entrambi/00:33->profili	00:02->pedistallo/00:17->entrambi
00:10->entrambi/00:22->profili	00:05->entrambi
00:06->niente/00:17->profili	00:03->pedistallo/00:20->entrambi
00:33->profili	00:08->pedistallo/00:30->entrambi
00:09->niente/00:24->profili	00:05->pedistallo/00:22->entrambi/00:27->profili
00:09->niente/00:18->profili	00:03->pedistallo/00:18->entrambi
00:21->profili	00:03->pedistallo/00:15->entrambi
00:25->profili	00:03->pedistallo/00:15->entrambi
00:09->niente/00:16->profili	00:06->pedistallo/00:20->profili/00:31->entrambi
00:18->entrambi/00:23->profili	00:04->pedistallo/00:26->entrambi
00:16->entrambi/00:30->profili	00:05->pedistallo/00:11->entrambi
00:13->entrambi/00:23->profili	00:03->pedistallo/00:07->entrambi
00:21->profili	00:05->pedistallo/00:12->profili/00:29->entrambi
00:11->entrambi/00:18->profili	00:01->pedistallo/00:18->entrambi
00:12->niente/00:22->profili	00:05->pedistallo/00:16->entrambi
00:11->niente/00:27->profili	00:01->pedistallo/00:11->entrambi
00:24->profili	00:03->pedistallo/00:31->entrambi
00:24->profili	00:02->pedistallo/00:19->entrambi
00:29->profili	00:06->pedistallo/00:15->entrambi
00:15->profili	00:04->pedistallo/00:07->entrambi
00:08->niente/00:17->profili	00:05->pedistallo/00:13->entrambi
00:24->profili	00:08->pedistallo/00:21->entrambi
00:18->profili	00:06->pedistallo/00:15->entrambi
00:24->profili	00:04->pedistallo/00:19->entrambi
00:12->entrambi/00:20->profili	00:02->pedistallo/00:29->entrambi
00:38->profili	00:04->pedistallo/00:27->entrambi
00:09->profili	00:04->pedistallo/00:16->entrambi
00:08->entrambi/00:16->profili	00:04->pedistallo/00:24->entrambi
00:11->profili	00:03->pedistallo/00:30->entrambi
00:29->profili	00:03->pedistallo/00:31->entrambi
00:10->profili	00:02->pedistallo/00:14->entrambi
00:14->niente/00:24->profili	00:07->pedistallo/00:14->entrambi
00:17->profili	00:04->pedistallo/00:21->entrambi
00:10->entrambi/00:19->profili	00:03->pedistallo/00:12->entrambi
00:18->niente/00:22->profili	00:04->pedistallo/00:13->entrambi
00:15->profili	00:08->pedistallo/00:18->entrambi
00:18->profili	00:08->pedistallo/00:22->entrambi
00:19->profili	00:04->pedistallo/00:19->entrambi
00:15->profili	00:04->pedistallo/00:19->profili
00:13->profili	00:05->pedistallo/00:15->entrambi

Figura 6.9: *sperimentazione_9*

00:15->profili	00:08->pedistallo/00:24->entrambi
00:15->profili	00:06->pedistallo/00:28->entrambi
00:11->entrambi/00:22->profili	00:03->pedistallo/00:18->entrambi
00:12->profili	00:04->pedistallo/00:24->entrambi
00:11->profili	00:05->pedistallo/00:18->entrambi
00:18->profili	00:09->entrambi
0:10->profili	00:06->pedistallo/00:24->entrambi
00:08->profili	00:07->pedistallo/00:17->entrambi
00:15->profili	00:03->pedistallo/00:14->entrambi
00:09->profili	00:02->pedistallo/00:08->entrambi
00:13->profili	00:05->pedistallo/00:21->entrambi
00:11->profili	00:04->pedistallo/00:21->entrambi
00:17->profili	00:05->pedistallo/00:18->entrambi
00:14->profili	00:07->pedistallo/00:21->entrambi
00:09->entrambi/00:16->profili	00:04->pedistallo/00:13->entrambi
00:09->profili	00:10->profili/00:15->entrambi
00:09->niente/00:16->profili	00:08->pedistallo/00:10->entrambi
00:11->profili	00:09->pedistallo/00:16->entrambi
00:12->niente/00:20->profili	00:05->pedistallo/00:16->entrambi
00:20->profili	00:09->pedistallo/00:19->entrambi
00:13->profili	00:09->entrambi
00:14->profili	00:18->entrambi
00:11->niente/00:26->profili	00:04->pedistallo/00:13->entrambi
00:16->profili	00:06->pedistallo/00:14->entrambi
00:23->profili	00:04->pedistallo/00:31->entrambi
00:26->profili	00:04->pedistallo/00:26->entrambi

Figura 6.10: *sperimentazione_10*

Istante di transizione Rubin_24_1	Istante di transizione Rubin_24_2
00:43->entrambi	00:17->profili
00:23->vaso/00:34->entrambi	00:02->vaso/00:20->profili
00:31->entrambi	00:09->profili
00:24->vaso/00:30->profili/00:34->entrambi/00:38->vaso	00:10->profili
	00:40->profili
	00:06->profili/00:27->vaso
00:10->entrambi/00:27->vaso	00:25->profili
00:31->entrambi/00:43->vaso	
00:43->vaso	
Istante di transizione Rubin_25_1	Istante di transizione Rubin_25_2
00:21->entrambi/00:38->pedistallo	00:12->entrambi/00:26->profili
00:28->niente/00:34->entrambi	00:17->profili
00:31->pedistallo	00:06->niente/00:13->profili
00:14->profili/00:44->pedistallo	00:10->niente/00:29->profili
00:23->niente/00:43->pedistallo	00:13->niente/00:18->profili
00:33->pedistallo	00:08->profili
00:32->entrambi/00:38->pedistallo	00:17->profili
00:25->pedistallo	00:15->profili
00:42->pedistallo	00:07->profili
00:37->entrambi/00:43->pedistallo	00:13->profili
00:31->entrambi/00:42->pedistallo	00:11->entrambi/00:26->profili
00:30->entrambi/00:43->pedistallo	00:12->niente/00:18->profili
00:35->pedistallo	00:15->profili
00:20->entrambi/00:42->pedistallo	00:14->entrambi/00:21->profili
00:35->pedistallo	00:35->profili
00:34->pedistallo	00:12->niente/00:24->profili
00:44->pedistallo	00:22->entrambi
00:14->entrambi/00:44->pedistallo	00:09->profili
00:30->pedistallo	00:19->profili
00:17->entrambi/00:40->pedistallo	00:14->entrambi
00:17->profili/00:33->pedistallo	00:09->niente/00:13->profili
00:41->pedistallo	00:16->profili
00:22->entrambi/00:43->pedistallo	00:13->profili
00:18->pedistallo	00:17->entrambi/00:24->profili
00:25->entrambi/00:42->pedistallo	00:19->profili
00:43->pedistallo	00:26->profili
00:39->pedistallo	00:15->profili
00:38->pedistallo	00:12->profili
00:24->entrambi/00:32->pedistallo	00:29->profili
00:38->pedistallo	00:23->profili
00:21->entrambi	00:08->profili
00:24->niente/00:37->pedistallo	00:09->profili
00:41->pedistallo	00:25->profili
00:32->pedistallo	00:10->niente/00:16->profili
00:37->pedistallo	00:10->niente/00:16->profili
00:44->pedistallo	00:15->profili
00:38->entrambi/00:43->pedistallo	00:22->profili
00:38->pedistallo	00:23->profili
00:38->pedistallo	00:19->niente/00:34->profili
00:40->pedistallo	00:19->niente/00:30->profili

Figura 6.11: *sperimentazione_11*

00:38->entrambi	00:18->niente/00:24->profili
00:43->pedistallo	00:20->profili
00:38->pedistallo	00:07->profili
00:31->entrambi/00:44->pedistallo	00:14->profili
00:40->pedistallo	00:12->niente/00:21->profili
00:34->pedistallo	00:16->profili
00:39->pedistallo	00:17->profili
00:43->pedistallo	00:07->profili
00:28->entrambi	00:12->profili
00:22->entrambi	00:17->profili
00:40->pedistallo	00:27->profili
00:32->pedistallo	00:09->profili
00:37->pedistallo	00:18->profili
00:27->entrambi/00:39->pedistallo	00:19->profili
00:30->entrambi/00:42->pedistallo	00:12->entrambi/00:16->profili
00:41->entrambi	00:23->profili
00:40->entrambi	00:08->profili
00:32->entrambi/00:39->pedistallo	00:04->entrambi/00:12->profili
00:22->pedistallo	00:13->profili
00:41->pedistallo	00:10->profili
00:31->entrambi/00:40->pedistallo	00:11->profili
00:37->pedistallo	00:08->profili
00:11->entrambi/00:27->pedistallo	00:08->entrambi/00:14->profili
00:28->entrambi/00:41->pedistallo	00:10->entrambi/00:28->profili
00:34->pedistallo	00:22->profili
00:15->entrambi/00:28->pedistallo	00:15->profili

Figura 6.12: *sperimentazione_12*

29	33	38	26	6,744186047
31	22		17	7,209302326
42	17	31	13	9,76744186
34	33	44	29	7,906976744
29	24	43	18	6,744186047
37	18	33	8	8,604651163
41	21	38	17	9,534883721
31	25	25	15	7,209302326
35	16	42	7	8,139534884
31	23	43	13	7,209302326
41	30	42	26	9,534883721
31	23	43	18	7,209302326
41	21	35	15	9,534883721
30	18	42	21	6,976744186
30	22	35	35	6,976744186
32	27	34	24	7,441860465
42	24	44		9,76744186
37	24	44	9	8,604651163
34	29	30	19	7,906976744
37	15	40		8,604651163
32	17	33	13	7,441860465
32	24	41	16	7,441860465
36	18	43	13	8,372093023
39	24	18	24	9,069767442
24	20	42	19	5,581395349
27	38	43	26	6,279069767
28	9	39	15	6,511627907
32	16	38	12	7,441860465
23	11	32	29	5,348837209
32	29	38	23	7,441860465
36	10		8	8,372093023
39	24	37	9	9,069767442
29	17	41	25	6,744186047
34	19	32	16	7,906976744
32	22	37	16	7,441860465
42	15	44	15	9,76744186
29	18	43	22	6,744186047
33	19	38	23	7,674418605
35	15	38	34	8,139534884
31	13	40	30	7,209302326
40	15		24	9,302325581
37	15	43	20	8,604651163
29	22	38	7	6,744186047
39	12	44	14	9,069767442
34	11	40	21	7,906976744
39	18	34	16	9,069767442
39	10	39	17	9,069767442
32	8	43	7	7,441860465
24	15		12	5,581395349
40	9		17	9,302325581
26	13	40	27	6,046511628
35	11	32	9	8,139534884
29	17	37	18	6,744186047
26	14	39	19	6,046511628

Figura 6.13: *file excel dati_1*

35	16	42	16	8,139534884
39	9		23	9,069767442
41	16		8	9,534883721
39	11	39	12	9,069767442
23	20	22	13	5,348837209
32	20	41	10	7,441860465
36	13	40	11	8,372093023
42	14	37	8	9,76744186
26	26	27	14	6,046511628
36	16	41	28	8,372093023
41	23	34	22	9,534883721
25	26	28	15	5,813953488

rubin_23_1 rubin_23_2 rubin_25_1 rubin_25_2 parametri A,B di rubin_23_1

Figura 6.14: *file excel dati_2*

3,25581395	2,3255814	7,6744186	6,90909091	1,09090909
2,79069767	4,88372093	5,11627907	0	8
0,23255814	6,04651163	3,95348837	5,63636364	2,36363636
2,09302326	2,3255814	7,6744186	8	0
3,25581395	4,41860465	5,58139535	7,81818182	0,18181818
1,39534884	5,81395349	4,18604651	6	2
0,46511628	5,11627907	4,88372093	6,90909091	1,09090909
2,79069767	4,18604651	5,81395349	4,54545455	3,45454545
1,86046512	6,27906977	3,72093023	7,63636364	0,36363636
2,79069767	4,65116279	5,34883721	7,81818182	0,18181818
0,46511628	3,02325581	6,97674419	7,63636364	0,36363636
2,79069767	4,65116279	5,34883721	7,81818182	0,18181818
0,46511628	5,11627907	4,88372093	6,36363636	1,63636364
3,02325581	5,81395349	4,18604651	7,63636364	0,36363636
3,02325581	4,88372093	5,11627907	6,36363636	1,63636364
2,55813953	3,72093023	6,27906977	6,18181818	1,81818182
0,23255814	4,41860465	5,58139535	8	0
1,39534884	4,41860465	5,58139535	8	0
2,09302326	3,25581395	6,74418605	5,45454545	2,54545455
1,39534884	6,51162791	3,48837209	7,27272727	0,72727273
2,55813953	6,04651163	3,95348837	6	2
2,55813953	4,41860465	5,58139535	7,45454545	0,54545455
1,62790698	5,81395349	4,18604651	7,81818182	0,18181818
0,93023256	4,41860465	5,58139535	3,27272727	4,72727273
4,41860465	5,34883721	4,65116279	7,63636364	0,36363636
3,72093023	1,1627907	8,8372093	7,81818182	0,18181818
3,48837209	7,90697674	2,09302326	7,09090909	0,90909091
2,55813953	6,27906977	3,72093023	6,90909091	1,09090909
4,65116279	7,44186047	2,55813953	5,81818182	2,18181818
2,55813953	3,25581395	6,74418605	6,90909091	1,09090909
1,62790698	7,6744186	2,3255814	0	8
0,93023256	4,41860465	5,58139535	6,72727273	1,27272727
3,25581395	6,04651163	3,95348837	7,45454545	0,54545455
2,09302326	5,58139535	4,41860465	5,81818182	2,18181818
2,55813953	4,88372093	5,11627907	6,72727273	1,27272727
0,23255814	6,51162791	3,48837209	8	0
3,25581395	5,81395349	4,18604651	7,81818182	0,18181818
2,3255814	5,58139535	4,41860465	6,90909091	1,09090909
1,86046512	6,51162791	3,48837209	6,90909091	1,09090909
2,79069767	6,97674419	3,02325581	7,27272727	0,72727273
0,69767442	6,51162791	3,48837209	0	8
1,39534884	6,51162791	3,48837209	7,81818182	0,18181818
3,25581395	4,88372093	5,11627907	6,90909091	1,09090909
0,93023256	7,20930233	2,79069767	8	0
2,09302326	7,44186047	2,55813953	7,27272727	0,72727273
0,93023256	5,81395349	4,18604651	6,18181818	1,81818182
0,93023256	7,6744186	2,3255814	7,09090909	0,90909091
2,55813953	8,13953488	1,86046512	7,81818182	0,18181818
4,41860465	6,51162791	3,48837209	0	8
0,69767442	7,90697674	2,09302326	0	8
3,95348837	6,97674419	3,02325581	7,27272727	0,72727273
1,86046512	7,44186047	2,55813953	5,81818182	2,18181818
3,25581395	6,04651163	3,95348837	6,72727273	1,27272727
3,95348837	6,74418605	3,25581395	7,09090909	0,90909091

Figura 6.15: *file excel dati_3*

1,86046512	6,27906977	3,72093023	7,63636364	0,36363636
0,93023256	7,90697674	2,09302326	0	8
0,46511628	6,27906977	3,72093023	0	8
0,93023256	7,44186047	2,55813953	7,09090909	0,90909091
4,65116279	5,34883721	4,65116279	4	4
2,55813953	5,34883721	4,65116279	7,45454545	0,54545455
1,62790698	6,97674419	3,02325581	7,27272727	0,72727273
0,23255814	6,74418605	3,25581395	6,72727273	1,27272727
3,95348837	3,95348837	6,04651163	4,90909091	3,09090909
1,62790698	6,27906977	3,72093023	7,45454545	0,54545455
0,46511628	4,65116279	5,34883721	6,18181818	1,81818182
4,18604651	3,95348837	6,04651163	5,09090909	2,90909091
C	A,B	C	A,B	C

Figura 6.16: *file excel dati_4*

3,47826087	4,52173913	7,48185371	-6,4284385
5,04347826	2,95652174	4,93413831	4,43468716
5,73913043	2,26086957	5,7473917	2,30636088
2,95652174	5,04347826	8,87218045	-19,62406
4,86956522	3,13043478	2,73532015	14,7300089
6,60869565	1,39130435	6,46638905	1,89173111
5,04347826	2,95652174	4,99027868	1,54821056
5,39130435	2,60869565	5,12781526	3,30941747
6,7826087	1,2173913	7,20964207	-0,9057706
5,73913043	2,26086957	10,4604758	-11,139678
3,47826087	4,52173913	4,28214342	0,1843462
4,86956522	3,13043478	3,22033898	19,8822976
5,39130435	2,60869565	5,46890003	1,96681959
4,34782609	3,65217391	6,61593012	4,47807662
1,91304348	6,08695652	7,52105427	4,25452277
3,82608696	4,17391304	4,00754107	0,54134123
8	0	8	0
6,43478261	1,56521739	7,63888889	-0,8333333
4,69565217	3,30434783	4,9763839	2,63366711
8	0	7,6161919	0,89955022
5,73913043	2,26086957	5,6684492	1,87165775
5,2173913	2,7826087	7,49064546	-5,1824135
5,73913043	2,26086957	5,41442824	-6,0936301
3,82608696	4,17391304	3,88908513	4,32356058
4,69565217	3,30434783	5,40492838	4,76681827
3,47826087	4,52173913	16,4219749	-19,602179
5,39130435	2,60869565	6,77279477	2,32551233
5,91304348	2,08695652	3,72657111	-7,6736494
2,95652174	5,04347826	5,547104	3,60802939
4	4	5,69536424	-2,2516556
6,60869565	1,39130435	7,5726543	2,23636867
6,43478261	1,56521739	6,57007887	1,29571049
3,65217391	4,34782609	6,58455708	3,86487447
5,2173913	2,7826087	5,09059902	2,21274781
5,2173913	2,7826087	5,6980007	-0,5787443
5,39130435	2,60869565	0,875	-0,9375
4,17391304	3,82608696	6,37607532	4,3094222
4	4	9,6373057	5,49222798
2,08695652	5,91304348	8,76661871	2,25266187
2,7826087	5,2173913	7,2058379	2,90340688
3,82608696	4,17391304	5,37897311	3,77750611
4,52173913	3,47826087	9,97250229	3,50595784
6,7826087	1,2173913	6,92111959	0,93299406
5,56521739	2,43478261	12,5352113	3,94366197
4,34782609	3,65217391	8,02690583	2,35127055
5,2173913	2,7826087	4,96630295	2,19191271
5,04347826	2,95652174	13,3042007	0,97547223
6,7826087	1,2173913	7,59333899	1,60161222
5,91304348	2,08695652	6,62337662	3,75
5,04347826	2,95652174	7,28643216	2,28015075
3,30434783	4,69565217	6,27936651	3,34083915
6,43478261	1,56521739	6,90725976	2,03105329
4,86956522	3,13043478	6,75435816	4,44849445
4,69565217	3,30434783	6,282097	3,26676177

Figura 6.17: *file excel dati_5*

5,2173913	2,7826087	9,8156682	6,84660961
	4	7,02702703	2,52252252
6,60869565	1,39130435	6,38786388	2,95202952
5,91304348	2,08695652	1,91176471	0,85375817
5,73913043	2,26086957	5,34883721	4,65116279
6,26086957	1,73913043	7,47138185	-2,1259199
6,08695652	1,91304348	1,05263158	-4,3684211
6,60869565	1,39130435	6,60316456	1,31518987
5,56521739	2,43478261	5,1805537	3,29677678
3,13043478	4,86956522	9,23286091	2,64337508
4,17391304	3,82608696	3,84069552	2,76289714
5,39130435	2,60869565	5,1914242	3,08660881
A,B	C	x inters.	y inters.

Figura 6.18: *file excel dati_6*

29	33	38	26	6,744186047
42	17	31	13	9,76744186
34	33	44	29	7,906976744
29	24	43	18	6,744186047
37	18	33	8	8,604651163
41	21	38	17	9,534883721
31	25	25	15	7,209302326
35	16	42	7	8,139534884
31	23	43	13	7,209302326
41	30	42	26	9,534883721
31	23	43	18	7,209302326
41	21	35	15	9,534883721
30	18	42	21	6,976744186
30	22	35	35	6,976744186
32	27	34	24	7,441860465
37	24	44	9	8,604651163
34	29	30	19	7,906976744
32	17	33	13	7,441860465
32	24	41	16	7,441860465
36	18	43	13	8,372093023
39	24	18	24	9,069767442
24	20	42	19	5,581395349
27	38	43	26	6,279069767
28	9	39	15	6,511627907
32	16	38	12	7,441860465
23	11	32	29	5,348837209
32	29	38	23	7,441860465
39	24	37	9	9,069767442
29	17	41	25	6,744186047
34	19	32	16	7,906976744
32	22	37	16	7,441860465
42	15	44	15	9,76744186
29	18	43	22	6,744186047
33	19	38	23	7,674418605
35	15	38	34	8,139534884
31	13	40	30	7,209302326
37	15	43	20	8,604651163
29	22	38	7	6,744186047
39	12	44	14	9,069767442
34	11	40	21	7,906976744
39	18	34	16	9,069767442
39	10	39	17	9,069767442
32	8	43	7	7,441860465
26	13	40	27	6,046511628
35	11	32	9	8,139534884
29	17	37	18	6,744186047
26	14	39	19	6,046511628
35	16	42	16	8,139534884
39	11	39	12	9,069767442
23	20	22	13	5,348837209
32	20	41	10	7,441860465
36	13	40	11	8,372093023
42	14	37	8	9,76744186
26	26	27	14	6,046511628

Figura 6.19: *file excel dati copia_1*

36	16	41	28	8,372093023
41	23	34	22	9,534883721
25	26	28	15	5,813953488
rubin_23_1	rubin_23_2	rubin_25_1	rubin_25_2	parametri A,B di rubin_23_1

Figura 6.20: *file excel dati copia_2*

3,25581395	2,3255814	7,6744186	6,90909091	1,09090909
0,23255814	6,04651163	3,95348837	5,63636364	2,36363636
2,09302326	2,3255814	7,6744186	8	0
3,25581395	4,41860465	5,58139535	7,81818182	0,18181818
1,39534884	5,81395349	4,18604651	6	2
0,46511628	5,11627907	4,88372093	6,90909091	1,09090909
2,79069767	4,18604651	5,81395349	4,54545455	3,45454545
1,86046512	6,27906977	3,72093023	7,63636364	0,36363636
2,79069767	4,65116279	5,34883721	7,81818182	0,18181818
0,46511628	3,02325581	6,97674419	7,63636364	0,36363636
2,79069767	4,65116279	5,34883721	7,81818182	0,18181818
0,46511628	5,11627907	4,88372093	6,36363636	1,63636364
3,02325581	5,81395349	4,18604651	7,63636364	0,36363636
3,02325581	4,88372093	5,11627907	6,36363636	1,63636364
2,55813953	3,72093023	6,27906977	6,18181818	1,81818182
1,39534884	4,41860465	5,58139535	8	0
2,09302326	3,25581395	6,74418605	5,45454545	2,54545455
2,55813953	6,04651163	3,95348837	6	2
2,55813953	4,41860465	5,58139535	7,45454545	0,54545455
1,62790698	5,81395349	4,18604651	7,81818182	0,18181818
0,93023256	4,41860465	5,58139535	3,27272727	4,72727273
4,41860465	5,34883721	4,65116279	7,63636364	0,36363636
3,72093023	1,1627907	8,8372093	7,81818182	0,18181818
3,48837209	7,90697674	2,09302326	7,09090909	0,90909091
2,55813953	6,27906977	3,72093023	6,90909091	1,09090909
4,65116279	7,44186047	2,55813953	5,81818182	2,18181818
2,55813953	3,25581395	6,74418605	6,90909091	1,09090909
0,93023256	4,41860465	5,58139535	6,72727273	1,27272727
3,25581395	6,04651163	3,95348837	7,45454545	0,54545455
2,09302326	5,58139535	4,41860465	5,81818182	2,18181818
2,55813953	4,88372093	5,11627907	6,72727273	1,27272727
0,23255814	6,51162791	3,48837209	8	0
3,25581395	5,81395349	4,18604651	7,81818182	0,18181818
2,3255814	5,58139535	4,41860465	6,90909091	1,09090909
1,86046512	6,51162791	3,48837209	6,90909091	1,09090909
2,79069767	6,97674419	3,02325581	7,27272727	0,72727273
1,39534884	6,51162791	3,48837209	7,81818182	0,18181818
3,25581395	4,88372093	5,11627907	6,90909091	1,09090909
0,93023256	7,20930233	2,79069767	8	0
2,09302326	7,44186047	2,55813953	7,27272727	0,72727273
0,93023256	5,81395349	4,18604651	6,18181818	1,81818182
0,93023256	7,6744186	2,3255814	7,09090909	0,90909091
2,55813953	8,13953488	1,86046512	7,81818182	0,18181818
3,95348837	6,97674419	3,02325581	7,27272727	0,72727273
1,86046512	7,44186047	2,55813953	5,81818182	2,18181818
3,25581395	6,04651163	3,95348837	6,72727273	1,27272727
3,95348837	6,74418605	3,25581395	7,09090909	0,90909091
1,86046512	6,27906977	3,72093023	7,63636364	0,36363636
0,93023256	7,44186047	2,55813953	7,09090909	0,90909091
4,65116279	5,34883721	4,65116279	4	4
2,55813953	5,34883721	4,65116279	7,45454545	0,54545455
1,62790698	6,97674419	3,02325581	7,27272727	0,72727273
0,23255814	6,74418605	3,25581395	6,72727273	1,27272727
3,95348837	3,95348837	6,04651163	4,90909091	3,09090909

Figura 6.21: *file excel dati copia_3*

1,62790698	6,27906977	3,72093023	7,45454545	0,54545455
0,46511628	4,65116279	5,34883721	6,18181818	1,81818182
4,18604651	3,95348837	6,04651163	5,09090909	2,90909091
C	A,B	C	A,B	C

Figura 6.22: *file excel dati copia_4*

3,47826087	4,52173913	7,48185371	-6,4284385
5,73913043	2,26086957	5,7473917	2,30636088
2,95652174	5,04347826	8,87218045	-19,62406
4,86956522	3,13043478	2,73532015	14,7300089
6,60869565	1,39130435	6,46638905	1,89173111
5,04347826	2,95652174	4,99027868	1,54821056
5,39130435	2,60869565	5,12781526	3,30941747
6,7826087	1,2173913	7,20964207	-0,9057706
5,73913043	2,26086957	10,4604758	-11,139678
3,47826087	4,52173913	4,28214342	0,1843462
4,86956522	3,13043478	3,22033898	19,8822976
5,39130435	2,60869565	5,46890003	1,96681959
4,34782609	3,65217391	6,61593012	4,47807662
1,91304348	6,08695652	7,52105427	4,25452277
3,82608696	4,17391304	4,00754107	0,54134123
6,43478261	1,56521739	7,63888889	-0,8333333
4,69565217	3,30434783	4,9763839	2,63366711
5,73913043	2,26086957	5,6684492	1,87165775
5,2173913	2,7826087	7,49064546	-5,1824135
5,73913043	2,26086957	5,41442824	-6,0936301
3,82608696	4,17391304	3,88908513	4,32356058
4,69565217	3,30434783	5,40492838	4,76681827
3,47826087	4,52173913	16,4219749	-19,602179
5,39130435	2,60869565	6,77279477	2,32551233
5,91304348	2,08695652	3,72657111	-7,6736494
2,95652174	5,04347826	5,547104	3,60802939
4	4	5,69536424	-2,2516556
6,43478261	1,56521739	6,57007887	1,29571049
3,65217391	4,34782609	6,58455708	3,86487447
5,2173913	2,7826087	5,09059902	2,21274781
5,2173913	2,7826087	5,6980007	-0,5787443
5,39130435	2,60869565	0,875	-0,9375
4,17391304	3,82608696	6,37607532	4,3094222
4	4	9,6373057	5,49222798
2,08695652	5,91304348	8,76661871	2,25266187
2,7826087	5,2173913	7,2058379	2,90340688
4,52173913	3,47826087	9,97250229	3,50595784
6,7826087	1,2173913	6,92111959	0,93299406
5,56521739	2,43478261	12,5352113	3,94366197
4,34782609	3,65217391	8,02690583	2,35127055
5,2173913	2,7826087	4,96630295	2,19191271
5,04347826	2,95652174	13,3042007	0,97547223
6,7826087	1,2173913	7,59333899	1,60161222
3,30434783	4,69565217	6,27936651	3,34083915
6,43478261	1,56521739	6,90725976	2,03105329
4,86956522	3,13043478	6,75435816	4,44849445
4,69565217	3,30434783	6,282097	3,26676177
5,2173913	2,7826087	9,8156682	6,84660961
5,91304348	2,08695652	1,91176471	0,85375817
5,73913043	2,26086957	5,34883721	4,65116279
6,26086957	1,73913043	7,47138185	-2,1259199
6,08695652	1,91304348	1,05263158	-4,3684211
6,60869565	1,39130435	6,60316456	1,31518987
5,56521739	2,43478261	5,1805537	3,29677678

Figura 6.23: *file excel dati copia_5*

3,13043478	4,86956522	9,23286091	2,64337508
4,17391304	3,82608696	3,84069552	2,76289714
5,39130435	2,60869565	5,1914242	3,08660881
A,B	C	x inters.	y inters.
		6,50613319	1,10972712

Figura 6.24: *file excel dati copia_6*

	37	18	33	8	14	18
	39	24	37	9	15	14
	42	14	37	8		
					24	31
23_1	23_2	25_1	25_2	21	19	22

Figura 6.25: *Dati 5/28/53/56 rubin_21/22_1*

```
0,81144676 6,97297297 2,8321797 5,88571429 0,15814851 0,00125063
0,6375632 6,75675676 2,62800989 6,8 0,67047697 0,02250229

2,91428571 0,9115907 0,04163656
0,00716107 4,81081081 1,23323895 5,65714286 0,08674357 0,00037623
A_21 B_21 C_21 A_22 B_22 C_22
```

Figura 6.26: *Dati 5/28/53/56 rubin_21/22_2*

Bibliografia

- [1] Tim Poston e Ian Stewart. «Non linear modeling of multistable perception». In: *Behaviour Science* 23.4 (1978), pp. 318–334.
- [2] Edgar Rubin. *Synsoplevede Figurer*. Gyldendalske Boghandel, København, 1915.
- [3] E. C. Zeeman. «La teoria della catastrofe». In: *Le Scienze* (1976), pp. 16–29.

Ringraziamenti

Ringrazio per primi i miei genitori che mi hanno sostenuta, permettendomi di percorrere e concludere questo cammino. In particolare al mio papà che prima di ogni esame mi diceva: “In bocca al lupo e mi raccomando, stai tranquilla!”.

Un ringraziamento speciale a Fede, che mi ha sostenuto e sopportato in questi cinque anni di “sclero” pre-esami e che ha festeggiato con me le mie vittorie.

Per ultimi, ma non meno importanti, ringrazio tutti i miei amici di Scienze ed in particolare le mie coinquiline e amiche con cui ho condiviso la vita in questi anni.