Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

UNITA' MATRICIALI NELL'ALGEBRA GRUPPALE DEL GRUPPO SIMMETRICO

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
FRANCESCO REGONATI

Presentata da:
STEFANO LORINI

Appello I

Anno Accademico 2017/2018

Introduzione

La teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico è forse la parte maggiormente sviluppata della teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti e non solo, e a tutt'oggi resta oggetto di sviluppo. Ci sono vari modi di presentare la teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico: ad un estremo essa può essere esposta mettendo in evidenza come si concretizzano i risultati previsti dalla teoria generale, e ad un altro estremo essa può essere esposta mettendo in evidenza la struttura combinatoria, utilizzando quindi gli strumenti algebrici più elementari possibili. Questa tesi vuole fornire un'iniziale comparazione fra i due approcci. In realtà i risultati vengono presentati in termini di moduli anziché in termini di rappresentazioni. Gli spazi vettoriali si assumono di dimensione finita e, di regola, il campo su cui essi sono definiti si assume di caratteristica zero ed algebricamente chiuso.
Si considera la parte della teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico S_n sviluppata da Young che studia la struttura dell'algebra di gruppo del gruppo simmetrico ed ha come obiettivo la costruzione di isomorfismi con un'algebra che è somma diretta di algebre complete di matrici, attraverso particolari elementi chiamati "unità matriciali". La costruzione di isomorfismi è stata fornita da Young in tre modi distinti, a seconda dei tipi di unità prese in considerazione: le unità "naturali", le unità "seminormali" e le unità "ortogonali". La costruzione da noi presentata riguarda precisamente il primo tipo di unità, ovvero quelle naturali.
Nel primo capitolo viene considerata l'algebra completa di matrici $M_n(\mathbb{K})$, dove $\mathbb{K}$ è un campo. Si dà la definizione di sistema di unità matriciali, si

descrivono gli ideali sinistri semplici più immediati e si arriva a dire che gli ideali sinistri semplici sono tutti e soli quelli generati da matrici aventi rango uno; dopodiché si fornisce una decomposizione dell'algebra come somma diretta di ideali sinistri semplici e si mostra che non esistono ideali bilateri propri. Nell'ultima parte del capitolo i risultati ottenuti vengono estesi ad un'algebra di matrici "a blocchi", ovvero ad un'algebra che è somma diretta di algebre complete di matrici, ottenendo in particolare che gli ideali bilateri in corrispondenza dei singoli blocchi sono tutti e soli gli ideali bilateri minimali e quindi il numero di essi è proprio il numero dei blocchi. Quest'ultimo, inoltre, risulta essere la dimensione del centro dell'algebra.
Il secondo capitolo è dedicato alla teoria delle algebre semisemplici; il riferimento principale a tal proposito è stato il libro di Boerner *"Representations of groups - with special consideration for the needs of modern physics"*, seguito da un'appendice del libro di Dieudonné e Carrell *"Invariant theory, old and new"* intitolata *"A short digest of non-commutative algebra"*. Si definisce in generale uno spazio vettoriale modulo su un'algebra. Una caratteristica cruciale di un modulo è la semisemplicità, ovvero la sua decomponibilità in una somma diretta di sottomoduli semplici. Si considera il caso particolare di un'algebra modulo su se stessa, illustrando i principali risultati e proprietà. Si mostra che un'algebra semisemplice si può decomporre in uno e un solo modo in una somma diretta di ideali bilateri minimali, a loro volta decomponibili in una somma diretta di ideali sinistri semplici; elementi notevoli appartenenti a questi ultimi risultano essere gli idempotenti. Successivamente viene riportato il teorema di Wedderburn che dimostra che ogni ideale bilatero minimale è isomorfo ad un'algebra completa di matrici e ciò porta infine al teorema di Molien, che asserisce che un'algebra semisemplice è isomorfa ad una somma diretta di algebre complete di matrici.
Il terzo capitolo riprende la nozione di modulo e qui, invece di un'algebra, viene considerato un gruppo finito. Un risultato fondamentale è il teorema di Maschke, grazie al quale si ottiene la decomponibilità di un modulo su un gruppo in una somma diretta di sottomoduli semplici. Risulta che un

sottomodulo sul gruppo è anche un sottomodulo sulla sua algebra di gruppo e viceversa, così anche i moduli sull'algebra di gruppo del gruppo stesso sono semisemplici e quindi l'algebra di gruppo di un gruppo finito possiede tutte le proprietà determinate nel secondo capitolo.
Nel quarto capitolo si considera l'algebra di gruppo del gruppo simmetrico S_n . Si rappresentano le partizioni del numero n con i "diagrammi di Young"; si definiscono i "tableaux di Young", poi i tableaux "standard". Ai tableaux di Young si associano particolari elementi dell'algebra di gruppo del gruppo simmetrico: i "simmetrizzatori di Young", i quali generano ideali sinistri minimali; questi stessi elementi relativi ai tableaux standard permettono di costruire un sistema di unità matriciali. Allo scopo di dimostrare che queste ultime formano una base dell'algebra di gruppo si utilizza la corrispondenza di Robinson-Schensted, della quale il principale riferimento è stato il libro di Sagan *"The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions"*.

Indice

Capitolo 1

Algebre di matrici

1.1 Definizione di algebra e di sistema di unità matriciali

Definizione 1.1.1 *Sia $\mathbb{K}$ un campo. Una $\mathbb{K}$-algebra è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $\mathcal{A}$ con un prodotto, ovvero un'applicazione $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ che è bilineare, cioè tale che, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per ogni $a, b, c \in \mathcal{A}$ valgano le seguenti proprietà:*

1) $(\lambda\, a) * b = a * (\lambda\, b) = \lambda\, (a * b)\,;$

2) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)\,;$

3) $c * (a + b) = (c * a) + (c * b)\,.$

Una $\mathbb{K}$-algebra $\mathcal{A}$ si dice *associativa* se il prodotto $*$ è associativo, cioè se, per ogni $a, b, c \in \mathcal{A}$, vale $(a * b) * c = a * (b * c)$.
Si dice *con unità* se esiste un elemento $1 \in \mathcal{A}$ tale che $1 * a = a * 1 = a$ per ogni $a \in \mathcal{A}$.
Nel seguito, per non appesantire troppo la notazione, ometteremo il simbolo $*$ del prodotto nell'algebra $\mathcal{A}$.

Esempio 1.1.1 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ e sia $End(V)$ l'algebra degli endomorfismi di V (con il prodotto dato dalla*

composizione di endomorfismi); fissata una base di V*, identifichiamo* V *con* $\mathbb{K}^n$ *e* $End(V)$ *con* $M_n(\mathbb{K})$*.*
Indichiamo con $\{e_i\}_{i=1,...,n}$ *la base canonica di* $\mathbb{K}^n$*, identifichiamo i vettori di* $\mathbb{K}^n$ *con matrici colonna, ed indichiamo con* $E_{ij} = e_i e_j^T$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$ *ciascun elemento della base canonica delle matrici elementari di* $M_n(\mathbb{K})$*.*
Si ha

$$\sum_{i=1}^{n} E_{ii} = I_n \quad ; \qquad E_{ij}E_{hk} = \delta_{jh}E_{ik} \qquad \odot$$

per ogni $i, j, h, k = 1, ..., n$*, dove* I_n *è la matrice unità e* δ *è la delta di Kronecker.*

Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$*, con* $A = \sum_{i,h=1}^{n} a_{ih}E_{ih}$ *,* $B = \sum_{k,j=1}^{n} b_{kj}E_{kj}$ *.*
Il prodotto tra le due matrici A *e* B *è*

$$AB = (\sum_{i,h=1}^{n} a_{ih}E_{ih})(\sum_{k,j=1}^{n} b_{kj}E_{kj}) = \sum_{i,h=1}^{n}\sum_{k,j=1}^{n} a_{ih}b_{kj}E_{ih}E_{kj} =$$
$$= \sum_{i,h=1}^{n}\sum_{k,j=1}^{n} a_{ih}b_{kj}\delta_{hk}E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}E_{ij}$$

Si noti che nell'ultimo sommando si ritrova la formula del prodotto standard tra le due matrici A *e* B *per il termine di riga* i *e colonna* j*.*
E' chiaro che $M_n(\mathbb{K})$ *è una* $\mathbb{K}$*-algebra associativa con unità.*

Definizione 1.1.2 *Sia* $\mathcal{A}$ *una* $\mathbb{K}$*-algebra associativa con unità. Un sistema di unità matriciali di* $\mathcal{A}$ *è una base lineare* $\{u_{ij}\}_{i,j=1,...,n}$ *di* $\mathcal{A}$ *che soddisfa le relazioni* $\odot$*.*

Si ha facilmente la seguente

Proposizione 1.1.1 *Una* $\mathbb{K}$*-algebra* $\mathcal{A}$ *è isomorfa a* $M_n(\mathbb{K})$ *se e solo se possiede un sistema di* n^2 *unità matriciali; gli isomorfismi fra* $\mathcal{A}$ *e* $M_n(\mathbb{K})$ *sono in corrispondenza biunivoca con i sistemi di unità matriciali di* $\mathcal{A}$*.*

Osservazione 1.1.1 *La Definizione 1.1.2 può essere indebolita richiedendo solo il fatto che $\{u_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ sia un insieme di generatori di $\mathcal{A}$, in quanto l'indipendenza lineare di questi elementi segue immediatamente. Cioè, se $\{u_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ è un insieme di generatori di $\mathcal{A}$, la scrittura*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}\, u_{ij} = 0$$

con $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ per ogni $i, j = 1, ..., n$ implica $\lambda_{ij} = 0$ per ogni $i, j = 1, ..., n$. Infatti: basta mostrare che, fissati $i', j' \in \{1, ..., n\}$, si ha $\lambda_{i'j'} = 0$. Ciò si vede molto rapidamente: moltiplichiamo entrambi i membri della scrittura precedente a sinistra per $u_{i'i'}$ e a destra per $u_{j'j'}$, ottenendo

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}\, u_{i'i'}\, u_{ij}\, u_{j'j'} = 0$$

da cui, utilizzando al primo membro la seconda relazione in $\odot$, viene $\lambda_{i'j'}u_{i'j'} = 0$. Ora non può essere nullo $u_{i'j'}$ e allora deve essere $\lambda_{i'j'} = 0$. Questo, data l'arbitrarietà di i' e j', mostra che tutti i coefficienti della scrittura iniziale sono nulli.

1.2 Riducibilità di $M_n(\mathbb{K})$ in ideali sinistri semplici

Definizione 1.2.1 *Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-algebra. Un ideale sinistro $\mathcal{I}$ di $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{A}$ tale che, se un elemento $x \in \mathcal{I}$, allora anche $ax \in \mathcal{I}$ per ogni $a \in \mathcal{A}$. Inoltre un ideale sinistro non nullo $\mathcal{I}$ si dice semplice, o minimale, se $\mathcal{I}$ non contiene ideali sinistri propri, cioè diversi dall'ideale nullo e da $\mathcal{I}$ stesso.*

Nel seguito useremo i termini semplice e minimale indifferentemente.
Gli ideali destri di $\mathcal{A}$ sono definiti in maniera del tutto analoga: nella definizione cambia solamente il fatto che un elemento $a \in \mathcal{A}$ viene moltiplicato a

destra di x. Un ideale di $\mathcal{A}$ si dice *bilatero* quando è sia sinistro che destro. Se $\mathcal{A}$ è una $\mathbb{K}$-algebra e $x \in \mathcal{A}$, l'insieme $\{ax \mid a \in \mathcal{A}\}$ è un ideale sinistro di $\mathcal{A}$ ed è il più piccolo ideale sinistro che contiene x; questo ideale viene detto ideale sinistro generato da x. Un ideale di questo tipo si dice *principale* e viene denotato con $\mathcal{A}x$, a suggerire che l'insieme è formato da tutti i possibili prodotti di un elemento generico di $\mathcal{A}$ per x. Ciò vale anche per un ideale destro, con opportune modifiche di scrittura.

Osservazione 1.2.1 *Un ideale sinistro semplice $\mathcal{I}$ di una $\mathbb{K}$-algebra $\mathcal{A}$ è principale.*
Infatti, $\mathcal{I}$ è non nullo, quindi esiste un elemento $x \in \mathcal{I}$, $x \neq 0$. Ma in $\mathcal{I}$ vi appartiene anche ax, con $a \in \mathcal{A}$, cioè $\mathcal{A}x \subseteq \mathcal{I}$ e $\mathcal{A}x$ è un ideale. Allora, essendo $\mathcal{I}$ semplice e $\mathcal{A}x$ non nullo, deve essere necessariamente $\mathcal{A}x = \mathcal{I}$.

Proposizione 1.2.1 *Consideriamo $M_n(\mathbb{K})$. Sia i fissato tale che $1 \leq i \leq n$ e poniamo*

$$C_i := \{C \in M_n(\mathbb{K}) \mid C = ce_i^T, \quad c \in \mathbb{K}^n\}$$

Questo è un ideale sinistro di $M_n(\mathbb{K})$.

Dimostrazione. Prima di tutto è facile verificare che C_i è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{K})$; inoltre, se $C \in C_i$, allora $AC \in C_i$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$. Questo si vede immediatamente:

$$A(ce_i^T) = (Ac)e_i^T = c'e_i^T \qquad \text{con} \quad c' := Ac, \;\; c' \in \mathbb{K}^n$$

e questo è un elemento di C_i, per definizione.

□

Proposizione 1.2.2 *Per ogni i fissato tale che $1 \leq i \leq n$, l'ideale sinistro C_i è semplice.*

Dimostrazione. Intanto l'ideale sinistro C_i è chiaramente non nullo. Affinché valga la proposizione è sufficiente mostrare che, preso un qualunque elemento non nullo C in C_i, l'ideale sinistro generato da C è esattamente C_i. Sia quindi $C = ce_i^T$ un elemento non nullo e sia p' un particolare indice in $\{1, ..., n\}$ per cui $c_{p'} \neq 0$. Sia ora p'' un indice arbitrario in $\{1, ..., n\}$. Dato che C_i è un ideale sinistro, in particolare anche $E_{p''p'}C \in C_i$. Ora

$$E_{p''p'}C = (e_{p''}e_{p'}^T)(ce_i^T) = e_{p''}(e_{p'}^T c)e_i^T = c_{p'}e_{p''}e_i^T$$

e quindi anche $e_{p''}e_i^T \in C_i$, essendo $c_{p'}$ un elemento non nullo in $\mathbb{K}$. Questo, essendo valido per ogni p'' in $\{1, ..., n\}$, dimostra l'affermazione sopra.

□

Definizione 1.2.2 *Siano $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ due ideali sinistri di $M_n(\mathbb{K})$. Diciamo che $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $\phi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ tale che $\phi(Ax) = A\phi(x)$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$ e per ogni $x \in \mathcal{I}$.*

Consideriamo ancora una volta C_i, per un certo i tale che $1 \leq i \leq n$. Moltiplicando a destra un elemento C di questo ideale sinistro per E_{ij}, con $j \in \{1, ..., n\}$, otteniamo un elemento di C_j. Infatti

$$CE_{ij} = (ce_i^T)(e_ie_j^T) = c(e_i^T e_i)e_j^T = c\,1\,e_j^T = ce_j^T$$

Dunque ha senso definire un'applicazione

$$\begin{aligned} \phi_{ij} : \quad C_i &\longrightarrow C_j \\ C &\longmapsto CE_{ij} \end{aligned}$$

E' immediato riconoscere che questo è un isomorfismo di spazi vettoriali: del resto C_i e C_j sono entrambi isomorfi a $\mathbb{K}^n$. Di più: questa applicazione soddisfa pure la condizione $\phi_{ij}(AC) = A\phi_{ij}(C)$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$ e per ogni $C \in C_i$. Infatti

$$\phi_{ij}(AC) = (AC)E_{ij} = A(CE_{ij}) = A\phi_{ij}(C)$$

Quindi gli ideali sinistri C_i e C_j sono equivalenti, per ogni $i, j = 1, ..., n$. Perciò vale la seguente

Proposizione 1.2.3 $\quad M_n(\mathbb{K}) = C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$
dove i C_i, per $i = 1, ..., n$, sono ideali sinistri semplici, tutti equivalenti fra di loro.

Gli ideali sinistri semplici che compaiono in questa decomposizione in somma diretta di $M_n(\mathbb{K})$ sono generati da matrici di rango uno. Questo è un fatto generale: tutti gli ideali sinistri semplici di $M_n(\mathbb{K})$ sono generati da matrici di rango uno. Qui di seguito mostriamo questa affermazione, esibendo al contempo una decomposizione più generale di $M_n(\mathbb{K})$ come somma diretta di ideali sinistri semplici.

Proposizione 1.2.4 *Per ogni $x \in \mathbb{K}^n$, x non nullo, per ogni $y \in \mathbb{K}^n$ esiste una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $Ax = y$.*

Dimostrazione. Cerchiamo una matrice A della forma ab^T con $a, b \in \mathbb{K}^n$, cioè di rango uno. In questo modo l'uguaglianza $Ax = y$ diventa $ab^Tx = y$; in particolare $a(b^Tx) = y$. Per ipotesi abbiamo x non nullo, quindi ci sarà almeno una componente di questo vettore non nulla: sia l'i-esima, con $i \in \{1, ..., n\}$, e denotiamola con x_i. Ora scegliamo il vettore b in modo che il prodotto b^Tx, che è uno scalare, sia sicuramente diverso da zero: basta prendere $b = e_i$, infatti $e_i^Tx = x_i \neq 0$. Allora da $ab^Tx = x_ia = y$ si ricava $a = \frac{1}{x_i}y$ e questa scrittura è lecita in quanto $x_i \neq 0$. La dimostrazione è terminata: una matrice che soddisfa $Ax = y$ è dunque $A = \frac{1}{x_i}ye_i^T$.

□

Se A è una matrice in $M_n(\mathbb{K})$, per brevità indichiamo l'ideale sinistro generato da A con $\mathcal{M}A$.

Definizione 1.2.3 *Sia $b \in \mathbb{K}^n$. Poniamo*

$$P_{b^T} := \{ab^T \mid a \in \mathbb{K}^n\}$$

Proposizione 1.2.5 *Per ogni vettore non nullo $b \in \mathbb{K}^n$, P_{b^T} è un ideale sinistro minimale di $M_n(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. E' immediato riconoscere che P_{b^T} è un ideale sinistro di $M_n(\mathbb{K})$: moltiplicando a sinistra un elemento generico di P_{b^T}, cioè ab^T, per una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ abbiamo $A(ab^T) = (Aa)b^T$ e Aa evidentemente è ancora un vettore di $\mathbb{K}^n$.
Per mostrare che l'ideale P_{b^T} è minimale osserviamo innanzitutto che, con l'ipotesi b non nullo, l'ideale P_{b^T} è non nullo; questo lo si vede facilmente. Adesso verifichiamo che, preso un qualunque elemento non nullo appartenente a P_{b^T}, l'ideale sinistro generato da esso coincide con P_{b^T}. Sia quindi $X \in P_{b^T}$, X matrice non nulla. Allora sarà $X = a'b^T$ per un opportuno vettore $a' \in \mathbb{K}^n$, a' non nullo. Ora $AX = A(a'b^T) = (Aa')b^T$ per $A \in M_n(\mathbb{K})$ e per l'ultima proposizione il prodotto Aa', per A che varia in $M_n(\mathbb{K})$, è esattamente $\mathbb{K}^n$, quindi l'ideale sinistro $\mathcal{M}X$ è esattamente P_{b^T}.

$\square$

Proposizione 1.2.6 *Per ogni $b, c \in \mathbb{K}^n$, con b, c non nulli, l'ideale sinistro minimale P_{b^T} è equivalente all'ideale sinistro minimale P_{c^T} e un isomorfismo è dato dalla moltiplicazione a destra per un'opportuna matrice di rango uno.*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi: \quad P_{b^T} &\longrightarrow P_{c^T} \\ B &\longmapsto BZ \end{aligned}$$

con $Z = zc^T \in P_{c^T}$ tale che $b^T z \neq 0$. Questa è ben definita: infatti, preso $B = ab^T \in P_{b^T}$ abbiamo $BZ = ab^T zc^T = a(b^T z)c^T = (ka)c^T$ dove è stato posto $k := b^T z$ e $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$; dunque $ka \in \mathbb{K}^n$ da cui $(ka)c^T \in P_{c^T}$. Inoltre l'applicazione è un omomorfismo di spazi vettoriali per la proprietà distributiva delle matrici; è iniettivo e suriettivo.*

In più vale $\phi(AB) = A\phi(B)$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$. Questo si vede immediatamente per la proprietà associativa delle matrici:

$$\phi(AB) = (AB)Z = A(BZ) = A\phi(B)$$

e quindi gli ideali sinistri minimali P_{b^T} e P_{c^T} sono equivalenti.

□

Ora mostriamo che tutti gli ideali sinistri minimali di $M_n(\mathbb{K})$ sono della forma P_{b^T} per un opportuno vettore non nullo $b \in \mathbb{K}^n$, servendoci di una proposizione preliminare.

Proposizione 1.2.7 *Tutti gli ideali sinistri non nulli di $M_n(\mathbb{K})$ contengono una matrice della forma ab^T con $a, b \in \mathbb{K}^n$ non nulli, cioè di rango uno.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{I}$ un ideale sinistro non nullo di $M_n(\mathbb{K})$. Allora esiste una matrice non nulla $X \in \mathcal{I}$. In particolare, dato che $\mathcal{I}$ è un ideale

* Per l'iniettività: presi $a_1, a_2 \in \mathbb{K}^n$, $\phi(a_1 b^T) = \phi(a_2 b^T)$ implica $ka_1 c^T = ka_2 c^T$ da cui $a_1 c^T = a_2 c^T$. Se $d \in \mathbb{K}^n$ è tale che $c^T d \neq 0$ allora, moltiplicando ambo i membri a destra per d si ha $a_1 c^T d = a_2 c^T d$ e, posto $k' := c^T d$, $k' \in \mathbb{K}$, abbiamo $k' a_1 = k' a_2$ da cui $a_1 = a_2$. Per la suriettività: per ogni $\bar{a} c^T \in P_{c^T}$ esiste $ab^T \in P_{b^T}$ tale che $\phi(ab^T) = \bar{a} c^T$. Infatti basta prendere $a = \frac{1}{k}\bar{a}$.

sinistro, appartiene a $\mathcal{I}$ pure ogni matrice CX con C matrice di rango uno: $C = ac^T$, con $a, c \in \mathbb{K}^n$ non nulli. Ora $CX = ac^T X = a(c^T X)$ e $c^T X$ è un vettore riga. Non è difficile mostrare che esiste un vettore c' tale che il vettore riga $c'^T X$ sia non nullo. Allora, ponendo $b^T := c'^T X$, abbiamo subito $ab^T \in \mathcal{I}$ con $a, b \in \mathbb{K}^n$ non nulli.

□

Proposizione 1.2.8 *Per ogni ideale sinistro minimale $\mathcal{I}$ di $M_n(\mathbb{K})$ esiste un vettore non nullo $b \in \mathbb{K}^n$ tale che $\mathcal{I} = P_{b^T}$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{I}$ è un ideale sinistro minimale, per definizione $\mathcal{I}$ è non nullo, quindi per la proposizione precedente $\mathcal{I}$ possiede una matrice di rango uno: sia essa ab^T, con $a, b \in \mathbb{K}^n$ non nulli. Ma $ab^T \in P_{b^T}$ e P_{b^T} è un ideale sinistro, quindi si ha $\mathcal{M}ab^T \subseteq P_{b^T}$. D'altra parte $ab^T \in \mathcal{I}$ quindi, per lo stesso identico motivo, si ha $\mathcal{M}ab^T \subseteq \mathcal{I}$. Ma $\mathcal{I}$ per ipotesi è minimale, quindi, dal momento che P_{b^T} lo è, deve valere $\mathcal{I} = P_{b^T}$.

□

Proposizione 1.2.9 *Siano $P_i = a_i b_i^T$ $(i = 1, ..., n)$ matrici in $M_n(\mathbb{K})$ di rango uno con gli a_i non nulli e i b_i linearmente indipendenti. Allora gli ideali sinistri generati dalle matrici P_i sono in somma diretta e la loro somma è $M_n(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. Per $i = 1, ..., n$ gli elementi degli ideali sinistri P_i sono della forma $A(a_i b_i^T)$ con $A \in M_n(\mathbb{K})$; ma $A(a_i b_i^T) = (Aa_i)b_i^T = a'_i b_i^T$ con $a'_i \in \mathbb{K}^n$ per ogni $i = 1, ..., n$. Ora, per dimostrare che gli ideali sono in somma diretta basta far vedere che $a'_1 b_1^T + ... + a'_n b_n^T = 0$ implica $a'_1 b_1^T = ... = a'_n b_n^T = 0$, dove qui 0 indica la matrice nulla in $M_n(\mathbb{K})$. Supponiamo per assurdo che vi sia almeno un addendo diverso da zero: sia per esempio $a'_k b_k^T$, con k in $\{1, ..., n\}$. Il vettore a'_k è dunque non nullo, quindi avrà almeno una componente non nulla: sia per esempio la m-esima (con m

in $\{1, ..., n\}$). Ora moltiplichiamo a sinistra entrambi i membri dell'espressione scritta sopra per il vettore riga e_m^T : al secondo membro viene ovviamente zero (vettore riga nullo in $\mathbb{K}^n$), mentre al primo membro viene una combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{K}$ degli elementi b_i^T non nulla, dato che almeno il prodotto $e_m^T a'_k$ è diverso da zero. Ma i b_i^T (per $i = 1, ..., n$) sono per ipotesi linearmente indipendenti, quindi una loro combinazione lineare che si annulla deve avere i rispettivi coefficienti tutti nulli.
Mostriamo adesso che la somma degli ideali sinistri generati dalle matrici P_i è $M_n(\mathbb{K})$. Per questo basta far vedere che ogni matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ di rango al più uno, $P = ab^T$ $(a, b \in \mathbb{K}^n)$, appartiene all'ideale generato dalle P_i . Ora:
(1) per ciascun $i = 1, ..., n$ esiste una qualche matrice $A_i \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $a = A_i a_i$;
(2) esistono degli scalari k_i $(i = 1, ..., n)$ tali che $b = \sum_{i=1}^n k_i b_i$.
Allora abbiamo facilmente

$$P = ab^T = \sum_{i=1}^{n} k_i a b_i^T = \sum_{i=1}^{n} k_i A_i a_i b_i^T = \sum_{i=1}^{n} k_i A_i P_i$$

□

Proposizione 1.2.10 *$M_n(\mathbb{K})$ è privo di ideali bilateri propri.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia un ideale bilatero non nullo di $M_n(\mathbb{K})$. Sia dunque $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ una matrice non nulla in $\mathcal{B}$: esisterà allora una coppia di indici (q, r), con $q, r \in \{1, ..., n\}$, tali che $a_{qr} \neq 0$. Si osserva che per ogni $i, j = 1, ..., n$ l'ideale $\mathcal{B}$ contiene anche la matrice $E_{iq} A E_{rj} = a_{qr} E_{ij}$ e dunque anche E_{ij} (essendo a_{qr} un elemento non nullo nel campo $\mathbb{K}$). Dunque $\mathcal{B} = M_n(\mathbb{K})$.

□

Definizione 1.2.4 *Poniamo*

$$\mathcal{Z}(M_n(\mathbb{K})) := \{ \ B \in M_n(\mathbb{K}) \quad | \quad AB = BA \quad \forall \, A \in M_n(\mathbb{K}) \ \}$$

Questo insieme si chiama centro di $M_n(\mathbb{K})$.

Gli elementi di $\mathcal{Z}(M_n(\mathbb{K}))$ consistono della matrice unità I_n moltiplicata per uno scalare, come mostra la seguente

Proposizione 1.2.11 *Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Allora vale $AB = BA$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$ se e solo se $B = \lambda I_n$ con $\lambda \in \mathbb{K}$: ovvero le uniche matrici che commutano con ogni altra in $M_n(\mathbb{K})$ sono quelle che sono multiple della matrice unità I_n .*

Dimostrazione.

$\Leftarrow$) Se $B = \lambda I_n$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ allora $AB = A(\lambda I_n) = \lambda(AI_n) = \lambda A$; $BA = (\lambda I_n)A = \lambda(I_n A) = \lambda A$. Quindi $AB = BA$.

$\Rightarrow$) Scriviamo B nella forma $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} E_{ij}$ con $b_{ij} \in \mathbb{K}$ e imponiamo che essa commuti con ogni matrice elementare arbitraria E_{hk} con $h, k \in \{1, ..., n\}$. Fissati h, k sia quindi $BE_{hk} = E_{hk}B$. Questo implica $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} E_{ij} E_{hk} =$
$= \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} E_{hk} E_{ij}$ cioè $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \delta_{jh} E_{ik} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \delta_{ki} E_{hj}$ da cui
$\sum_{i=1}^{n} b_{ih} E_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} E_{hj}$. Da quest'ultima uguaglianza seguono:
$b_{hh} = b_{kk}$; $b_{ih} = 0$ per ogni $i \neq h$; $b_{kj} = 0$ per ogni $j \neq k$ (con $i, j = 1, ..., n$). Queste uguaglianze, per ogni $h, k \in \{1, ..., n\}$, implicano $b_{11} = b_{22} = ... = b_{nn}$ e poi $b_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$. Allora, affinché la matrice B commuti con ogni altra matrice in $M_n(\mathbb{K})$, deve essere diagonale e con tutti i termini diagonali uguali tra loro, cioè essere del tipo λI_n con $\lambda \in \mathbb{K}$.

□

1.3 Algebre di matrici a blocchi

Sia $\mathbb{K}$ un campo, siano $n_1, n_2, ..., n_p$ numeri interi positivi e consideriamo l'insieme di matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_p \end{pmatrix}$$

dove, per ogni $\alpha = 1, ..., p$, M_α è una matrice quadrata in $M_{n_\alpha}(\mathbb{K})$ e, in tutti gli altri posti, sono nulle. Denotiamo questo insieme con $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$. E' chiaro che matrici di questa forma sono quadrate, con $\sum_{\alpha=1}^{p} n_\alpha$ righe e colonne. Esse, denotando l'ultima somma con N, costituiscono una sottoalgebra di $M_N(\mathbb{K})$, con l'usuale prodotto righe per colonne.
La base canonica di $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$ è ottenuta estendendo il caso di un'algebra completa di matrici $M_n(\mathbb{K})$ ed è $\{E_{ij}^{(\alpha)}\}$, con $\alpha = 1, ..., p;\ \ i, j = 1, ..., n_\alpha$. Precisamente $E_{ij}^{(\alpha)}$ è la matrice che in cui vi è E_{ij} in corrispondenza del blocco α e 0 altrove.
In particolare, denotando con e_k un vettore della base canonica di $\mathbb{K}^N$, per k tale che $1 \le k \le N$, per ogni $\alpha = 1, ..., p$ e ponendo $n_0 := 0$, si ha

$$E_{ij}^{(\alpha)} = e_{n_1+...+n_{\alpha-1}+i} e^T_{n_1+...+n_{\alpha-1}+j}$$

Per $\alpha, \beta \in \{1, ..., p\}$, per $i, j \in \{1, ..., n_\alpha\}$, per $h, k \in \{1, ..., n_\beta\}$ vale

$$E_{ij}^{(\alpha)} E_{hk}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{jh} E_{ik}^{(\alpha)} \qquad \odot\odot$$

e, denotando con $I^{(\alpha)}$ la matrice in $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$ in cui vi è la matrice unità in corrispondenza del blocco α e 0 altrove, si ha

$$\sum_{i=1}^{n_\alpha} E_{ii}^{(\alpha)} = I^{(\alpha)} \qquad \text{da cui} \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} I^{(\alpha)} = I_N$$

Il prodotto tra due matrici arbitrarie $A = \sum_{\alpha,i,h} a_{ih}^{(\alpha)} E_{ih}^{(\alpha)}$, $B = \sum_{\beta,k,j} b_{kj}^{(\beta)} E_{kj}^{(\beta)}$ per $\alpha, \beta = 1, ..., p$; $i, h = 1, ..., n_\alpha$; $k, j = 1, ..., n_\beta$ è

$$AB = \sum_{\alpha,i,h} \sum_{\beta,k,j} a_{ih}^{(\alpha)} b_{kj}^{(\beta)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{hk} E_{ij}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha,i,j} \sum_{k=1}^{n_\alpha} a_{ik}^{(\alpha)} b_{kj}^{(\alpha)} E_{ij}^{(\alpha)}$$

Analogamente al caso di un'algebra completa di matrici $M_n(\mathbb{K})$, una $\mathbb{K}$-algebra $\mathcal{A}$ è isomorfa a $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$ se e solo se possiede un sistema di $n_1^2+...+n_p^2$ unità matriciali $\{u_{ij}^{(\alpha)}\}$ per $\alpha = 1, ..., p$ e per $i, j = 1, ..., n_\alpha$ che soddisfa la relazione $\odot\odot$ scritta poco sopra; gli isomorfismi fra $\mathcal{A}$ e $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$ sono in corrispondenza biunivoca con i sistemi di unità matriciali di $\mathcal{A}$.
Fissato $\bar{\alpha}$ tale che $1 \leq \bar{\alpha} \leq p$, denotiamo l'insieme di matrici in $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$ costituito dalle matrici che sono non nulle al più solo in corrispondenza del blocco $\bar{\alpha}$-esimo con $M^{(\bar{\alpha})}$. Questo insieme forma una sottoalgebra di $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$ con unità $I^{(\bar{\alpha})}$. Inoltre vale la seguente

Proposizione 1.3.1 *$M^{(\bar{\alpha})}$ è un ideale bilatero minimale di $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$, per ogni $\bar{\alpha} = 1, ..., p$.*

Dimostrazione. Fissiamo un indice $\bar{\alpha}$ qualsiasi, con $1 \leq \bar{\alpha} \leq p$. Per le relazioni sopra vale che per ogni $M \in M^{(\bar{\alpha})}$ e per ogni $A \in M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$ esiste una matrice $A' \in M^{(\bar{\alpha})}$ tale che $AM = A'M$. Così il prodotto AM può essere ridotto a un prodotto sul blocco $\bar{\alpha}$-esimo; una considerazione analoga vale sulla destra. Allora l'enunciato della proposizione equivale ad affermare che $M_{n_{\bar{\alpha}}}(\mathbb{K})$ è un ideale bilatero minimale di se stesso. Ma questo è vero, in virtù della Proposizione 1.2.10.

$\square$

Proposizione 1.3.2 *Gli ideali bilateri minimali $M^{(\bar{\alpha})}$, per $\bar{\alpha} = 1, ..., p$, sono gli unici possibili per l'algebra $M_{n_1,...,n_p}(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ un ideale bilatero non nullo di $M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$. Allora esiste un suo elemento non nullo: sia $X = \sum_{\alpha,i,j} x_{ij}^{(\alpha)} E_{ij}^{(\alpha)}$, dove esisterà un indice $\bar{\alpha}$ con $1 \le \bar{\alpha} \le p$ ed una coppia di indici (q, r) con $q, r \in \{1, ..., n_{\bar{\alpha}}\}$ tali che $x_{qr}^{(\bar{\alpha})} \neq 0$. Moltiplicando opportunamente a sinistra e a destra l'elemento X per le matrici elementari $E_{ij}^{(\bar{\alpha})}$ relative al blocco $\bar{\alpha}$-esimo, si trova che in $\mathcal{B}$ vi appartiene pure una matrice Y che ha il blocco $\bar{\alpha}$-esimo non nullo e nulli tutti gli altri blocchi con un indice $\alpha \neq \bar{\alpha}$ ($\alpha = 1, ..., p$); cioè $Y \in M^{(\bar{\alpha})}$. Per la proposizione precedente l'ideale bilatero generato da Y è uguale a $M^{(\bar{\alpha})}$; d'altra parte l'ideale bilatero generato da Y è contenuto in $\mathcal{B}$. Ma allora, per l'ipotesi di minimalità, si deve avere $\mathcal{B} = M^{(\bar{\alpha})}$.

□

Sia c un vettore di $\mathbb{K}^N$. Esso può essere espresso come $c = (c_1, c_2, ..., c_p)^T$ dove $c_1 \in \mathbb{K}^{n_1}, c_2 \in \mathbb{K}^{n_2}, ..., c_p \in \mathbb{K}^{n_p}$. Per $\bar{\alpha}$ tale che $1 \le \bar{\alpha} \le p$ indichiamo con $V^{(\bar{\alpha})}$ l'insieme di vettori di $\mathbb{K}^N$ tali che $c_\beta = 0$ per $\beta \neq \bar{\alpha}$ (con $\beta = 1, ..., p$). Inoltre, per brevità, indichiamo con $e_j^{(\bar{\alpha})}$ il j-esimo vettore della base canonica di $V^{(\bar{\alpha})}$; cioè $e_j^{(\bar{\alpha})} = e_{n_1+\dots+n_{\bar{\alpha}-1}+j}$.

Proposizione 1.3.3 *Sia $\bar{\alpha}$ tale che $1 \le \bar{\alpha} \le p$ e sia j tale che $1 \le j \le n_{\bar{\alpha}}$. Poniamo*

$$C_j^{(\bar{\alpha})} := \{C \in M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K}) \mid C = c e_j^{(\bar{\alpha})T}, \quad c \in V^{(\bar{\alpha})}\}$$

Questo è un ideale sinistro minimale di $M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$.

Dimostrazione. Per il fatto che $C_j^{(\bar{\alpha})}$ è un ideale sinistro di $M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$ la dimostrazione è analoga a quella per i C_i svolta nel paragrafo precedente, per la Proposizione 1.2.1; inoltre si ragiona in modo analogo anche alla Proposizione 1.3.1. Infine si riesce a mostrare che $C_j^{(\bar{\alpha})}$ è minimale utilizzando la Proposizione 1.2.2.

□

Proposizione 1.3.4 *Siano $C_i^{(\alpha)}$ e $C_j^{(\beta)}$ definiti come sopra, con α, β tali che $1 \leq \alpha, \beta \leq p$ e i, j tali che $1 \leq i \leq n_\alpha$ e $1 \leq j \leq n_\beta$. Allora $C_i^{(\alpha)}$ e $C_j^{(\beta)}$ sono ideali sinistri equivalenti per $\alpha = \beta$, mentre non sono equivalenti per $\alpha \neq \beta$.*

Dimostrazione. Sia $\alpha = \beta$. Allora, moltiplicando a destra un elemento C di $C_i^{(\alpha)}$ per $E_{ij}^{(\alpha)}$, otteniamo un elemento di $C_j^{(\alpha)}$ in quanto si ha, con $c \in V^{(\alpha)}$:

$$CE_{ij}^{(\alpha)} = ce_i^{(\alpha)\,T} E_{ij}^{(\alpha)} = ce_i^{(\alpha)\,T} e_i^{(\alpha)} e_j^{(\alpha)\,T} = c(e_i^{(\alpha)\,T} e_i^{(\alpha)}) e_j^{(\alpha)\,T} = c\,1\,e_j^{(\alpha)\,T} = ce_j^{(\alpha)\,T}$$

Quindi si può definire l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{(\alpha)} : \quad C_i^{(\alpha)} &\longrightarrow C_j^{(\alpha)} \\ C &\longmapsto CE_{ij}^{(\alpha)} \end{aligned}$$

che risulta essere un isomorfismo di spazi vettoriali; inoltre è tale che $\phi_{ij}^{(\alpha)}(AC) = A\phi_{ij}^{(\alpha)}(C)$ per ogni $C \in C_i^{(\alpha)}$ e per ogni $A \in M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$, infatti

$$\phi_{ij}^{(\alpha)}(AC) = (AC)E_{ij}^{(\alpha)} = A(CE_{ij}^{(\alpha)}) = A\phi_{ij}^{(\alpha)}(C)$$

e perciò gli ideali sinistri minimali $C_i^{(\alpha)}$ e $C_j^{(\alpha)}$ sono equivalenti, per ogni $i, j = 1, ..., n_\alpha$.
Se $\alpha \neq \beta$, supponiamo che esista un'equivalenza $\phi_{ij}^{(\alpha,\beta)} : C_i^{(\alpha)} \longrightarrow C_j^{(\beta)}$ tra i due ideali. Allora dovrebbe valere la condizione $\phi_{ij}^{(\alpha,\beta)}(AC) = A\phi_{ij}^{(\alpha,\beta)}(C)$ per ogni $C \in C_i^{(\alpha)}$ e per ogni $A \in M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$. Quindi in particolare, prendendo $A = I^{(\alpha)}$, vale $\phi_{ij}^{(\alpha,\beta)}(I^{(\alpha)}C) = I^{(\alpha)}\phi_{ij}^{(\alpha,\beta)}(C)$ ma da questa espressione si ottiene $\phi_{ij}^{(\alpha,\beta)}(C) = 0$ e perciò $\phi_{ij}^{(\alpha,\beta)}$ è l'omomorfismo nullo.

$\square$

A questo punto abbiamo ottenuto la riducibilità di $M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$ in ideali sinistri semplici, avendo dimostrato il seguente

Teorema 1.3.1 *L'algebra $M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$ è riducibile in uno e un solo modo come somma diretta di ideali bilateri minimali, a loro volta riducibili in una somma diretta di ideali sinistri semplici; questi ultimi sono equivalenti se appartengono ad uno stesso ideale bilatero minimale, e non sono equivalenti altrimenti. Una decomposizione del genere è*

$$\bigoplus_{\alpha=1}^{p} \bigoplus_{j=1}^{n_\alpha} C_j^{(\alpha)}$$

Infine, con il prossimo teorema, determiniamo la dimensione del centro di $M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$ ed esibiamo una sua base.

Teorema 1.3.2 *Il centro di $M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$ ha dimensione uguale al numero p di blocchi e una sua base è costituita dalle unità $I^{(1)},\dots,I^{(p)}$ rispettivamente degli ideali bilateri $M^{(1)},\dots,M^{(p)}$.*

Dimostrazione. Sia $A \in M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$ arbitrario e sia $Z \in \mathcal{Z}(M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K}))$. Se le scritture di A, Z secondo la decomposizione in ideali bilateri sono rispettivamente $A^{(1)}+\dots+A^{(p)}$, $Z^{(1)}+\dots+Z^{(p)}$, allora da $AZ = ZA$ viene $A^{(1)}Z^{(1)}+\dots+A^{(p)}Z^{(p)} = Z^{(1)}A^{(1)}+\dots+Z^{(p)}A^{(p)}$, con $A^{(\alpha)}Z^{(\alpha)}, Z^{(\alpha)}A^{(\alpha)} \in M^{(\alpha)}$ per ogni $\alpha = 1,\dots,p$. Per l'unicità di scrittura della decomposizione deve quindi essere $A^{(\alpha)}Z^{(\alpha)} = Z^{(\alpha)}A^{(\alpha)}$, perciò $Z^{(\alpha)}$ appartiene al centro di $M^{(\alpha)}$, per ogni $\alpha = 1,\dots,p$. Grazie alla Proposizione 1.2.11 sappiamo che le uniche matrici quadrate che commutano con ogni altra matrice della stessa dimensione sono solo quelle che sono multiple della matrice unità: segue che per ogni $\alpha = 1,\dots,p$ vale $Z^{(\alpha)} = \lambda_\alpha I^{(\alpha)}$, con $\lambda_\alpha \in \mathbb{K}$. Quindi un elemento generico $Z \in \mathcal{Z}(M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K}))$ è una matrice in cui tutti i p blocchi sono multipli della matrice unità (con le rispettive dimensioni), ovvero $Z = \lambda_1 I^{(1)}+\dots+\lambda_p I^{(p)}$ con $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}$. Segue subito che il centro di $M_{n_1,\dots,n_p}(\mathbb{K})$ ha dimensione p ed una sua base è $\{I^{(1)},\dots,I^{(p)}\}$.

□

Capitolo 2

Algebre e moduli semisemplici

2.1 Concetti di azione e di rappresentazione

In questo capitolo supponiamo che gli spazi vettoriali siano di dimensione finita e che il campo su cui essi sono definiti sia algebricamente chiuso. Cominciamo dando, nell'ordine, la definizione di azione e di rappresentazione di un insieme su uno spazio vettoriale nel senso più generale.

Definizione 2.1.1 *Sia X un insieme e sia V uno spazio vettoriale definito su un campo $\mathbb{K}$. Un'azione di X su V è un'applicazione*

$$\begin{aligned} \theta : \quad X \times V &\longrightarrow V \\ (x, v) &\longmapsto x.v \end{aligned}$$

tale che, per ogni $x \in X$, per ogni $v, w \in V$, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$:

1) $x.(v + w) = x.v + x.w$;
2) $x.(\lambda v) = \lambda(x.v)$.

Una rappresentazione di X su V è un'applicazione

$$\begin{aligned} \rho : \quad X &\longrightarrow End(V) \\ x &\longmapsto \rho_x \end{aligned}$$

Osservazione 2.1.1 (1) *Data un'azione $\theta : X \times V \longrightarrow V$, si ha una rappresentazione $\rho : X \longrightarrow End(V)$. Infatti basta considerare ρ_x che associa ad un vettore $v \in V$ il vettore $x.v$, cioè porre $\rho_x(v) := x.v$.*
(2) *Viceversa, data una rappresentazione $\rho : X \longrightarrow End(V)$, si ha un'azione $\theta : X \times V \longrightarrow V$. Infatti basta porre $x.v := \rho_x(v)$.*

Inoltre, data un'azione di un insieme X su uno spazio vettoriale V, si ha una rappresentazione di X su V e, a partire da quest'ultima, l'azione di X su V che otteniamo è esattamente l'azione che avevamo all'inizio. Lo stesso avviene se il dato di partenza è una rappresentazione di X su V: dall'azione di X su V che abbiamo da essa si ottiene una rappresentazione di X su V che coincide con la rappresentazione iniziale. Questa corrispondenza tra azioni e rappresentazioni, in realtà, induce un'equivalenza fra le rispettive teorie.

Esempio 2.1.1 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra associativa. E' possibile definire un'azione di $\mathcal{A}$ su se stessa in modo del tutto naturale:*

$$\begin{aligned} \theta : \quad \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (a, b) &\longmapsto ab \end{aligned}$$

Questa si chiama azione regolare sinistra di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}$.

Equivalentemente si può definire, in modo naturale, una rappresentazione

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathcal{A} &\longrightarrow End(\mathcal{A}) \\ a &\longmapsto \rho_a : \ \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ & \qquad\qquad b \longmapsto ab \end{aligned}$$

che si chiama rappresentazione regolare sinistra di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}$.

2.2 Moduli su un'algebra

D'ora in avanti consideriamo sempre un'algebra associativa e con unità.

Definizione 2.2.1 *Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-algebra. Un modulo su $\mathcal{A}$, o più brevemente un $\mathcal{A}$-modulo, è uno spazio vettoriale V per cui sia definita un'applicazione bilineare*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathcal{A} \times V &\longrightarrow V \\ (a,v) &\longmapsto a.v \end{aligned}$$

tale che per ogni $a, b \in \mathcal{A}$ e per ogni $v \in V$ valgano:

1) $1.v = v\,;$
2) $(ab).v = a.(b.v)\,.$

Definizione 2.2.2 *Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-algebra e sia V un $\mathcal{A}$-modulo. Un $\mathcal{A}$-sottomodulo di V è un sottospazio vettoriale W di V tale che per ogni $a \in \mathcal{A}$ e per ogni $w \in W$ si abbia $a.w \in W$.*

Talvolta, al posto di "$\mathcal{A}$-sottomodulo di uno spazio vettoriale V", diremo più sinteticamente "sottomodulo di V", quando l'algebra $\mathcal{A}$ risulta chiara dal contesto.

Si osserva immediatamente che il sottospazio nullo e V stesso sono $\mathcal{A}$-sottomoduli di V; questi sono detti sottomoduli banali di V.
Le due proposizioni che seguono sono di verifica immediata:

Proposizione 2.2.1 *Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-algebra, sia V un $\mathcal{A}$-modulo e siano W_1, W_2 due $\mathcal{A}$-sottomoduli di V. Allora $W_1 \cap W_2$ è un $\mathcal{A}$-sottomodulo di V.*

Proposizione 2.2.2 *Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-algebra, sia V un $\mathcal{A}$-modulo e siano W_1, W_2 due $\mathcal{A}$-sottomoduli di V. Allora $W_1 + W_2$ è un $\mathcal{A}$-sottomodulo di V.*

Ricordiamo che, in generale, la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto alla somma tra sottospazi di uno spazio vettoriale V non vale; cioè, se W, V_1, V_2 sono sottospazi di V, non è sempre vero che $W \cap (V_1 + V_2) = = (W \cap V_1) + (W \cap V_2)$.
Basti pensare, come controesempio, al caso $V = \mathbb{K}^2$, $V_1 =< e_1 >$, $V_2 =< e_2 >$, $W =< e_1 + e_2 >$ (dove $< v >= \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$). Si vede molto rapidamente che $W \cap (V_1 + V_2) \neq (W \cap V_1) + (W \cap V_2)$.
E' vera invece la relazione scritta nella prossima proposizione.

Proposizione 2.2.3 *("Legge modulare")* *Sia V uno spazio vettoriale e siano W, V_1, V_2 tre sottospazi di V tali che $W \subseteq V_2$. Allora vale*

$$W + (V_1 \cap V_2) = (W + V_1) \cap V_2$$

Definizione 2.2.3 *Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-algebra e sia V un $\mathcal{A}$-modulo. V si dice semplice se V è non nullo e se non contiene alcun $\mathcal{A}$-sottomodulo non banale.*

Osservazione 2.2.1 *Un'algebra $\mathcal{A}$ è in particolare uno spazio vettoriale, quindi può essere considerata come un $\mathcal{A}$-modulo su se stessa. In questo caso i sottomoduli sono ideali sinistri di $\mathcal{A}$.*

Esempio 2.2.1 *Consideriamo l'algebra associativa $M_n(\mathbb{K})$ che agisce su se stessa mediante il prodotto di matrici:*

$$\begin{aligned} \theta: \quad M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ (A,B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

$M_n(\mathbb{K})$ è dunque un modulo su se stesso, ma non è semplice: infatti nel capitolo precedente abbiamo visto che i sottospazi generati dai vettori della base canonica che appartengono a una singola colonna, i cosiddetti C_i, rimangono invariati sotto l'azione del prodotto di una qualunque matrice A in $M_n(\mathbb{K})$, perciò essi sono tutti sottomoduli di $M_n(\mathbb{K})$. D'altra parte abbiamo mostrato anche che questi, a loro volta, invece sono semplici.

Definizione 2.2.4 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra e siano V, V' due $\mathcal{A}$-moduli. Un omomorfismo di $\mathcal{A}$-moduli è un omomorfismo di spazi vettoriali $f : V \longrightarrow V'$ tale che $f(a.v) = a.f(v)$ per ogni $a \in \mathcal{A}$ e per ogni $v \in V$.*
Inoltre, se f è biiettiva, f si dice isomorfismo di $\mathcal{A}$-moduli.

Osservazione 2.2.2 *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra e f è un omomorfismo di due $\mathcal{A}$-moduli V e V', allora $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono due $\mathcal{A}$-sottomoduli rispettivamente di V e di V'.*

Lemma 2.2.1 ***(di Schur) (I)*** *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra, siano V, V' due $\mathcal{A}$-moduli con V semplice e sia $f : V \longrightarrow V'$ un omomorfismo di $\mathcal{A}$-moduli. Allora $f = 0$ oppure f è iniettiva. Inoltre, se anche V' è semplice, allora $f = 0$ oppure f è biiettiva.*

Dimostrazione. Abbiamo visto appena prima che $Ker(f)$ è un $\mathcal{A}$-sottomodulo di V. Ma V per ipotesi è semplice, quindi $Ker(f) = \{0\}$ oppure $Ker(f) = V$. Nel primo caso f è iniettiva, mentre nel secondo $f = 0$. Se supponiamo che anche V' sia semplice, sappiamo che $Im(f)$ è un $\mathcal{A}$-sottomodulo di V', quindi $Im(f) = \{0\}$ oppure $Im(f) = V'$. Nel primo caso $f = 0$; nel secondo f è suriettiva e allora, per quanto visto qui sopra, vale $Ker(f) = \{0\}$ dunque f è anche iniettiva.

□

Se $\mathcal{A}$ è un'algebra e V è un $\mathcal{A}$-modulo, denotiamo con $End_{\mathcal{A}}(V)$ l'insieme degli endomorfismi di V come $\mathcal{A}$-modulo.

Lemma 2.2.2 ***(di Schur) (II)*** *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra e sia V un $\mathcal{A}$-modulo semplice. Allora $End_{\mathcal{A}}(V)$ è isomorfo a $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Sia $f \in End_{\mathcal{A}}(V)$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora, denotata con id_V l'applicazione identità in V, vale $f - \lambda\, id_V \in End_{\mathcal{A}}(V)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$. Il campo $\mathbb{K}$ è supposto algebricamente chiuso, quindi f ha almeno un autovalore $\bar{\lambda} \in \mathbb{K}$, da cui segue che l'applicazione $f - \bar{\lambda}\, id_V$ ha nucleo non banale. Ma V per ipotesi è un $\mathcal{A}$-modulo semplice, e sappiamo che $Ker(f - \bar{\lambda}\, id_V)$ è un $\mathcal{A}$-sottomodulo non nullo di V, quindi per il Lemma di Schur (I) si ha $f - \bar{\lambda}\, id_V = 0$, da cui $f = \bar{\lambda}\, id_V$.
Quindi f è un multiplo dell'identità per ogni $f \in End_{\mathcal{A}}(V)$: questo genera una biiezione naturale tra $End_{\mathcal{A}}(V)$ e $\mathbb{K}$ data da

$$\begin{aligned} \kappa : \quad End_{\mathcal{A}}(V) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \bar{\lambda} \end{aligned}$$

che risulta essere un isomorfismo di algebre.

□

Teorema 2.2.1 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra e sia V un $\mathcal{A}$-modulo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ con V_i sottomoduli semplici.
(2) $V = \sum_{i=1}^{p} W_i$ con W_i sottomoduli semplici.
(3) Ogni sottomodulo di V possiede un sottomodulo complementare.

Dimostrazione. Facciamo vedere (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). E' ovvio.

(2) $\Rightarrow$ (3). Per ipotesi $V = \sum_{i=1}^{p} W_i$ con W_i sottomoduli semplici. Innanzitutto se $p = 0$ non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, sia M un sottomodulo di V e consideriamo un sottomodulo M' di V tale che $M \cap M' = \{0\}$ e M' sia massimale. Supponiamo per assurdo che esista $j \in \{1, ..., p\}$ tale che $V_j \nsubseteq M \oplus M'$. Ora $M \oplus M'$ è un sottomodulo di V in quanto, dalla Proposizione 2.2.2, la somma diretta di sottomoduli è un sottomodulo. Inoltre, per la Proposizione 2.2.1, anche $V_j \cap (M \oplus M')$ è un sottomodulo di V, il quale in particolare è contenuto in V_j. Allora $V_j \cap (M \oplus M') = \{0\}$ dal momento che $V_j \nsubseteq M \oplus M'$ e V_j per ipotesi è semplice. Ora $M' \subsetneq M' + V_j$. In più $M \cap (M' + V_j) = \{0\}$: infatti, utilizzando la legge modulare, possiamo scrivere

$$M \cap (M' + V_j) \subseteq (M + M') \cap (V_j + M') = ((M + M') \cap V_j) + M' = \{0\} + M' = M'$$

Abbiamo appena ottenuto $M \cap (M' + V_j) \subseteq M'$. D'altra parte, ovviamente, si ha $M \cap (M' + V_j) \subseteq M$ e allora, dato che M e M' sono in somma diretta, vale $M \cap (M' + V_j) = \{0\}$.
Ma allora $M' + V_j$ è un sottomodulo di V che contraddice la massimalità di M'. La supposizione iniziale, dunque, non si può verificare; da questo segue che per ogni $i = 1, ..., p$ il sottomodulo V_i è tale che $V_i \subseteq M \oplus M'$ e quindi $V = M \oplus M'$ con M' sottomodulo complementare di M in V.

(3) $\Rightarrow$ (1). Si procede per induzione sulla dimensione n di V.
Se $n = 0$ non c'è niente da dimostrare.
Supponiamo l'affermazione vera per tutti gli interi positivi minori di un certo n e dimostriamola per n. Se V è semplice non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, preso un sottomodulo non banale W di V, questo per ipotesi pos-

siede un sottomodulo complementare W' in V. Verifichiamo che l'esistenza di un sottomodulo complementare è valida anche per i sottomoduli di V: cioè, se per esempio Z è un sottomodulo di W, allora vi è un sottomodulo complementare di Z in W. Ora, per ipotesi, Z possiede un sottomodulo complementare Z' in V. Un sottomodulo complementare di Z in W risulta essere $Z' \cap W$: infatti vale $W = Z + (Z' \cap W)$ poiché, per la legge modulare, si ha $Z + (Z' \cap W) = (Z + Z') \cap W = V \cap W = W$; inoltre vale $Z \cap (Z' \cap W) = \{0\}$ poiché, per l'associatività dell'intersezione, abbiamo $Z \cap (Z' \cap W) = (Z \cap Z') \cap W = \{0\} \cap W = \{0\}$. Allora, per ipotesi induttiva, i sottomoduli propri di V si possono scrivere come somma diretta di sottomoduli semplici: applicando questo fatto a W e W' riusciamo a ottenere una decomposizione di V in somma diretta di sottomoduli semplici.

□

Definizione 2.2.5 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra e sia V un $\mathcal{A}$-modulo. Se è vera una delle affermazioni precedenti, V si dice semisemplice.*

2.3 Struttura di un'algebra semisemplice

Definizione 2.3.1 *Un'algebra $\mathcal{A}$ è semisemplice se, vista come $\mathcal{A}$-modulo su se stessa, è semisemplice.*

Proposizione 2.3.1 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra semisemplice e sia V un $\mathcal{A}$-modulo semplice. Se vale $\mathcal{A} = \mathcal{I}_1 + ... + \mathcal{I}_p$ con $\mathcal{I}_1 , ..., \mathcal{I}_p$ ideali sinistri semplici, allora esiste un indice $i \in \{1, ..., p\}$ tale che V è isomorfo a $\mathcal{I}_i$.*

Dimostrazione. Fissato $\bar{v} \in V$, $\bar{v} \neq 0$, per ogni $i = 1, ..., p$ l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad \mathcal{I}_i &\longrightarrow V \\ a^{(i)} &\longmapsto a^{(i)}\bar{v} \end{aligned}$$

è ben definita e risulta essere un omomorfismo di $\mathcal{A}$-moduli. Essendo V un $\mathcal{A}$-modulo, vale

$$\bar{v} = 1\bar{v} = (u^{(1)} + ... + u^{(p)})\bar{v} = u^{(1)}\bar{v} + ... + u^{(p)}\bar{v}$$

dove 1 è l'unità di $\mathcal{A}$ e $u^{(1)}, ..., u^{(p)}$ sono elementi appartenenti rispettivamente a $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_p$. Ora $\bar{v}$ è supposto non nullo, quindi almeno un addendo $u^{(i)}\bar{v}$ è non nullo (con $i \in \{1, ..., p\}$), da cui segue che φ_i è un omomorfismo non nullo. Per ipotesi gli $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{I}_i$ e V sono entrambi semplici, quindi per il Lemma di Schur (I) l'applicazione φ_i è un isomorfismo.

□

Teorema 2.3.1 *La decomposizione di un'algebra semisemplice $\mathcal{A}$ in ideali sinistri semplici $\mathcal{A} = \mathcal{I}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_s$ è unica, a meno dell'ordine e di equivalenze.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{I}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_s$ e $\mathcal{J}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{s'}$ due diverse decomposizioni dell'algebra $\mathcal{A}$ in ideali sinistri semplici. Supponiamo $s \leq s'$. Mostriamo innanzitutto che per k tale che $1 \leq k \leq s$, l'ideale sinistro $\mathcal{I}_k$ è equivalente all'ideale sinistro $\mathcal{J}_l$ per un qualche $l \in \{1, ..., s'\}$. Sia quindi $\mathcal{I}_k$ con k fissato e consideriamo le proiezioni di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{I}_k$ ristrette a $\mathcal{J}_l$, per $l = 1, ..., s'$:

$$p_{k\,|\,\mathcal{J}_l} : \quad \mathcal{J}_l \longrightarrow \mathcal{I}_k$$

Gli ideali sinistri $\mathcal{J}_l$ e $\mathcal{I}_k$ sono sottomoduli di $\mathcal{A}$ entrambi semplici, quindi per il Lemma di Schur (I) abbiamo due possibilità: sono equivalenti oppure $p_{k\,|\,\mathcal{J}_l} = 0$. Ne esisterà certamente almeno una che fornisca un'equivalenza tra $\mathcal{I}_k$ e $\mathcal{J}_l$ per un qualche l dal momento che le proiezioni non possono essere tutte nulle.

Mostriamo adesso che $s = s'$. Consideriamo l'ideale sinistro $\mathcal{I}_1$: per quanto appena visto esso è equivalente ad un certo $\mathcal{J}_l$, con $l \in \{1, ..., s'\}$. L'insieme quoziente $\mathcal{A}/\mathcal{I}_1$ è un'algebra, che risulta essere isomorfa all'algebra $\mathcal{I}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_s$. D'altra parte $\mathcal{A}/\mathcal{I}_1$ è pure isomorfa a $\mathcal{A}/\mathcal{J}_l$ e quest'ultima a sua volta è isomorfa a $\mathcal{J}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{l-1} \oplus \mathcal{J}_{l+1} \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{s'}$; di conseguenza $\mathcal{I}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_s$ è isomorfa a $\mathcal{J}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{l-1} \oplus \mathcal{J}_{l+1} \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{s'}$. Considerando ora $\mathcal{I}_2$, allo stesso modo risulta $(\mathcal{I}_2 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_s)/\mathcal{I}_2 \cong \mathcal{I}_3 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_s$. Sia $\mathcal{J}_{l'}$ equivalente a $\mathcal{I}_2$, con $l' \in \{1, ..., l-1, l+1, ..., s'\}$. Non è restrittivo supporre $l < l' \leq s'$. Allora avremo $(\mathcal{J}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{l-1} \oplus \mathcal{J}_{l+1} \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{s'})/\mathcal{J}_{l'} \cong$ $\cong \mathcal{J}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{l-1} \oplus \mathcal{J}_{l+1} \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{l'-1} \oplus \mathcal{J}_{l'+1} \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{s'}$ da cui $\mathcal{I}_3 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_s \cong \mathcal{J}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{l-1} \oplus \mathcal{J}_{l+1} \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{l'-1} \oplus \mathcal{J}_{l'+1} \oplus ... \oplus \mathcal{J}_{s'}$. Iterando questo procedimento, cioè "rimuovendo" uno alla volta gli ideali sinistri relativi alle due decomposizioni scritte, arriveremo nello specifico a ottenere un isomorfismo tra il solo ideale sinistro $\mathcal{I}_s$ e un qualche ideale sinistro relativo alla seconda decomposizione considerata. Ma la somma diretta di ideali sinistri che compaiono al secondo membro dell'isomorfismo deve essere costituita da un unico ideale sinistro tra $\mathcal{J}_1, ..., \mathcal{J}_{s'}$ in quanto, se così non fosse, $\mathcal{I}_s$ sarebbe isomorfo alla somma diretta di almeno due ideali sinistri semplici e quindi non sarebbe semplice, contro l'ipotesi. Dunque il numero di addendi nelle due decomposizioni iniziali è lo stesso, cioè $s = s'$.

$\square$

D'ora in avanti, fino alla fine di questo capitolo, supporremo sempre che l'algebra $\mathcal{A}$ su cui lavoriamo sia semisemplice.

Definizione 2.3.2 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra. Un elemento $e \in \mathcal{A}$ si dice idempotente se vale $e^2 = e$.*

Osservazione 2.3.1 *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra e se $e \in \mathcal{A}$ è idempotente, allora esiste un elemento $e' \in \mathcal{A}$ idempotente tale che $e + e' = 1$.*
Infatti, posto $e' := 1 - e$, questo elemento è idempotente:

$$(1-e)^2 = (1-e)(1-e) = 1-e-e+e^2 = 1-2e+e = 1-e$$

Proposizione 2.3.2 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra e sia $\mathcal{I}$ un ideale sinistro di $\mathcal{A}$. Allora esiste un elemento idempotente $e \in \mathcal{I}$, chiamato "unità generatrice" di $\mathcal{I}$, tale che e è un generatore di $\mathcal{I}$ e vale $ae = a$ per ogni $a \in \mathcal{I}$.*

Dimostrazione. Poiché l'algebra $\mathcal{A}$ è semisemplice, esiste un ideale sinistro non banale complementare di $\mathcal{I}$: sia $\mathcal{J}$. L'unità 1 di $\mathcal{A}$ si potrà scrivere come $1 = e + d$ con $e \in \mathcal{I}$, $d \in \mathcal{J}$. D'altra parte per ogni $a \in \mathcal{A}$ vale $a = a^{(i)} + a^{(j)}$, con $a^{(i)} \in \mathcal{I}$, $a^{(j)} \in \mathcal{J}$. Moltiplicando a sinistra entrambi i membri dell'espressione $1 = e + d$ viene $a = ae + ad$. Ora $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sono due ideali, quindi $ae \in \mathcal{I}$, $ad \in \mathcal{J}$. Per l'unicità di scrittura dell'elemento a deve essere $a^{(i)} = ae$, $a^{(j)} = ad$. In particolare, se $a \in \mathcal{I}$, allora $a = a^{(i)} = ae$ e quindi $ae = a$. Ciò vale per ogni elemento di $\mathcal{I}$, per cui e ne è un generatore. L'idempotenza segue subito dall'ultima uguaglianza, sostituendo e ad a.

$\square$

Teorema 2.3.2 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra. Se vale $\mathcal{A} = \mathcal{I}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_k$ con $\mathcal{I}_i$ ideale sinistro per ogni $i = 1, ..., k$, allora esistono e sono univocamente determinati degli elementi idempotenti $e^{(1)}, e^{(2)}, ..., e^{(k)}$ tali che $\sum_{i=1}^{k} e^{(i)} = 1$, che appartengono rispettivamente a $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_k$ e che generano questi stessi ideali. Inoltre sono tali che $e^{(i)}e^{(j)} = \delta_{ij}e^{(i)}$ per ogni $i, j = 1, ..., k$.*

Dimostrazione. Il teorema è un'estensione della proposizione precedente. Se $\mathcal{A}$ si decompone nella suddetta somma diretta, allora l'unità 1 di $\mathcal{A}$ si può scrivere come $1 = e^{(1)} + e^{(2)} + ... + e^{(k)}$ con $e^{(i)} \in \mathcal{I}_i$ per ogni $i = 1, ..., k$. Per ogni $a \in \mathcal{A}$ vale $a = a^{(1)} + a^{(2)} + ... + a^{(k)}$ con $a^{(1)} \in \mathcal{I}_1\,, a^{(2)} \in \mathcal{I}_2\,, ..., a^{(k)} \in \mathcal{I}_k\,$. D'altra parte vale $a1 = a$, ma

$a1 = a(e^{(1)} + e^{(2)} + ... + e^{(k)}) = ae^{(1)} + ae^{(2)} + ... + ae^{(k)}$; dato che $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_k$ sono ideali sinistri si ha $ae^{(1)} \in \mathcal{I}_1$, $ae^{(2)} \in \mathcal{I}_2$, ..., $ae^{(k)} \in \mathcal{I}_k$. Per l'unicità di scrittura dell'elemento a deve essere $a^{(1)} = ae^{(1)}, a^{(2)} = ae^{(2)}, ..., a^{(k)} = ae^{(k)}$. In particolare, fissato un certo i $(1 \leq i \leq k)$, se consideriamo $a \in \mathcal{I}_i$, allora $a = a^{(i)} = ae^{(i)}$. Dunque $a = ae^{(i)}$. Questo ovviamente è vero per ogni ideale $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_k$. Inoltre, da $a \in \mathcal{I}_i$ segue $ae^{(j)} = 0$ per ogni $j \neq i$, con $j \in \{1, ..., k\}$. Quindi vale $e^{(i)}e^{(j)} = 0$ per $i \neq j$ $(i, j \in \{1, ..., k\})$. Infine, l'idempotenza degli elementi $e^{(1)}, e^{(2)}, ..., e^{(k)}$ viene subito dall'uguaglianza $a = ae^{(i)}$, sostituendo $e^{(i)}$ ad a.

□

Definizione 2.3.3 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra. Un elemento idempotente $e \in \mathcal{A}$ si dice primitivo se non si può esprimere come $e' + e''$ con $e', e'' \in \mathcal{A}$ idempotenti non nulli e tali che $e'e'' = e''e' = 0$.*

Proposizione 2.3.3 *Se $e \in \mathcal{A}$ è primitivo, allora l'ideale sinistro $\mathcal{A}e$ generato da e è minimale. Viceversa, se un ideale sinistro $\mathcal{I}$ è minimale, allora ogni unità generatrice e di $\mathcal{I}$ è primitiva.*

Dimostrazione. Entrambe le affermazioni si dimostrano per assurdo. Per la prima affermazione, innanzitutto l'elemento e è un'unità di $\mathcal{A}e$. Infatti ogni elemento di $\mathcal{A}e$, per definizione, è del tipo ae con $a \in \mathcal{A}$; l'elemento e per ipotesi è idempotente, dunque $(ae)e = a(ee) = ae^2 = ae$ per ogni $a \in \mathcal{A}$. Ora supponiamo che l'ideale sinistro $\mathcal{A}e$ non sia minimale. Esisterà quindi un ideale sinistro non banale $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}e$ e di conseguenza, dato che $\mathcal{A}$ è semisemplice, anche un ideale sinistro non banale $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A}e = \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$. In particolare $\mathcal{A}e$, essendo un ideale sinistro di $\mathcal{A}$, è una sottoalgebra di $\mathcal{A}$: possiamo allora applicare il Teorema 2.3.2 ottenendo che esistono due elementi idempotenti $e_{\mathcal{I}}, e_{\mathcal{J}}$ generatori rispettivamente di $\mathcal{I}, \mathcal{J}$, tali che $e = e_{\mathcal{I}} + e_{\mathcal{J}}$ e che soddisfano la relazione $e_{\mathcal{I}}e_{\mathcal{J}} = 0$. Ma allora l'elemento e non è primitivo, in contraddizione con l'ipotesi.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, supponiamo che l'unità generatrice e di $\mathcal{I}$ non sia primitiva. Allora esiste una decomposizione del tipo

$e = e' + e''$ con le condizioni della Definizione 2.3.3. Moltiplicando a sinistra per ogni $a \in \mathcal{A}$ abbiamo $ae = ae' + ae''$: in breve $\mathcal{A}e = \mathcal{A}e' + \mathcal{A}e''$. Quest'ultima somma è diretta, infatti, se un elemento x appartiene a $\mathcal{A}e' \cap \mathcal{A}e''$, allora esistono $a_1\,, a_2 \in \mathcal{A}$ tali che $a_1 e' = a_2 e''$. Se si moltiplica a destra per e'' viene $0 = a_2 e''$ e dunque l'elemento in comune ai due ideali sinistri è solamente quello nullo. Allora $\mathcal{I}$ si decompone nella somma diretta di due ideali sinistri e quindi non è minimale, contraddicendo l'ipotesi.

$\square$

Teorema 2.3.3 *Due ideali sinistri minimali $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ di un'algebra $\mathcal{A}$ con unità generatrici rispettivamente e, e' sono equivalenti se e solo se esistono elementi della forma eae' diversi da zero (con $a \in \mathcal{A}$). Le equivalenze da $\mathcal{I}$ a $\mathcal{I}'$ sono date dalla moltiplicazione a destra con questi elementi.*

Dimostrazione. Innanzitutto vale che, se gli ideali $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ sono equivalenti, allora ogni equivalenza $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}'$ è data dalla moltiplicazione a destra per un certo elemento $b \in \mathcal{A}$, cioè $\varphi(x) = xb$. Infatti, se e è un'unità generatrice di $\mathcal{I}$, denotata con b la sua immagine, si ha che xe viene associato a $\varphi(xe) = x\varphi(e) = xb$ per ogni $x \in \mathcal{I}$. Questo elemento b ha una particolare proprietà: dal momento che l'immagine di e, dall'ultima formula, è eb, allora $eb = b$. D'altra parte $b \in \mathcal{I}'$ e dunque, essendo e' un'unità generatrice di $\mathcal{I}'$, vale $be' = b$. Ma allora $ebe' = b$. Inoltre, essendo e, e' idempotenti, ogni elemento della forma eae', con $a \in \mathcal{A}$, soddisfa l'ultima proprietà. Ma allora, preso un qualunque elemento della forma $eae' \neq 0$ e moltiplicato a destra di ogni elemento di $\mathcal{I}$, poiché i due ideali $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ sono minimali ed essendo eae' l'immagine di e, allora per il Lemma di Schur (I) questa è un'equivalenza tra $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$.

$\square$

Proposizione 2.3.4 *Se $e \in \mathcal{A}$ è idempotente primitivo, allora per ogni $a \in \mathcal{A}$ esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $eae = \lambda e$. Viceversa, se e è idempotente e vale che per ogni $a \in \mathcal{A}$ esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $eae = \lambda e$, allora e è primitivo.*

Dimostrazione. Per la prima affermazione, dal momento che e è primitivo, per la Proposizione 2.3.3 l'ideale $\mathcal{I} := \mathcal{A}e$ è minimale. Consideriamo un elemento della forma eae, con $a \in \mathcal{A}$. Per il teorema precedente questo definisce un'equivalenza da I a se stesso: precisamente è l'applicazione φ tale che $\varphi(x) = xeae$ per ogni $x \in \mathcal{A}$. D'altra parte per il Lemma di Schur (II) l'applicazione φ è un multiplo dell'identità, ovvero esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\varphi(x) = \lambda x$ per ogni $x \in \mathcal{A}$. Dunque abbiamo $xeae = \lambda x$ per ogni $x \in \mathcal{A}$. Allora in particolare, ponendo $x = e$, si ha $e^2ae = \lambda e$ da cui, per l'idempotenza di e, vale $eae = \lambda e$.
Per quanto riguarda la seconda affermazione, supponiamo che e non sia primitivo: sia $e = e' + e''$ con e', e'' idempotenti e tali che $e'e'' = e''e' = 0$. Ora $ee' = (e' + e'')e' = (e')^2 = e'$; così pure $e'e = e'$. Allora $ee'e = e'$. Dato che tutti gli elementi della forma eae con $a \in \mathcal{A}$ sono multipli di e, si ha $e' = \lambda e$ con $\lambda \in \mathbb{K}$. Ma $(e')^2 = \lambda^2 e^2 = \lambda^2 e$, quindi e' è idempotente solo se $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$: in entrambi i casi non esiste una decomposizione propria di e.

□

2.4 Decomposizione in ideali bilateri minimali

Adesso consideriamo ideali bilateri dell'algebra $\mathcal{A}$: vedremo che essi forniscono un certo ordine tra tutti i suoi possibili ideali sinistri.

Teorema 2.4.1 *Se l'algebra $\mathcal{A}$ è decomponibile nella somma diretta di due ideali bilateri $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}''$, allora $a'a'' = a''a' = 0$ per ogni $a' \in \mathcal{A}'$ e per ogni $a'' \in \mathcal{A}''$. Inoltre $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}''$ posseggono ciascuno un'unica unità generatrice, e ognuna di queste commuta con tutti gli elementi di $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione. Dato che $\mathcal{A}'$ è in particolare un ideale destro, allora $a'a'' \in \mathcal{A}'$. D'altra parte $\mathcal{A}''$ è in particolare un ideale sinistro, quindi $a'a'' \in \mathcal{A}''$. Ma i due ideali sono per ipotesi in somma diretta, dunque

$a'a'' = 0$. Allo stesso modo si dimostra che $a''a' = 0$.
Le unità generatrici dei due ideali si trovano considerando la decomposizione dell'unità 1 come $e' + e''$, con certi elementi e', e'' appartenenti rispettivamente a $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$. L'esistenza dell'unità generatrice, insieme alle sue proprietà, è valida ovviamente anche per gli ideali destri. Considerando prima la moltiplicazione a sinistra e poi quella a destra di ambo i membri di $1 = e' + e''$ per $a' \in \mathcal{A}'$ troviamo che vale $a'e' = a' = e'a'$. Ora, preso un elemento arbitrario $a \in \mathcal{A}$ abbiamo che $a = a' + a''$ con $a' \in \mathcal{A}', a'' \in \mathcal{A}''$, da cui $ae' = (a' + a'')e' = a'e' = e'a' = e'(a' + a'') = e'a$. Quindi l'unità generatrice e' di $\mathcal{A}'$ commuta con ogni elemento $a \in \mathcal{A}$. In modo del tutto analogo si mostra che anche l'unità generatrice e'' di $\mathcal{A}''$ possiede la stessa proprietà. Infine, se e^* è un'altra unità generatrice di $\mathcal{A}'$ considerato come ideale sinistro, si ha $e^* = e^*e' = e'e^* = e'$ e così anche l'unicità dell'unità generatrice di $\mathcal{A}'$ è dimostrata. Lo stesso avviene per l'unità generatrice di $\mathcal{A}''$.

$\square$

Osservazione 2.4.1 *Le unità generatrici e', e'' di quest'ultimo teorema sono le unità rispettivamente delle sottoalgebre $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$.*

Proposizione 2.4.1 *Sia $\tilde{\mathcal{A}}$ un ideale bilatero dell'algebra $\mathcal{A}$, sia $\mathcal{I}$ un ideale sinistro minimale di $\mathcal{A}$, sia e un'unità generatrice di $\mathcal{I}$. Allora vale $\tilde{a}e = 0$ per ogni $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$ oppure $\mathcal{I}$ è contenuto in $\tilde{\mathcal{A}}$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\{\tilde{a}e \mid \tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}\}$. Questo è un ideale sinistro, dato che $\tilde{\mathcal{A}}$ in particolare lo è. In secondo luogo è contenuto in $\tilde{\mathcal{A}}$ poiché $\tilde{\mathcal{A}}$ è in particolare un ideale bilatero. In più è contenuto pure in $\mathcal{I}$. Ma $\mathcal{I}$ per ipotesi è minimale, quindi l'insieme considerato è $\{0\}$ oppure $\mathcal{I}$. Allora: nel primo caso vale $\tilde{a}e = 0$ per ogni $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$, mentre nel secondo caso $\mathcal{I}$ è contenuto in $\tilde{\mathcal{A}}$.

$\square$

Da questa proposizione segue la

Proposizione 2.4.2 *Se vale $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \oplus \mathcal{A}''$ con $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ ideali bilateri dell'algebra $\mathcal{A}$, allora ogni ideale sinistro minimale è contenuto in $\mathcal{A}'$ oppure in $\mathcal{A}''$.*

Precedentemente abbiamo visto che se due ideali sinistri $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ di $\mathcal{A}$ sono equivalenti, allora l'equivalenza è data dalla moltiplicazione a destra per un elemento di $\mathcal{A}$. La moltiplicazione a destra in un ideale bilatero $\tilde{\mathcal{A}}$ agisce in modo da rimanere ancora all'interno di questo ideale. Allora, se $\mathcal{I}$ è un ideale sinistro minimale contenuto in $\tilde{\mathcal{A}}$, si ha immediatamente la seguente

Proposizione 2.4.3 *Se $\tilde{\mathcal{A}}$ è un ideale bilatero dell'algebra $\mathcal{A}$ e se $\mathcal{I}$ è un ideale sinistro minimale contenuto in $\tilde{\mathcal{A}}$, allora anche ogni ideale sinistro $\mathcal{I}'$ equivalente a $\mathcal{I}$ è contenuto in $\tilde{\mathcal{A}}$.*

Teorema 2.4.2 *Esiste ed è unica, a meno dell'ordine, una decomposizione dell'algebra $\mathcal{A}$ del tipo*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)} \oplus \mathcal{A}^{(2)} \oplus \ . \ . \ . \ \oplus \mathcal{A}^{(r)}$$

dove, per ogni $i = 1, ..., r$, $\mathcal{A}^{(i)}$ è un ideale bilatero semplice.

Dimostrazione. Consideriamo una decomposizione di $\mathcal{A}$ in ideali sinistri semplici della forma del Teorema 2.3.1 e cambiamo eventualmente l'ordine e la notazione in modo da unire gli ideali equivalenti tra di loro, ponendo

$$\mathcal{A}^{(1)} := \mathcal{I}_1^{(1)} \oplus ... \oplus \mathcal{I}_{t_1}^{(1)} \ , \quad . \ . \ . \quad , \quad \mathcal{A}^{(r)} := \mathcal{I}_1^{(r)} \oplus ... \oplus \mathcal{I}_{t_r}^{(r)}$$

Gli ideali sinistri semplici aventi lo stesso apice sono equivalenti; se invece hanno due apici differenti non lo sono. I sottospazi $\mathcal{A}^{(1)}, ..., \mathcal{A}^{(r)}$ sono ideali sinistri, essendo una somma (diretta) di ideali sinistri. Bisogna quindi mostrare che essi sono pure ideali destri, e in aggiunta semplici.

Consideriamo la decomposizione dell'unità 1 in unità generatrici:
$1 = e^{(1)} + ... + e^{(r)}$, dove sarà $e^{(1)} = e_1^{(1)} + ... + e_{t_1}^{(1)}, ..., e^{(r)} = e_1^{(r)} + ... + e_{t_r}^{(r)}$.
Adesso prendiamo due apici differenti i, j (con $i, j \in \{1, ..., r\}$).
Sia $a \in \mathcal{A}$: vale $e^{(i)} a e^{(j)} = \sum_{h,k} e_h^{(i)} a e_k^{(j)}$ con $h = 1, ..., t_i$, $k = 1, ..., t_j$. Per il Teorema 2.3.3 tutti i termini della sommatoria sono nulli, dunque $e^{(i)} a e^{(j)} = 0 = e^{(j)} a e^{(i)}$. Da ciò segue $a_i a_j = a_j a_i = 0$ per ogni $a_i \in \mathcal{A}^{(i)}$, $a_j \in \mathcal{A}^{(j)}$ poiché $a_i = a_i e^{(i)}, a_j = a_j e^{(j)}$. Un elemento arbitrario $a \in \mathcal{A}$ si può scrivere come $a = a^{(1)} + ... + a^{(r)}$ con $a^{(i)} \in \mathcal{A}^{(i)}$ $(i = 1, ..., r)$. Fissiamo k con $1 \leq k \leq r$ e prendiamo un elemento $a_k \in \mathcal{A}^{(k)}$: allora $a_k a = a_k a^{(k)} \in \mathcal{A}^{(k)}$ e quindi $\mathcal{A}^{(k)}$ è un ideale destro. Mostriamo infine che $\mathcal{A}^{(k)}$ è semplice. Sia $\mathcal{A}_0$ un ideale bilatero non nullo contenuto in $\mathcal{A}^{(k)}$. Consideriamo uno degli ideali sinistri semplici $\mathcal{I}_h^{(k)}$ $(h \in \{1, ..., t_k\})$. Per la Proposizione 2.4.1 si ha che $\mathcal{I}_h^{(k)}$ è contenuto in $\mathcal{A}_0$ oppure vale $a_0 e_h^{(k)} = 0$ per ogni $a_0 \in \mathcal{A}_0$. Ma $a_0 = a_0 e^{(k)} = a_0 e_1^{(k)} + ... + a_0 e_{t_k}^{(k)}$. Ora non possono essere nulli tutti i termini della somma, quindi, se è vera la seconda condizione, allora $\mathcal{A}_0$ conterrà tutti gli elementi di almeno un altro ideale sinistro $\mathcal{I}_l^{(k)}$ con $l \neq h$, $l \in \{1, ..., t_k\}$. In ogni caso allora, per la proposizione precedente, $\mathcal{A}_0$ deve contenere tutti gli ideali sinistri equivalenti a $\mathcal{I}_l^{(k)}$, cioè tutti quelli contenuti in $\mathcal{A}^{(k)}$. Dunque $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}^{(k)}$, quindi non esiste un ideale bilatero non nullo strettamente contenuto in $\mathcal{A}^{(k)}$. Questo, essendo vero per ogni $k = 1, ..., r$, dimostra che tutti gli ideali $\mathcal{A}^{(1)}, ..., \mathcal{A}^{(r)}$ sono bilateri semplici.
Rimane da mostrare che la decomposizione è unica. Supponiamo che
$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{(1)} \oplus ... \oplus \mathcal{B}^{(s)}$ sia un'altra decomposizione di $\mathcal{A}$ in ideali bilateri semplici. Ricordiamo di nuovo la decomposizione dell'unità di $\mathcal{A}$ nella somma delle unità generatrici di $\mathcal{A}^{(1)}, ..., \mathcal{A}^{(r)}$: $1 = e^{(1)} + ... + e^{(r)}$. Fissiamo j e k, con $1 \leq j \leq r$; $1 \leq k \leq s$, e consideriamo $\mathcal{A}^{(j)}$ e $\mathcal{B}^{(k)}$. L'insieme $\mathcal{B}_0 := \{b_k e^{(j)} \mid b_k \in \mathcal{B}^{(k)}\}$ risulta essere un ideale bilatero contenuto in $\mathcal{A}^{(j)}$ e in $\mathcal{B}^{(k)}$, quindi vale $\mathcal{B}_0 = \{0\}$ oppure $\mathcal{A}^{(j)} = \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}^{(k)}$. Se è vera la prima condizione dovrà esistere almeno un indice $l \in \{1, ..., r\}$, $l \neq j$, tale che $b_k e^{(l)} \neq 0$, in quanto $b_k = b_k 1 = b_k e^{(1)} + ... + b_k e^{(r)}$ e non è possibile che si annullino tutti i termini. Allora $\mathcal{A}^{(l)} = \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}^{(k)}$. Quindi, in ogni ca-

so, ciascun ideale bilatero $\mathcal{B}^{(i)}$ coincide con qualche ideale bilatero $\mathcal{A}^{(j)}$ (per $i \in \{1, ..., s\}, j \in \{1, ..., r\}$) e ciò conclude la dimostrazione.

□

2.5 Isomorfismo con un'algebra di matrici a blocchi

Adesso concentriamo l'attenzione su un singolo ideale bilatero della decomposizione trattata nell'ultimo teorema: lo chiameremo genericamente $\tilde{\mathcal{A}}$. Indichiamo poi con t il numero di ideali sinistri semplici con i quali $\tilde{\mathcal{A}}$ si decompone a sua volta. Dunque abbiamo $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{I}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{I}_t$ con gli $\mathcal{I}_i$ tutti equivalenti tra di loro ($i = 1, ..., t$). Ricordiamo che, per il Teorema 2.3.2, le unità generatrici di questi ideali sinistri sono idempotenti e soddisfano la relazione $e^{(i)}e^{(j)} = \delta_{ij}e^{(i)}$ (per $i, j = 1, ..., t$).
Per $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$ e per $i, j \in \{1, ..., t\}$ consideriamo l'elemento in $\tilde{\mathcal{A}}$ della forma $e^{(i)}\tilde{a}e^{(j)}$: un siffatto elemento lo chiamiamo "elemento del tipo (ij)". Per il Teorema 2.3.3 gli elementi di questa forma o sono nulli oppure forniscono un'equivalenza da $\mathcal{I}_i$ a $\mathcal{I}_j$.
In generale il prodotto tra due elementi del tipo (hk) e (lm), per h, k, l, m in $\{1, ..., t\}$, è sempre nullo per $k \neq l$ e, per $k = l$, è del tipo (hm). Inoltre, se $\tilde{a} \in \mathcal{I}_i$ con i fissato, allora $\tilde{a} = \tilde{a}e^{(i)}$ e quindi $e^{(h)}\tilde{a}e^{(k)} = 0$ per $k \neq i$ ($i, h, k \in \{1, ..., t\}$). Inoltre, grazie alla Proposizione 2.3.4, sappiamo che gli elementi del tipo (ii) con $i \in \{1, ..., t\}$ sono multipli scalari di $e^{(i)}$.
Adesso consideriamo l'ideale sinistro $\mathcal{I}_1$ e scegliamo un'equivalenza arbitraria da $\mathcal{I}_1$ a $\mathcal{I}_h$ ($h \in \{2, ..., t\}$): questa, per il Teorema 2.3.3, è generata da un elemento del tipo $(1h)$, che denotiamo con e_{1h} . Consideriamo poi l'elemento del tipo $(h1)$ corrispondente all'equivalenza inversa da $\mathcal{I}_h$ a $\mathcal{I}_1$: lo denotiamo con e_{h1} . Chiaramente l'elemento $e_{1h}e_{h1}$ è del tipo (11) e genera l'equivalenza identità da $\mathcal{I}_1$ a se stesso; perciò $e_{1h}e_{h1}$ possiamo denotarlo con e_{11} e si ha $e_{11} = e^{(1)}$. Allo stesso modo $e_{h1}e_{1h} = e_{hh} = e^{(h)}$. Ora ponia-

mo $e_{ij} := e_{i1}e_{1j}$, con $i, j \in \{1, ..., t\}$. Quest'ultimo elemento è del tipo (ij) e corrisponde all'equivalenza generata componendo un'equivalenza tra $\mathcal{I}_i$ e $\mathcal{I}_1$ con un'equivalenza tra $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_j$. Questa stessa equivalenza è data anche da $e_{ik}e_{kj} = e_{i1}e_{1k}e_{k1}e_{1j}$, con $k \in \{1, ..., t\}$. Dunque in generale per ogni $i, j, h, k = 1, ..., t$ vale

$$e_{ij}e_{hk} = \delta_{jh}e_{ik} \quad {}^*$$

Proposizione 2.5.1 *Ogni elemento del tipo (ij), con $i \neq j$ $(i, j \in \{1, ..., t\})$, è un multiplo scalare di e_{ij} . Quindi gli elementi $\{e_{ij}\}_{i,j=1,...,t}$ formano una base di $\tilde{\mathcal{A}}$.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{a}_{ij} \in \tilde{\mathcal{A}}$ un elemento del tipo (ij): allora l'elemento $e_{1i}\tilde{a}_{ij}e_{j1}$ è del tipo (11). Quindi $e_{1i}\tilde{a}_{ij}e_{j1} = \lambda e_{11}$, con $\lambda \in \mathbb{K}$, e si ha

$$\tilde{a}_{ij} = e_{ii}\tilde{a}_{ij}e_{jj} = e_{i1}e_{1i}\tilde{a}_{ij}e_{j1}e_{1j} = e_{i1}(\lambda e_{11})e_{1j} = \lambda e_{ij}$$

Ogni elemento $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$ è una somma di t^2 addendi della forma $e^{(i)}\tilde{a}e^{(j)}$ e ciascuno di essi è del tipo (ij), per $i, j \in \{1, ..., t\}$: infatti, detta e l'unità di $\tilde{\mathcal{A}}$, vale $\tilde{a} = e\tilde{a}e = (\sum_{i=1}^{t} e^{(i)})\tilde{a}(\sum_{j=1}^{t} e^{(j)}) = \sum_{i,j=1}^{t} e^{(i)}\tilde{a}e^{(j)}$. Allora, per l'espressione sopra, abbiamo

$$\tilde{a} = \sum_{i,j=1}^{t} \lambda_{ij}e_{ij}$$

da cui viene che gli elementi $\{e_{ij}\}_{i,j=1,...,t}$ formano un sistema di unità matriciali di $\tilde{\mathcal{A}}$; dunque $\tilde{\mathcal{A}}$ è isomorfo a $M_t(\mathbb{K})$.

$\square$

[*] Questa non è altro che la relazione $E_{ij}E_{hk} = \delta_{jh}E_{ik}$ scritta all'inizio del Capitolo 1.

Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema 2.5.1 ***(di Wedderburn)*** *L'ideale bilatero $\tilde{\mathcal{A}}$ è isomorfo all'algebra completa di matrici $M_t(\mathbb{K})$.*

Osservazione 2.5.1 *Nella formula che esprime la scrittura di un elemento $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$ come combinazione lineare degli elementi e_{ij} con $i, j = 1, ..., t$, se supponiamo $\tilde{a} \in \mathcal{I}_i$ per un certo $i \in \{1, ...t\}$ troviamo che esso è combinazione lineare solamente degli elementi della base che corrispondono alla i-esima colonna: $\tilde{a} = \sum_{h=1}^{t} x_{hi} = \sum_{h=1}^{t} \lambda_h e_{hi}$. Allora $\{e_{1i}, ...e_{ti}\}$ è una base di $\mathcal{I}_i$. Questo è vero per tutti gli ideali $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_t$: ciò implica che il numero t di ideali sinistri semplici linearmente indipendenti, tra loro equivalenti, che generano $\tilde{\mathcal{A}}$ è allo stesso tempo la dimensione di ognuno di questi ideali sinistri.*

Tutto ciò che abbiamo ottenuto finora vale per ogni ideale bilatero $\mathcal{A}^{(1)}, ..., \mathcal{A}^{(r)}$. Quindi ciascuno di questi $\mathcal{A}^{(i)}$, per $i \in \{1, ..., r\}$, sarà isomorfo ad un certa algebra completa di matrici $M_{t_i}(\mathbb{K})$, dove t_i è sia il numero di ideali sinistri semplici che in somma diretta generano $\mathcal{A}^{(i)}$ sia la dimensione di ciascuno di questi. Perciò arriviamo al seguente risultato:

Teorema 2.5.2 ***(di Molien)*** *L'algebra semisemplice $\mathcal{A}$ è isomorfa a una somma diretta di algebre complete di matrici.*

La dimensione di un ideale bilatero $\mathcal{A}^{(i)}$ $(i \in \{1, ..., r\})$ è dunque t_i^2 e così otteniamo

$$\sum_{i=1}^{r} t_i^2 = dim(\mathcal{A}) \qquad (\diamond)$$

Un elemento arbitrario $a \in \mathcal{A}$ si può decomporre in $a^{(1)} + ... + a^{(r)}$, dove $a^{(i)} \in \mathcal{A}^{(i)}$ per ogni $i = 1, ..., r$ e a ciascuno di questi corrisponde una matrice $M_i \in M_{t_i}(\mathbb{K})$. Quindi all'elemento a corrisponderà una matrice a blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_r \end{pmatrix}$$

dove le matrici M_i sono della forma detta sopra (per $i = 1, ..., r$). In particolare, a un elemento non nullo che appartiene a un ideale bilatero $\mathcal{A}^{(i)}$ corrisponde una matrice a blocchi che è non nulla solamente all'interno del blocco i-esimo; inoltre, all'elemento e_{jk} di un ideale sinistro $\mathcal{I}_k^{(i)}$, con $j, k \in \{1, ..., t_i\}$, corrisponde la matrice che nell'i-esimo blocco possiede la matrice elementare $E_{jk} \in M_{t_i}(\mathbb{K})$.
Estendendo la formula $\tilde{a} = \sum_{i,j=1}^{t} \lambda_{ij} e_{ij}$ trovata per un elemento appartenente ad un generico ideale bilatero, otteniamo che un elemento $a \in \mathcal{A}$, $a = a^{(1)} + ... + a^{(r)}$ si può scrivere come

$$a = \sum_{i,j=1}^{t_1} \lambda_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(1)} + \sum_{i,j=1}^{t_2} \lambda_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(2)} + \quad \ldots \quad + \sum_{i,j=1}^{t_r} \lambda_{ij}^{(r)} e_{ij}^{(r)}$$

Gli elementi $\{e_{ij}^{(k)}\}$, per ogni $k = 1, ..., r$ e per ogni $i, j = 1, ..., t_k$, formano una base della somma diretta di algebre complete di matrici a cui è isomorfa l'algebra $\mathcal{A}$. Inoltre gli stessi elementi, per ogni $k, k' = 1, ..., r$, per ogni $i, j = 1, ..., t_k$ e per ogni $l, m = 1, ..., t_{k'}$ soddisfano la relazione

$$e_{ij}^{(k)} e_{lm}^{(k')} = \delta_{kk'} \delta_{jl} \, e_{im}^{(k)}$$

Capitolo 3

L'algebra di gruppo di un gruppo finito

In questo capitolo facciamo un'ipotesi ulteriore sul campo su cui sono definiti gli spazi vettoriali: supponiamo che esso abbia caratteristica zero. Inoltre, ogni volta che parliamo di gruppo, assumiamo sempre che esso sia finito. Per brevità ometteremo i simboli dell'operazione all'interno del gruppo e della composizione di funzioni.

3.1 Moduli su un gruppo

Le prime nozioni di modulo su un gruppo sono del tutto simili a quelle relative al caso di modulo su un'algebra viste all'inizio del secondo paragrafo del capitolo precedente; tuttavia le vediamo comunque.

Definizione 3.1.1 *Sia G un gruppo. Un modulo su G, o più brevemente un G-modulo, è uno spazio vettoriale V per cui sia definita un'applicazione*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto g.v \end{aligned}$$

lineare nel secondo argomento e tale che, indicando con 1_G l'unità del gruppo

G, per ogni $g, h \in G$ e per ogni $v \in V$ valgano:

1) $1_G .v = v$;
2) $(gh).v = g.(h.v)$.

Nel seguito, per alleggerire la notazione, l'immagine di (g, v) tramite φ verrà denotata con gv al posto di $g.v$.

Definizione 3.1.2 *Sia G un gruppo e sia V un G-modulo. Un G-sottomodulo di V è un sottospazio vettoriale W di V tale che per ogni $g \in G$ e per ogni $w \in W$ si abbia $gw \in W$. In questo caso W si dice G-invariante. Inoltre, se V è non nullo e non esistono sottospazi di V diversi dal sottospazio nullo e da V stesso aventi questa proprietà, il G-modulo V è detto semplice.*

A volte ci riferiremo a un G-sottomodulo di uno spazio vettoriale V chiamandolo più sinteticamente "sottomodulo di V", nel caso in cui il gruppo G sia chiaro dal contesto.
Naturalmente il sottospazio nullo e V stesso sono G-sottomoduli di V, detti sottomoduli banali di V.

Esempio 3.1.1 *Sia G un gruppo finito di ordine n e sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, con una base $\{e_g\}_{g \in G}$ indicizzata dagli elementi di G. Definiamo la seguente applicazione:*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G \times V &\longrightarrow V \\ (g, e_h) &\longmapsto e_{gh} \end{aligned}$$

e la estendiamo per linearità su tutto lo spazio V. Essa fornisce a V una struttura di G-modulo.

Si noti che, per $g \in G$ fissato, l'applicazione φ permuta gli elementi della base $\{e_g\}_{g \in G}$.
Inoltre osserviamo che, posto $w := \sum_{g \in G} e_g$ si ha, per ogni $h \in G$:

$$hw = h(\sum_{g \in G} e_g) = \sum_{g \in G} he_g = \sum_{g \in G} e_{hg} = w \quad ^*$$

Quindi $W := Span\{w\}$ è un G-sottomodulo di V.

Definizione 3.1.3 *Sia G un gruppo e siano V, V' due G-moduli. Un omomorfismo di G-moduli è un omomorfismo di spazi vettoriali $f : V \longrightarrow V'$ tale che $f(gv) = gf(v)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $v \in V$.*
Inoltre, se f è biiettiva, f si dice isomorfismo di G-moduli.

Osservazione 3.1.1 *Se G è un gruppo e f è un omomorfismo di due G-moduli V e V', allora $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono due G-sottomoduli rispettivamente di V e di V'.*

Ricordiamo che, se V è uno spazio vettoriale e W, W' sono sottospazi vettoriali di V tali che si possa scrivere $V = W \oplus W'$, la proiezione di V su W lungo W' è l'applicazione lineare $p \in End(V)$ tale che per un vettore arbitrario $v \in V$ che si scriverà in modo unico come $v = w + w'$ con $w \in W$, $w' \in W'$, vale $p(v) = w$.
E' molto facile riconoscere che $p^2 = p$, quindi p è un elemento idempotente in $End(V)$. Viceversa, se $p \in End(V)$ è idempotente e poniamo $W := Im(p)$, $W' := Ker(p)$, si ha $V = W \oplus W'$.

Teorema 3.1.1 ***(di Maschke)*** *Sia V un G-modulo e sia W un suo sottomodulo. Allora esiste un sottomodulo W' di V tale che $V = W \oplus W'$.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{W}$ un arbitrario sottospazio complementare di W in V e sia $p : V \longrightarrow V$ la proiezione di V su W lungo $\tilde{W}$. Assumendo che la caratteristica del campo $\mathbb{K}$ su cui è definito V non divida l'ordine del gruppo G, definiamo la funzione lineare $p_0 : V \longrightarrow V$, detta la "media dei coniugati di p tramite gli elementi di G":

---

* L'ultima uguaglianza viene dal fatto che l'applicazione $g \longmapsto gh$ definita in un gruppo G con h fissato, è biiettiva.

$$p_0 := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\,p\,g^{-1}$$

dove $|G|$ è l'ordine di G. Poiché W per ipotesi è un sottomodulo di V, abbiamo $gw \in W$ per ogni $w \in W$. Analogamente $g^{-1}w \in W$ per ogni $w \in W$; pertanto valgono:

$$p(g^{-1}w) = g^{-1}w, \quad g\,p\,g^{-1}w = w, \quad p_0(w) = w \qquad \forall\, w \in W$$

Di conseguenza l'immagine di p_0 contiene W e $p_{0\,|\,W} = id_W$. D'altra parte si vede facilmente che W contiene l'immagine di p_0 . Ne segue che $Im(p_0) = W$ e p_0 è idempotente in $End(V)$. Sappiamo, da quest'ultimo fatto, che $V = Im(p_0) \oplus Ker(p_0)$ cioè $V = W \oplus Ker(p_0)$. Inoltre vale $h\,p_0 = p_0\,h$ per ogni $h \in G$.†

Allora $Ker(p_0)$ è un sottomodulo di V complementare di W in quanto, per l'Osservazione 3.1.1, $Ker(p_0)$ è G-invariante.

□

Corollario 3.1.1 *Sia G un gruppo. Allora ogni modulo su G si decompone in una somma diretta di sottomoduli semplici.*

Dimostrazione. Segue dal Teorema 2.2.1, per la precisione dall'implicazione (3) ⇒ (1).

□

† Infatti:

$$h\,p_0\,h^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hg\,p\,g^{-1}h^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hg\,p\,(hg)^{-1} = p_0$$

La prima uguaglianza viene semplicemente dalla linearità di p e di p_0 per ogni $g \in G$; nella seconda abbiamo usato $(hg)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$; nella terza il fatto che l'applicazione $g \longmapsto gh$ definita in un gruppo G con h fissato, è biiettiva.

3.2 Moduli su G e su $\mathbb{K}[G]$

Sia G un gruppo. Consideriamo di nuovo il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale relativo all'Esempio 3.1.1, con una base $\{e_g\}_{g\in G}$ indicizzata dagli elementi di G. Questo viene indicato con $\mathbb{K}[G]$, ovvero

$$\mathbb{K}[G] := \{ \sum_{g\in G} \lambda_g e_g \ \mid \ \lambda_g \in \mathbb{K} \}$$

Per costruzione gli elementi e_g della base, per $g \in G$, vengono identificati con gli elementi del gruppo G, per cui per comodità scriveremo g al posto di e_g , per ogni $g \in G$.

Definizione 3.2.1 *Dati due elementi $a, b \in \mathbb{K}[G]$, siano essi $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g$, $b = \sum_{h\in G} \mu_h h$, definiamo il prodotto ab in questo modo:*

$$ab = (\sum_{g\in G} \lambda_g g)(\sum_{h\in G} \mu_h h) := \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh)$$

Il prodotto tra gli elementi di $\mathbb{K}[G]$ è quindi dato dal prodotto tra gli elementi del gruppo G. Segue dalla definizione stessa che questa operazione è bilineare; inoltre è associativa in quanto il prodotto in G è associativo; e l'unità in $\mathbb{K}[G]$ è l'unità in G. Quindi si ha la seguente

Proposizione 3.2.1 *Con l'operazione appena definita, $\mathbb{K}[G]$ risulta essere una $\mathbb{K}$-algebra associativa con unità.*

In particolare i coefficienti del prodotto ab relativi agli elementi della base formata dal gruppo G si possono trovare esplicitamente così:

$$ab = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh) = \sum_{l\in G} \xi_l \, l$$

dove

$$\xi_l = \sum_{gh=l} \lambda_g \mu_h = \sum_{g\in G} \lambda_g \mu_{g^{-1}l} = \sum_{h\in G} \lambda_{lh^{-1}} \mu_h \qquad \forall\, l \in G \qquad\qquad (\star)$$

Definizione 3.2.2 *Sia G un gruppo. L'algebra $\mathbb{K}[G]$ è detta algebra di gruppo di G o algebra gruppale di G.*

Si ha facilmente la seguente

Proposizione 3.2.2 *Sia G un gruppo e sia V un G-modulo. Allora l'applicazione*

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : \quad \mathbb{K}[G] \times V &\longrightarrow V \\ (\sum_{g\in G} \lambda_g g, v) &\longmapsto \sum_{g\in G} \lambda_g g v \end{aligned}$$

fornisce a V una struttura di $\mathbb{K}[G]$-modulo. Viceversa, se V è un $\mathbb{K}[G]$-modulo, allora la restrizione dell'azione data da $\hat{\varphi}$ agli elementi di G fornisce a V una struttura di G-modulo.

Proposizione 3.2.3 *Sia G un gruppo e sia V uno spazio vettoriale. Allora un G-sottomodulo di V è anche un $\mathbb{K}[G]$-sottomodulo di V, e viceversa.*

Dimostrazione. Mostriamo solo che ogni G-sottomodulo di V è anche un $\mathbb{K}[G]$-sottomodulo di V; per dimostrare l'affermazione inversa non c'è alcuna difficoltà. Sia quindi W un G-sottomodulo su V. Allora vale $gw \in W$ per ogni $g \in G$ e per ogni $w \in W$; in breve $gW \subseteq W$ per ogni $g \in G$. Ora, per ogni $a \in \mathbb{K}[G]$, $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g$, si ha

$$aW = (\sum_{g\in G} \lambda_g g)W = \sum_{g\in G} \lambda_g g W \subseteq W$$

□

Quindi i sottomoduli di uno spazio vettoriale su un gruppo G ed i sottomoduli dello stesso sull'algebra di gruppo di G coincidono.

Proposizione 3.2.4 *Un omomorfismo di G-moduli è anche un omomorfismo di $\mathbb{K}[G]$-moduli e viceversa.*

Dimostrazione. Mostriamo soltanto che un omomorfismo di G-moduli è anche un omomorfismo di $\mathbb{K}[G]$-moduli, data la facilità della dimostrazione. Siano V, V' due G-moduli e sia $f : V \longrightarrow V'$ un omomorfismo di G-moduli. Dunque vale $f(gv) = gf(v)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $v \in V$. Abbiamo, per $a \in \mathbb{K}[G]$, $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g$:

$$\begin{aligned} f(av) = f((\sum_{g\in G} \lambda_g g)v) = f(\sum_{g\in G} \lambda_g (gv)) = \sum_{g\in G} \lambda_g f(gv) = \\ = \sum_{g\in G} \lambda_g g f(v) = (\sum_{g\in G} \lambda_g g) f(v) = af(v) \end{aligned}$$

e quindi f risulta essere anche un omomorfismo di $\mathbb{K}[G]$-moduli.

□

3.3 Decomposizione di $\mathbb{K}[G]$

Adesso consideriamo il $\mathbb{K}[G]$-modulo V nel caso in cui $V = \mathbb{K}[G]$. Abbiamo quindi

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}[G] \times \mathbb{K}[G] & \longrightarrow & \mathbb{K}[G] \\ & (\sum_{g\in G} \lambda_g g \, , \sum_{h\in G} \mu_h h\ ) & \longmapsto & \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh) \end{array}$$

E' il caso dell'Esempio 3.1.1 esteso all'algebra $\mathbb{K}[G]$. Un $\mathbb{K}[G]$-sottomodulo W non è altro che un ideale sinistro di $\mathbb{K}[G]$, infatti in questo caso la scrittura $aW \subseteq W$ per ogni $a \in \mathbb{K}[G]$ è proprio la definizione di ideale sinistro. I sottomoduli semplici di $\mathbb{K}[G]$, pertanto, sono precisamente degli ideali sinistri

minimali di $\mathbb{K}[G]$.
Quindi, per il Corollario 3.1.1 al Teorema di Maschke, l'algebra di gruppo $\mathbb{K}[G]$ si decompone in una somma diretta di ideali sinistri semplici, cioè è semisemplice. Perciò, in generale, vale il seguente

Teorema 3.3.1 *L'algebra di gruppo di un gruppo finito è semisemplice.*

Da questo teorema e dal Teorema di Molien segue subito il

Teorema 3.3.2 *L'algebra di gruppo di un gruppo finito è isomorfa a una somma diretta di algebre complete di matrici.*

Di conseguenza l'algebra di gruppo $\mathbb{K}[G]$ di un gruppo G possiede tutte le proprietà che abbiamo illustrato nel Capitolo 2: essa innanzitutto si decompone in una somma diretta di r ideali bilateri minimali; ogni ideale bilatero minimale $\mathcal{A}^{(i)}$, per $i \in \{1, ..., r\}$, è una somma diretta di t_i sottomoduli semplici tutti isomorfi tra di loro, ciascuno avente dimensione t_i (essi non sono altro che gli ideali sinistri $\mathcal{I}_j^{(i)}$, per $j = 1, ..., t_i$); e questi non sono isomorfi ai sottomoduli semplici contenuti in ogni altro ideale bilatero diverso. Dunque ci sono r tipi di moduli semplici, quanti sono gli ideali bilateri minimali dell'algebra $\mathbb{K}[G]$, e la dimensione di un modulo semplice è esattamente uguale al numero di volte in cui esso compare nella decomposizione di $\mathbb{K}[G]$.

Definizione 3.3.1 *Sia G un gruppo e sia $g \in G$. La classe di coniugio di g è il seguente insieme:*

$$C_g := \{\ hgh^{-1} \ \mid\ h \in G\ \}$$

Teorema 3.3.3 *La dimensione del centro di $\mathbb{K}[G]$ è uguale al numero di classi di coniugio del gruppo G.*

Dimostrazione. Un elemento $z = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ appartiene a $\mathcal{Z}(\mathbb{K}[G])$ se e solo se per ogni $h \in G$ si ha $zh = hz$ cioè, moltiplicando entrambi i membri a sinistra per h^{-1}, vale $h^{-1}zh = z$ da cui, scrivendo l'espressione di z, si ha $\sum_{g\in G} \lambda_g(h^{-1}gh) = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ per ogni $h \in G$. Ciò vale se e solo se $\lambda_l = \lambda_{hlh^{-1}}$ per ogni $h, l \in G$, per cui otteniamo che vi è lo stesso coefficiente in corrispondenza degli elementi di G appartenenti a una medesima classe di coniugio. Denotato con m il numero di classi di coniugio del gruppo G, con $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_m$ le classi e con $e_{\mathcal{C}_i}$ la somma degli elementi di una certa classe $\mathcal{C}_i$ (con $i \in \{1, ..., m\}$), risulta che un generico elemento $z \in \mathcal{Z}(\mathbb{K}[G])$ può essere scritto nella forma $z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_{\mathcal{C}_i}$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Perciò l'insieme $\{e_{\mathcal{C}_1}, ..., e_{\mathcal{C}_m}\}$ costituisce una base del centro di $\mathbb{K}[G]$.

$\square$

Grazie al Teorema 3.3.2 sappiamo che l'algebra di gruppo $\mathbb{K}[G]$ è isomorfa a una somma diretta di algebre complete di matrici; d'altra parte per il Teorema 1.3.2 la dimensione del centro di quest'ultima somma diretta è uguale al numero di algebre complete di matrici che vi compaiono, il quale, dalla Proposizione 1.3.2, è anche uguale al numero di ideali bilateri minimali della somma diretta di algebre complete di matrici. Da tutto ciò segue che il numero di ideali bilateri minimali che in somma diretta generano l'algebra di gruppo $\mathbb{K}[G]$ è uguale al numero di classi di coniugio del gruppo G. Infine sappiamo che il numero di ideali bilateri minimali che in somma diretta generano $\mathbb{K}[G]$ è uguale al numero di moduli semplici di $\mathbb{K}[G]$, i quali, per la Proposizione 3.2.3, corrispondono ai moduli semplici del gruppo G, pertanto otteniamo anche il seguente

Teorema 3.3.4 *Il numero di moduli semplici del gruppo G è uguale al numero di classi di coniugio di G.*

Quindi se il gruppo G ha più di un elemento ci sono almeno due moduli semplici, dal momento che una classe di coniugio del gruppo è costituita solamente dalla sua unità.

Capitolo 4

Il gruppo simmetrico S_n

Questo capitolo è dedicato all'applicazione di quanto visto finora al caso del gruppo simmetrico S_n, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ arbitrariamente fissato. Per ciò che riguarda il campo su cui è definita l'algebra di gruppo di S_n si assume soltanto che esso abbia caratteristica zero.

4.1 L'algebra di gruppo di S_n

Il gruppo simmetrico S_n è il gruppo delle permutazioni di n elementi, ossia delle biiezioni tra l'insieme $\{1, ..., n\}$ e se stesso. Sappiamo che l'ordine di questo gruppo è $n!$

L'algebra di gruppo $\mathbb{K}[S_n]$ ha elementi della forma $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma$ con $\lambda_\sigma \in \mathbb{K}$ per ogni $\sigma \in S_n$. Per quanto visto nel capitolo precedente questa algebra di gruppo è semisemplice, quindi vi saranno degli elementi idempotenti che generano ideali minimali. Ci servirà la seguente

Definizione 4.1.1 *Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-algebra. Un elemento $e \in \mathcal{A}$ si dice essenzialmente idempotente se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, tale che $e^2 = \lambda e$.*

Dati $e \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ come appena sopra, troviamo immediatamente un elemento idempotente: $\frac{e}{\lambda}$. Infatti

$$\left(\frac{e}{\lambda}\right)^2 = \frac{e^2}{\lambda^2} = \frac{\lambda e}{\lambda^2} = \frac{e}{\lambda}$$

Ricordiamo che una qualsiasi permutazione σ in S_n si può scrivere come prodotto di trasposizioni e che il numero di queste ultime in una tale scrittura è sempre pari oppure sempre dispari. Perciò ha senso definire la funzione "segno" ε in S_n:

$$\varepsilon(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è prodotto di un numero pari di trasposizioni} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel seguito scriveremo ε_σ al posto di $\varepsilon(\sigma)$.
Nell'algebra di gruppo $\mathbb{K}[S_n]$ abbiamo due elementi particolari che sono essenzialmente idempotenti:

Proposizione 4.1.1 *La somma di tutte le permutazioni in S_n , $P := \sum_{\sigma\in S_n} \sigma$, e la somma di tutte le permutazioni in S_n precedute dal loro segno, $Q := \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma\sigma$, sono essenzialmente idempotenti.*

Dimostrazione. Il fatto fondamentale è che entrambe le applicazioni $g \longmapsto gh$, $g \longmapsto hg$ definite in un gruppo G con h fissato sono biiettive. Quindi possiamo scrivere:

$$P^2 = PP = (\sum_{\sigma\in S_n} \sigma)P = \sum_{\sigma\in S_n} \sigma P = \sum_{\sigma\in S_n} P = n!\, P$$
$$Q^2 = QQ = (\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma\sigma)Q = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma(\sigma Q) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma(\varepsilon_\sigma Q) = \sum_{\sigma\in S_n} Q = n!\, Q$$

dove nella seconda espressione abbiamo usato anche il fatto che la funzione ε è un omomorfismo di gruppi da S_n a $\{1, -1\}$. Si vede allora che P e Q sono essenzialmente idempotenti, entrambi con coefficiente $\lambda = n!$

$\square$

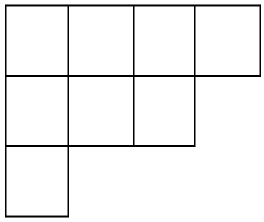
Le partizioni di n sono scomposizioni di n nella somma di numeri interi positivi; cioè, formalmente, consistono in scritture del tipo $m_1 + ... + m_r$ con $m_1, ..., m_r$ numeri interi positivi e tali che $m_1 + ... + m_r = n$. Chiaramente $r \leq n$. Consideriamo coincidenti due partizioni che hanno lo stesso insieme di numeri $\{m_1, ..., m_r\}$, ossia ogni partizione è unica a meno dell'ordine dei suoi addendi. Poiché, per ciascuna di esse, i numeri $m_1, ..., m_r$ sono fissati, possiamo supporre di disporli in ordine decrescente, in modo da avere
$m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_r$.
Sappiamo, dalla teoria del gruppo simmetrico, che il numero di classi di coniugio di S_n è uguale al numero di partizioni di n. Perciò, per quanto detto alla fine del capitolo precedente, il numero di moduli semplici di S_n è uguale al numero di partizioni di n.

Esempio 4.1.1 *Nel caso di S_3 ci sono tre moduli semplici, infatti le partizioni del numero 3 sono:* $1 + 1 + 1,\ 2 + 1,\ 3.$
Il gruppo simmetrico S_4 ha invece cinque moduli semplici, poiché le partizioni del numero 4 sono: $1 + 1 + 1 + 1,\ 2 + 1 + 1,\ 2 + 2,\ 3 + 1,\ 4.$

4.2 I simmetrizzatori di Young

Definizione 4.2.1 *Si chiama diagramma di Young di una partizione $m_1 + ... + m_r$ di n il diagramma formato da una riga di m_1 celle, una riga di m_2 celle, ..., una riga di m_r celle disposte ordinatamente una sotto l'altra e allineate tutte a sinistra.*

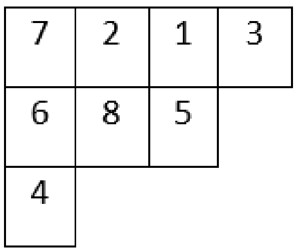
Esempio 4.2.1 *Per $n = 8$ il diagramma di Young relativo alla partizione $4 + 3 + 1$ è*



Un diagramma di Young è dunque formato da n celle. Il fatto che i numeri $m_1, ..., m_r$ siano disposti in ordine decrescente implica che non solo le righe del diagramma di Young abbiano lunghezza decrescente scorrendo dall'alto verso il basso, ma anche le colonne, andando da sinistra verso destra, hanno la stessa proprietà.

Definizione 4.2.2 *Si chiama tableau di Young, o più semplicemente tableau, un diagramma di Young in cui all'interno di tutte le n celle vi è un numero tra 1 e n, e ciascun numero compare una e una sola volta.*

Esempio 4.2.2 *Sia di nuovo $n = 8$. Un tableau di Young relativo alla partizione $4 + 3 + 1$ è*



Per ogni tableau di Young vi sono due particolari tipi di permutazioni: quelle che lasciano invariati gli elementi in tutte le sue righe (ovvero tali che ciascun numero in una certa riga, dopo l'azione della permutazione, rimane nella stessa) e quelle che lasciano invariati gli elementi in tutte le sue colonne.

Chiamiamo le prime "permutazioni orizzontali" (il cui insieme viene indicato con $\mathcal{P}$) e le seconde "permutazioni verticali" (il cui insieme viene indicato con $\mathcal{Q}$). E' facile osservare che entrambe formano un sottogruppo di S_n . Adesso definiamo gli oggetti che ci permetteranno di arrivare a costruire un sistema di unità matriciali nell'algebra di gruppo $\mathbb{K}[S_n]$.

Definizione 4.2.3 *Sia T un tableau di Young. Poniamo, in $\mathbb{K}[S_n]$:*

$$P := \sum_{p \in \mathcal{P}} p \quad ; \qquad Q := \sum_{q \in \mathcal{Q}} \varepsilon_q q \quad ; \qquad e := PQ$$

L'elemento e si chiama simmetrizzatore di Young associato a T.

Esempio 4.2.3 *Sia $n = 5$ e consideriamo il tableau*

1	3
2	5
4	

Allora, denotando con 1 la permutazione identità, abbiamo

$$P = (13) + (25) + 1$$

$$Q = -(12) - (14) - (24) + (124) + (142) - (35) + 1$$

$$e = ((13) + (25) + 1)(-(12) - (14) - (24) + (124) + (142) - (35) + 1)$$

Dato che le permutazioni orizzontali e verticali formano ciascuna un gruppo e le applicazioni $g \longmapsto gh$, $g \longmapsto hg$ definite in un gruppo G con h fissato sono biiettive, si ha immediatamente la seguente

Proposizione 4.2.1 *Sia T un tableau di Young. Per ogni permutazione orizzontale p e per ogni permutazione verticale q valgono:*

$$Pp = pP = P\ ; \qquad qQ = Qq = \varepsilon_q Q \qquad \textit{da cui} \qquad peq = \varepsilon_q e$$

Possiamo pensare a un tableau T come a un'applicazione biiettiva che ad ogni cella del diagramma di Young corrispondente associa un numero tra 1 e n. Cioè, se denotiamo con $C(m)$ l'insieme delle celle del diagramma di Young, si può scrivere $T : C(m) \xrightarrow[su]{1-1} \{1, ..., n\}$.
Consideriamo ora una permutazione σ in S_n : essa agisce sul tableau T permutando i numeri all'interno delle celle; così la permutazione σ applicata al tableau T è la funzione composta $\sigma \circ T$ evidentemente biiettiva. Indichiamo quest'ultima più brevemente con σT.
Fissato un tableau T, ad ogni permutazione σ di $\{1, ..., n\}$ corrisponde una permutazione σ_T delle celle del diagramma di Young relativo a T, che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\{1, ..., n\} \arrow[r, "\sigma"] & \{1, ..., n\} \\
C(m) \arrow[u, "T"] \arrow[r, "\sigma_T"] & C(m) \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}$$

cioè

$$T\sigma_T = \sigma T$$

ed esplicitamente:

$$\sigma_T = T^{-1}\sigma T \qquad \boxtimes$$

Siano ora σ, τ due permutazioni in S_n e sia T un tableau. Vogliamo determinare come deve essere fatta una permutazione $\alpha \in S_n$ in modo che la permutazione delle celle del diagramma di Young relativo a τT tramite α coincida con la permutazione delle celle del diagramma di Young relativo a T tramite σ. In altri termini vogliamo trovare α in S_n tale che

$$\alpha_{\tau T} = \sigma_T$$

La soluzione è trovata molto rapidamente: l'espressione ⊠ ci permette di scrivere $(\tau T)^{-1}\alpha(\tau T) = T^{-1}\sigma T$ da cui $T^{-1}\tau^{-1}\alpha\tau T = T^{-1}\sigma T$. L'applicazione T è biiettiva, quindi, moltiplicando entrambi i membri a sinistra per T e a destra per T^{-1}, otteniamo $\tau^{-1}\alpha\tau = \sigma$. Infine, moltiplicando entrambi i membri a sinistra per τ e a destra per τ^{-1}, si trova $\alpha = \tau\sigma\tau^{-1}$.
Con ciò abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione 4.2.2 *Sia T un tableau e siano σ, τ due permutazioni in S_n. Allora la permutazione delle celle associata a σ rispetto a T coincide con la permutazione delle celle associata a $\tau\sigma\tau^{-1}$ rispetto a τT.*

Proposizione 4.2.3 *Sia dato un tableau T con i corrispondenti gruppi $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ed elementi P, Q, e. Allora al tableau $T' = \tau T$, con $\tau \in S_n$, corrispondono i gruppi $\mathcal{P}' = \tau\mathcal{P}\tau^{-1}$, $\mathcal{Q}' = \tau\mathcal{Q}\tau^{-1}$ e gli elementi $P' = \tau P\tau^{-1}$, $Q' = \tau Q\tau^{-1}$, $e' = \tau e\tau^{-1}$.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente la permutazione $\sigma \in S_n$ agisce sulle celle del tableau T allo stesso modo in cui la permutazione $\tau\sigma\tau^{-1}$ agisce sulle celle del tableau $\tau T = T'$, con $\tau \in S_n$. Quindi in particolare se p è una permutazione orizzontale di T, allora $\tau p\tau^{-1}$ sarà una permutazione orizzontale di T'; e analogamente per una permutazione verticale. Dunque $\mathcal{P}' = \tau\mathcal{P}\tau^{-1}$, $\mathcal{Q}' = \tau\mathcal{Q}\tau^{-1}$ e di conseguenza, raccogliendo τ a sinistra e τ^{-1} a destra, si ha $P' = \sum_{p\in\mathcal{P}} \tau p\tau^{-1} = \tau(\sum_{p\in\mathcal{P}} p)\tau^{-1} = \tau P\tau^{-1}$. Per quanto riguarda Q', vale che τ e τ^{-1} sono entrambe pari o entrambe dispari, perciò

$\tau q \tau^{-1}$ ha lo stesso segno di q. Allora $Q' = \sum_{q \in \mathcal{Q}} \varepsilon_q \tau q \tau^{-1} = \sum_{q \in \mathcal{Q}} \tau(\varepsilon_q q)\tau^{-1}$ e a questo punto, raccogliendo come prima τ a sinistra e τ^{-1} a destra, otteniamo $Q' = \tau(\sum_{q \in \mathcal{Q}} \varepsilon_q q)\tau^{-1} = \tau Q \tau^{-1}$. Infine $e' = P'Q' = \tau P \tau^{-1} \tau Q \tau^{-1} = = \tau P Q \tau^{-1} = \tau e \tau^{-1}$.

□

Proposizione 4.2.4 *Ogni permutazione σ di S_n si può scrivere in al più un modo nella forma pq.*

Dimostrazione. Supponiamo che si possa scrivere $\sigma = pq = p_1 q_1$. Allora, dall'uguaglianza $pq = p_1 q_1$, moltiplicando ambo i membri a sinistra per p_1^{-1} e a destra per q^{-1}, segue $p_1^{-1} p = q_1^{-1} q$. Il prodotto di due permutazioni orizzontali e verticali è rispettivamente una permutazione orizzontale e verticale, quindi l'ultima espressione è un'uguaglianza tra una permutazione orizzontale ed una permutazione verticale. Ma l'unica permutazione che è contemporaneamente orizzontale e verticale è l'unità di S_n, ovvero l'identità. Dunque, denotando quest'ultima con 1, si ha $p_1^{-1} p = q_1^{-1} q = 1$ da cui $p_1 = p,\ q_1 = q$.

□

Quest'ultima proposizione implica che, per ogni tableau T, vale

$$e = PQ = (\sum_{p \in \mathcal{P}} p)(\sum_{q \in \mathcal{Q}} \varepsilon_q q) = \sum_{p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}} \varepsilon_q \, pq = \sum_{pq} \varepsilon_q \, pq$$

con gli addendi pq della somma tutti distinti tra loro. Quindi e è dato dalla somma (con opportuno segno) di tutte le permutazioni che si possono scrivere nella forma pq. Ma non tutte le permutazioni di S_n si possono scrivere in questa forma. Infatti, se per esempio consideriamo $n = 3$ e un arbitrario tableau di Young relativo alla partizione $2 + 1$, allora il gruppo delle permutazioni orizzontali ed il gruppo delle permutazioni verticali sono entrambi formati dall'identità e da una trasposizione: segue che l'insieme dei prodotti pq ha quattro elementi, dunque ci sono due permutazioni di S_3 che non si possono scrivere nel modo suddetto.

Osservazione 4.2.1 *Una permutazione della forma pq agisce su un tableau T con una permutazione orizzontale seguita da una permutazione verticale. Infatti possiamo scrivere $pq = (pqp^{-1})p$: quindi far agire pq al tableau T equivale a far agire su di esso prima la permutazione orizzontale p e poi la permutazione pqp^{-1}, che sappiamo essere verticale in quanto lo è q.*

Pertanto una permutazione della forma pq applicata ad un tableau T non agisce su quest'ultimo con una permutazione verticale seguita da una permutazione orizzontale come intuitivamente si potrebbe affermare, ma agisce in modo contrario; d'altra parte se viene fatta agire su T prima una permutazione verticale q e poi una permutazione orizzontale p, quest'ultima non agisce su qT lasciando invariati gli elementi nelle sue righe.
Dall'osservazione scritta segue subito che:

Proposizione 4.2.5 *Due numeri che si trovano in una stessa riga in un tableau T non possono trovarsi in una stessa colonna nel tableau pqT.*

Questa proprietà, inoltre, caratterizza le permutazioni della forma pq:

Proposizione 4.2.6 *Se ogni coppia di numeri che è in una stessa riga in un tableau T non si trova in una stessa colonna nel tableau σT, con σ permutazione arbitraria, allora σ è del tipo pq per T.*

Dimostrazione. L'ipotesi implica che nel tableau σT i numeri che sono nella prima colonna si trovano in righe differenti nel tableau T: quindi possiamo supporre che una permutazione orizzontale agisca su T portando questi numeri nella prima colonna di σT. Lo stesso si ha per la seconda colonna: i numeri in essa nel tableau σT si trovano in righe differenti nel tableau T, quindi consideriamo la permutazione orizzontale che agisce su T portando questi ultimi numeri nella seconda colonna di σT, e così via per tutte le colonne di σT. Una volta che, tramite la permutazione orizzontale prodotto di tutte le permutazioni orizzontali precedenti, i numeri si trovano nelle colonne corrette di σT, ci sarà una certa permutazione verticale che agisce in modo da disporre tutti i numeri nelle posizioni che occupano in σT.

$\square$

Proposizione 4.2.7 *Se una permutazione σ non è della forma pq, allora esiste una trasposizione p e una trasposizione q tali che $p\sigma q = \sigma$.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, l'ipotesi implica che esistono due numeri che si trovano in una stessa riga di T e in una stessa colonna di $T' = \sigma T$. La trasposizione τ corrispondente ai due tableaux è una permutazione orizzontale per T e una permutazione verticale per T', dunque appartiene a $\mathcal{P}$ e a $\mathcal{Q}'$. Per la Proposizione 4.2.3 si ha che τ è della forma $\sigma\tau_1\sigma^{-1}$, con $\tau_1 \in \mathcal{Q}$. Ciò in particolare significa che τ e τ_1 sono coniugate e quindi anche τ_1 è una trasposizione. Da $\tau = \sigma\tau_1\sigma^{-1}$, moltiplicando ambo i membri a sinistra per σ^{-1} e a destra per σ otteniamo $\tau_1 = \sigma^{-1}\tau\sigma$. A questo punto, per concludere la dimostrazione, basta prendere $p = \tau$ e $q = \sigma^{-1}\tau\sigma$: infatti $p\sigma q = \tau\sigma\sigma^{-1}\tau\sigma = \tau\tau\sigma = \sigma$.

$\square$

Riprendiamo l'ultima espressione scritta nella Proposizione 4.2.1: l'elemento e relativo a un tableau T è tale che $peq = \varepsilon_q e$ per ogni permutazione p, q rispettivamente orizzontale e verticale. Naturalmente ciò vale anche per tutti i multipli scalari λe di e, con $\lambda \in \mathbb{K}$. Ma vale anche il viceversa, ovvero che se un elemento arbitrario in $\mathbb{K}[S_n]$ ha questa proprietà, allora esso è un multiplo scalare di e:

Lemma 4.2.1 ***(di Von Neumann)*** *Sia T un tableau e siano p, q permutazioni rispettivamente orizzontale e verticale per T. Se un elemento $a \in \mathbb{K}[S_n]$ soddisfa la relazione*

$$paq = \varepsilon_q a \qquad \forall\, p, q$$

allora esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ *tale che* $a = \lambda e$.

Dimostrazione. Innanzitutto scriviamo $a = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma$. In questo modo la relazione nell'enunciato diventa

$$\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma p \sigma q = \varepsilon_q \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma \qquad \forall\, p, q$$

Sappiamo che $p\sigma$, per σ che varia in S_n, è S_n, e allo stesso modo $p\sigma q$, per σ che varia in S_n, è S_n. A questo punto basta far vedere che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$\lambda_\sigma = \begin{cases} \lambda \varepsilon_q & \text{se } \sigma \text{ è della forma } pq \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Un elemento $\sigma = \bar{p}\bar{q}$ compare nell'espressione scritta all'inizio, per $p = \bar{p}$ e per $q = \bar{q}$, a sinistra per $\sigma = 1$ e a destra per $\sigma = \bar{p}\bar{q}$. Quindi $\lambda_1 = \varepsilon_{\bar{q}} \lambda_\sigma$; allora possiamo prendere $\lambda = \lambda_1$.
Se invece una permutazione σ non è della forma pq allora, per la proposizione precedente, esistono due trasposizioni $\bar{p}, \bar{q}$ tali che $\bar{p}\sigma\bar{q} = \sigma$. Dunque per ogni elemento σ di questo genere, vedendo l'uguaglianza sopra per $p = \bar{p}$ e per $q = \bar{q}$, si ha $\lambda_\sigma = -\lambda_\sigma$ e quindi $\lambda_\sigma = 0$.

$\square$

Ora definiamo un certo ordinamento tra i diagrammi di Young di S_n, considerando i numeri interi positivi che contraddistinguono le partizioni di n.

Definizione 4.2.4 *Siano* m, m' *due partizioni di* n*, con interi positivi rispettivamente* $(m_1, ..., m_r)$*,* $(m'_1, ..., m'_{r'})$*. Diciamo che* $m > m'$ *se la prima differenza* $m_i - m'_i$ *è positiva (per* $i = 1, ..., r$*).*

Esempio 4.2.4 *Per* $n = 8$, *se consideriamo le partizioni* $m = (3, 3, 2)$ *e* $m' = (3, 2, 2, 1)$, *allora* $m > m'$ *in quanto la prima differenza positiva è* $3 - 2 = 1$.

Proposizione 4.2.8 *Se due tableaux* T, T' *sono relativi rispettivamente alle partizioni* m, m' *con* $m > m'$, *allora esistono due numeri che si trovano in una stessa riga di* T *e in una stessa colonna di* T'.

Dimostrazione. Supponiamo che non esistano due numeri che si trovano in una stessa riga di T e in una stessa colonna di T'. Quindi gli m_1 numeri che sono nella prima riga di T si trovano in colonne differenti di T'. Questo vuol dire che T' ha almeno m_1 colonne, ossia la prima riga di T' ha almeno m_1 celle: cioè $m'_1 \geq m_1$. Ma per ipotesi $m_1 \geq m'_1$ e quindi si ha $m'_1 = m_1$. Ora possiamo considerare una permutazione che agendo su T' porta gli m_1 numeri posti in colonne diverse tutti nella prima riga. Quindi, eliminando la prima riga da entrambi i tableaux e concentrandoci sulla seconda riga di T, per l'assunzione iniziale gli m_2 numeri che sono in essa si trovano in colonne diverse del tableau rimanente di T', ottenendo in modo analogo a prima che $m'_2 = m_2$. Continuando questo procedimento per tutte le righe di T arriviamo alla conclusione che $m = m'$, ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi.

$\square$

Proposizione 4.2.9 *Dati due tableaux* T, T', *se esistono due numeri che si trovano in una stessa riga di* T *e in una stessa colonna di* T', *allora* $Q'P = 0$ *e di conseguenza* $e'e = 0$.

Dimostrazione. La trasposizione τ dei due numeri scritti nell'ipotesi è una permutazione orizzontale per T e una permutazione verticale per T', avente segno -1. Allora, dalle uguaglianze della Proposizione 4.2.1, segue $Q'P = Q'(\tau P) = (Q'\tau)P = -Q'P$ da cui $Q'P = 0$.

$\square$

Si noti che in quest'ultima proposizione non è stata fatta alcuna assunzione sui diagrammi di Young relativi ai tableaux T e T'. Nel caso in cui i diagrammi siano diversi, comunque, la Proposizione 4.2.8 assicura che vale ancora $Q'P = 0$, con $m > m'$.

Osservazione 4.2.2 *I due tableaux T, T' della proposizione precedente sono anche tali che $PQ' = 0$.*
Infatti, utilizzando ancora le uguaglianze della Proposizione 4.2.1, possiamo scrivere $PQ' = (P\tau)Q' = P(\tau Q') = P(-Q') = -PQ'$ da cui $PQ' = 0$.

4.3 Moduli semplici generati dai simmetrizzatori

Grazie a tutto quanto visto finora abbiamo i risultati necessari per poter dimostrare il seguente teorema, che fornisce moduli semplici partendo dai tableaux.
Per brevità, se a è un elemento di $\mathbb{K}[S_n]$, denoteremo l'ideale sinistro generato da a con $\mathcal{S}a$.

Teorema 4.3.1 *Sia T un tableau. Allora il corrispondente elemento $e = PQ$ è essenzialmente idempotente e l'ideale sinistro $\mathcal{S}e$ generato da e è minimale; dunque $\mathcal{S}e$ è un $\mathbb{K}[S_n]$-modulo semplice (e quindi un S_n-modulo semplice) e la sua dimensione divide $n!$*

Dimostrazione. Innanzitutto l'elemento e è essenzialmente idempotente, infatti, utilizzando le relazioni della Proposizione 4.2.1, vediamo che soddisfa la proprietà $paq = \varepsilon_q a$ per ogni p, q:

$$pe^2q = pPQPQq = \varepsilon_q PQPQ = \varepsilon_q e^2$$

Allora, per il Lemma di Von Neumann, esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $e^2 = \lambda e$. Mostreremo qui sotto che $\lambda \neq 0$, dunque l'elemento $e^* := \frac{e}{\lambda}$ è idempotente.

Inoltre si ha che anche un elemento della forma e^*ae^*, con $a \in \mathbb{K}[S_n]$, soddisfa la proprietà sopra citata, poiché

$$p(e^*ae^*)q = \varepsilon_q \frac{PQ}{\lambda} a \frac{PQ}{\lambda} = \varepsilon_q (e^*ae^*)$$

e quindi, di nuovo per il Lemma di Von Neumann, esiste $\lambda^* \in \mathbb{K}$ tale che $e^*ae^* = \lambda^* e$. Perciò abbiamo che e^* è idempotente e, per ogni $a \in \mathbb{K}[S_n]$, e^*ae^* è un multiplo di e; allora, per la Proposizione 2.3.4, segue che e^* è primitivo. L'ideale sinistro $\mathcal{S}e^*$ generato da e^* è quindi minimale per la Proposizione 2.3.3, e ciò implica che sia minimale pure l'ideale sinistro $\mathcal{S}e$ generato da e, essendo e multiplo scalare di un elemento primitivo.
Ora vediamo che effettivamente lo scalare λ è non nullo: vogliamo mostrare questo fatto determinando la traccia dell'applicazione lineare che associa ad ogni elemento di $\mathbb{K}[S_n]$ la sua moltiplicazione a destra per l'elemento e. Intanto osserviamo che l'ideale sinistro $\mathcal{S}e$ ha dimensione almeno 1, dal momento che e è non nullo. L'applicazione considerata è tale che l'immagine è l'ideale sinistro $\mathcal{S}e$ e associa ad un elemento $ae \in \mathcal{S}e$ un suo stesso multiplo con scalare λ infatti $aee = ae^2 = a(\lambda e) = \lambda ae$. Considerando come base gli elementi di S_n e denotando con ϵ_σ le coordinate di e rispetto a questa base, le coordinate ξ_σ del prodotto di un elemento $a = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma \in \mathbb{K}[S_n]$ con e sono, per l'espressione $(\star)$ del Capitolo 3:

$$\xi_\sigma = \sum_{\tau \in S_n} \lambda_\tau \epsilon_{\tau^{-1}\sigma} \qquad \forall\, \sigma \in S_n$$

e quindi la traccia dell'applicazione rispetto alla base $\{\sigma\}_{\sigma \in S_n}$ è

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}\sigma} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_1 = n!\, \epsilon_1 = n!$$

Ora vogliamo calcolare la traccia della stessa applicazione rispetto ad una base i cui primi t vettori generano l'ideale sinistro $\mathcal{S}e$: sappiamo che questa

dovrà essere uguale a $n!$ in quanto la traccia di un endomorfismo è indipendente dalla base scelta. Abbiamo detto che l'immagine della moltiplicazione a destra per e è $\mathcal{S}e$, quindi ad un vettore arbitrario di coordinate $(\xi_1, ..., \xi_{n!})$ viene associato un vettore avente coordinate del tipo $(\xi'_1, ..., \xi'_t, 0, ...0)$ dove t è la dimensione di $\mathcal{S}e$: segue che le ultime $n! - t$ righe della matrice che rappresenta l'applicazione rispetto alla nuova base sono nulle. D'altra parte ad un vettore appartenente a $\mathcal{S}e$ viene associato λ volte se stesso; dunque nel blocco superiore a sinistra vi è la matrice unità $t \times t$ moltiplicata per λ. Allora la traccia di questa matrice è λt e dunque abbiamo $\lambda t = n!$ da cui $\lambda = \frac{n!}{t} \neq 0$.
Infine riconsideriamo come base gli elementi di $S_n :$ e, essendo la somma (con opportuno segno) del prodotto di una permutazione orizzontale e di una permutazione verticale, ha come coordinate non nulle ± 1 e quindi e^2 ha come coordinate numeri interi. Ma vale $e^2 = \lambda e$, dunque λ è un numero intero, da cui segue che t è un divisore di $n!$

□

Il prossimo teorema fornisce un criterio per stabilire l'equivalenza di due moduli semplici dati da due tableaux a seconda dei due diagrammi di Young a cui appartengono:

Teorema 4.3.2 *Due elementi e, e' sono generatori di due ideali sinistri minimali equivalenti se e solo se i due tableaux T, T' corrispondenti sono relativi a uno stesso diagramma di Young.*

Dimostrazione.

$\Leftarrow$) Se i due tableaux T, T' sono relativi a uno stesso diagramma di Young, allora esiste una permutazione $\sigma \in S_n$ tale che $T' = \sigma T$. Per la Proposizione 4.2.3 si ha $e' = \sigma e \sigma^{-1}$. A questo punto, grazie al Teorema 2.3.3, basta mostrare che esiste almeno un elemento della forma eae' non nullo, con $a \in \mathbb{K}[S_n]$. Ponendo $a = \sigma^{-1}$ abbiamo

$$eae' = e\sigma^{-1}\sigma e\sigma^{-1} = ee\sigma^{-1} = e^2\sigma^{-1} = \lambda e\sigma^{-1}$$

e l'ultimo termine è non nullo in quanto λe è non nullo e σ^{-1} è invertibile.

$\Rightarrow$) Facciamo vedere che se i due tableaux T, T' sono relativi a due diagrammi di Young differenti, allora i due ideali generati rispettivamente da e, e' non sono equivalenti. Per il Teorema 2.3.3 è sufficiente mostrare che per ogni $a \in \mathbb{K}[S_n]$ vale $eae' = 0$ o, in modo equivalente, $e'ae = 0$. Dato che gli elementi di S_n formano una base di $\mathbb{K}[S_n]$ basta far vedere che $e'\sigma e = 0$ per $\sigma \in S_n$. Per la Proposizione 4.2.9 si ha $e'e = 0$; in particolare questa uguaglianza vale anche sostituendo il tableau T con il tableau σT e quindi sostituendo l'elemento e con l'elemento $\sigma e\sigma^{-1}$. Quindi abbiamo $e'\sigma e\sigma^{-1} = 0$ da cui segue subito $e'\sigma e = 0$, moltiplicando ambo i membri a destra per σ.

$\square$

Abbiamo dunque ottenuto il seguente risultato:

Teorema 4.3.3 *A tableaux relativi ad uno stesso diagramma di Young corrispondono moduli semplici isomorfi, mentre a tableaux relativi a diagrammi di Young differenti corrispondono moduli semplici non isomorfi.*

Nel corso del Capitolo 3 abbiamo visto che l'algebra gruppale di un gruppo finito G si decompone in una somma diretta di ideali bilateri, i quali a loro volta si decompongono in una somma diretta di ideali sinistri semplici, che sono moduli semplici; questi ultimi sono isomorfi se appartengono ad uno stesso ideale bilatero, e non sono isomorfi altrimenti. Ciò vale allora anche per l'algebra di gruppo $\mathbb{K}[S_n]$. In questo caso, grazie al teorema scritto appena sopra, gli $n!$ ideali sinistri minimali generati dagli elementi essenzialmente idempotenti che corrispondono ai tableaux relativi a uno stesso diagramma di Young appartengono a uno stesso ideale bilatero. E' ovvio riconoscere che essi non sono linearmente indipendenti: teniamo presente, dal Capitolo 2, che $\mathbb{K}[S_n]$ si decompone in una somma diretta di ideali bilateri e ogni ideale bilatero è isomorfo a un'algebra completa di matrici $t \times t$ per un opportuno intero positivo t; quindi, in generale, un ideale bilatero ha dimensione t^2 e d'altra parte, per la formula $(\diamond)$ delle dimensioni scritta alla fine del capitolo, nel caso di $\mathbb{K}[S_n]$ abbiamo

$$\sum_{i=1}^{r} t_i^2 = n!$$

4.4 Tableaux standard

Definizione 4.4.1 *Un tableau T relativo ad un dato diagramma di Young si chiama standard se i numeri che occupano le sue celle sono in ordine crescente scorrendo le righe da sinistra verso destra e scorrendo le colonne dall'alto verso il basso.*

Esempio 4.4.1 *Per $n = 8$, un tableau standard relativo alla partizione $4 + 3 + 1$ è*

1	3	4	7
2	6	8	
5			

Si noti che in un tableau standard il numero 1 deve sempre occupare la cella più in alto a sinistra.
Data una partizione m di n, ciascuna sua cella si trova in una determinata riga e in una determinata colonna, perciò possiamo pensare al relativo diagramma di Young di m come ad una sorta di matrice, dove le celle sono i suoi elementi. Se una cella si trova nell'i-esima riga e nella j-esima colonna, diciamo che essa è nel posto (i, j). Naturalmente, in un tableau, gli elementi della matrice

sono i numeri all'interno delle celle.
Nel seguito, poiché ad una partizione m di n corrisponde immediatamente un ben preciso diagramma di Young, useremo m per indicare indifferentemente sia una partizione di n sia il suo relativo diagramma di Young.
Data una partizione m, definiamo tra i suoi relativi tableaux standard un ordine, detto "lessicografico":

Definizione 4.4.2 *Sia m una partizione di n e siano T, T' due tableaux standard relativi a m diversi tra loro. Scorrendo nelle varie righe i numeri in T e in T' situati nell'identica cella, diremo che $T \prec T'$ se nella prima cella dove compaiono due numeri diversi in T e in T' vi è un numero in T che è minore del rispettivo numero in T'.*

Esempio 4.4.2 *Sia $n = 8$ e siano T, T' rispettivamente i due tableaux standard*

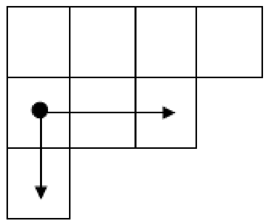
1	3	4	7
2	6	8	
5			

1	3	6	8
2	4	7	
5			

Allora $T \prec T'$ poiché la prima differenza è nella cella di posto $(1,3)$, dove in T, T' vi è rispettivamente $4, 6$ e $4 < 6$.

Definizione 4.4.3 *Sia m una partizione di n e sia $c \in C(m)$ la sua cella nel posto (i, j). Si chiama "hook length" (lunghezza dell'uncino) di c, e si denota con h_c, la somma del numero di celle che si trovano a destra di c (nella stessa riga) e del numero di celle che si trovano al di sotto di c (nella stessa colonna), incrementata di 1.*

Esempio 4.4.3 *Consideriamo al solito* $n = 8$ *e il diagramma di Young relativo alla partizione* $4+3+1$. *L' hook length della cella* c *in* $(2,1)$, *ovvero della prima cella nella seconda riga, è* $h_c = 2+1+1 = 4$, *come illustrato qui sotto.*



In generale, se denotiamo con m_i il numero di celle che si trovano nella riga i e con m'_j il numero di celle che si trovano nella colonna j, si vede facilmente che vale

$$h_c = m_i - j + m'_j - i + 1$$

Definizione 4.4.4 *Se* m *è una partizione di* n, *poniamo*

$$h_m := \prod_{c \in C(m)} h_c$$

Il prossimo teorema ci consente di calcolare il numero di tableaux standard relativi a una certa partizione di n. Seguirà un altro teorema, che fornisce i coefficienti relativi all'essenziale idempotenza dei simmetrizzatori di Young; di entrambi omettiamo la dimostrazione. Questi due teoremi, comunque, non svolgeranno alcun ruolo rilevante nel seguito.

Teorema 4.4.1 *Sia m una partizione di n. Il numero di tableaux standard relativi a m, denotato con St_m , è dato dalla seguente formula ("hook length formula"):*

$$St_m = \frac{n!}{h_m}$$

Esempio 4.4.4 *Sia $n = 8$. Dalla formula appena scritta, per calcolare il numero di tableaux standard relativi alla partizione $4 + 3 + 1$ dobbiamo determinare gli hook length relativi ad ogni cella del corrispondente diagramma di Young. Per farlo è comodo riempire ogni cella di quest'ultimo inserendovi il valore dell' hook length della stessa: in questo modo otteniamo*

6	4	3	1
4	2	1	
1			

Allora il numero di tableaux standard relativi alla partizione $4 + 3 + 1$, applicando la formula, è

$$St_{4+3+1} = \frac{8!}{6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 70$$

D'ora in avanti indichiamo l'elemento e relativo a un tableau T con e_T .

Teorema 4.4.2 *Dato un tableau T relativo al diagramma di Young m, l'elemento e_T è tale che $e_T^2 = h_m e_T$.*

Da questo teorema segue subito che l'elemento $\frac{e_T}{h_m}$ è idempotente.

4.5 Simmetrizzatori di Young a due indici

Definizione 4.5.1 *Se T è un tableau relativo al diagramma di Young m, poniamo*

$$e_{TT} := \frac{e_T}{h_m}$$

Se U è un tableau relativo allo stesso diagramma di Young a cui appartiene il tableau T, indichiamo con $S_{U,T}$ la permutazione in S_n che trasforma il tableau T nel tableau U.
E' immediato riconoscere che se $S \in S_n$ trasforma il tableau T nel tableau U, allora S^{-1} trasforma il tableau U nel tableau T. Perciò $S_{U,T}^{-1} = S_{T,U}$.
E' altrettanto chiaro il fatto che se T, U, V sono tre tableaux relativi ad uno stesso diagramma di Young, allora la composizione tra $S_{V,U}$ e $S_{U,T}$ trasforma il tableau T nel tableau V. In simboli $S_{V,U}\, S_{U,T} = S_{V,T}$.

Proposizione 4.5.1 *Siano T, U, V tre tableaux relativi ad uno stesso diagramma di Young. Allora vale*

$$e_{TT}\, S_{T,U} = S_{T,V}\, e_{VV}\, S_{V,U} = S_{T,U}\, e_{UU}$$

Dimostrazione. Sappiamo che se S è la permutazione in S_n che trasforma il tableau U nel tableau T, cioè tale che $T = S\,U$, allora $e_T = S\, e_U\, S^{-1}$, da cui segue facilmente $e_{TT} = S_{T,U}\, e_{UU}\, S_{U,T}$. Moltiplicando a destra entrambi i membri per $S_{T,U}$ otteniamo $e_{TT}\, S_{T,U} = S_{T,U}\, e_{UU}$ e così abbiamo mostrato l'uguaglianza tra il primo e il terzo membro dell'espressione scritta nell'enunciato. Inoltre, utilizzando anche quanto trovato appena prima:

$$S_{T,U}\, e_{UU} = S_{T,U}\, (S_{U,V}\, S_{V,U})\, e_{UU}\, (S_{U,V}\, S_{V,U}) =$$

$$= (S_{T,U}\, S_{U,V})\, (S_{V,U}\, e_{UU}\, S_{U,V})\, S_{V,U} = S_{T,V}\, e_{VV}\, S_{V,U}$$

e con ciò abbiamo ottenuto l'uguaglianza tra il secondo e il terzo membro dell'espressione scritta nell'enunciato.

□

Definizione 4.5.2 *Le tre scritture equivalenti dell'ultima proposizione vengono denotate con* e_{TU} *.*

Proposizione 4.5.2 *Se* T, U *sono due tableaux relativi ad una stessa partizione di* n*, allora* e_{TU} *è non nullo.*

Dimostrazione. Direttamente dall'ultima proposizione abbiamo $e_{TU} = e_{TT}\, S_{T,U} = S_{T,U}\, e_{UU}$. Quindi l'affermazione equivale al fatto che $e_{TT}\, S_{T,U}$ è non nullo. Questo è vero, in quanto e_{TT} è non nullo e $S_{T,U}$, essendo una permutazione, è invertibile: se per assurdo fosse $e_{TT}\, S_{T,U} = 0$ allora, moltiplicando entrambi i membri a destra per $S_{U,T}$, avremmo $e_{TT} = 0$ ma sappiamo che ciò non è vero.

□

In generale, se T è un tableau relativo ad una partizione m, indichiamo con P_T, p_T rispettivamente il sottogruppo di S_n delle permutazioni orizzontali relative a T e una qualsiasi permutazione orizzontale ad esso relativa; in maniera analoga faremo per le permutazioni verticali relative a T, introducendo le notazioni Q_T, q_T.

Teorema 4.5.1 *Siano* T, U *due tableaux relativi alla partizione* m *e siano* T', U' *due tableaux relativi alla partizione* m'*. Valgono le seguenti affermazioni:*

(1) *Se* $m \neq m'$ *allora* $e_{TU}\, e_{T'U'} = 0$.

(2) *Se* $m = m'$ *allora* $e_{TU}\, e_{T'U'} = \lambda_{UT'}\, e_{TU'}$ *con* $\lambda_{UT'} \in \{0, 1, -1\}$.

Dimostrazione. (1) Possiamo avere due casi: $m' > m$ oppure $m > m'$. Se $m' > m$ allora

$$e_{TU}\, e_{T'U'} = S_{T,U}\, e_{UU}\, e_{T'T'}\, S_{T',U'} = 0$$

in quanto, per le Proposizioni 4.2.8 e 4.2.9, segue $e_{UU}\, e_{T'T'} = 0$ dato che esistono due numeri che si trovano in una stessa riga di T' e in una stessa colonna di U.
Se invece $m > m'$, vediamo che anche in questo caso il prodotto $e_{UU}\, e_{T'T'}$ è nullo. Precisamente si ha

$$e_{UU}\, e_{T'T'} = \frac{1}{h_m\, h_{m'}}\, e_U\, e_{T'} = \frac{1}{h_m\, h_{m'}}\, P_U Q_U\, P_{T'} Q_{T'} = \qquad \bullet$$

In particolare $Q_U P_{T'}$, chiaramente, è un elemento di $\mathbb{K}[S_n]$, quindi esisteranno degli scalari $\lambda_\sigma \in \mathbb{K}$ tali che $Q_U P_{T'} = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma\, \sigma$. Dunque possiamo scrivere

$$\bullet \quad = \frac{1}{h_m\, h_{m'}} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma\, P_U\, \sigma\, Q_{T'} = \frac{1}{h_m\, h_{m'}} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma\, P_U\, \sigma\, Q_{T'}\, (\sigma^{-1}\sigma) =$$

$$= \frac{1}{h_m\, h_{m'}} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma\, P_U\, (\sigma\, Q_{T'}\, \sigma^{-1})\, \sigma = \qquad \bullet\bullet$$

Per la Proposizione 4.2.3 l'elemento $\sigma Q_{T'} \sigma^{-1}$ (per $\sigma \in S_n$) è l'elemento Q relativo al tableau $\sigma T'$, il quale ha la stessa forma di T'. Ma allora abbiamo

$$\bullet\bullet \quad = \frac{1}{h_m\, h_{m'}} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma\, P_U\, Q_{\sigma T'}\, \sigma$$

Per l'Osservazione 4.2.2 vale $P_U Q_{\sigma T'} = 0$ e quindi tutti gli addendi della sommatoria sono nulli, da cui la tesi.

(2) Abbiamo

$$e_{TU}\, e_{T'U'} = S_{T,U}\, e_{UU}\, e_{T'T'}\, S_{T',U'}$$

Se esistono due numeri che si trovano in una stessa riga di T' e in una stessa colonna di U, allora si ha $e_{UU}\, e_{T'T'} = 0$ che implica $e_{TU}\, e_{T'U'} = 0$.
Nel caso in cui non vi sia alcuna coppia siffatta di numeri, il tableau U sarà ottenibile dal tableau T' tramite una certa permutazione in S_n : questa, per definizione, è $S_{U,T'}$. Per la Proposizione 4.2.3 sappiamo che $e_U = S_{U,T'}\, e_{T'}\, S_{T',U}$ e per la Proposizione 4.2.7 sappiamo che $S_{U,T'}$ è del tipo pq per T', cioè $S_{U,T'} = p_{T'} q_{T'}$. Allora

$$\begin{aligned} e_{UU}\, e_{T'T'} = S_{U,T'}\, e_{T'T'}\, S_{T',U}\, e_{T'T'} = S_{U,T'}\, \frac{P_{T'}Q_{T'}}{h_{m'}}\, S_{T',U}\, \frac{P_{T'}Q_{T'}}{h_{m'}} = \\ = \frac{1}{h^2_{m'}}\, S_{U,T'}\, P_{T'}\, Q_{T'}\, q^{-1}_{T'}\, p^{-1}_{T'}\, P_{T'}\, Q_{T'} = \frac{1}{h^2_{m'}}\, S_{U,T'}\, P_{T'}\, (Q_{T'}\, q^{-1}_{T'})\, (p^{-1}_{T'}\, P_{T'})\, Q_{T'} = \\ = \frac{1}{h^2_{m'}}\, S_{U,T'}\, P_{T'}\, (\varepsilon_{q^{-1}_{T'}}\, Q_{T'})\, (P_{T'})\, Q_{T'} = \frac{1}{h^2_{m'}} \varepsilon_{q^{-1}_{T'}}\, S_{U,T'}\, (P_{T'}\, Q_{T'})\, (P_{T'}\, Q_{T'}) = \\ = \varepsilon_{q^{-1}_{T'}}\, S_{U,T'}\, \frac{(P_{T'}\, Q_{T'})^2}{h^2_{m'}} = \varepsilon_{q^{-1}_{T'}}\, S_{U,T'}\, e^2_{T'T'} = \varepsilon_{q^{-1}_{T'}}\, S_{U,T'}\, e_{T'T'} \end{aligned}$$

Quindi l'espressione scritta all'inizio, utilizzando tra l'altro la Proposizione 4.5.1, diventa

$$e_{TU}\, e_{T'U'} = \varepsilon_{q^{-1}_{T'}}\, (S_{T,U}\, S_{U,T'})\, e_{T'T'}\, S_{T',U'} = \varepsilon_{q^{-1}_{T'}}\, S_{T,T'}\, e_{T'T'}\, S_{T',U'} = \varepsilon_{q^{-1}_{T'}}\, e_{TU'}$$

e il termine $\varepsilon_{q^{-1}_{T'}}$ può valere 1 o -1, a seconda del segno della permutazione $q^{-1}_{T'}$.

□

Data una partizione m di n, avremo $(n!)^2$ scalari che vengono dalla relazione scritta nell'affermazione (2) del teorema appena dimostrato: essi in generale sono $\lambda_{TU} \in \mathbb{K}$, con T, U tableaux relativi alla partizione m. Possiamo pensarli come elementi di una matrice $n! \times n!$ indicizzata dai tableaux. Allo scopo di studiare queste matrici introduciamo un ordine tra le partizioni di un intero positivo n, detto "di dominanza":

Definizione 4.5.3 *Siano $m = (m_1, ..., m_r)$, $m' = (m'_1, ..., m'_{r'})$ due partizioni di n. Si dice che m domina m', e si scrive $m \trianglerighteq m'$, se ciascuna somma parziale di m è maggiore o uguale della rispettiva somma parziale di m', cioè*

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \ \geq \ \sum_{i=1}^{k} m'_i \qquad \forall\, k = 1, ..., max\{r, r'\}\,.$$

Se $r < r'$, per gli indici i tali che $r < i \leq r'$, si pone $m_i = 0$. Analogamente, se $r' < r$, si pone $m'_i = 0$ per gli indici i tali che $r' < i \leq r$.

In questo caso si dice anche che m' è dominata da m e si scrive $m' \trianglelefteq m$.

Osservazione 4.5.1 *L'ordine appena definito non è totale, ma parziale. Infatti, consideriamo per esempio $n = 6$ e le partizioni $m = (3, 1, 1, 1)$, $m' = (2, 2, 2)$. Le prime somme parziali sono rispettivamente $3, 2$ e forniscono $3 \geq 2$, mentre le terze somme parziali sono rispettivamente $5, 6$ e forniscono $5 \leq 6$. Perciò le due partizioni m, m' non sono confrontabili.*

Proposizione 4.5.3 *Siano T, T' due tableaux associati rispettivamente alle partizioni $m = (m_1, ..., m_r), m' = (m'_1, ..., m'_{r'})$ dell'intero positivo n. Siano P la somma delle permutazioni orizzontali di T e Q' la somma con segno delle permutazioni verticali di T'. Se $Q'P \neq 0$ allora $m' \trianglerighteq m$.*

Dimostrazione. L'ipotesi $Q'P \neq 0$ implica che, sia nel caso in cui $m = m'$ sia nel caso in cui $m \neq m'$, non ci sono due numeri che si trovano in una stessa riga di T e in una stessa colonna di T', dalla Proposizione 4.2.9. Perciò i numeri che sono nella prima riga di T saranno situati in colonne diverse di T': questo implica che il numero di celle nella prima riga di T' è almeno uguale al numero di celle nella prima riga di T, cioè $m'_1 \geq m_1$. Adesso ci concentriamo sulla prima e sulla seconda riga di T contemporaneamente: i numeri che sono in ciascuna di queste due righe saranno situati in colonne diverse nel tableau T', quindi, considerando ogni colonna di quest'ultimo tableau, vi troveremo al più due numeri che si trovano sulla prima e sulla seconda colonna di T; da ciò segue che la somma del numero di celle nella prima e nella seconda riga di T' deve essere almeno uguale alla somma del numero di celle nella prima e nella seconda riga di T, per cui possiamo scrivere $m'_1 + m'_2 \geq m_1 + m_2$. Continuando il procedimento appena illustrato si trova che per ogni indice $k = 3, ..., max\{r, r'\}$ vale $m'_1 + ... + m'_k \geq m_1 + ... + m_k$ e così abbiamo ottenuto le relazioni della Definizione 4.5.3 con m' e m nell'ordine. Quindi si ha $m' \trianglerighteq m$.

$\square$

Sia T un tableau standard relativo ad una partizione m di n. Per definizione, i suoi numeri sono crescenti scorrendo le celle da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso: quindi, se prendiamo un insieme di numeri da 1 a $\hat{n}$, con $1 \leq \hat{n} < n$, essi risultano raggruppati sempre in alto a sinistra nel tableau T e pertanto formano a loro volta un tableau, un "sotto-tableau" in T. Dunque ha senso associare al tableau standard T i tableaux $T^{(1)}, T^{(2)}, ..., T^{(n)}$ ottenuti considerando progressivamente i numeri $1, 2, ..., n$ che figurano in esso. Quindi in generale il tableau $T^{(k)}$, con $1 < k \leq n$, si ottiene dal tableau $T^{(k-1)}$ aggiungendovi la cella occupata dal numero k in T e inserendovi k stesso. Chiaramente $T^{(n)} = T$. Tutti questi tableaux risultano essere standard.

Definizione 4.5.4 *Se m è una partizione di n, denotiamo l'insieme dei tableaux standard relativi a m con $Stab_m$.*

Adesso ci restringiamo a considerare gli scalari $\lambda_{TU} \in \mathbb{K}$ tali che T, U sono tableaux standard relativi ad una stessa partizione m, e chiamiamo Λ_m

la matrice così ottenuta. Cioè, in simboli, $\Lambda_m = (\lambda_{TU})_{T,U \in Stab_m}$.
Per il Teorema 4.4.1 la matrice Λ_m ha dimensione $t'_m \times t'_m$: in altri termini $\Lambda_m \in M_{t'_m}(\mathbb{K})$.
Per lo studio di queste matrici definiamo un ordine tra i tableaux standard relativi ad una stessa partizione di n che si basa sull'ordine di dominanza definito poco più indietro:

Definizione 4.5.5 *Siano T, U due tableaux standard relativi ad una stessa partizione m di n. Siano $T^{(1)}, ..., T^{(n)}$ e $U^{(1)}, ..., U^{(n)}$ le sequenze di tableaux standard associate rispettivamente a T e U. Diciamo che $T \trianglerighteq U$ se e solo se le partizioni a cui appartengono i tableaux parziali di T dominano le rispettive partizioni a cui appartengono i tableaux parziali di U: cioè, in simboli, se e solo se $m_{T^{(i)}} \trianglerighteq m_{U^{(i)}}$ per ogni $i = 1, ..., n$.*

Proposizione 4.5.4 *Siano T, U due tableaux in $Stab_m$. Se $\lambda_{TU} \neq 0$ allora $T \trianglerighteq U$.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\lambda_{TU} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{TU}\, e_{T'U'} \neq 0 \quad \forall\, T', U' \in Stab_m \quad \Rightarrow \quad e_{T'T}\, e_{UU'} \neq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_{T',T}\, e_{TT}\, e_{UU}\, S_{U,U'} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e_{TT}\, e_{UU} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e_T\, e_U \neq 0$$

e l'ultima scrittura implica, dalla Proposizione 4.2.9, che non ci sono due numeri in una stessa riga di U e in una stessa colonna di T. Ma allora, restringendo questa condizione, non ci sono due numeri siffatti in ogni tableau delle due sequenze associate: cioè non ci sono due numeri che si trovano in una stessa riga di $U^{(i)}$ e in una stessa colonna di $T^{(i)}$ per ogni $i = 1, ..., n$. Consideriamo un certo indice i fissato, $1 \leq i \leq n$: i numeri nella prima riga di $U^{(i)}$ sono dunque situati in colonne diverse di $T^{(i)}$ e quindi il numero di celle nella prima riga di $T^{(i)}$ è almeno uguale al numero di celle nella prima riga di $U^{(i)}$; indicando con $a_1^{(i)}$ e $b_1^{(i)}$ rispettivamente il numero di celle nella prima riga di $T^{(i)}$ e $U^{(i)}$ abbiamo pertanto $a_1^{(i)} \geq b_1^{(i)}$. Adesso ci concentriamo sulla prima e sulla seconda riga di $U^{(i)}$ contemporaneamente: in queste due righe, prese singolarmente, ci sono numeri che saranno situati in colonne diverse nel tableau $T^{(i)}$ e perciò la somma del numero di celle nella prima e nella seconda riga di $T^{(i)}$ deve almeno uguagliare la somma del numero di celle nella prima e nella seconda riga di $U^{(i)}$: quindi, indicando con $a_2^{(i)}$ e $b_2^{(i)}$ rispettivamente il numero di celle nella seconda riga di $T^{(i)}$ e $U^{(i)}$, avremo $a_1^{(i)}+a_2^{(i)} \geq b_1^{(i)}+b_2^{(i)}$. Ripetendo questo ragionamento considerando ogni volta una riga in più di $U^{(i)}$, fino ad esaurire il numero di righe, troviamo le relazioni della Definizione 4.5.3 relativamente alle partizioni a cui appartengono $T^{(i)}$ e $U^{(i)}$ e allora $m_{T^{(i)}} \trianglerighteq m_{U^{(i)}}$. Questo, essendo valido per ogni indice i in $\{1, ..., n\}$, permette di concludere che $T \trianglerighteq U$.

$\square$

La proposizione che segue mette in relazione l'ordine di dominanza e l'ordine lessicografico tra due tableaux standard relativi ad una stessa partizione:

Proposizione 4.5.5 *Siano T, U due tableaux appartenenti a $Stab_m$. Se $T \trianglerighteq U$ allora $T \preceq U$.*

Dimostrazione. Per ipotesi $T \trianglerighteq U$, cioè vale $m_{T^{(i)}} \trianglerighteq m_{U^{(i)}}$ per ogni $i = 1, ..., n$: più precisamente, denotando con $a_j^{(i)}$ e $b_j^{(i)}$ rispettivamente il numero di celle nella j-esima riga di $T^{(i)}$ e $U^{(i)}$, per ogni $i = 1, ..., n$ si ha

$$\begin{cases} a_1^{(i)} \geq b_1^{(i)} \\ a_1^{(i)} + a_2^{(i)} \geq b_1^{(i)} + b_2^{(i)} \\ \qquad \vdots \\ a_1^{(i)} + ... + a_{k_i}^{(i)} \geq b_1^{(i)} + ... + b_{k_i}^{(i)} \end{cases}$$

dove $k_i = max\{r_{T^{(i)}}, r_{U^{(i)}}\}$, ovvero k_i è il massimo fra il numero di righe di $T^{(i)}$ e il numero di righe di $U^{(i)}$.
Soffermiamoci sulla prima relazione, cioè $a_1^{(i)} \geq b_1^{(i)}$, per tutti gli indici i da 1

a n: se k è il primo indice tale che $a_1^{(k)} > b_1^{(k)}$, con $1 \leq k < n$, allora abbiamo $a_1^{(1)} = b_1^{(1)}, ..., a_1^{(k-1)} = b_1^{(k-1)}$ e la prima riga di $T^{(k)}$ ha una cella in più della prima riga di $U^{(k)}$, dove vi è il numero k in $T^{(k)}$ mentre invece in $U^{(k)}$ lo stesso numero è in una riga più in basso. Prima di questa cella, sia essa c, i due tableaux $T^{(k)}$ e $U^{(k)}$ coincidono, e la prima differenza fra i tableaux finali T e U sarà dunque in c, dove in U vi sarà un numero maggiore di k. Allora, secondo l'ordine lessicografico, si ha $T \prec U$.
Altrimenti, se non esiste l'indice k definito come sopra, abbiamo $a_1^{(i)} = b_1^{(i)}$ per ogni $i = 1, ..., n$ e questo implica che la prima riga dei tableaux T e U coincide. Allora in tal caso ci soffermiamo sulla seconda relazione, ossia $a_1^{(i)} + a_2^{(i)} \geq b_1^{(i)} + b_2^{(i)}$, per tutti gli indici i da 1 a n: se k è il primo indice tale che $a_1^{(k)} + a_2^{(k)} > b_1^{(k)} + b_2^{(k)}$, con $1 \leq k < n$, allora la differenza di una cella è sicuramente nella seconda riga di $T^{(k)}$ e di $U^{(k)}$, dove $T^{(k)}$ ha una cella in più rispetto a $U^{(k)}$ (per come è definita la sequenza di tableaux associata): il numero k è in quest'ultima cella in $T^{(k)}$, mentre in $U^{(k)}$ lo stesso numero è in una riga successiva. Alla fine, considerando i tableaux T e U secondo l'ordine lessicografico, la prima differenza sarà nella cella dove in T vi è il numero k: allora $T \prec U$, dal momento che nella stessa cella in U vi è un numero maggiore di k.
Se anche le seconde relazioni sono tutte uguaglianze, cioè $a_1^{(i)} + a_2^{(i)} = b_1^{(i)} + b_2^{(i)}$ per ogni $i = 1, ..., n$, allora ci soffermeremo sulle terze, dove ci sarà una prima relazione stretta (che implicherà la differenza di una cella su due terze righe di due tableaux ad un certo stesso indice delle due sequenze associate a T e U) oppure esse saranno tutte uguaglianze; e così via: con lo stesso ragionamento svolto di sopra otteniamo che, in ogni caso, vale $T \preceq U$.

$\square$

A questo punto possiamo conoscere meglio la struttura della matrice Λ_m :

Proposizione 4.5.6 *La matrice $\Lambda_m = (\lambda_{TU})_{T,U \in Stab_m}$ è triangolare superiore, con gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a* 1.

Dimostrazione. Innanzitutto gli elementi sulla diagonale principale sono tutti uguali a 1 poiché $\lambda_{TT} = 1$ per ogni tableau T. Infatti, dalla relazione dell'affermazione (2) del Teorema 4.5.1, in particolare vale $e_{TT}\, e_{TT} = \lambda_{TT}\, e_{TT}$ cioè $e_{TT}^2 = \lambda_{TT}\, e_{TT}$; ma $e_{TT}^2 = e_{TT}$ dato che e_{TT} è idempotente, quindi vale $e_{TT} = \lambda_{TT}\, e_{TT}$ e allora deve essere $\lambda_{TT} = 1$.
Siano ora $T, U \in Stab_m$. Per la Proposizione 4.5.4 abbiamo che $\lambda_{TU} \neq 0$ implica $T \trianglerighteq U$ e per la proposizione precedente abbiamo che $T \trianglerighteq U$ implica $T \preceq U$; unendo i due risultati si ha che $\lambda_{TU} \neq 0$ implica $T \preceq U$.
Segue la tesi.

$\square$

La conseguenza fondamentale di quest'ultima proposizione è che la matrice Λ_m è invertibile per ogni partizione m di n, con inversa a elementi interi. Utilizzando in generale la matrice inversa Λ^{-1} possiamo arrivare a determinare esplicitamente un sistema di unità matriciali nell'algebra gruppale del gruppo simmetrico $\mathbb{K}[S_n]$.
Data una partizione m di n, denotiamo la matrice inversa di Λ_m in questo modo: $\Lambda_m^{-1} = (\mu_{TU})_{T,U \in Stab_m}$.

4.6 Unità matriciali

Definizione 4.6.1 *Sia m una partizione di n e siano $T, U \in Stab_m$. Poniamo*

$$e_{TU}^{(m)} := \sum_{X \in Stab_m} e_{TX}\, \mu_{UX}$$

Teorema 4.6.1 *Siano m, m' due partizioni di n e siano $T, U \in Stab_m$, $T', U' \in Stab_{m'}$. Allora vale*

$$e_{TU}^{(m)}\, e_{T'U'}^{(m')} = \delta_{mm'}\, \delta_{UT'}\, e_{TU'}^{(m)}$$

Dimostrazione. Se $m = m'$ si ha

$$e_{TU}^{(m)}\, e_{T'U'}^{(m)} = (\sum_{X \in Stab_m} e_{TX}\, \mu_{UX})(\sum_{Y \in Stab_m} e_{T'Y}\, \mu_{U'Y}) =$$

$$= \sum_{X \in Stab_m} \sum_{Y \in Stab_m} e_{TX}\, e_{T'Y}\, \mu_{UX}\, \mu_{U'Y} = \quad \bullet$$

Ora $e_{TX}\, e_{T'Y} = \lambda_{XT'}\, e_{TY} = e_{TY}\, \lambda_{XT'}$, quindi

$$\bullet \quad = \sum_{X \in Stab_m} \sum_{Y \in Stab_m} e_{TY}\, \lambda_{XT'}\, \mu_{UX}\, \mu_{U'Y} =$$

$$= \sum_{Y \in Stab_m} e_{TY} \left[\sum_{X \in Stab_m} \mu_{UX}\, \lambda_{XT'} \right] \mu_{U'Y} = \quad \bullet\bullet$$

Dal momento che $\Lambda_m\, \Lambda_m^{-1} = I_{t'_m}$ vale $\sum_{X \in Stab_m} \mu_{UX}\, \lambda_{XT'} = \delta_{UT'}$, dunque

$$\bullet\bullet \quad = \sum_{Y \in Stab_m} e_{TY}\, \delta_{UT'}\, \mu_{U'Y} = \delta_{UT'} \sum_{Y \in Stab_m} e_{TY}\, \mu_{U'Y} = \delta_{UT'}\, e_{TU'}^{(m)}$$

e perciò $e_{TU}^{(m)}\, e_{T'U'}^{(m)} = \delta_{UT'}\, e_{TU'}^{(m)}$.
Se $m \neq m'$ nella scrittura sopra vi sarebbero prodotti $e_{TX}\, e_{T'Y}$ di elementi relativi a tableaux appartenenti a due partizioni diverse: per l'affermazione (1) del Teorema 4.5.1 questi prodotti sono tutti nulli, quindi $e_{TU}^{(m)}\, e_{T'U'}^{(m')} = 0$.

□

Dall'Osservazione 1.1.1 segue che gli elementi $e_{TU}^{(m)}$, al variare di $m \in P_n$ e di $T, U \in Stab_m$, sono linearmente indipendenti.
Quindi, se indichiamo con P_n l'insieme delle partizioni del numero n, ricordando che la dimensione di $\mathbb{K}[S_n]$ è $n!$ vale

$$\sum_{m \in P_n} t_m'^{\,2} \leq n! \qquad \circledast$$

Ma vale anche la disuguaglianza opposta, ovvero

$$\sum_{m \in P_n} t_m'^{\,2} \geq n! \qquad \circledast\circledast$$

Otterremo questa disuguaglianza come conseguenza di una forma debole della corrispondenza di Robinson-Schensted, che verrà presentata nel prossimo paragrafo.
Pertanto unendo le relazioni $\circledast$ e $\circledast\circledast$ otteniamo

$$\sum_{m \in P_n} t_m'^{\,2} = n!$$

da cui segue che $\{e_{TU}^{(m)}\}$, al variare di $m \in P_n$ e di $T, U \in Stab_m$, è una base di $\mathbb{K}[S_n]$ che soddisfa la relazione scritta nell'enunciato dell'ultimo teorema visto; dunque $\{e_{TU}^{(m)}\}$, per m che varia nell'insieme di partizioni di n e per T, U che variano nell'insieme di tableaux standard relativi a m, forma un sistema di unità matriciali nell'algebra gruppale del gruppo simmetrico S_n.

4.7 La corrispondenza di Robinson-Schensted

La corrispondenza di Robinson-Schensted, mediante un algoritmo, associa ad ogni permutazione di S_n una coppia ordinata di tableaux standard con n celle aventi una stessa forma. L'algoritmo, a partire da una permutazione σ, consiste nel costruire una successione $(T^{(k)}, U^{(k)})$ di coppie ordinate di tableaux standard, con k tale che $1 \leq k \leq n$, in modo che $(T^{(n)}, U^{(n)}) = (T, U)$. Vediamo qui di seguito la descrizione di esso.
Supponiamo di avere una certa permutazione σ in S_n. Prima di tutto è conveniente scriverla nella forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Consideriamo x_1 e poniamo $T^{(1)} : x_1$; $U^{(1)} : 1$. Supponendo di aver ottenuto i tableaux standard $T^{(k-1)}$ e $U^{(k-1)}$ aventi la stessa forma (con $2 \leq k \leq n$), costruiamo i tableaux $T^{(k)}$ e $U^{(k)}$. Prima costruiamo $T^{(k)}$, attraverso i seguenti tre passi:

1) Sia R la prima riga di $T^{(k-1)}$.
2) Fintanto che x_k è minore di qualche elemento nella riga R:

2a) Sostituire il più piccolo numero y maggiore di x_k in R con x_k .
2b) Porre $x_k := y$; $R :=$ riga sottostante.

3) A questo punto x_k risulta maggiore di ogni elemento di R, quindi aggiungere x_k alla fine della riga R.

Il tableau $U^{(k)}$, invece, è costruito tramite il tableau $U^{(k-1)}$ semplicemente aggiungendo a quest'ultimo il numero k in corrispondenza del posto in cui è stato aggiunto x_k al tableau $T^{(k-1)}$ dopo aver svolto i tre passi appena illustrati.
E' chiaro che il tableau $T^{(k)}$ è standard (con k tale che $2 \leq k \leq n$), per come è stato definito l'algoritmo per costruirlo. D'altra parte è altrettanto evidente il fatto che il tableau $U^{(k)}$ ha la stessa forma del tableau $T^{(k)}$, per ogni $k = 1, ..., n$; inoltre anche il tableau $U^{(k)}$ risulta essere standard.
Si nota che la corrispondenza

$$S_n \longrightarrow \bigcup_{m \in P_n} (Stab_m \times Stab_m)$$
$$\sigma \longmapsto (T, U)$$

è iniettiva: infatti, avendo ottenuto grazie all'algoritmo la coppia ordinata di tableaux standard (T, U), da quest'ultima è possibile ricavare la controimmagine, che risulta essere proprio la permutazione σ di partenza. Per ottenere questa associazione basta invertire l'algoritmo precedente. Innanzitutto poniamo $(T^{(n)}, U^{(n)}) := (T, U)$; poi, supponendo di aver ottenuto i tableaux $T^{(k)}$ e $U^{(k)}$, determiniamo x_k e i tableaux $T^{(k-1)}, U^{(k-1)}$ come segue (per k tale che $2 \leq k \leq n$). Consideriamo la posizione del numero k nel tableau $U^{(k)}$: sia (i, j). Nel tableau $T^{(k)}$ questa stessa posizione, per costruzione, sarà occupata dall'elemento che è stato aggiunto per ultimo: lo denotiamo con $T_{i,j}$. Ora l'obiettivo è eliminare $T_{i,j}$ dal tableau $T^{(k)}$; per farlo svolgiamo i seguenti tre passi, dove, per convenienza, assumiamo l'esistenza di una riga 0-esima al di sopra della prima riga di $T^{(k)}$ (che ovviamente è vuota).

1) Porre $x := T_{i,j}$ e rimuovere $T_{i,j}$ dal tableau $T^{(k)}$. Porre $R := (i-1)$-esima riga di $T^{(k)}$.
2) Fintanto che R non è la 0-esima riga di $T^{(k)}$:

2a) Sostituire il più grande numero y minore di x in R con x.
2b) Porre $x := y$; $R :=$ riga appena sopra.

3) A questo punto x è stato rimosso dalla prima riga di $T^{(k)}$, quindi porre $x_k := x$.

Si vede facilmente che il tableau $T^{(k-1)}$ è il tableau $T^{(k)}$ dopo aver eseguito su quest'ultimo l'algoritmo appena descritto e che il tableau $U^{(k-1)}$ è il tableau $U^{(k)}$ avendo rimosso in quest'ultimo il numero k. Continuando questo procedimento fino ad esaurire la successione di tableaux standard in senso contrario, otteniamo proprio gli elementi $x_1, ..., x_n$ relativi alla permutazione σ in ordine inverso.
L'iniettività della corrispondenza mostra la validità di $\circledast\circledast$.

Esempio 4.7.1 *Sia $n = 6$ e sia data la permutazione*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Eseguendo i passi del primo algoritmo illustrato si ottiene che la successione di tableaux standard

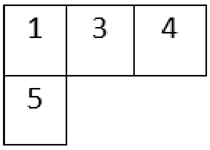
$$(T^{(1)}, U^{(1)}), (T^{(2)}, U^{(2)}), (T^{(3)}, U^{(3)}), (T^{(4)}, U^{(4)}), (T^{(5)}, U^{(5)}), (T^{(6)}, U^{(6)})$$

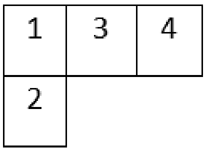
è, nell'ordine, la seguente:

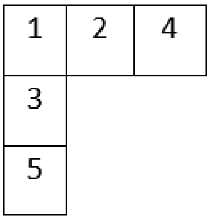
$$\begin{array}{|c|}\hline 5 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array}$$

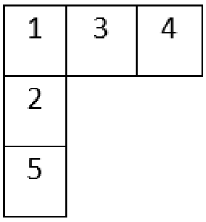
$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

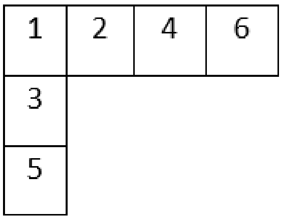
$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

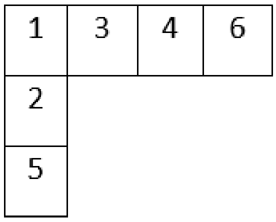












Dunque abbiamo l'associazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & & & \\ 5 & & & \end{matrix} & , & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & & & \\ 5 & & & \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Infine si può verificare che, svolgendo i passi del secondo algoritmo scritto, troviamo esattamente l'associazione inversa.

Bibliografia

[1] Boerner, Hermann (1963), *“Representations of groups - with special consideration for the needs of modern physics”*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

[2] Dieudonné, Jean A.; Carrell, James B. (1971), *“Invariant theory, old and new”*, Academic Press, New York-London.

[3] Sagan, Bruce E. (2001), *“The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions” (Second Edition)*, Springer-Verlag, New York.

[4] Serre, Jean-Pierre (1977), *“Linear Representations of Finite Groups”*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.