Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

SOLUZIONI CONTINUE DI EQUAZIONI LINEARI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alberto Parmeggiani

Presentata da:
Marcello Malagutti

Sessione Estiva
Anno Accademico 2017-2018

A tutte le persone che mi hanno accompagnato
nel percorso formativo,
con affetto e fiducia, ma anche con severità e rigore,
permettendomi di crescere e maturare
per affrontare questo cammino ...

Introduzione

Nella presente tesi verrà esposto il metodo risolutivo per la *determinazione di soluzioni continue di equazioni lineari a coefficienti continui* proposto da Charles Fefferman nell'articolo ***Continuous Solutions of Linear Equations*** [1].

Inizieremo dalla formalizzazione del problema, evidenziando come la situazione più complessa si abbia qualora il *sistema di equazioni sia indeterminato* e il *rango della matrice associata sia variabile* ed in particolare quando sia presente *una sola equazione*, ovvero un solo vicolo, *in più variabili*: questo è il caso che verrà risolto nella trattazione di questa tesi. Per altro, giunti al termine, risulterà intuitivo come il metodo elaborato potrà essere estrapolato a un sistema di equazioni andando a considerare funzioni vettoriali al posto di funzioni a valori reali.

Proseguiremo poi con la presentazione di prerequisiti teorici basilare per la chiarezza espositiva dello svolgimento seguente. In dettaglio introdurremo il concetto di *fibrato* con definizioni associate e le nozioni di r*affinamento di Glaeser* e di *cubo di Whitney* per entrambe delle quali forniremo definizioni ed enunciazione e dimostrazione di risultati inerenti, con particolare attenzione al *Lemma di stabilità* e al *Lemma di esistenza di sezioni* per il raffinamento di Glaeser.

Affronteremo quindi la trattazione formale del metodo risolutivo in oggetto iniziando con considerazioni sulla regolarità delle soluzioni a fronte di proprietà di regolarità delle funzioni che compaiono nell'equazione.
Passeremo poi a discutere la possibilità di determinare a priori l'*esistenza di soluzioni continue*. A tal fine introdurremo una nuova formulazione del problema in oggetto, ovvero una *formulazione in termini di fibrati*, così che

la determinazione dell'esistenza di soluzione si tradurrà nella determinazione dell'*esistenza di sezione* di un fibrato.
A quanto sopra faremo seguire il calcolo delle soluzioni, svolgendo i conti con riferimento alla formulazione del *problema in termini di fibrati*. Inizieremo mostrando come passare da un fibrato dato ai suoi *raffinamenti di Glaeser iterati* mediante formule che implicheranno passaggi al limite iterati. Poi, facendo ricorso alla nozione di *cubi di Whitney*, forniremo ulteriori formule per il calcolo della sezione di un dato fibrato "stabile" per raffinamento di Glaeser (ovvero coincidente con il suo stesso raffinamento di Glaeser) a fibre non-vuote. Questi risultati insieme ci permetteranno di calcolare la sezione di un qualsiasi dato fibrato per il quale la sezione esista.
Concluderemo quindi la trattazione formale con una discussione sulla determinazione di soluzioni continue del problema nel caso generale e fornendo una procedura riassuntiva del metodo risolutivo proposto.

Presenteremo infine alcuni esempi applicativi del metodo sviluppato. Con maggior dettaglio, risolveremo alcune equazioni di complessità crescente per poi concludere con un caso in cui, non essendo soddisfatti i prerequisiti richiesti, il metodo permette di constatare la non esistenza di soluzioni continue, comprovando così anche sul piano pratico la necessità delle ipotesi assunte nell corso della trattazione teorica.

Indice

Capitolo 1

Formulazione del problema

Il problema, di cui in questa tesi si presenta il metodo risolutivo proposto da Charles Fefferman [1], può essere formalizzato come segue:

Formulazione del problema: Si consideri un *sistema di equazioni lineari*

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$$

dove gli elementi

$$\mathbf{A} = (a_{ij}(x_i, \dots, x_n)) \quad e \quad \mathbf{b} = (b_i(x, \dots, x_n))$$

sono *funzioni continue in* $\mathbb{R}^n$.
Il quesito che ci si pone è se il sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$ ammetta una *soluzione*

$$\mathbf{y} = (y_j(x_i, \dots, x_n))$$

nella quale gli $y_j(x_i, \dots, x_n)$ sono anch'essi *funzioni continue in* $\mathbb{R}^n$.

In vero, nel corso della trattazione, si scoprirà come il metodo risolutivo proposto sia tanto potente da poter dare soluzione anche a un *quesito più generale* rispetto a quello qui sopra formulato ovvero:

Formulazione del problema generalizzato: Considerato il sistema di equazioni lineari $\mathbf{A}y = \mathbf{b}$, se gli elementi a_{ij} e b_i presentano una qualche *proprietà di regolarità*, il sistema ammette una *soluzione*

$$\mathbf{y} = (y_j(x_i, \ldots, x_n))$$

nella quale gli $y_j(x_i, \ldots, x_n)$ presentano *proprietà di regolarità analoghe* (o *lievemente più deboli*)?

Va notato che sussistono due casi in cui la risposta è immediata:

- Se $\mathbf{A}$ è *invertibile su di un sottoinsieme denso aperto* $U \subset \mathbb{R}^n$, allora $y = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ su U. Ne consegue che in questo caso condizione necessaria e sufficiente affinché esista una soluzione continua è che $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ si estenda in modo continuo su $\mathbb{R}^n$.

- Se rank $\mathbf{A}$ è *costante su* $\mathbb{R}^n$ il problema può essere risolto nell'ambito dell'algebra lineare standard.

Al contrario, nel caso il *sistema sia indeterminato* e il *rango di* $\mathbf{A}$ sia *variabile*, il problema risulta essere assai delicato: il caso più complesso appare essere quello in cui vi è *una sola equazione*, ovvero *un solo vincolo*, in più variabili. In tal caso il problema può essere riformulato come segue:

Formulazione del problema univincolare: Siano $f_1, \ldots, f_r$ *funzioni continue in* $\mathbb{R}^n$, con $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Quali *funzioni continue* ϕ possono essere scritte nella forma

$$\phi = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \, f_i$$

dove le ϕ_i siano anch'esse *funzioni continue da* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}$?
Inoltre, se ϕ e le f_i presentano alcune *proprietà di regolarità*, come si possono scegliere le ϕ_i così che presentino le *medesime (o lievemente più deboli) proprietà di regolarità*?

È quest'ultima, in verità, la formulazione considerata in [1] nell'affrontare e proporre una soluzione al problema.

Capitolo 2

Prerequisiti teorici

Nel presente capitolo andiamo a richiamare nozioni e risultati essenziali per la trattazione del metodo risolutivo oggetto di questa tesi, metodo che verrà presentato nel capitolo seguente.

2.1 I fibrati: definizioni

Il concetto di fibrato, introdotto dal matematico americano Hassler Whitney[1] nel 1935 in relazione a problemi di topologia e geometria delle varietà, è alla base di una teoria che, specie in connessione con nozioni inerenti gli spazi vettoriali, ha avuto grandi sviluppi e ha condotto alla costruzione di nuovi invarianti topologici. I fibrati risultano essere di rilevante utilità sia in topologia differenziale che in topologia algebrica e costituiscono un importante strumento nella teorie di gauge[2].

Premesso ciò, passiamo alla definizione formale di questo concetto e di altri ad esso strettamente inerenti.

Siano n e r due *numeri interi positivi* e sia Q uno *spazio metrico compatto*.

[1]**Whitney, Hassler** - Matematico (New York 1907 - Princeton 1989). Professore dal 1946 alla Harvard University e dal 1952 all'Univ. di Princeton. Studioso di topologia, alla quale ha apportato importanti contributi, è uno dei fondatori della teoria degli spazi fibrati. Tra le sue opere: *Geometric integration theory* (1957).

[2]**Teorie di gauge** (o teorie di scala) - Classe di teorie di campo basate sull'ipotesi che alcune simmetrie, cioè trasformazioni che lasciano invariata la lagrangiana del sistema, siano possibili non solo globalmente, ma anche localmente.

A partire da questi assunti, si possono enunciare le seguenti definizioni:

Definizione 2.1.1. (***Fibrato affine singolare***)**:** Si definisce *fibrato affine singolare* (o semplicemente "fibrato") una famiglia $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ di sottospazi affini $H_x \subseteq \mathbb{R}^r$, parametrizzati dai punti $x \in Q$.

Definizione 2.1.2. (***Fibre***)**:** Gli spazi H_x sono detti *fibre* del fibrato $\mathcal{H}$. (In questa trattazione assumiamo l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'intero spazio $\mathbb{R}^n$ come sottospazi di $\mathbb{R}^n$).

Definizione 2.1.3. (***Sottofibrato affine singolare***)**:** Si definisce *sottofibrato affine singolare* (o semplicemente "sottofibrato") di un fibrato $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ un fibrato $\mathcal{K} = (K_x)_{x\in Q}$ tale che $K_x \subseteq H_x$ per ogni $x \in Q$.

Definizione 2.1.4. ***(Fibrato omogeneo):*** Si definisce *fibrato omogeneo* un fibrato le cui fibre sono *spazi vettoriali* (si ammettono come spazi vettoriali anche $\{0\}$ e $\mathbb{R}^r$, ma non $\emptyset$).

Definizione 2.1.5. (***Sezione***)**:** È detta *sezione* di un fibrato $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ una mappa continua $f : Q \to \mathbb{R}^r$ tale che $f(x) \in H_x$ per ogni $x \in Q$.

2.2 Il raffinamento di Glaeser

Introduciamo ora una nozione strettamente legata a quella di fibrato, ovvero la nozione di *raffinamento di Gleaser*. Ne forniremo prima la definizione per poi presentare alcuni risultati ad essa correlati e di rilevanza per il problema oggetto di questa tesi.

Iniziamo introducendo alcune notazioni.

Notazioni:

1. Considerato $H \subset \mathbb{R}^r$ sottospazio affine e un vettore $v \in \mathbb{R}^r$, adottiamo per i *traslati* $\{w - v : w \in H\}$ e $\{w + v : w \in H\}$ la seguente notazione:
$$H - v := \{w - v : w \in H\}, \tag{2.2.1}$$
$$v + H := \{w + v : w \in H\}. \tag{2.2.2}$$

2. Ogni fibrato $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ è scrivibile nella forma seguente:

$$\mathcal{H} = (v(x) + H_x^0)_{x\in Q}, \tag{2.2.3}$$

dove $\mathcal{H}^0 = (H_x^0)_{x\in Q}$ è un fibrato omogeneo e $v(x) \perp H_x^0$ per ogni $x \in Q$.

Queste notazioni saranno utilizzata nel corso di tutto lo svolgimento della presente tesi.

2.2.1 Definizione di raffinamento di Glaeser

Assunto: Su $\mathbb{R}^r$ è definita una *metrica euclidea* indotta dal *prodotto scalare standard.*

Definizione 2.2.1. (*Raffinamento di Glaeser*): Sia $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ un fibrato con $H_x \subset \mathbb{R}^r$ e $\dim H_r^0 \leq r$, $\forall x \in Q$. Si definisce *raffinamento di Glaeser di $\mathcal{H}$* il fibrato $\mathcal{H}^1 = (H_x^1)_{x\in Q}$ tale che, per ogni $x \in Q$,

$$H_x^1 = \left\{ \lambda \in H_x : \ \mathrm{dist}(\lambda, H_y) \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0, \ y \in Q \right\}. \tag{2.2.4}$$

Da questa definizione discendono immediatamente le seguenti due proposizioni:

Proposizione 2.2.2. *$\mathcal{H}^1$ è un sottofibrato di $\mathcal{H}$.*

Dimostrazione. Per definizione di sottofibrato, affinché $\mathcal{H}^1$ sia sottofibrato di $\mathcal{H}$ deve essere verificato che:

1. *$H_x^1 \subset H_x$ per ogni $x \in Q$:* questo fatto discende in modo immediato dalla (2.2.4);

2. *H_x^1 è uno spazio affine per ogni $x \in Q$:* per provare ciò, adottando la notazione (2.2.3), scriviamo $\mathcal{H}^1$ come segue

$$\mathcal{H}^1 = (v^1(x) + H_x^0)_{x\in Q},$$

dove $v^1(x)$ è un vettore della fibra H_x^1 di $\mathcal{H}^1$.
Vogliamo dimostrare che H_x^0 è uno spazio vettoriale.

A tal fine consideriamo $\lambda + v^1(x),\ \xi + v^1(x) \in H^1_x$.

(i) Mostriamo che

$$\lambda + \xi + v^1(x) \in H^1_x. \tag{2.2.5}$$

Iniziamo osservando che per definizione di distanza vale che

$$0 \leq \operatorname{dist}(\lambda + \xi + v^1(x),\ H_y). \tag{2.2.6}$$

Applicando un banale espediente matematico e ricordando la disuguaglianza triangolare della distanza si ottiene

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\lambda + \xi + v^1(x),\ H_y) &= \operatorname{dist}(\lambda + v^1(x) + \xi + v^1(x) - v^1(x),\ H_y) \ \leq \\ &\leq \underbrace{\operatorname{dist}(\lambda + v^1(x),\ H_y)}_{\xrightarrow[y\to x]{}0} + \underbrace{\operatorname{dist}(\xi + v^1(x),\ H_y)}_{\xrightarrow[y\to x]{}0} + \underbrace{\operatorname{dist}(v^1(x),\ H_y)}_{\xrightarrow[y\to x]{}0}.\end{aligned}$$

Osserviamo che i tre addendi che compaiono nel secondo membro della disuguaglianza tendono a 0 per $x \to y$ per la definizione stessa di raffinamento di Glaeser (2.2.4), essendo $\lambda + v^1(x),\ \xi + v^1(x), v^1(x) \in H^1_x$ per ipotesi. Si deduce, quindi, dal *teorema del confronto* che

$$\exists \quad \lim_{y\to x} \operatorname{dist}(\lambda + \xi + v^1(x), H_y) = 0.$$

La (2.2.5) resta così dimostrata.

(ii) In modo analogo si procede per dimostrare che

$$\alpha\xi + v^1(x) \in H^1_x, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Resta così dimostrato che H^0_x è uno *spazio vettoriale* e conseguentemente H^1_x è uno *spazio affine* . □

Proposizione 2.2.3. *I fibrati $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^1$ hanno le medesime sezioni.*

Dimostrazione. Consideriamo la mappa $f : Q \to \mathbb{R}^n$ *sezione di* $\mathcal{H}$.
Osserviamo che:

a) $\mathrm{dist}(f(x),\, f(y)) \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0$, essendo $f(x)$ continua per definizione di sezione;

b) $f(y) \in H_y$, per definizione di sezione.

Ne consegue che

$$\mathrm{dist}(f(x),\, H_y) = \inf_{z \in H_y} \mathrm{dist}(f(x),\, z) \leq \mathrm{dist}(f(x),\, f(y)),$$

ma, come visto in a), il secondo membro di questa disuguaglianza tende a zero per y che tende a x, quindi risulta

$$\mathrm{dist}(f(x),\, H_y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0$$

da cui si deduce che

$$f(x) \in H_x^1$$

il che implica che $f(x)$ *è anche sezione di* $\mathcal{H}^1$.

Essendo banale dimostrare che se f è sezione di $\mathcal{H}^1$ allora f è sezione di $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}^1$, ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Notiamo che a partire da un fibrato $\mathcal{H}$ se si itera la costruzione (2.2.4) si ottiene la sequenza di fibrati $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2, \cdots$, dove $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^{i+1}$ è il raffinamento di $\mathcal{H}^i$ per ogni i. Risulta, inoltre, per le Proposizioni 2.2.2 e 2.2.3, che $\mathcal{H}^{i+1}$ è sottofibrato di $\mathcal{H}^i$ e che tutti i fibrati $\mathcal{H}^i$ hanno le medesime sezioni.

2.2.2 Risultati su stabilizzazione del raffinamento di Glaeser e esistenza di sezioni

Andiamo ora a presentare due risultati basilari ai fini della presentazione del metodo risolutivo oggetto di questa tesi: il *Lemma di stabilizzazione* e il *Lemma di esistenza di sezioni* di cui forniamo subito l'enunciazione, mentre la fase dimostrativa sarà affrontata, per ciascun lemma, dopo avere introdotto nozioni e risultati necessari per le relative prove.

Lemma 2.2.4. (***Lemma di stabilizzazione***) *Sia* $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ *un fibrato con* $H_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$ *e* $\dim H_x^0 \leq r$, $\forall x \in Q$. *Si ha che*

$$\mathcal{H}^{2r+1} = \mathcal{H}^{2r+2} = \cdots .$$

Lemma 2.2.5. (***Lemma di esistenza di sezioni***) *Sia* $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ *un fibrato, con* $H_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$. *Si supponga che* $\mathcal{H}$ *sia il suo stesso raffinamento di Glaeser e che ogni fibra* H_x *sia non-vuota, allora* $\mathcal{H}$ *ha una sezione.*

2.2.2.1 Lemma di stabilizzazione

Iniziamo mostrando un risultato fondamentale per la dimostrazione del *Lemma di stabilizzazione* (Lemma 2.2.4).

Enunciato 2.2.6. Sia $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ un fibrato con $H_x \subset \mathbb{R}^r$. Si ha

$$\dim H_x^{2k+1} \geq r - k \implies H_x^l = H_x^{2k+1}, \quad \forall l \geq 2k+1. \tag{2.2.7}$$

Dimostrazione. Mostriamo la veridicità della tesi per $k \geq 0$ per induzione su k. Nel caso di $k = 0$ l'Enunciato 2.2.6 asserisce che

$$H_x^1 = \mathbb{R}^r \implies H_x^l = \mathbb{R}^r, \quad \forall l \geq 1. \tag{2.2.8}$$

Dalla definizione di raffinamento di Glaeser si deduce che

$$\dim H_x^{l+1} \leq \liminf_{y\to x} \dim H_y^l. \tag{2.2.9}$$

[*Dimostrazione della* (2.2.9). Notiamo che H_x^{l+1} può essere scritto nella forma seguente

$$H_x^{l+1} = v^{l+1}(x) + \operatorname{span}\{w_1(x), \dots, w_\nu(x)\},$$

dove

- $\nu = \dim H_x^{l+1}$,
- $\{w_1(x), \dots, w_\nu(x)\}$ è una base dello spazio tangente allo spazio affine H_x^{l+1},
- $v^{l+1}(x) \perp w_j(x), \quad 1 \leq j \leq d(x)$.

In modo analogo possiamo scrivere H_y^l come segue

$$H_y^l = v^l(y) + \operatorname{span}\{\zeta_1(y), \dots, \zeta_{d(y)}(y)\},$$

dove

– $d(y) = \dim H^l_y$,

– $\{\zeta_1(y), \dots, \zeta_{d(y)}(y)\}$ è una base dell spazio tangente allo spazio affine H^l_y,

– $v^l(y) \perp \zeta_j(y), \quad 1 \le j \le \nu$.

Abbiamo quindi, poiché sia $v^{l+1}(x) \in H^{l+1}_x$ che $v^{l+1}(x) + w_j(x) \in H^{l+1}_x$, che

$$\left| v^{l+1} - (\sum_{j=0}^{d(x)} c_{0j}(y)\zeta_j(y) + v^l(y)) \right| \xrightarrow[y \to x]{} 0$$

e

$$\left| v^{l+1} + w_k(x) - (\sum_{j=0}^{d(x)} c_{kj}(y)\zeta_j(y) + v^l(y)) \right| \xrightarrow[y \to x]{} 0.$$

Ne consegue che

$$v^{l+1} - v^l(y) = \sum_{j=0}^{d(x)} c_{0j}(y)\zeta_j(y) + o(1), \quad \text{per } y \xrightarrow{Q} x$$

e quindi

$$w_k(x) + o(1) = \sum_{j=0}^{d(x)} (c_{kj}(y) + c_{0j}(y))\zeta_j(y), \quad \text{per } y \xrightarrow{Q} x.$$

Consideriamo per tanto le due matrici

$$M_{l+1}(x) = \begin{bmatrix} w_1(x) & | & \cdots & | & w_\nu(x) & | & 0 & | & \cdots & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_l(y) = \begin{bmatrix} \zeta_1(y) & | & \cdots & | & \zeta_{d(y)}(y) & | & 0 & | & \cdots & | & 0 \end{bmatrix}$$

entrambe $r \times r$, di rango pari la prima a ν e la seconda a $d(y)$.

Abbiamo quindi per $o(1)$ nella categoria delle matrici $r \times r$,

$$M_{l+1}(x) + o(1) = M_l(y)\, C(y)$$

(con ovvia notazione per la matrice $r \times r$ $C(y)$ la cui generica k-esima colonna per $1 \le k \le \nu$ è $\begin{bmatrix} c_{k1}(y) + c_{01}(y) \\ \vdots \\ c_{kd(y)}(y) + c_{0d(y)}(y) \end{bmatrix}$, mentre per $\nu + 1 \le k \le r$ è il vettore colonna nullo).

Deduciamo, perciò, che

$$\begin{aligned} \nu = \operatorname{rank} M_{l+1}(x) \le \operatorname{rank}(M_{l+1}(x) + o(1)) \le \\ \le \operatorname{rank} M_l(y), \qquad \forall y \text{ vicino a } x \end{aligned}$$

il che prova che

$$\dim H_x^{l+1} = \nu \leq \liminf_{y\to x} d(y) = \liminf_{y\to x} \dim H_y^l.$$

$\square$]

Si ha quindi che, se $H_x^1 = \mathbb{R}^r$, allora $H_y^0 = \mathbb{R}^r$ per tutti gli y in un intorno di x. Ne consegue che

$$H_y^l = \mathbb{R}^r, \qquad \forall y \text{ in un intorno di } x,\ \forall l \geq 0.$$

Ciò prova l'Enunciato 2.2.6 nel caso base in cui sia $k = 0$.

Per il passo induttivo fissiamo k e assumiamo vero l'Enunciato 2.2.6 per tutti gli $x \in Q$: dimostreremo che sotto queste ipotesi la (2.2.7) vale per $k+1$. A tal fine dobbiamo mostrare che

$$\dim H_x^{2k+3} \geq r-k-1 \implies H_x^l = H_x^{2k+3}, \quad \forall l \geq 2k+3. \tag{2.2.10}$$

Notiamo che se $\dim H_x^{2k+1} \geq r-k$, allora la (2.2.10) segue in modo immediato dalla (2.2.7). Quindi, nel dimostrare la (2.2.10), possiamo assumere che $\dim H_x^{2k+1} \leq r-k-1$.

Osserviamo ora che, per definizione di raffinamento di Glaeser, si ha

$$H_x^{2k+3} \subset H_x^{2k+2} \subset H_x^{2k+1}$$

e quindi

$$r-k-1 \geq \dim H_x^{2k+1} \geq \dim H_x^{2k+2} \geq \dim H_x^{2k+3},$$

da cui se $\dim H_x^{2k+3} \geq r-k-1$ ne segue

$$\dim H_x^{2k+1} = \dim H_x^{2k+2} = \dim H_x^{2k+3} = r-k-1. \tag{2.2.11}$$

Mostriamo ora che

$$H_y^{2k+2} = H_1^{2k+1}, \quad \forall y \text{ sufficientemente vicino a } x. \tag{2.2.12}$$

Procediamo, per assurdo, supponendo che la (2.2.12) sia falsa, cioè assumendo che valga

$$\dim H_y^{2k+2} \leq \dim H_y^{2k+1} - 1, \quad \text{per qualche } y \text{ arbitrariamente vicino a } x. \tag{2.2.13}$$

Per tali y, la nostra ipotesi induttiva (2.2.7) mostra che necessariamente $\dim H_y^{2k+1} \leq r - k - 1$. Perciò si ha

$$\dim H_y^{2k+2} \leq \dim H_y^{2k+1} - 1 \leq r - k - 2, \quad \text{per certi } y \text{ arbitrariamente vicini a } x.$$

Ora una nuova applicazione della (2.2.9) porta a

$$\dim H_x^{2k+3} \leq r - k - 2,$$

ma questa relazione contraddice la (2.2.11), ovvero siamo giunti ad un assurdo il che implica che l'ipotesi fatta è falsa: risulta quindi dimostrata la veridicità della (2.2.12).
Dalla (2.2.12) discende in modo immediato che

$$H_y^l = H_y^{2k+3}, \qquad \forall y \text{ sufficientemente vicino a } x,\ \forall l \geq 2k+3.$$

Questo completa il passo induttivo (2.2.10) e quindi quanto asserito nell'Enunciato 2.2.6 risulta dimostrato. □

Passiamo ora alla dimostrazione del *Lemma di stabilizzazione* (Lemma 2.2.4) di cui, per chiarezza espositiva, riproponiamo anche l'enunciato:

Lemma. (*Lemma di stabilizzazione*) *Sia* $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in Q}$ *un fibrato con* $H_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$ *e* $\dim H_x^0 \leq r$, $\forall x \in Q$. *Si ha che*

$$\mathcal{H}^{2r+1} = \mathcal{H}^{2r+2} = \cdots .$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{H}^0$, $\mathcal{H}^1$, $\mathcal{H}, \cdots$ i raffinamenti di Glaeser iterati di $\mathcal{H}$ e sia $\mathcal{H}^i = (H_x^i)_{x \in Q}$ per ogni i.
Dobbiamo dimostrare che

$$H_x^l = H_x^{2r+1}, \quad \forall x \in Q,\ \forall l \geq 2r+1. \tag{2.2.14}$$

(a) Se $H_x^{2r+1} = \emptyset$ la veridicità della (2.2.14) è ovvia.
(b) Se $H_x^{2r+1} \neq \emptyset$ la dimostrazione della (2.2.14) discende in modo immediato dalla (2.2.7). Infatti per $k = r$ otteniamo

$$\dim H_x^{2r+1} \geq 0 \implies H_x^l = H_x^{2r+1}, \quad \forall l \geq 2r+1.$$

Notiamo che l'antecedente di tale implicazione è ovviamente verificata: ne discende che la (2.2.14) risulta immediatamente vera e quindi il lemma è dimostrato. □

2.2.2.2 Lemma di esistenza di sezioni

Presentiamo alcune definizioni e risultati propedeutici alla dimostrazione del *Lemma di esistenza di sezioni* (Lemma 2.2.5).

In particolare, iniziamo introducendo la seguente notazione che discende direttamente dalla (2.2.1).

Notazione: Considerato il fibrato $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in Q}$ con $H_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$ e la mappa continua $f : Q \to \mathbb{R}^r$, adottiamo la seguente notazione:

$$\mathcal{H} - f \ := (H_x - f(x))_{x \in Q}. \tag{2.2.15}$$

Notiamo che vale quanto segue.

Proposizione 2.2.7. *Se $\mathcal{H}$ coincide con il suo stesso raffinamento di Glaeser e ha fibre non-vuote, allora questo è vero anche per $\mathcal{H} - f$.*

Dimostrazione. Per definizione di raffinamento di Glaeser (2.2.4), qualsiasi sia $x \in Q$, si ha che

$$(H_x - f(x))^1 = \left\{ \lambda \in H_x - f(x) : \ \mathrm{dist}(\lambda, H - f(y)) \xrightarrow[y \to x]{} 0, \ y \in Q \right\}.$$

Osserviamo che per la continuità della mappa f possiamo anche scrivere che

$$(H_x - f(x))^1 = \left\{ \lambda \in H_x - f(x) : \ \mathrm{dist}(\lambda, H_y - f(x)) \xrightarrow[y \to x]{} 0, \ y \in Q \right\}$$

e quindi, poiché la distanza euclidea è invariante per traslazione, vale anche

$$(H_x - f(x))^1 = \left\{ \lambda \in H_x - f(x) : \ \mathrm{dist}(\lambda + f(x), H_y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0, \ y \in Q \right\}.$$

Ponendo ora in questa uguaglianza $\lambda' := \lambda + f(x)$ si ha

$$(H_x - f(x))^1 = \underbrace{\left\{ \lambda' \in H_x : \ \mathrm{dist}(\lambda', H_y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0, \ y \in Q \right\}}_{H_x^1} - f(x)$$

che, per la (2.2.4), possiamo riscrivere come segue

$$(H_x - f(x))^1 = H_x^1 - f(x).$$

Ricordando ora che $H_x^1 = H_x \neq \emptyset$, per ipotesi, possiamo concludere che :

$$(H_x - f(x))^1 = H_x - f(x) \neq \emptyset, \qquad \forall x \in Q$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Qui giunti, definiamo la *norma* di un fibrato $\mathcal{H}$.

Definizione 2.2.8. Considerato un qualsiasi fibrato $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in Q}$ con fibre non-vuote, si definisce la sua *norma* come segue:

$$\| \mathcal{H} \| := \sup_{x \in Q} \mathrm{dist}(0, H_x). \tag{2.2.16}$$

Osservazione. Sulla base della (2.2.16) la norma $\| \mathcal{H} \|$ può essere sia un *numero reale non negativo* che $+\infty$: andiamo a dimostrare che nel caso specifico in studio quest'ultima condizione non può verificarsi.

Proposizione 2.2.9. *Sia $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in Q}$ un fibrato con fibre non-vuote e tale che coincida con il suo stesso raffinamento di Glaeser, allora*

$$\| \mathcal{H} \| < +\infty. \tag{2.2.17}$$

Dimostrazione. Dato $x \in Q$, possiamo scegliere $w_x \in H_x$ poiché H_x è non-vuota.

Notiamo inoltre che, coincidendo $\mathcal{H}$ con il suo stesso raffinamento di Glaeser, è anche vero che

$$\operatorname{dist}(w_x, H_y) \xrightarrow[y \to x]{} 0, \qquad y \in Q.$$

Esiste quindi una *palla aperta* B_x centrata in x tale che

$$\operatorname{dist}(w_x, H_y) \leq 1, \qquad \forall y \in Q \cap B_x.$$

Ne segue che

$$\operatorname{dist}(0, H_y) \leq |w_x| + 1, \qquad \forall y \in Q \cap B_x. \tag{2.2.18}$$

Possiamo ricoprire lo spazio compatto Q con un numero finito di palle aperte $B_{x_1}, \dots, B_{x_N}$, ovvero

$$Q \subset B_{x_1} \cup B_{x_2} \cup \dots \cup B_{x_N}.$$

Ricordando la (2.2.18), deduciamo che

$$\operatorname{dist}(0, H_y) \leq \max \{|w_{x_i}| + 1,\ i = 1, 2, \dots, N\}, \qquad \forall y \in Q$$

da cui ne consegue

$$\| \mathcal{H} \| < +\infty.$$

□

Proseguiamo presentando un altro risultato funzionale alla dimostrazione del *Lemma di esistenza di sezioni* (Lemma 2.2.5).

Proposizione 2.2.10. *Dato ϵ>0, esiste una mappa continua $g : Q \to \mathbb{R}^r$ tale che*

$$\operatorname{dist}(g(y), H_y) \leq \varepsilon, \qquad \forall y \in Q$$

e

$$|g(y)| \leq \| \mathcal{H} \| + \varepsilon, \qquad \forall y \in Q.$$

Dimostrazione. Possiamo trovare $w_x \in H_x$ tale che

$$|w_x| \leq \| \mathcal{H} \| + \varepsilon.$$

Sappiamo che, coincidendo $\mathcal{H}$ con il suo stesso raffinamento di Glaeser, è vero che

$$\mathrm{dist}(w_x, H_y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0, \qquad y \in Q.$$

Esiste quindi una palla aperta $B(x, 2r_x)$ centrata in x tale che

$$\mathrm{dist}(w_x, H_y) < \varepsilon, \qquad \forall y \in Q \cap B(x, 2r_x). \tag{2.2.19}$$

Possiamo allora ricoprire lo spazio compatto Q con un numero finito di palle aperte $B(x_j, r_j)$, $j = 1, \dots, N,\ x_j \in Q$, ovvero

$$Q \subset B(x_1, r_1) \cup B(x_2, r_2) \cup \cdots \cup B(x_N, r_N).$$

Introduciamo ora per $i = 1, \dots, N$ una funzione $\widetilde{\varphi}_i$ non-negativa continua su $\mathbb{R}^n$, supportata in $B(x_i, 2r_i)$ e uguale a uno su $B(x_i, r_i)$. Definiamo inoltre

$$\varphi_i(x) = \frac{\widetilde{\varphi}_i(x)}{\widetilde{\varphi}_1(x) + \cdots + \widetilde{\varphi}_N(x)}, \qquad i = 1, \dots, N,\ x \in Q.$$

(Questa definizione è ben posta grazie alla (2.2.19) dalla quale si deduce che il denominatore non è mai nullo).

Osserviamo che le φ_i costituiscono una partizione dell'unità su Q:

- ogni φ_i è una funzione non-negativa continua su Q, nulla esternamente a $B(x_i, 2r_i)$;
- $\sum_{i=1}^N \varphi_i = 1$ su Q.

Definiamo ora

$$g(y) = \sum_{i=1}^N w_{x_i} \varphi_i(y), \qquad \forall y \in Q.$$

Risulta quindi che la mappa $g : Q \to \mathbb{R}^r$ è continua. Abbiamo inoltre che la (2.2.19) mostra che $\mathrm{dist}(w_{x_i}, H_y) < \varepsilon$ quando $\varphi_i(y) \neq 0$. Ne consegue perciò che

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(g(y), H_y) &\leq \sum_{i=1}^{N} \operatorname{dist}(w_{x_i}, H_y)\varphi_i(y)\\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(y) = \varepsilon, \qquad \forall y \in Q.\end{aligned}$$

Per ogni $y \in Q$ abbiamo anche

$$|g(y)| \leq \sum_{i=1}^{N} |w_{x_i}|\varphi_i(y) \leq \sum_{i=1}^{N} (\| \mathcal{H} \| + \varepsilon)\varphi_i(y) = \| \mathcal{H} \| + \varepsilon.$$

La dimostrazione della Proposizione 2.2.10 risulta così completa. □

Dalla Proposizione 2.2.10 discende il seguente risultato.

Corollario 2.2.11. *Sia $\mathcal{H}$ un fibrato con fibre non-vuote, coincidente con il suo stesso raffinamento di Glaeser. Esiste allora una mappa continua $g : Q \to \mathbb{R}^r$ tale che*

$$\| \mathcal{H} - g \| \leq \frac{1}{2} \| \mathcal{H} \|$$

e

$$|g(x)| \leq 2 \| \mathcal{H} \|, \quad \forall y \in Q.$$

Dimostrazione. Osserviamo che affinché la tesi risulti dimostrata, richiamata la Proposizione 2.2.10, è sufficiente

- se $\| \mathcal{H} \| > 0$ considerare $\varepsilon = \frac{1}{2} \| \mathcal{H} \|$;
- se $\| \mathcal{H} \| = 0$ considerare $g = 0$. □

Andiamo ora a provare il *Lemma di esistenza di sezioni* (Lemma 2.2.5): a tal fine presenteremo la dimostrazione standard del *Teorema di selezione di Michael*[3] in un caso speciale rilevante.
Per chiarezza espositiva, riproponiamo anche l'enunciato del lemma in oggetto.

[3]**Teorema della selezione continua di Michael** - *Una multifunzione semicontinua inferiormente a immagini convesse chiuse non vuote ammette una selezione continua in ogni punto del suo grafico, se il suo dominio è paracompatto e il suo codominio è uno spazio di Banach.*

Lemma. (***Lemma di esistenza di sezioni***) *Sia $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in Q}$ un fibrato, con $H_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$. Si supponga che $\mathcal{H}$ sia il suo stesso raffinamento di Glaeser e che ogni fibra H_x sia non-vuota, allora $\mathcal{H}$ ha una sezione.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in Q}$ un fibrato. Supponiamo le fibre H_x siano non-vuote e che $\mathcal{H}$ coincida con il suo stesso raffinamento di Glaeser.

Definiamo ora le *mappe continue* $f_i, g_i : Q \to \mathbb{R}^r$, per induzione su $i = 0, 1, 2, \dots$.
Iniziamo con $f_0 = g_0 = 0$.
Considerate f_i e g_i applichiamo il Corollario 2.2.11 al fibrato $\mathcal{H} - f_i$ per costruire a una mappa continua $g_{i+1} : Q \to \mathbb{R}^r$ tale che:

$$\parallel (H - f_i) - g_{i+1} \parallel \leq \frac{1}{2} \parallel \mathcal{H} - f_i \parallel$$

e

$$|g_{i+1}(y)| \leq 2 \parallel \mathcal{H} - f_i \parallel, \qquad \forall y \in Q.$$

Definiamo poi

$$f_{i+1} = f_i + g_{i+1},$$

il che completa la definizione induttiva della f_i e g_i.
Notiamo che vale quanto segue:

- $f_0 = 0$;
- $\parallel \mathcal{H} - f_{i+1} \parallel \leq \frac{1}{2} \parallel \mathcal{H} - f_i \parallel, \qquad \forall i$;
- $|f_{i+1}(y) - f_i(y)| \leq 2 \parallel \mathcal{H} - f_i \parallel, \qquad \forall y \in Q,\ i \geq 0$.

Deduciamo quindi che

$$\parallel \mathcal{H} - f_i \parallel \leq 2^{-i} \parallel \mathcal{H} \parallel, \qquad \forall i \tag{2.2.20}$$

e

$$|f_{i+1}(y) - f_i(y)| \leq 2^{1-i} \parallel \mathcal{H} \parallel, \qquad \forall y \in Q,\ i \geq 0. \tag{2.2.21}$$

Abbiamo, in particolare, che:

(i) per la (2.2.21) le f_i, poiché lo spazio C^0 è completo rispetto alla norma del max, convergono uniformemente su Q a una *mappa continua* $f : Q \to \mathbb{R}^r$;

(ii) per la (2.2.20) si ha $\parallel \mathcal{H} - f_i \parallel \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$.

Osserviamo ora che $\forall y \in Q$ vale

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(f(y), H_y) &= \lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(f_i(y), H_y) \\ &= \lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(0, H_y - f_i(y)) \leq \liminf_{i\to\infty} \parallel \mathcal{H} - f_i \parallel = 0,\end{aligned}$$

e quindi

$$f(y) \in H_y, \quad \forall y \in Q.$$

Poiché anche $f : Q \to \mathbb{R}$ è una mappa continua, risulta provato che f è una sezione di $\mathcal{H}$ e questo completa la dimostrazio dell'esistenza di sezioni. $\square$

2.3 I cubi di Whitney

Introduciamo ora la nozione di *cubi di Whitney* ([2, 3, 4]) di cui forniremo prima la definizione per poi passare alla presentazione di alcuni risultati d'interesse per il metodo risolutivo oggetto di questa tesi.

2.3.1 Definizione di cubo di Whitney

Premettiamo alla definizione l'introduzione di alcune notazioni e nozioni ad essa propedeutiche.

Innanzi tutto sottolineiamo che opereremo con *cubi chiusi* $Q \subset \mathbb{R}^n$ con *spigoli paralleli agli assi coordinati*: denotiamo rispettivamente con $\operatorname{ctr}(Q)$ e δ_Q il *centro di* Q e la *lunghezza del suo spigolo*. Indichiamo, inoltre, con Q^* *il cubo con centro* $\operatorname{ctr}(Q)$ *e lungezza dello spigolo pari a* $3\delta_Q$.

Precisiamo che «*bisecare*» Q significa scriverlo come un'unione di 2^n sottocubi, ciascuno con lunghezza di spigolo pari a $\frac{1}{2}\delta_Q$, ottenuti partizionando Q con iperpiani passanti per il suo centro e paralleli ai sui iperpiani diedrali: ci riferiremo a questi sottocubi denominandoli «*figli*» di Q.

Abbiamo, poi, che, fissato un cubo Q^0, i «*cubi diadici*» sono costituiti da Q^0, dai figli di Q^0, dai figli dei figli di Q^0 e così a seguire. Osserviamo che ogni diadico Q è un sottocubo di Q^0. Inoltre, se Q è un cubo diadico distinto da Q^0, allora Q è figlio di uno e un solo cubo diadico che indichiamo con Q^+ e notiamo che $Q^+ \subset Q^*$.

Ciò premesso, diamo la definizione di *cubo di Whitney:*

Definizione 2.3.1. ***(Cubo di Whitney)*** Considerato E_1, sottoinsieme non-vuoto chiuso di Q^0, un cubo diadico $Q \neq Q^0$ è detto *cubo di Whitney* se soddisfa le seguenti condizioni:

$$\mathrm{dist}(Q^*, E_1) \geq \delta_Q \tag{2.3.1}$$

e

$$\mathrm{dist}((Q^+)^*, E_1) < \delta_Q. \tag{2.3.2}$$

2.3.2 Risultati sui cubi di Whitney

Andiamo ad enunciare e dimostrare un lemma che fornisce *proprietà basilari* dei cubi di Whitney.

Notazione: In questa sezione indicheremo con c e C delle *costanti dipendenti solo dalla dimensione* n e con queste notazioni non indicheremo necessariamento le medesimi costanti quando usate in espressioni diverse.

Lemma 2.3.2. *Per ogni cubo di Whitney si ha*

(i) $\delta_Q \leq \mathrm{dist}(Q^*, E_1) \leq C\delta_Q$ *;*

(ii) *in particolare:* $Q^* \cap E_1 = \varnothing$*;*

(iii) *l'unione di tutti i cubi di Whitney è* $Q^0 \smallsetminus E_1$*;*

(iv) *ogni fissato* $y \in Q^0 \smallsetminus E_1$ *ha un intorno che interseca* Q^* *per al più* C *distinti cubi di Whitney* Q*.*

Dimostrazione. Osserviamo quanto segue.

• La (i) discende in modo immediato dalle (2.3.1) e (2.3.2).

• La (ii) discende in modo immediato dalla (i).

• Per dimostrare la (iii) notiamo innanzi tutto che ogni cubo di Whitney Q è contenuto in $Q^0 \setminus E_1$, grazie alla (ii) e all'osservazione fatta precedentemente che ogni cubo diadico è contenuto in Q^0.

Reciprocamente consideriamo $x \in Q^0 \smallsetminus E_1$: ogni cubo diadico sufficientemente piccolo $\hat{Q}$ contenente x soddisfa la (2.3.1). Fissiamo un tale $\hat{Q}$ vi è solo un numero finito di cubi diadici Q contenenti x con spigolo di lunghezza maggiore o uguale di $\delta_{\hat{Q}}$. Esiste quindi un cubo diadico $Q \ni x$ che verifica la (2.3.1) la cui lunghezza di spigolo è almeno pari a quella di ogni altro cubo $Q' \ni x$ che soddisfa la (2.3.1). Sappiamo che la (2.3.1) non è verificata per Q^0 e dunque $Q \neq Q^0$. Abbiamo perciò che Q ha un genitore diadico Q^+. Notiamo, inoltre, che Q^+ non soddisfa la (2.3.1) perché la lunghezza del suo spigolo è maggiore di quella di Q. Ne consegue che Q verifica la (2.3.2), fatto da cui deduciamo che $Q \ni x$ è un cubo di Whitney, completando così la dimostrazione della (iii).

• Esaminiamo ora l'affermazione (iv): preso $y \in Q^0 \setminus E_1$ e posto $r = 10^{-3}\operatorname{dist}(y, E_1)$, dimostriamo che vi sono al più C cubi distinti di Whitney Q per i quali Q^* interseca la palla $B(x, r)$.

Sia Q uno di tali cubi di Whitney. Esiste allora $z \in B(y, r) \cap Q^*$ tale che dalla (i) abbiamo

$$\delta_Q \leq \operatorname{dist}(z, E_1) \leq C\delta_Q. \tag{2.3.3}$$

Poiché $z \in B(y, r)$, sappiamo che

$$|\operatorname{dist}(z, E_1) - \operatorname{dist}(y, E_1)| \leq 10^{-3}\operatorname{dist}(y, E_1).$$

Ora, risolvendo questa disuguaglianza e isolando il termine $\operatorname{dist}(z, E_1)$, otteniamo

$$(1 - 10^{-3})\operatorname{dist}(y, E_1) \leq \operatorname{dist}(z, E_1) \leq (1 + 10^{-3})\operatorname{dist}(y, E_1). \tag{2.3.4}$$

Dalle (2.3.3) e (2.3.4) deduciamo che

$$c\operatorname{dist}(y, E_1) \leq \delta_Q \leq C\operatorname{dist}(y, E_1). \tag{2.3.5}$$

Quindi, poiché

$$\operatorname{dist}(y, Q^*) = \inf\{\operatorname{dist}(y, q),\ q \in Q^*\}$$

e ricordando prima che $z \in Q^*$ e poi che $z \in B(y, r)$, risulta che

$$\inf\{\operatorname{dist}(y, q),\ q \in Q^*\} \leq \operatorname{dist}(y, z) \leq r.$$

Ma per la scelta di r si ha $r = 10^{-3}\,\mathrm{dist}(y, E_1) \leq \mathrm{dist}(y, E_1)$. In sintesi possiamo quindi scrivere che

$$\mathrm{dist}(y, Q^*) \leq \mathrm{dist}(y, E_1). \tag{2.3.6}$$

Osserviamo pertanto che per un fissato y vi sono al più C cubi diadici distinti che soddisfano la (2.3.5) e la (2.3.6), il che prova l'affermazione (iv).

In tal modo il Lemma 2.3.2 risulta completamente dimostrato. □

Presentiamo ora un lemma che fornisce una *partizione dell'unità* consona alla geometria dei cubi di Whitney.

Lemma 2.3.3. *Esiste una collezione di funzioni θ_Q a valori reali su Q^0, indicizzata dai cubi di Whitney Q , che soddisfano le seguenti codizioni:*

(i) *ogni θ_Q è una funzione continua non-negativa su Q^0;*

(ii) *per ogni cubo di Whitney Q , la funzione θ_Q è nulla su $Q^0 \setminus Q^*$;*

(ii) $\sum_Q \theta_Q = 1$ su $Q^0 \setminus E_1$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\tilde{\theta}(x)$ continua non-negativa su $\mathbb{R}^n$, tale che

- $\tilde{\theta}(x)$=1 per $x = (x_1, \cdots, x_n)$, con $\max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} \leq \frac{1}{2}$;
- $\tilde{\theta}(x)$=0 per $x = (x_1, \cdots, x_n)$, con $\max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} \geq 1$.

Definiamo per ogni cubo di Whitney Q

$$\tilde{\theta}_Q(x) := \tilde{\theta}\left(\frac{x - \mathrm{ctr}(Q)}{\delta_Q}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Abbiamo quindi che $\tilde{\theta}_Q$ è una funzione continua non-negativa su $\mathbb{R}^n$, che è pari a 1 su Q e a 0 fuori di Q^*. Ne consegue in modo semplice, grazie alle asserzioni (iii) e (iv) del Lemma 2.3.2, che

$$\textstyle\sum_{Q'} \tilde{\theta}_{Q'} \text{ è una fuzione continua non-negativa su } Q^0 \setminus E_1$$

e in particolare che

$$\textstyle\sum_{Q'} \tilde{\theta}_{Q'} \geq 1 \text{ su } Q^0 \setminus E_1.$$

Ne consegue che, considerate le funzioni θ_Q definite come segue

$$\begin{cases} \theta_Q(x) & = \dfrac{\tilde{\theta}_Q(x)}{\sum_{Q'} \tilde{\theta}_{Q'}(x)}, \quad x \in Q^0 \setminus E_1, \\ \theta_Q & = 0, \qquad\qquad\quad x \in E_1, \end{cases}$$

si può facilmente mostrare che tali funzioni soddisfano le asserzioni (i), (ii) e (iii) del Lemma 2.3.3. $\square$

Definizione. La partizione dell'unità $\{\theta_Q\}$ su $Q^0 \setminus E_1$ è detta *partizione di Whitney dell'unità.*

Osservazione 2.3.4. Notiamo che qualsiasi sia $x \in Q^0$ esiste solo un numero finito di cubi di Whitney che contiene x. Da ciò si deduce che

$$\theta_Q \neq 0 \text{ solo per un numero finito di cubi } Q.$$

Capitolo 3

Determinazione delle soluzioni

In questo capitolo illustreremo il metodo risolutivo presentato in questa tesi e, a tal fine, richiamiamo la formulazione del problema enunciata al termine del Capitolo 1:

Problema 3.0.1. - Formulazione del problema univincolare: Siano $f_1, \ldots, f_r$ *funzioni continue in* $\mathbb{R}^n$, con $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Quali *funzioni continue* ϕ possono essere scritte nella forma

$$\phi = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \, f_i \tag{3.0.1}$$

dove le ϕ_i siano anch'esse *funzioni continue da* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}$?
Inoltre, se ϕ e le f_i presentano alcune *proprietà di regolarità*, come si possono scegliere le ϕ_i così che presentino le *medesime (o lievemente più deboli) proprietà di regolarità*?

3.1 Considerazioni sulla regolarità delle soluzioni

Osserviamo che se *le* f_i *non hanno zeri comuni*, si mostra che ogni $\phi \in C^0(\mathbb{R}^n)$ può essere scritta nella forma (3.0.1) e che le ϕ_i hanno la medesime proprietà di regolarità (quali essere Hölder, Lipschitz o C^m) della ϕ stessa e delle f_i.
[*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione continua $\phi \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

Osservato che $\sum_i |f_i| \neq 0$ (per l'ipotesi di non esistenza di zeri comuni), possiamo scrivere quanto segue:

$$\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\frac{f_i}{\sum_{j=1}^{r} f_j^2}\,\phi}_{\phi_i}\, f_i = \phi$$

da cui, ponendo $\phi_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^{r} f_j^2}\,\phi$, otteniamo

$$\phi = \sum \phi_i\, f_i.$$

Vediamo poi, dalla forma scelta per le ϕ_i, che esse hanno le medesime proprietà di regolarità della ϕ e delle f_i e pertanto la tesi risulta completamente dimostrata. □]

Notiamo inoltre che *se* ϕ e f_i *sono funzioni analitiche reali* allora, per il Teorema B di Cartan [1], anche le ϕ_i possono essere scelte analitiche reali.

D'altra parte va osservato che nulla di quanto visto per i due casi precedenti vale qualora l'*insieme degli zeri comuni* $Z := (f_1 = \cdots = f_r = 0)$ *non sia vuoto*. In tal caso, infatti, anche se le ϕ e f_i sono polinomiali, ciò che al più si può affermare è che le ϕ_i possono essere scelte in modo da essere Hölder-continue. Ne deduciamo che i fenomeni interessanti da indagare hanno luogo in prossimità dell'insieme Z.

Dopo avere evidenziato quanto sopra passiamo a considerare l'equazione

$$\phi_1 f_1 + \cdots + \phi_r f_r = \varphi \quad \text{su}\, \mathbb{R},^n \tag{3.1.1}$$

dove le $f_1, \ldots, f_r$ sono funzioni date *polinomiali.*

Dato X, *spazio di funzion*i quale $C^m(\mathbb{R}^n)$ (spazio delle funzioini localmente derivabili di ordine m) o $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ con $0 < \alpha \leq 1$ (spazio delle funzioni localmente Hölderiane con esponente α), è interessante sapere come decidere se l'equazione (3.1.1) ammetta soluzioni $\phi_1, \ldots, \phi_r \in X$. Se φ è *analitica reale* e la (3.1.1) ammette una soluzione continua, possiamo allora assume che

[1] **Teorema B di Cartan (*Enunciato in termini di coomologia*)** - Considerato un *fascio coerente* F su una *varietà di Stein* X, si ha che

$$H^p(X, F) = 0, \quad \forall p > 0$$

(dove la notazione H sta per "coomologia di Hodge").

le ϕ_i siano *analitiche reali al di fuori degli zeri comuni delle* f_i. Per provare ciò ricorriamo al seguente teorema.

Teorema 3.1.1. (***Teorema di approssimazione*** [5]) *Siano* $\phi, \sigma : \Omega \to \mathbb{R}$ *funzioni continue su un insieme aperto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, e supponiamo* $\sigma > 0$ *su* Ω*. Esiste allora una funzione analitica reale* $\tilde{\phi} : \Omega \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\left|\tilde{\phi}(x) - \phi(x)\right| \leq \sigma(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Noto questo teorema, possiamo facilmente "correggere" una soluzione continua $\phi_1, \dots, \phi_r$ della (3.1.1) in modo che le funzioni ϕ_i risultino analitiche reali al di fuori degli zeri comuni delle $f_1, \dots, f_r$. Consideriamo

$$\Omega = \{x : \ x \in \mathbb{R}^n \setminus Z\}, \qquad \text{con } Z = \textit{insieme degli zeri comuni delle } f_i$$

e poniamo

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{r} f(x)^2, \quad \text{per } x \in \Omega.$$

Otteniamo le *funzioni analitiche reali* $\tilde{\phi}_i$ su Ω tali che $\left|\tilde{\phi}_i - \phi_i\right| \leq \sigma$ su Ω. Ponendo

$$h = \sum_i \tilde{\phi}_i f_i - \varphi = \sum_i (\tilde{\phi}_i - \phi_i)\, f_i, \quad \text{su } \Omega$$

e definendo poi

$$\begin{cases} \phi_i^{\#} & = \tilde{\phi}_i - \frac{h f_i}{f_i^2 + \dots + f_r^2}, \text{ su } \Omega, \\ \phi_i^{\#} & = \phi_i, \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

vediamo che risulta

$$\sum_i \phi_i^{\#} f_i = \varphi, \tag{3.1.2}$$

con $\phi_i^{\#}$ *continua su* $\mathbb{R}^n$ e *analitica reale su* Ω. La continuità, che su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ e su Ω è immediata, sulla frontiera $\partial\Omega$ e provata da

$$\frac{|h f_i|}{\sum_k f_k^2} = \frac{\left|\sum_j (\tilde{\phi}_j - \phi_j) f_j f_i\right|}{\sum_k f_k^2} \leq \frac{\sum_j |f_j|\, |f_i| \sigma}{\sigma}.$$

Osserviamo inoltre che il risultato (3.1.2)
- su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è immediato;
- su Ω è mostrato da quanto segue:

$$\sum_i \phi_i^{\#} f_i = \sum_i (\tilde{\phi}_i f_i - \frac{(\sum_j \tilde{\phi}_j f_j - \varphi) f_i^2}{\sum_j f_j^2}) = \sum_i \tilde{\phi}_i f_i - (\sum_j \tilde{\phi}_j f_j - \varphi) = \varphi.$$

Qui giunti è chiaro che ciò che resta da risolvere, per essere in grado di fornire una risposta esaustiva al Problema 3.0.1, è la determinazione a priori dell'esistenza o meno di soluzioni continue, questione che tratteremo nella seguente sezione.

3.2 Determinazione dell'esistenza di soluzioni

Per l'individuazione di un metodo che permetta di dare una risposta sull'esistenza di soluzioni continue dell'equazione (3.0.1) prima della loro effettiva determinazione, introduciamo una nuova formulazione del Problema 3.0.1.

3.2.1 Formulazione del problema in termini di fibrati

Osserviamo ora che il Problema 3.0.1 può essere espresso *in termini di fibrati* come segue.

Problema 3.2.1. - Formulazione del problema per fibrati: Considerato un *fibrato* $\mathcal{H}$, come possiamo sapere se esso ammette sezione e, nel caso esista, determinarla?

Infatti siano $f_1, \ldots, f_r$ e φ le funzioni a valori reali definite sullo *spazio metrico compatto* Q tali che $\mathcal{H}$ sia composto dalle *fibre* $H_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$ tali che

$$H_x = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r : \ \lambda_1 f_1(x) + \ldots, + \lambda_r f_r(x) = \varphi(x)\}, \quad \text{per } x \in Q. \tag{3.2.1}$$

È immediato che una sezione $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ di tale fibrato è un'r-tupla *di funzioni continue* che è soluzione dell'equazione

$$\phi_1 f_1 + \cdots + \phi_r f_r = \varphi, \quad \text{su}\, Q. \tag{3.2.2}$$

Dal confronto fra la (3.0.1) e la (3.2.2) risulta comprovata l'equivalenza computazionale fra il Problema 3.0.1 e il Problema 3.2.1, da cui consegue che l'individuazione di un metodo risolutivo per uno dei due implica la risoluzione anche dell'altro. In particolare, nella seguente sottosezione 3.2.2, mostreremo che grazie ai risultati presentati nella sottosezione 2.2.2 del capitolo precedente è possibile trovare un metodo per dare risposta al quesito di esistenza o meno di sezione del Problema 3.2.1.

3.2.2 Metodo Glaeser-Michael per la determinazione dell'esistenza di soluzioni

Consideriamo il *Lemma di stabilizzazione* (Lemma 2.2.4) e il *Lemma di esistenza di sezioni* (Lemma 2.2.5), inerenti il raffinamento di Glaeser (Definizione 2.2.1), dei quali per chiarezza espositiva riproponiamo gli enunciati.

Lemma. (***Lemma di stabilizzazione***) *Sia $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in Q}$ un fibrato con $H_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$ e $\dim H_x^0 \leq r$, $\forall x \in Q$. Si ha che*

$$\mathcal{H}^{2r+1} = \mathcal{H}^{2r+2} = \cdots .$$

Lemma. (***Lemma di esistenza di sezioni***) *Sia $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in Q}$ un fibrato, con $H_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$. Si supponga che $\mathcal{H}$ sia il suo stesso raffinamento di Glaeser e che ogni fibra H_x sia non-vuota, allora $\mathcal{H}$ ha una sezione.*

A partire da questi due risultati possiamo rispondere al quesito del Problema 3.2.1 inerente l'esistenza della sezione, infatti da essi discende quanto segue.

Proposizione 3.2.2. *Considerato un fibrato $\mathcal{H}$, siano $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2, \ldots$ i suoi raffinamenti di Glaeser iterati e sia*

$$\mathcal{H}^{2r+1} = (\widetilde{H}_x)_{x \in Q}, \quad r > 0 \text{ e intero},$$

allora $\mathcal{H}$ ha una sezione se e solo se ogni fibra $\widetilde{H}_x$ è non-vuota.

A prova di ciò un esempio interessante è fornito dal fibrato (3.2.1): si può verificare che il suo raffinamento di Glaeser è dato da $\mathcal{H}^1 = (H^1_x)_{x \in Q}$, con $H^1_x \subset \mathbb{R}^r$, $\forall x \in Q$, dove

$$H^1_x = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r : \left| \sum_1^r \lambda_i f_i(y) - \varphi(y) \right| = o\,(\sum_1^r |f_i(y)|) \quad \text{per } y \to x \right\}.$$

[La prova di quanto sopra si ottiene per reciproca inclusione dei due Lemmi enunciati e dimostrati qui di seguito.

Lemma I. *Siano $(\lambda_{1,y}, \ldots, \lambda_{r,y}) \in H_y$ e $(\lambda^1_{1,x}, \ldots, \lambda^1_{r,x}) \in \mathbb{R}^r$ tali che*

$$\left\| (\lambda_{1,y} - \lambda^1_{1,x}, \ldots, \lambda_{r,y} - \lambda^1_{r,x}) \right\| \xrightarrow[y \to x]{} 0,$$

allora si ha che

$$\left| \sum_{i=1}^r \lambda^1_{i,x} f_i(y) - \varphi(y) \right| = o\left(\sum_{i=1}^r |f_i(y)| \right).$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{\left|\sum_{i=1}^r \lambda^1_{i,x} f_i(y) - \varphi(y)\right|}{\sum_{j=1}^r |f j_i(y)|} \quad & \underset{\varphi(y)=\sum_{i=1}^r \lambda_{i,y} f_i(y)}{\overset{=}{\uparrow}} \quad \frac{\left|\sum_{i=1}^r (\lambda_{i,y} - \lambda^1_{i,x})\, f_i(x)\right|}{\sum_{j=1}^r |f_j(y)|} \leq \\ & \leq \quad \frac{\max\limits_{k=1,\ldots,r} \left|\lambda_{k,y} - \lambda^1_{k,x}\right| \sum_{i=1}^r |f_i(y)|}{\sum_{j=1}^r |f_j(y)|} = \\ & = \quad \max_{k=1,\ldots,r} \left|\lambda_{k,y} - \lambda^1_{k,x}\right| \underbrace{\xrightarrow[y \to x]{}}_{\text{per ipotesi}} 0\,. \end{aligned}$$

La tesi risulta così dimostrata. □

Lemma II. *Sia* $(\lambda^1_{1,x}, \dots, \lambda^1_{r,x}) \in \mathbb{R}^r$ *tale che*

$$\left| \sum_{i=1}^r \lambda^1_{i,x} f_i(y) - \varphi(y) \right| = o\left(\sum_{i=1}^r |f_i(y)| \right),$$

allora si ha che

$$(\lambda^1_{1,x}, \dots, \lambda^1_{r,x}) \in H^1_x.$$

Dimostrazione. Consideriamo la traslazione di H_y secondo il vettore $-(\lambda^1_{1,x}, \dots, \lambda^1_{r,x})$, ovvero

$$\begin{aligned} H_y - (\lambda^1_{1,x}, \dots, \lambda^1_{r,x}) &= \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \lambda^1_{i,r}) f_i(y) = \varphi(y) \right\} = \\ &= \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(y) = \varphi(y) - \sum_{j=1}^r \lambda^1_{j,r} f_j(y) \right\}. \end{aligned}$$

Notiamo che

$$(f_1(y), \dots, f_r(y)) \perp H_y - (\lambda^1_{1,x}, \dots, \lambda^1_{r,x})$$

e che inoltre

$$\frac{\varphi(y) - \sum_{i=1}^r \lambda^1_{i,x} f_i(y)}{\sum_{j=1}^r f_j^2(y)} (f_1(y), \dots, f_r(y)) \in H_y - (\lambda^1_{1,x}, \dots, \lambda^1_{r,x}).$$

Deduciamo quindi che vale quanto segue

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}((\lambda^1_{1,x}, \dots, \lambda^1_{r,x}), H_y) &= \operatorname{dist}(0, H_y - (\lambda^1_{1,x}, \dots, \lambda^1_{r,x})) = \\ &= \left\| \frac{\varphi(y) - \sum_{i=1}^r \lambda^1_{i,x} f_i(y)}{\sum_{j=1}^r f_j^2(y)} (f_1(y), \dots, f_r(y)) \right\| = \\ &= \frac{\left| \left(\sum_{i=1}^r \lambda^1_{i,x} f_i(y) \right) - \varphi(y) \right|}{\sum_{j=1}^r f_j^2(y)} \sqrt{\sum_{k=1}^r f_k^2} = \\ &= \frac{\left| \left(\sum_{i=1}^r \lambda^1_{i,x} f_i(y) \right) - \varphi(y) \right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^r (|f_j(y)|)^2}} = \underbrace{o(1) \text{ per } y \to x}_{\text{per ipotesi}} \end{aligned}$$

La tesi risulta così dimostrata. □

3.3 Calcolo delle soluzioni

In questa sezione mostreremo come calcolare una ***soluzione continua***

$$(\phi_1, \ldots, \phi_r)$$

dell'equazione

$$\phi_1 f_1 + \cdots + \phi_r f_r = \phi, \tag{3.3.1}$$

sullo *spazio metrico compatto* Q, ***assumendo che tale soluzione esista***.

In particolare, svolgeremo i calcoli con riferimento alla formulazione del *problema in termini di fibrati* (Problema 3.2.1). Inizieremo mostrando come passare da un fibrato dato ai suoi *raffinamenti di Glaeser iterati* (sezione 2.2) mediante formule che implicheranno passaggi al limite iterati. Poi, facendo ricorso alla nozione di *cubi di Whitney* (sezione 2.3), forniremo ulteriori formule per il calcolo della sezione di un dato fibrato "stabile" per raffinamento di Glaeser (ovvero coincidente con il suo stesso raffinamento di Glaeser) a fibre non-vuote. Questi risultati insieme ci permetteranno di calcolare la sezione di un qualsiasi dato fibrato per il quale la sezione esista. Forniremo infine una discussione dell'equazione (3.3.1) nel caso generale, discussione che poi convalideremo, nel capitolo seguente, con applicazione del metodo risolvente sviluppato a casi specici, ma di valenza, appunto, generale.

3.3.1 Calcolo del raffinamento di Glaeser

Premettiamo che nella trattazione seguente faremo uso del *prodotto interno standard* $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ *definito su* $\mathbb{R}^r$.

Consideriamo un *fibrato omogeneo* (Definizione 2.1.4) $\mathcal{H}^0 = (H_x^0)_{x \in Q}$, con H_x^0 *sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^r$ e Q *cubo chiuso in* $\mathbb{R}^n$.

Osservazione. Le fibre di un fibrato omogeneo sono *sottospazi vettoriali* di $\mathbb{R}^r$ non vuoti (vedi Definizione 2.1.4), mentre le fibre di un fibrato (o per esteso: *fibrato affine singolare*) sono *sottospazi affini* di $\mathbb{R}^r$, eventualmente anche vuoti.

In accordo con la notazione (2.2.3) (introdotta nella sezione 2.2), richiamiamo che ogni fibrato $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}$ è scrivibile in modo univoco nella forma seguente

$$\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q} = (v(x) + H_x^0)_{x\in Q}, \tag{3.3.2}$$

dove $\mathcal{H}^0 = (H_x^0)_{x\in Q}$ è un fibrato omogeneo e $v(x) \perp H_x^0$ per ogni $x \in Q$.

Detto ciò, sia $\tilde{\mathcal{H}}$ raffinamento di Glaeser di $\mathcal{H}$, e supponiamo che $\tilde{\mathcal{H}}$ abbia fibre non-vuote. Adottando la stessa notazione usata per $\mathcal{H}$ nella (3.3.2), possiamo scrivere $\tilde{\mathcal{H}}$, in modo univoco come segue

$$\tilde{\mathcal{H}} = (\tilde{v}(x) + \tilde{H}_x^0)_{x\in Q}, \tag{3.3.3}$$

dove $\tilde{\mathcal{H}}^0 = (\tilde{H}_x^0)_{x\in Q}$ è un fibrato omogeneo e $\tilde{v}(x) \perp \tilde{H}_x^0$ per ogni $x \in Q$.
È semplice verificare che $\tilde{\mathcal{H}}^0$ è raffinamento di Glaeser di $\mathcal{H}^0$.

Lo scopo di questa sottosezione è ***comprendere, per un fissato $\mathcal{H}^0$, la dipendenza del vettore $\tilde{v}(x)$, $x \in Q$, dal vettore $v(y)$, $y \in Q$***.

A tal fine introduciamo gli insiemi

$$E = \left\{(x, \lambda) \in Q \times \mathbb{R}^r : \ \lambda \perp H_x^0\right\}, \tag{3.3.4}$$

$$\Lambda(x) = \left\{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^r : \ (x, \tilde{\lambda}) \text{ appartiene alla chiusura di } E\right\} \text{ per } x \in Q. \tag{3.3.5}$$

Dalle (3.3.4) e (3.3.5) discende in modo immedianto quanto segue.

Enunciato 3.3.1. Fissato $\tilde{\lambda} \in \Lambda(x)$, esistono *punti* $y^h \in Q$ e *vettori* $\lambda^h \in \mathbb{R}^r$ $(h \geq 1)$, tali che

$$y^h \xrightarrow[h\to\infty]{} x, \qquad \lambda^h \xrightarrow[h\to\infty]{} \tilde{\lambda}, \qquad \lambda^h \perp H_{y^h}^0, \qquad \forall h.$$

Osserviamo che E e $\Lambda(x)$ dipendono da $\mathcal{H}^0$, ma non dai vettori $v(y)$, $y \in Q$. Le proprietà basilari di $\Lambda(x)$ sono fornite dal seguente risultato.

Lemma 3.3.2. *Preso $x \in Q$ si ha:*

(1) *ogni $\tilde{\lambda} \in \Lambda(x)$ è perpendicolare a H_x^0;*

(2) *considerato un qualsiasi vettore $\tilde{v} \in \mathbb{R}^r$, con $\tilde{v} \notin \tilde{H}_x^0$, esiste un vettore $\lambda \in \Lambda(x)$ tale che $\langle \lambda, \tilde{v} \rangle \neq 0$;*

(3) *lo spazio vettoriale* $(\tilde{H}_x^0)^\perp \subset \mathbb{R}^r$ *ha una base* $\tilde{\lambda}_1(x), \ldots, \tilde{\lambda}_s(x)$ *costituita interamente da vettori* $\tilde{\lambda}_i(x) \in \Lambda(x)$.

Dimostrazione.

• Per provare il punto (1), consideriamo $\tilde{\lambda} \in \Lambda(x)$ e $\tilde{v} \in \tilde{H}_x^0$. Dobbiamo mostrare che $\langle \tilde{\lambda}, \tilde{v} \rangle = 0$.

I punti $y^h \in Q$ e i vettori $\lambda^h \in \mathbb{R}^r$ $(h \geq 1)$ siano come indicato nell'Enunciato 3.3.1. Poiché $\tilde{v} \in \tilde{H}_x^0$ e $(\tilde{H}_y^0)_{y \in Q}$ è il raffinamento di Glaeser di $(H_y^0)_{y \in Q}$, sappiamo che

$$\operatorname{dist}(\tilde{v}, H_y^0) \xrightarrow[y \to x]{} 0.$$

In particolare

$$\operatorname{dist}(\tilde{v}, H_{y^h}^0) \xrightarrow[h \to \infty]{} 0.$$

Esiste quindi $v^h \in H_{y^h}^0$ $(h \geq 1)$ tale che

$$v^h \xrightarrow[h \to \infty]{} \tilde{v}.$$

Poiché $v^h \in H_{y^h}^0$ e $\lambda^h \perp H_{y^h}^0$, abbiamo che

$$\langle \lambda^h, v^h \rangle = 0, \quad \forall h.$$

Visto che $\lambda^h \xrightarrow[h \to \infty]{} \tilde{\lambda}$ e $v^h \xrightarrow[h \to \infty]{} \tilde{v}$ ne segue che

$$\langle \tilde{\lambda}, \tilde{v} \rangle = 0,$$

il che prova il punto (1).

• Per dimostrare il punto (2) supponiamo che

$$\tilde{v} \in \mathbb{R}^r, \ \tilde{v} \notin \tilde{H}_x^0.$$

Essendo $(\tilde{H}_y^0)_{y \in Q}$ il raffinamento di Glaeser di $(H_y^0)_{y \in Q}$, sappiamo che

$$\operatorname{dist}(\tilde{v}, H_y^0) \text{ non tende a } 0 \quad \text{per } y \to x.$$

Deduciamo quindi che esistono $\epsilon > 0$ e una sequenza di punti $y \in Q$ $(h \geq 1)$

tali che

$$y^h \xrightarrow[h\to\infty]{} x, \quad \text{ma} \quad \operatorname{dist}(\tilde{v}, H^0_{y^h}) \geq \epsilon, \qquad \forall h. \tag{3.3.6}$$

Da questo risultato segue che esistono *vettori unitari* $\lambda^h \in \mathbb{R}^r$ ($h \geq 1$) tali che

$$\lambda^h \perp H^0_{y^h} \quad \text{e} \quad \langle \lambda^h, \tilde{v} \rangle \geq \epsilon, \qquad \forall h. \tag{3.3.7}$$

Osserviamo poi che $\lambda^h \in \$^{r-1}$ (sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$ centrata in O), che è un *compatto,* e quindi, passando a una sottosucessione, possiamo assumere che

$$\lambda^h \xrightarrow[h\to\infty]{} \tilde{\lambda}, \quad \text{con } \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^r.$$

Ora, confrontando la (3.3.7) con la (3.3.4), notiamo che

$$(y^h, \lambda^h) \in E, \qquad \forall h.$$

Visto che $y^h \xrightarrow[h\to\infty]{} x$ e $\lambda^h \xrightarrow[h\to\infty]{} \tilde{\lambda}$ ne consegue che il punto $(x, \tilde{\lambda})$ appartiene alla chiusura di E da cui si ha

$$\tilde{\lambda} \in \Lambda(x).$$

Inoltre dalla (3.3.7) si ricava che

$$\langle \tilde{\lambda}, \tilde{v} \rangle = \lim_{h\to\infty} \langle \lambda^h, \tilde{v} \rangle \geq \epsilon$$

e in particolare

$$\langle \tilde{\lambda}, \tilde{v} \rangle \neq 0.$$

La dimostrazione del punto (2) risulta così completata.

• Per provare infine il punto (3) osserviamo che, grazie alle asserzioni (1) e (2) sopra dimostrate, vale

$$\bigcap_{\tilde{\lambda}\in\Lambda(x)} (\tilde{\lambda})^{\perp} = \tilde{H}^0_x.$$

[*Dimostrazione.* Provare questa relazione equivale a mostrare che

$$(H^0_x)^{\perp} = \operatorname{span}\{\lambda : \ \lambda \in \Lambda(x)\}. \tag{i}$$

Dimostriamo quindi quest'ultima relazione. A tal fine consideriamo

$$W(x) = \text{span}\{\lambda : \lambda \in \Lambda(x)\} \subseteq (H_x^0)^\perp.$$

Procediamo *per assurdo* supponendo

$$W(x) \subsetneq (H_x^0)^\perp, \qquad \text{(ii)}$$

allora per $\tilde{v} \in (H_x^0)^\perp \setminus W(x)$, $\tilde{v} \perp W(x)$, $\exists \tilde{\lambda} \in W(x)$ tale che

$$\langle \tilde{\lambda}, \tilde{v} \rangle > 0$$

il che è un ***assurdo*** poichè, essendo $\tilde{v} \perp W(x)$ e $\tilde{\lambda} \in W(x)$, deve anche sussistere

$$\langle \tilde{\lambda}, \tilde{v} \rangle = 0.$$

Ne consegue che l'ipotesi (ii) è falsa e da ciò discende la veridicità della (i). □]

La veridicità del punto (3) discende ora da considerazioni di algebra lineare. Notiamo, infatti, che

$$(\tilde{H}_x^0)^\perp = \left(\bigcap_{\tilde{\lambda} \in \Lambda(x)} (\tilde{\lambda})^\perp \right)^\perp = \text{span}\left\{ \tilde{\lambda} : \tilde{\lambda} \in \Lambda(x) \right\}.$$

È ora semplice ottenere $D(x) \subset \Lambda(x)$ i cui elementi sono vettori linearmente indipendenti e tale che

$$\text{span}\left\{ \tilde{\lambda} : \tilde{\lambda} \in \Lambda(x) \right\} = \text{span}\left\{ \tilde{\lambda} : \tilde{\lambda} \in D(x) \right\}.$$

Si costruisce così una base di $(\tilde{H}_x^0)^\perp$ costituita interamente da vettori di $\Lambda(x)$, il che prova il punto (3). □

Siano $\tilde{\lambda}_1(x), \ldots, \tilde{\lambda}_s(x)$ la base di $(\tilde{H}_x^0)^\perp$ data dal punto (3) del Lemma 3.3.2 e siano $\tilde{\lambda}_{s+1}(x), \ldots, \tilde{\lambda}_r(x)$ una base di $\tilde{H}_x^0$. Ne consegue quindi che

$$\tilde{\lambda}_1(x), \ldots, \tilde{\lambda}_r(x) \quad \text{formano una base di } \mathbb{R}^r. \tag{3.3.8}$$

Notiamo che

$$\tilde{\lambda}_i(x) \in \Lambda(x), \quad \text{per } 1 \leq i \leq s.$$

Quindi dall'Enunciato 3.3.1 deduciamo che esistono vettori $\lambda_i^h(x) \in \mathbb{R}^r$ e punti $y_i^h(x) \in Q$ ($h \geq 1$) tali che

$$y_i^h(x) \xrightarrow[h\to\infty]{} x, \tag{3.3.9}$$

$$\lambda_i^h(x) \xrightarrow[h\to\infty]{} \tilde{\lambda}_i(x), \tag{3.3.10}$$

$$\lambda_i^h(x) \perp H^0_{y_i^h(x)},\ \forall h. \tag{3.3.11}$$

Consideriamo per $s+1 \leq i \leq r$

$$y_i^h(x) = x \quad \text{e} \quad \lambda_i^h(x) = 0\,(h \geq 1).$$

Abbiamo così che la (3.3.11) vale anche per $s+1 \leq i \leq r$, anche se la (3.3.10) vale solo per $1 \leq i \leq s$.

Torniamo ora al problema del calcolo di $\tilde{v}(x) \in \tilde{\mathcal{H}}_x$, $x \in Q$, per i fibrati dati dalle (3.3.2) e (3.3.3). La risposta è la seguente.

Lemma 3.3.3. *Per $x \in Q$ si ha che*

$$\exists \quad \lim_{h\to\infty} \langle \lambda_i^h(x), v(y_i^h(x)) \rangle$$

e per $s+1 \leq i \leq r$

$$\langle \tilde{\lambda}_i(x), \tilde{v}(x) \rangle = \lim_{h\to\infty} \langle \lambda_i^h(x), v(y_i^h(x)) \rangle. \tag{3.3.12}$$

Osservazione. Poiché $\tilde{\lambda}_1(x), \ldots, \tilde{\lambda}_r(x)$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^r$, il Lemma 3.3.3 specifica in modo completo il vettore $\tilde{v}(x)$. Notiamo che i punti y_i^h e i vettori $\tilde{\lambda}_i(x)$ e $\lambda_i(x)$ dipendono solo da $\mathcal{H}^0$, non dai vettori $v(y)$, $y \in Q$, infatti $v(y)$ non compare né nella definizione (3.3.4) di E né in quella di $\Lambda(x)$ (3.3.5).

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente $1 \leq i \leq s$. Poiché $\tilde{v}(x)$ appartiene alla fibra $\tilde{v}(x) + \tilde{H}_x^0$ del raffinamento di Glaeser di $(v(y) + H_y^0)_{y \in Q}$, sappiamo che

$$\operatorname{dist}(\tilde{v}(x), v(y) + H_y^0) \xrightarrow[y\to x]{} 0, \quad y \in Q.$$

In particolare
$$\operatorname{dist}(\tilde{v}(x), v(y_i^h(x)) + H^0_{y_i^h(x)}) \xrightarrow[h\to\infty]{} 0.$$
Esistono quindi vettori $w_i^h(x) \in H^0_{y_i^h(x)}$ tali che
$$v(y_i^h(x)) + w_i^h(x) \xrightarrow[h\to\infty]{} \tilde{v}(x).$$
Poiché vale anche che $\lambda_i^h(x) \xrightarrow[h\to\infty]{} \tilde{\lambda}_i(x)$ se ne deduce
$$\langle \tilde{\lambda}_i(x), \tilde{v}(x)\rangle = \lim_{h\to\infty} \langle \lambda_i^h(x), [v(y_i^h(x)) + w_i^h(x)]\rangle.$$
D'altronde, essendo $w_i^h(x) \in H^0_{y_i^h(x)}$ e $\lambda_i^h(x) \perp H^0_{y_i^h(x)}$, abbiamo che
$$\langle \lambda_i^h(x), w_i^h(x)\rangle = 0, \qquad \forall h.$$
Ne consegue quindi che
$$\langle \tilde{\lambda}_i(x), \tilde{v}(x)\rangle = \lim_{h\to\infty} \langle \lambda_i^h(x), v(y_i^h(x))\rangle,$$
ovvero la (3.3.12) è verificata per $1 \le i \le s$. Supponiamo ora $s+1 \le i \le r$. Abbiamo allora, essendo $\tilde{\lambda}_i(x) \in \tilde{H}^0_x$ e $\tilde{v}(x) \perp \tilde{H}^0_x$, che
$$\langle \tilde{\lambda}_i(x), \tilde{v}(x)\rangle = 0.$$
Prendiamo $\lambda_i^h(x) = 0$ da cui discende che
$$\langle \lambda_i^h(x), v(y_i^h(x))\rangle = 0, \qquad \forall h.$$
Abbiamo quindi che
$$\langle \tilde{\lambda}_i(x), \tilde{v}(x)\rangle = 0 = \lim_{h\to\infty} \langle \lambda_i^h(x), v(y_i^h(x))\rangle, \qquad s+1 \le i \le r,$$
da cui vediamo che la (3.3.12) vale anche per $s+1 \le i \le r$ e la prova del Lemma 3.3.3 risulta pertanto completa. □

3.3.2 Calcolo dei raffinamenti iterati di Glaeser

Andremo ora a studiare i raffinamenti iterati di Glaser e a tal fine applicheremo i risultati presentati nella precedente sottosezione.

Sia $\mathcal{H} = (v(x) + H_x^0)_{x\in Q}$ un fibrato dato nella forma (3.3.2).
Premettiamo che nella trattazione faremo nuovamente uso del *prodotto interno standard* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *definito su* $\mathbb{R}^r$.

Assumiamo che $\mathcal{H}$ ***abbia una sezione.*** Ne consegue che $\mathcal{H}$ e i sui raffinamenti iterati di Glaeser hanno *fibre non-vuote*.
Scriviamo ora, per $l \geq 0$, l'l-*esimo raffinamento iterato di Glaeser* secondo la notazione (2.2.3)

$$\mathcal{H}^l = (v^l(x) + H_x^{0,l})_{x\in Q}, \tag{3.3.13}$$

dove $\mathcal{H}^{0,l} = (H_x^{0,l})_{x\in Q}$ è un fibrato omogeneo e $v^l(x) \perp H_x^{0,l}$, $\forall x \in Q$. In particolare, $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}$ e

$$\mathcal{H}^{0,0} = (H_x^0)_{x\in Q}, \quad \text{con } H_x^0 \text{ come in (3.3.2).} \tag{3.3.14}$$

Si vede facilmente che $\mathcal{H}^{0,l}$ è l-esimo raffinamento di $\mathcal{H}^{0,0}$.

Il nostro scopo ora è ***fornire formule per il calcolo di*** $\boldsymbol{v^l(x)}$ ***in termini del vettore*** $\boldsymbol{v(y)}$, $\boldsymbol{y \in Q}$, introdotto nella sottosezione 3.3.1.

Procediamo per induzione su l.

(i) Per $l = 0$ abbiamo

$$v^0(x) = v(x), \quad \forall x \in Q. \tag{3.3.15}$$

(ii) Per $l \geq 1$ applichiamo i risultati della precedente sottosezione (Lemma 3.3.2 e Lemma 3.3.3) per passare da $(v^{l-1}(x))_{x\in Q}$ a $(v^l(x))_{x\in Q}$ mediante il seguente enunciato.

Enunciato 3.3.4. È possibile trovare punti $y_i^{l,h}(x) \in Q$, $h \geq 1$, $1 \leq i \leq r$, $x \in Q$, e vettori $\tilde{\lambda}_i^l(x) \in \mathbb{R}^r$, $1 \leq i \leq r$, $x \in Q$, $\tilde{\lambda}_i^{l,h}(x) \in \mathbb{R}^r$, $1 \leq i \leq r$, $h \geq 1$, $x \in Q$, con le seguenti proprietà:

(1) i punti e vettori di cui sopra dipendono solo da $\mathcal{H}^{0,0}$, non dalla famiglia di vettori $(v(x))_{x\in Q}$;

(2) $\tilde{\lambda}_1^l(x), \ldots, \tilde{\lambda}_r^l(x)$ formano una base di $\mathbb{R}^r$, $\forall l \geq 1$, $\forall x \in Q$;

(3) $y_i^{l,h}(x) \xrightarrow[h\to\infty]{} x,\ \forall l \geq 1,\ 1 \leq i \leq r,\ \forall x \in Q$;

(4) $\langle \tilde{\lambda}_i^l(x), v^l(x) \rangle = \lim_{h\to\infty} \langle \tilde{\lambda}_i^{l,h}(x), v^{l-1}(y_i^{l,h}(x)) \rangle,\ \forall l \geq 1,\ 1 \leq i \leq r,\ \forall x \in Q.$

La formula al punto (4) calcola i $v^l(x)$, $x \in Q$ in termini di $v^{l-1}(x)$, $x \in Q$, per $l \geq 1$, completando il procedimento d'induzione su l.

Notiamo che abbiamo definito i vettori della base $\tilde{\lambda}_1^l(x), \ldots, \tilde{\lambda}_r^l(x)$ solo per $l \geq 1$. Per $l = 0$ è conveniente usare i vettori della base standard di $\mathbb{R}^r$ cioé definiamo

$$\tilde{\lambda}_i^0(x) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^r, \text{ con 1 nella } i\text{-esima posizione.} \tag{3.3.16}$$

È anche conveniente porre

$$\xi_i^l(x) = \langle \tilde{\lambda}_i^l(x), v^l(x) \rangle, \qquad \text{per } x \in Q,\ \forall l \geq 0,\ 1 \leq i \leq r, \tag{3.3.17}$$

e scrivere $\tilde{\lambda}_i^{l,h}(x) \in \mathbb{R}^r$ in termini della base

$$\tilde{\lambda}_1^{l-1}(y), \ldots, \tilde{\lambda}_r^{l-1}(y), \quad \text{per } y = y_i^{l,h}(x).$$

Perciò, per opportuni coefficienti

$$\beta_{ij}^{l,h}(x) \in \mathbb{R}, \qquad \forall l \geq 1,\ \forall h \geq 1,\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq r,\ \forall x \in Q,$$

abbiamo

$$\tilde{\lambda}_i^{l,h}(x) = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij}^{l,h}(x) \tilde{\lambda}_j^{l-1}(y_i^{l,h}(x)), \quad \text{per } x \in Q,\ \forall l \geq 1,\ \forall h \geq 1,\ 1 \leq i \leq r. \tag{3.3.18}$$

Osservando che $\tilde{\lambda}_i^{l,h}(x)$ e $\tilde{\lambda}_{j1}^{l-1}(y_i^{l,h}(x))$ dipendono solo da $\mathcal{H}^{0,0}$, deduciamo che anche i coefficienti $\beta_{ij}^{l,h}(x)$ dipendono solo da $\mathcal{H}^{0,0}$, e non dai vettori $v(y)$, $y \in Q$.

Sostituendo le (3.3.17) e (3.3.18) nell'espressione che compare nel punto (4) dell'Enunciato 3.3.4, otteniamo la seguente *relazione ricorsiva* per gli

$\xi_i^l(x)$:

$$\xi_i^l(x) = \lim_{h\to\infty} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij}^{l,h}(x)\xi_j^{l-1}\left(y_i^{l,h}(x)\right), \quad \text{per } x \in Q,\ \forall l \geq 1,\ 1 \leq i \leq r. \tag{3.3.19}$$

Per $l = 0$, dalle (3.3.15), (3.3.16) e (3.3.18) otteniamo che

$$\xi_i^0(x) = [i\text{-esima componente di } v(x)]\,. \tag{3.3.20}$$

Poiché $\beta_{ij}^{l,h}(x)$ e $y_i^{l,h}(x)$ non dipendendono dai vettori $v(y)$, $y \in Q$, le formule (3.3.19) e (3.3.20) esprimo ogni $\xi_i^l(x)$ come un *limite iterato in termini dei vettori* $v(y)$, $y \in Q$: in particolare abbiamo che gli $\xi_i^l(x)$ *dipendono linearmente dai vettori* $v(y)$, $y \in Q$.

Evidenziamo che risulta essere di particolare interesse il caso

$$l = 2r + 1$$

in quanto il fibrato

$$\mathcal{H}^{2r+1}\textit{è stabile per raffinamento di Glaeser},$$

come asserito dal Lemma 2.2.4 (*Lemma di stabilizzazione*) dimostrato nella sottosottosezione 2.2.2.1.

Visto che $\tilde{\lambda}_1^{2r+1}(x), \ldots, \tilde{\lambda}_r^{2r+1}(x)$ formano una base di $\mathbb{R}^r$ per ogni $x \in Q$, possiamo allora affermare che esistono vettori $w_1(x), \ldots, w_r(x) \in \mathbb{R}^r$ per ogni $x \in Q$ tali che

$$v = \sum_{i=1}^{r} \langle \tilde{\lambda}_i^{2r+1}(x), v\rangle w_i(x), \quad \forall v \in \mathbb{R}^r,\ \forall x \in Q. \tag{3.3.21}$$

Notiamo che i vettori $w_1(x), \ldots, w_r(x) \in \mathbb{R}^r$ dipendono solo da $\mathcal{H}^{0,0}$, non dai vettori $v(y)$ $(y \in Q)$.

Considerando $v = v^{2r+1}(x)$ nella (3.3.21) e richiamando la (3.3.17), vediamo che

$$v^{2r+1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \xi_i^{2r+1}(x)\, w_i(x), \quad \forall x \in Q. \tag{3.3.22}$$

In sintesi quindi determiniamo gli $\xi_i^l(x)$ mediante le ricorsioni (3.3.19) e (3.3.20) e poi calcoliamo $v^{2r+1}(x)$ grazie alla formula (3.3.22).

Qui giunti notiamo che, poiché $(H_x^{0,2r+1})_{x\in Q}$ è semplicemente il $(2r+1)$-esimo raffinamento Glaeser di $\mathcal{H}^{0,0}$, con il procedimento sopra descritto siamo riusciti a calcolare il fibrato *stabile per raffinamento di Glaeser*

$$(v^{2r+1}(x) + H_x^{0,2r+1})_{x\in Q}$$

in termini del fibrato iniziale espresso nella forma indicata nella (3.3.2).

Il nostro prossimo compito sarà *individuare una formula per la determinazione di una sezione di un fibrato stabile per raffinamento di Glaeser* e a tal fine faremo uso dei cubi di Whitney, presentati nella Sezione 2.3. Inoltre, per seplicità di notazione, adotteremo al posto dell'espressione "stabile per raffinamento di Glaeser" la dicitura "Glaeser-invariante".

3.3.3 Caso Glaeser-invariante

Ai fini della seguente trattazione ***supponiamo sia dato un fibrato $\mathcal{H}$ Glaser-invariante con fibre non-vuote***, scritto nella forma (2.2.3) che per chiarezza espositiva riproponiamo qui di seguito

$$\mathcal{H} = (v(x) + H_x^0)_{x\in Q}, \tag{3.3.23}$$

dove $\mathcal{H}^0 = (H_x^0)_{x\in Q}$ è un *fibrato omogeneo,* con H_x^0 *sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^r$, Q *cubo chiuso in* $\mathbb{R}^n$ e

$$v(x) \perp H_x^0 \quad \text{per ogni } x \in Q. \tag{3.3.24}$$

Precisiamo che anche in questa sottosezione faremo uso del *prodotto interno standard* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ *definito su* $\mathbb{R}^r$ e il nostro scopo sarà ***trovare una formula per la determinazione di una sezione F del fibrato $\mathcal{H}$.***

Andiamo ora a enunciare e dimostrare un teorema il cui consolidamento significherà avere raggiunto lo scopo prefissato.

Teorema 3.3.5. *Dato $\mathcal{H}$ fibrato Glaeser-invariante con fibre non-vuote, come da* (3.3.23) *e* (3.3.24), *si possono scegliere*

$$S(x) \subset Q \textit{ insieme finito}, \quad \forall x \in Q, \tag{3.3.25}$$

$$A(x,y) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r \textit{ mappa lineare}, \quad \forall x \in Q,\ y \in S(x), \tag{3.3.26}$$

in modo che la funzione $F : Q \to \mathbb{R}^r$ definita da

$$F(x) = \sum_{y \in S(x)} A(x,y)v(y) \ \in \mathbb{R}^r, \quad \forall x \in Q, \tag{3.3.27}$$

sia una sezione del fibrato $\mathcal{H}$ e inoltre:

(1) $\max_{x\in Q} |F(x)| \leq C \sup_{x\in Q} |v(x)|$, *con C costante dipendente solo da n e r;*

(2) *ogni insieme $S(x)$ contiene al più d punti, con d dipendente solo da n e r.*

Note:

– Gli insiemi $S(x)$ e le mappe lineari $A(x,y)$ sono determinate da $\mathcal{H}^0$ e non hanno dipendenza alcuna dalla famiglia dei vettori $(v(x))_{x\in Q}$.

– Poiché $v(x) \in v(x) + H_x^0$ per la condizione (3.3.24) ne segue che

$$\sup_{x\in Q} |v(x)| = \sup_{x\in Q} \operatorname{dist}(0,\, v(x) + H_x^0) = \|\mathcal{H}\| < \infty$$

(si veda la Proposizione 2.2.9).

Dimostrazione. [*Teorema 3.3.5*] Premettiamo alla prova una descrizione qualitativa dell'iter dimostrativo che sarà seguito: inizieremo partizionando Q in un numero finito di "strati", fra cui sceglieremo lo "strato più basso" E_1. Per $x \in E_1$ porremo semplicemente $F(x) = v(x)$. Per definire F su $Q \setminus E_1$, ricopriremo $Q \setminus E_1$ con cubi di Whitney (2.3) Q_h. Ogni Q_h^* fallisce nell'intersecare E_1, per definizione, e perciò ha un numero minore di strati di Q.

Quindi, per induzione sul numero degli strati, possiamo ricavare una formula per una sezione F_h del fibrato $\mathcal{H}$ ristretto a Q_h^* . "Cucendo" insieme le F_h definiremo la sezione F anche su $Q \setminus E_1$ utilizzando la partizione dell'unità di Whitney in modo che la F risulti continua: la partizione dell'unità avrà proprio la funzione di "raccordare" le funzioni F_h.

Iniziamo la dimostrazione. Per prima cosa forniamo alcune definizioni.

Definizione. Per $k = 0, 1, \dots r$, il *k-esimo strato* di $\mathcal{H}$ è definito come segue

$$E(k) := \left\{ x \in Q : \dim H_x^0 = k \right\}. \tag{3.3.28}$$

Definizione. Il *numero di strati* di $\mathcal{H}$ è definito come il numero di $E(k)$ non-vuoti.

Osserviamo che questo numero è almeno 1 e al massimo $r + 1$.

Definizione. Lo *strato più basso*, indicato con E_1, è definito come

$$E_1 := E(k_{min})$$

dove k_{min} è il minor k per il quale $E(k)$ è non-vuoto.

Dimostremo il Teorema 3.3.5 per induzione sul numero di strati, permettendo che le costanti C e d, che compaiono nei punti (1) e (2) dell'enunciato del teorema, dipendano da questo numero, oltre che da n e r. Poiché il numero degli strati è al più pari a $r + 1$, un tale processo induttivo condurrà alla prova del teorema.

Fissiamo quindi un *intero positivo* Λ e assumiamo le ipotesi induttive:

(H1) il Teorema 3.3.5 è vero, con costanti $C_{\Lambda-1}$, $d_{\Lambda-1}$ nei punti (1) e (2) dell'enunciato, per qualsiasi numero di strati minore di Λ.

Proveremo il Teorema 3.3.5, con costanti $C_{\Lambda-1}$, $d_{\Lambda-1}$ nei punti (1) e (2) dell'enunciato, per un numero di strati pari a Λ. In questa situazione C_Λ e d_Λ sono determinati da $C_{\Lambda-1}$, $d_{\Lambda-1}$, n e r. Per fare ciò iniziamo dalle (3.3.23) e (3.3.24) e assumiamo che

(H2) il numero di strati di $\mathcal{H}$ sia uguale a Λ.

Dobbiamo costruire insiemi $S(x)$ e mappe lineari $A(x, y)$ che soddisfino le condizione sopra esposte a partire dalla (3.3.23) fino ai punti (1) e (2) dell'enunciato del teorema, con costanti dipendenti da $C_{\Lambda-1}$, $d_{\Lambda-1}$, n e r: ciò completerà la nostra induziore e proverà il Teorema 3.3.5.

Notazione: Nel proseguio della dimostrazione faremo uso delle notazioni c, C, C', ecc. per indicare *costanti determinate da* $C_{\Lambda-1}$, $d_{\Lambda-1}$, n e r . Con queste notazioni non indicheremo necessariamente le stesse costanti quando usate in espressioni diverse.

La seguente utile osservazione è diretta conseguenza dell'assunzione che il fibrato (3.3.23) sia Glaeser-invariante. Consideriamo $x \in E(k)$ e siano

$$v_1, \cdots, v_{k+1} \in v(x) + H_x^0 \tag{3.3.29}$$

i vertici di un simplesso k-dimensionale [2] (o k-simplesso) affine in $\mathbb{R}^r$. Dato $\epsilon > 0$

- esiste $\delta > 0$ tale che

$$y \in Q \cap B(x, \delta), \quad \text{per ogni } y$$

(con $B(x, \delta)$ palla di centro x e raggio δ);

- esistono $v_1', \cdots, v_{k+1}' \in v(y) + H_y^0$ tali che

$$|v_i' - v_i| < \epsilon, \quad \text{per ogni } i. \tag{3.3.30}$$

[2]

Simplesso k-dimensionale - Un simplesso k-dimensionale è l'*inviluppo convesso* di $k+1$ punti $x_0, \ldots, x_k$ in *posizione generale* in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^r$ ($r \geq k$). I $k+1$ punti sono i vertici del simplesso.

Dove:

- l'***inviluppo convesso*** (o ***involucro convesso***) di un qualsiasi sottoinsieme A di uno spazio vettoriale reale è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono A;
- in uno spazio vettoriale $k+1$ i punti $x_0, \ldots, x_k$ sono detti esserre ***in posizione generale*** se i vettori $(x_2 - x_0)$, $(x_2 - x_0), \ldots, (x_{k+1} - x_0)$ sono linearmente indipendenti. Analogamente, sono in posizione generale se il più piccolo sottospazio affine che li contiene ha dimensione k.

Scegliendo nella (3.3.30) ϵ sufficientemente piccolo, concludiamo che

$$v'_1, \cdots, v'_{k+1} \in v(y) + H_y^0$$

sono i vertici di un k-simplesso affine in $\mathbb{R}^r$.

Quindi dalla (3.3.29) discende in modo immediato che se $x \in E(k)$ allora

$$\dim H_y^0 \geq k, \qquad \forall y \in Q \text{ sufficientemente vicino a } x.$$

In particolare, lo strato più basso E_1 è un *sottoinsieme chiuso non vuoto* di Q. Abbiamo inoltre che dalla (3.3.29), ricordando la (2.2.9), si ha pure che per $k = 0, 1, 2, \cdots, r$ la mappa

$$x \longmapsto v(x) + H_x^0 \tag{3.3.31}$$

è continua da $E(k)$ all'insieme Γ_k di tutti i sottospazi affini k-dimensionali di $\mathbb{R}^r$ con la topologia indotta dalla superiore e inferiore semicontinuità[3] della mappa multivoca (3.3.31).

Notiamo ora che, essendo ogni H_x^0 un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^r$, dalla (3.3.31) si deduce che la mappa $x \longmapsto v(x)$ è continua su $E(k)$ e, in particolare,

$$x \longmapsto v(x) \text{ è continua su } E_1. \tag{3.3.32}$$

[3]• **Superiore semicontinuità:** Siano X, Y spazi topologici e sia $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunzione. Diciamo che F è *semicontinua superiormente nel punto* $x_0 \in X$ se per ogni aperto $A \supseteq F(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 in X tale che

$$F(U) \subseteq A.$$

Diciamo che F è *semicontinua superiormente in* X se F è semicontinua superiormente in ogni punto di X.

• **Inferiore semicontinuità:** Siano X, Y spazi topologici e sia $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunzione. Diciamo che F è *semicontinua inferiormente nel punto* $x_0 \in X$ se per ogni aperto $y_0 \in F(x_0)$ e per ogni intorno N di y_0 in Y esiste un intorno U di x_0 in X tale che

$$F(x) \cap N \neq \emptyset, \quad \forall x \in U.$$

Diciamo che F è *semicontinua inferiormente in* X se F è semicontinua inferiormente in ogni punto di X.

Qui giunti andiamo a considerare i cubi di Whitney $\{Q_h\}$ (vedi sezione 2.3) e la partizione di Whitney dell'unità $\{\theta_h\}$ (vedi Lemma 2.3.3) per l'insieme chiuso $E_1 \subset Q$. In accordo con le notazioni introdotte nella sottosezione 2.3.1, indichiamo con $\mathrm{ctr}(Q_h)$ e δ_h rispettivamente il centro e la lunghezza dello spigolo di Q_h. Inoltre denotiamo con Q_h^* è il cubo di centro $\mathrm{ctr}(Q_h)$ e lunghezza di spigolo $3\delta_h$.
Osserviamo ora che dai risultati sui cubi di Whitney, presentati nella sottosezione 2.3.2, deriva quanto segue. Dai punti (i), (ii), (iii) e (iv) del Lemma 2.3.2 si hanno, rispettivamente,

$$\delta_h \leq \mathrm{dist}(E_1,\, Q_h^*) \leq C\delta_h, \quad \forall h. \tag{3.3.33}$$

$$Q_h^* \cap E_1 = \varnothing, \quad \forall h. \tag{3.3.34}$$

$$\bigcup_h Q_h = Q \setminus E_1. \tag{3.3.35}$$

$$\begin{gathered}\text{Ogni fissato } y \in Q \setminus E_1 \text{ ha un intorno che interseca } Q_h^* \\ \text{per al più } C \text{ distinti cubi di Whitney } Q_h^*.\end{gathered} \tag{3.3.36}$$

Dai punti (i), (ii) e (iii) del Lemma 2.3.3 si hanno:

$$\begin{gathered}\text{Ogni } \theta_h \text{ è una funzione continua non}-\text{negativa su } Q \\ \text{nulla su } Q \setminus Q_h^*.\end{gathered} \tag{3.3.37}$$

$$\sum_h \theta_h(x) = 1,\ \forall x \in Q \setminus E_1; \qquad \sum_h \theta_h = 0,\ \forall x \in E_1. \tag{3.3.38}$$

Grazie alla (3.3.33), essendo E_1 chiuso e limitato e quindi compatto, possiamo scegliere $x_h \in E_1$ tale che:

$$\mathrm{dist}(x_h,\, Q_h^*) \leq C\delta_h. \tag{3.3.39}$$

Interrompiamo la dimostrazione del Teorema 3.3.5 per andare a provare la proprietà di continuità delle fibre $v(x) + H_x^0$. Adottando le notazioni inerenti i cubi di Whitney già sopra richiamate, si ha quanto segue.

Lemma 3.3.6. *Sia* Q un cubo chiuso in $\mathbb{R}^n$, *sia* $\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q} = (v(x) + H_x^0)_{x\in Q}$ *un fibrato espresso secondo la notazione* (2.2.3) e sia E_1 *un sottoin-*

sieme chiuso non-vuoto di Q *. Dato* $x \in E_1$ *e* $\epsilon > 0$*, esiste allora* $\delta > 0$ *per cui vale quanto segue. Sia* Q_h *un cubo di Whitney tale che* $\operatorname{dist}(x, Q_h^*) < \delta$*, allora*

(1) $|v(x) - v(x_h)| < \epsilon$;

(2) $\operatorname{dist}(v(x), v(y) + H_y^0) < \epsilon, \quad \forall y \in Q_h^* \cap Q$.

Dimostrazione. Fissiamo $x \in E_1$ e $\epsilon > 0$. Sia $\delta > 0$ un numero sufficientemente piccolo, che verrà scelto in seguito. Sia Q_h un cubo di Whitney tale che

$$\operatorname{dist}(x, Q_h^*) < \delta. \tag{3.3.40}$$

Quindi, per la (3.3.33), si ha

$$\delta_h \leq \operatorname{dist}(E_1, Q_h^*) \leq \operatorname{dist}(x, Q_h^*) < \delta. \tag{3.3.41}$$

Da cui considerando le (3.3.39) e (3.3.40) e ricordando la disuguaglianza triangolare discende

$$|x - x_h| \leq \underbrace{\operatorname{dist}(x, Q_h^*)}_{\leq \delta} + \underbrace{\operatorname{diam}(Q_h^*)}_{=3\sqrt{2}\delta_h} + \underbrace{\operatorname{dist}(x_h, Q_h^*)}_{\leq C\delta_h} \leq \delta + (C + 3\sqrt{2})\delta_h \underset{\substack{\uparrow \\ \delta_h < \delta}}{\leq} C'\delta. \tag{3.3.42}$$

Poiché x e x_h appartengono entrambi a E_1, la (3.3.42) implica la relazione al punto (1) dell'enunciato di questo lemma, grazie alla (3.3.32) e alla scelta di un δ sufficientemente piccolo. Inoltre, dalle (3.3.40) e (3.3.41), vediamo che $\forall y \in Q_h^* \cap Q$ vale

$$|y - x| \leq \operatorname{diam}(Q_h^*) + \operatorname{dist}(x, Q_h^*) < C\delta_h + C\delta \leq C'\delta.$$

Poiché il fibrato $(v(z) + H_z^0)_{z \in Q}$ è Glaeser-invariante, ne segue che la relazione al punto (2) dell'enunciato di questo lemma è vera, purché si prenda δ sufficientemente piccolo.

Scegliamo ora $\delta > 0$ abbastanza piccolo da far sì che quanto sopra esposto sussista. Le (1) e (2) risultano quindi vere e la prova del Lemma 3.3.6 è così completa. □

Riprendiamo ora la dimostrazione del Teorema 3.3.5.

Per ogni cubo Q_h ci prepariamo ad applicare l'ipotesi induttiva (H1) alla famiglia di sottospazi affini

$$\mathcal{H}_h = (v(y) - v(x_h) + H_y^0)_{y \in Q_h^* \cap Q}. \tag{3.3.43}$$

Poiché $Q_h^* \cap Q$ è una scatola rettangolare chiusa, ma non necessariamente un cubo, può accadere che il (3.3.43) non risulti essere un fibrato. La strategia per evitare ciò sta nel fissare una *mappa affine*

$$\rho_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{t.c.} \quad \rho_h(Q^0) = Q_h^* \cap Q, \quad \text{con } Q^0 \text{ cubo unitario.}$$

Si ha allora che la *famiglia di spazi affini*

$$\check{\mathcal{H}}_h = (v(\rho_h(\check{y})) - v(x_h) + H^0_{\rho_h(\check{y})})_{\check{y} \in Q^0} \quad \text{è un fibrato.} \tag{3.3.44}$$

Riscriviamo ora la (3.3.43) nella forma

$$\mathcal{H}_h = (v_h(y) + H_y^0)_{y \in Q_h^* \cap Q}, \tag{3.3.45}$$

dove

$$v_h(y) \perp H_y^0, \quad \forall y \in Q_h^* \cap Q. \tag{3.3.46}$$

Il vettore $v_h(y)$ è dato da

$$v_h(y) = \Pi_y v(y) - \Pi_y v(x_h), \quad \forall y \in Q_h^* \cap Q, \tag{3.3.47}$$

dove Π_y indica la *proiezione ortogonale* da $\mathbb{R}^r$ sull'ortocomplemento di H_y^0 .

Passando ora al fibrato $\check{\mathcal{H}}_h$, abbiamo che

$$\check{\mathcal{H}}_h = (\check{v}_h(\check{y}) + H^0_{\rho_h \check{y}})_{\check{y} \in Q^0} \tag{3.3.48}$$

con

$$\check{v}_h(\check{y}) \perp H^0_{\rho_h \check{y}}, \quad \forall \check{y} \in Q^0. \tag{3.3.49}$$

Qui i $\check{v}_h(\check{y})$ sono dati da

$$\check{v}_h(\check{y}) = v_h(\rho_h(\check{y})). \tag{3.3.50}$$

Si vede in modo semplice che $\check{\mathcal{H}}_h$ è un fibrato Glaeser-invariante con fibre non-vuote. Inoltre, dalla (H2) e dal Lemma 3.3.6, osserviamo che la funzione $y \longmapsto \dim H^0_y$ assume al più $\Lambda - 1$ valori al variare di y su $Q^*_h \cap Q$. Abbiamo perciò che il fibrato $\check{\mathcal{H}}_h$ ha al più $\Lambda - 1$ strati.

Quindi l'ipotesi induttiva (H1) è applicabile al fibrato $\check{\mathcal{H}}_h$ e ne consegue che per la famiglia di spazi affini $\mathcal{H}_h$ si raggiungono i risultati riportati di seguito.
Otteniamo gli insiemi

$$S_h(x) \subset Q^*_h \cap Q, \quad \forall x \in Q^*_h \cap Q, \tag{3.3.51}$$

e le mappe lineari

$$A_h(x,y) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r, \quad \forall x \in Q^*_h \cap Q, \, \forall y \in S_h(x). \tag{3.3.52}$$

Inoltre abbiamo che

$$\text{Ogni } S_h(x) \text{ contiene al più C punti.} \tag{3.3.53}$$

$$\text{Gli } S_h(x) \text{ e le } A_h(x,y) \text{ sono determinati da } (H^0_z)_{z \in Q^*_h \cap Q}. \tag{3.3.54}$$

In aggiunta ponendo

$$F_h(x) = \sum_{y \in S_h(x)} A_h(x,y) v_h(y), \quad \forall x \in Q^*_h \cap Q, \tag{3.3.55}$$

troviamo che

$$F_h \text{ è continua su } Q^*_h \cap Q, \tag{3.3.56}$$

$$F_h(x) \in v_h(x) + H^0_x = v(x) - v(x_h) + H^0_x, \quad \forall x \in Q^*_h \cap Q, \tag{3.3.57}$$

$$\max_{x \in Q^*_h \cap Q} |F_h(x)| \leq C \sup_{y \in Q^*_h \cap Q} |v_h(y)| \,. \tag{3.3.58}$$

Andiamo ora a stimare l'espressione al secondo membro della (3.3.58). Dalla

(3.3.47), per la disuguaglianza triangolare della norma, abbiamo che

$$|v_h(y)| = |\Pi_y v(y) - \Pi_y v(x_h)| \leq |\Pi_y v(y)| + |\Pi_y v(x_h)| \,.$$

Notiamo poi che, poiché $y \in Q_h^* \cap Q$ e $x_h \in Q$, vale

$$|\Pi_y v(y)| + |\Pi_y v(x_h)| \leq 2 \sup_{y \in Q} |v(y)|$$

e quindi deduciamo che per ogni Q_h possiamo scrivere

$$\sup_{y \in Q_h^* \cap Q} |v_h(y)| \leq 2 \sup_{y \in Q} |v(y)| \,. \tag{3.3.59}$$

Inoltre, siano $x \in E_1$, $\epsilon > 0$ dati e sia δ come nel Lemma 3.3.6. Considerato un qualsiasi Q_h tale che $\text{dist}(x,\, Q_h^*) < \delta$ e un qualsiasi $y \in Q_h^* \cap Q$, il Lemma 3.3.6 afferma che $|v(x) - v(x_h)| < \epsilon$ e $\text{dist}(v(x),\, v(y) + H_y^0) < \epsilon$. Osserviamo quindi che

$$\text{dist}(0, v(y) - v(x_h) + H_y^0) \leq \underbrace{\text{dist}(v(x), v(x_h))}_{<\epsilon} + \underbrace{\text{dist}(v(x), v(y) + H_y^0)}_{<\epsilon}.$$

Ne segue che

$$\text{dist}(0, v(y) - v(x_h) + H_y^0) < 2\epsilon \quad \text{e} \quad |v(x) - v(x_h)| < \epsilon. \tag{3.3.60}$$

Dalle (3.3.43), (3.3.45) e (3.3.46) vediamo che $v_h(y)$ è il più corto vettore dello spazio affine $v(y) - v(x_h) + H_y^0$ in quanto è perpendicolare a H_y^0. Quindi dalla (3.3.60) si deduce che

$$|v_h(y)| \leq \text{dist}(0, v_h(y)) = \text{dist}(0, v(y) - v(x_h) + H_y^0) < 2\epsilon.$$

Otteniamo in tal modo il seguente risultato.

Siano $x \in E_1$, $\epsilon > 0$ dati e sia δ come nel Lemma 3.3.6, allora, *per qualsiasi* Q_h *tale che* $\operatorname{dist}(x, Q_h^*) < \delta$, *abbiamo*

$$\sup_{y \in Q_h^* \cap Q} |v_h(y)| \le 2\epsilon \quad \text{e} \quad |v(x) - v(x_h)| < \epsilon. \tag{3.3.61}$$

Dalle (3.3.58), (3.3.59), (3.3.61), vediamo che

$$\max_{x \in Q_h^* \cap Q} |F_h(x)| \le C \sup_{y \in Q} |v(y)|, \quad \forall h > 1. \tag{3.3.62}$$

Vale così quanto segue.

Siano $x \in E_1$, $\epsilon > 0$, *sia* δ *come nel Lemma 3.3.6 e sia* $y \in Q_h^* \cap Q \cap B(x, \delta)$. *Abbiamo allora, dalle (3.3.58) e (3.3.61),*

$$|F_h(y)| \le \underbrace{C}_{\substack{=2C,\, con\, C \\ come\, sopra}} \epsilon \qquad e \qquad |v(x) - v(x_h)| < \epsilon. \tag{3.3.63}$$

Definiamo ora una mappa $F : Q \to \mathbb{R}^r$, ponendo

$$F(x) = v(x), \qquad \text{per } x \in E_1, \tag{3.3.64}$$

$$F(x) = \sum_h \theta_h(x) \left(F_h(x) + v(x_h)\right), \quad \text{per } x \in Q \setminus E_1. \tag{3.3.65}$$

Notiamo che la (3.3.65) è ben posta visto che la sommatoria ha un numero finito di termini e $\theta_h = 0$ al di fuori dell'insieme in cui F_h è definita.

Andiamo a mostrare che F è data in termini dei $(v(x))_{y \in Q}$ mediante una formula della forma (3.3.27) e che risultano soddisfatte le condizioni sia nelle (3.3.25) e (3.3.26) che nei punti (1) e (2) del Teorema 3.3.5. Come già evidenziato subito dopo l'ipotesi (H2), completeremo così l'induzione su Λ, terminando in tal modo la prova del Teorema 3.3.5.
Innanzi tutto, verifichiamo che la nostra $F(x)$ sia esprimibile nella forma (3.3.27) per opportuni $S(x)$ e $A(x, y)$. Procediamo per casi.
− Se $x \in E_1$, già la (3.3.64) ha la forma (3.3.27) con

$$S(x) = \{x\} \quad \text{e} \quad A(x, y) = I = \text{identità}. \tag{3.3.66}$$

– Se $x \in Q \smallsetminus E_1$, allora $F(x)$ è definita dalla (3.3.65).

Grazie alla (3.3.37) possiamo restringere la sommatoria nella (3.3.65) agli h tali che $x \in Q_h^*$. Per ogni h, sostituiamo la (3.3.47) nella (3.3.55) e poi andiamo a inserire la formula così ottenuta per $F_h(x)$ nella (3.3.65). Otteniamo che

$$F(x) = \sum_{Q_h^* \ni x} \theta_h(x) \left(v(x) + \sum_{y \in S_h(x)} A_h(x,y) \left(\Pi_y v(y) - \Pi_y v(x_h) \right) \right) \quad (3.3.67)$$

che è un'espressione della forma (3.3.27). Abbiamo così che in tutti i casi F è data da una formula del tipo della (3.3.27).

Inoltre, esaminando la (3.3.66) e la (3.3.67) (e richiamando le (3.3.51)–(3.3.54) così come la (3.3.55)), osserviamo che le (3.3.25) e (3.3.26) sono verificate e che nella nostra formula (3.3.67) ogni $S(x)$ contiene al più C punti. Ne consegue che il punto (2) del Teorema 3.3.5 sussiste considerando un opportuno d_Λ al posto di d.

Resta da provare il punto (1) del Teorema 3.3.5 e dimostrare che la nosta F è una sezione del fibrato $\mathcal{H}$. Dobbiamo quindi mostrare quanto segue:

$$F : Q \to \mathbb{R}^r \text{ è continua.} \quad (3.3.68)$$

$$F(x) \in v(x) + H^0, \ \forall x \in Q. \quad (3.3.69)$$

$$|F(x)| \leq C \sup_{y \in Q} |v(y)|, \ \forall x \in Q. \quad (3.3.70)$$

La dimostrazione del Teorema 3.3.5 si riconduce dunque a provare le (3.3.68), (3.3.69) e (3.3.70).

• Dimostriamo la (3.3.68). Fissato $x \in Q$, mostriamo che F è continua in x.

– Se $x \notin E_1$, allora dalle (3.3.36), (3.3.37), (3.3.56) e (3.3.65) si deduce in modo semplice che F è continua in x, in quanto somma finita di prodotti di funzioni continue in un intorno di x.

– Se $x \in E_1$, per mostrare che F è continua in x, dobbiamo provare che

$$\lim_{y \to x,\, y \in E_1} v(y) = v(x) \quad (3.3.71)$$

e che

$$\lim_{y \to x,\, y \in Q \setminus E_1} \sum_h \theta_h(y) \left(F_h(y) + v(x_h) \right) = v(x). \tag{3.3.72}$$

Otteniamo la (3.3.71) come immediata conseguenza della (3.3.32). Per provare la (3.3.72) richiamiamo la (3.3.63). Dato $\delta > 0$ e dati $\epsilon > 0$ e x come nella (3.3.63), sia $y \in Q \setminus E_1$ con $|y - x| < \delta$. Per ogni h tale che $y \in Q_h^*$ dalla (3.3.63) si ottiene

$$|\theta_h(y) \left(F_h(y) + v(x_h) - v(x) \right)| \leq |\theta_h(y)| \; (\underbrace{|(F_h(y)|}_{<C\epsilon} + \underbrace{|v(x_h) - v(x)|}_{<\epsilon})$$

da cui

$$|\theta_h(y) \left(F_h(y) + v(x_h) - v(x) \right)| \leq C\epsilon\theta_h(y). \tag{3.3.73}$$

Per ogni h tale che $y \notin Q_h^*$ la prova della veridicità della (3.3.73) è immediata poiché $\theta_h(h) = 0$ e quindi la (3.3.73) risulta valida per qualsiasi valore di h. Sommando su h e richiamando la (3.3.38), concludiamo che

$$\left| \sum_h \theta_h(y) \left(F_h(y) + v(x_h) - v(x) \right) \right| \leq C\epsilon, \quad \forall y \in Q \setminus E_1 : \; |y - x| < \delta.$$

La prova della (3.3.72) è così completata e quindi anche la (3.3.68) risulta dimostrata.

- Passiamo a provare la (3.3.69) procedendo nuovamente per casi.

− Se $x \in E_1$, la (3.3.69) risulta dimostrata in modo immediato ricordando la (3.3.64).

− Se $x \in Q \setminus E_1$, allora la (3.3.57) ci dice che

$$\left(F_h(x) + v(x_h) \right) \in v(x) + H_x^0, \quad \forall h : \; x \in Q_h^*.$$

Poiché $\theta_h(x) = 0$, $\forall x \notin Q_h^*$ e $\sum_h \theta_h(x) = 1$, abbiamo che

$$\sum_h \theta_h(x) \left(F_h(x) + v(x_h) \right) \in v(x) + H_x^0,$$

cioè

$$F(x) \in v(x) + H_x^0.$$

Deduciamo quindi che la (3.3.69) vale in tutti i casi.

- Dimostriamo infine la (3.3.70).

− Se $x \in E_1$, la prova della (3.3.70) è immediata a partire dalla definizione (3.3.64).

− Se $x \in Q \setminus E_1$, allora, qualsiasi sia h tale che $x \in Q^*_{h.}$, dalla (3.3.62) abbiamo

$$|\theta_h(x)\,(F_h(x) + v(x_h))| \underset{\big|F_h(x)|\leq C\sup_{y\in Q}|v(y)|\big|}{\underset{\uparrow}{\leq}} C\theta_h(x)\sup_{y\in Q}|v(y)|. \tag{3.3.74}$$

La stima della (3.3.74) risulta banalmente soddisfatta per $x \notin Q^*_h$, poiché in tal caso $\theta_h(x) = 0$. Ne ricaviamo quindi che la (3.3.74) vale per tutti gli h e sommando su h, grazie alle (3.3.38) e (3.3.65), troviamo che

$$|F(x)| \leq \sum_h |\theta_h(x)\,(F_h(x) + v(x_h))| \leq C\sup_{y\in Q}|v(y)| \sum_h \theta_h(x) = C\sup_{y\in Q}|v(y)|,$$

il che prova la (3.3.70).

La dimostrazione del Teorema 3.3.5 risulta in tal modo completa. □

Sia $\tilde{F}$ una sezione del fibrato $\mathcal{H}$ considerato nel Teorema 3.3.5. Abbiamo che

$$|v(x)| \leq |\tilde{F}(x)|, \quad \forall x \in Q$$

poiché

$$F(x) \in v(x) + H_x^0 \qquad e \qquad v(x) \perp H_x^0.$$

Osserviamo quindi che la sezione F prodotta dal Teorema 3.3.5 soddisfa la relazione

$$\max_{x\in Q}|F(x)| \leq C\max_{x\in Q}|\tilde{F}(x)|,$$

dove C dipende solo da n e r.

3.4 Calcolo della sezione di un fibrato

Al fine del calcolo della sezione di un dato fibrato andremo a combinare i risultati visti nelle ultime sottosezioni. Sia

$$\mathcal{H} = (v(x) + H_x^0)_{x \in Q} \text{ un fibrato,} \tag{3.4.1}$$

dove

$$\mathcal{H}^0 = (H_x^0)_{x \in Q} \text{ è un fibrato omogeneo} \tag{3.4.2}$$

e

$$v(x) \perp H_x^0, \quad \forall x \in Q. \tag{3.4.3}$$

Assumiamo che $\mathcal{H}$ abbia una sezione, allora il raffinamento di Glaeser iterato di $\mathcal{H}$ ha fibre non-vuote e può perciò essere espresso come

$$\mathcal{H}^l = (v^l(x) + H_x^{0,l})_{x \in Q}, \tag{3.4.4}$$

dove

$$\mathcal{H}^{0,l} = (H_x^{0,l})_{x \in Q} \text{ è un fibrato omogeneo} \tag{3.4.5}$$

e

$$v^l(x) \perp H_x^{0,l}, \quad \forall x \in Q. \tag{3.4.6}$$

Siano $\xi_i^l(x) \in \mathbb{R}$, $y_i^{l,h}(x) \in Q$, $\beta_{ij}^{l,h}(x) \in \mathbb{R}$, $w_i(x) \in \mathbb{R}^r$, come nella sottosezione 3.3.2. Allora

$$\xi_i^0(x) = [i\text{-esima componente di } v(x)], \quad \forall x \in Q, \tag{3.4.7}$$

$$\xi_i^l(x) = \lim_{h \to \infty} \sum_{j=1}^r \beta_{ij}^{l,h}(x) \xi_i^{l-1}(y_i^{l,h}(x)), \quad \forall x \in Q,\ 1 \leq l \leq 2r+1,\ 1 \leq i \leq r \tag{3.4.8}$$

e

$$v^{2r+1}(x) = \sum_{j=1}^r \xi_i^{2r+1}(x) w_i(x), \quad \forall x \in Q. \tag{3.4.9}$$

Ricordiamo che $\beta_{i,j}^{l,h}(x)$, $y_i^{l,h}(x)$ e $w_i(x)$ sono determinati dal fibrato omogeneo

$\mathcal{H}^0$, indipendentemente dai vettori $(v(z))_{z\in Q}$. Osserviamo che il fibrato

$$\mathcal{H}^{2r+1} = (v^{2r+1}(x) + H_x^{0,2r+1})_{x\in Q}$$

è *Glaeser-invariante* con *fibre non-vuote*

quindi i risultati della sottosezione 3.3.3 valgono per $\mathcal{H}^{2r+1}$. Otteniamo così una sezione di $\mathcal{H}^{2r+1}$ della forma

$$F(x) = \sum_{y\in S(x)} A(x,y)\, v^{2r+1}(y), \quad \forall x \in Q, \tag{3.4.10}$$

dove

$$\begin{aligned} &S(x) \subset Q,\ \#(S(x)) \leq d, \qquad \forall x \in Q,\\ &A(x,y) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r \text{ è una mappa lineare}, \qquad \forall x \in Q,\ \forall y \in S(x). \end{aligned}$$

La nostra sezione F soddisfa la relazione

$$\max_{x\in Q} |F(x)| \leq C \max_{x\in Q} |\tilde{F}(x)|, \text{ per qualsiasi sezione } \tilde{F} \text{ di } \mathcal{H}^{2r+1}. \tag{3.4.11}$$

Qui C e d dipendono solo da n e r e $S(x)$ e $A(x,y)$ sono determinati da $\mathcal{H}^{0,2r+1}$, indipendentemente dai vettori $v^{2r+1}(z)$, $z \in Q$.

Ricordiamo ora che i fibrati $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^{2r+1}$ hanno le stesse sezioni. Abbiamo perciò che, sostituendo la (3.4.9) nella (3.4.10) e ponendo

$$A_i(x,y) = A(x,y)\, w_i(y) \in \mathbb{R}^r, \qquad \forall x \in Q, \forall y \in S(x), i = 1, \dots, r, \tag{3.4.12}$$

troviamo che

$$F(x) = \sum_{y\in S(x)} \sum_{i=1}^{r} \xi_i^{2r+1}(y)\, A_i(x,y), \quad \forall x \in Q. \tag{3.4.13}$$

Inoltre F è una sezione di $\mathcal{H}$ e

$$\max_{x\in Q} |F(x)| \leq C\ \max |\tilde{F}(x)|, \text{ per qualsiasi sezione } \tilde{F} \text{ di } \mathcal{H}. \tag{3.4.14}$$

In aggiunta le $A_i(x, y)$ sono determinate da $\mathcal{H}^0$, indipendentemente dalla famiglia di vettori $(v(z))_{z\in Q}$.

Abbiamo quindi trovato una sezione di $\mathcal{H}$ iniziando con la (3.4.7), calcolando poi gli $\xi_i^l(x)$ usando la ricorsione (3.4.8) e infine applicando la (3.4.13), una volta noto $\xi_i^{2r+1}(x)$. In particolare abbiamo garantito l'esistenza del limite nella (3.4.8).
Sottolineiamo che in questa trattazione è stata essenziale l'assunzione che $\mathcal{H}$ avesse una sezione.

3.5 Calcolo di una soluzione continua di equazioni lineari

Utilizziamo ora i risultati delle sezioni precedenti per **trovare *soluzioni continue*** dell'equazione

$$\phi_1 f_1 + \cdots + \phi_r f_r = \phi, \quad \text{su } Q. \tag{3.5.1}$$

Una tale tipo di soluzione $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ è una sezione del fibrato

$$\mathcal{H} = (H_x)_{x\in Q}, \tag{3.5.2}$$

dove

$$H_x = \{v = (v_1, \ldots, v_r) \in \mathbb{R}^r : \quad v_1 f_1(x) + \cdots + v_r f_r(x) = \phi(x)\}. \tag{3.5.3}$$

Riscriviamo $\mathcal{H}$ nella forma

$$\mathcal{H} = (v(x) + H_x^0)_{x\in Q}, \tag{3.5.4}$$

dove

$$
\begin{aligned}
H_x^0 &= \{v = (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^r : \quad v_1 f_1(x) + \cdots + v_r f_r(x) = 0\}\,, && (3.5.5)\\
v(x) &= \phi(x)(\tilde{\xi}_1(x), \dots, \tilde{\xi}_r(x)) && (3.5.6)
\end{aligned}
$$

con

$$
\tilde{\xi}_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_r(x) = 0, \\ \dfrac{f_i}{(f_1^2(x) + \cdots + f_r^2(x))}, & \text{se } \exists f_i(x) \neq 0,\ 1 \leq i \leq r. \end{cases} \tag{3.5.7}
$$

Notiamo che in tal modo risulta

$$
v(x) \perp H_x^0, \quad \forall x \in Q. \tag{3.5.8}
$$

Riportando a questo caso la trattazione vista nella sezione precente $((3.4.4), \cdots, (3.4.8))$, otteniamo i seguenti oggetti

- i coefficienti

  $\beta_{ij}^{l,h}(x) \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in Q,\ 1 \leq l \leq 2r+1,\ h \geq 1,\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq r;$

- i punti

  $y_i^{l,h}(x) \in Q, \qquad \forall x \in Q,\ 1 \leq l \leq 2r+1,\ h \geq 1,\ 1 \leq i \leq r;$

- gli insiemi finiti

  $S(x) \in Q, \qquad \forall x \in Q;$

- i vettori

  $A_i(x, y) \in \mathbb{R}^r, \qquad \forall x \in Q,\ y \in S(x),\ 1 \leq i \leq r.$

Osserviamo che tutti questi oggetti dipendono solo dalle funzioni $f_1, \dots, f_r$.

Indichiamo ora con $A_{ij}(x,y)$ la i-esima componente del vettore $A_j(x,y)$. Per risolvere la (3.5.1), useremo la seguente procedura.

Procedura 3.5.1. Si inizia calcolando gli $\xi_i^l(x) \in \mathbb{R}$, per tutti gli $x \in Q$, $0 \le l \le 2r+1$, $1 \le i \le r$, mediante la ricorsione:

$$\xi_i^0(x) = \tilde{\xi}_i(x)\,\phi(x), \quad 1 \le i \le r; \tag{3.5.9}$$

$$\xi_i^l(x) = \lim_{h\to\infty} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij}^{l,h}(x)\,\xi_j^{l-1}(y_i^{l,h}(x)), \quad 1 \le i \le r,\ 1 \le l \le 2r+1. \tag{3.5.10}$$

Si prosegue definendo le funzioni $\Phi_1, \dots, \Phi_r : Q \to \mathbb{R}$, ponendo

$$\Phi_i(x) = \sum_{y\in S(x)} \sum_{j=1}^{r} A_{ij}(x,y)\xi_j^{2r+1}(y), \quad \forall x \in Q,\ 1 \le i \le r. \tag{3.5.11}$$

Notiamo che se per un qualche $x \in Q$ e $i = 1, \dots, r$ il limite in (3.5.10) non esiste, allora la Procedura fallisce. Diversamente la Procedura fornisce delle funzioni $\Phi_1, \dots, \Phi_r : Q \to \mathbb{R}$ le quali, però, *non sono necessariamente continue.*

Qui giunti viene in ausilio un risultato che segue in modo diretto dalla trattazione fatta nella sezione precedente e che mostra come, sotto opportune ipotesi, la Procedura descritta sia esaustiva ai fini del raggiungimento dello scopo che ci siamo preposti: più in dettaglio tale risultato ci dice che se l'equazione (3.5.1) ammette una soluzione continua, allora la Procedura 3.5.1 fornisce una soluzione continua ottimale della (3.5.1). Formalizziamo ciò in un teorema.

Teorema 3.5.2. *Considerata la Procedura 3.5.1, si ha che*

(i) *gli oggetti $\tilde{\xi}_i(x)$, $\beta_{ij}^{l,h}(x)$, $y_i^{l,h}(x)$, $S(x)$ e $A_{ij}(x,y)$ dipendono solo dalle funzioni $f_1, \dots, f_r$, e non dalla funzione ϕ;*

(ii) *$\forall x \in Q$, l'insime $S(x) \subset Q$ contiene al più d punti, dove d dipende solo da n e r;*

(iii) *sia* $\phi : Q \to \mathbb{R}$ *e siano* $\phi_1, \ldots, \phi_r : Q \to \mathbb{R}$ *funzioni continue tali che* $\phi_1 f_1 + \cdots + \phi_r f_r = \phi$ *su* Q*, allora la Procedura 3.5.1 fornisce funzioni* $\Phi_1, \ldots, \Phi_r : Q \to \mathbb{R}$ *continue e tali che*

$$\Phi_1 f_1 + \cdots + \Phi_r f_r = \phi \quad \text{su } Q.$$

Inoltre

$$\max_{\substack{x \in Q \\ 1 \le i \le r}} |\Phi_i(x)| \le C \max_{\substack{x \in Q \\ 1 \le i \le r}} |\phi_i(x)|,$$

dove C *dipende solo da* n *e* r*.*

Dimostrazione.

• La prova dei punti (i) e (ii) discende in modo semplice dalla discussione presentata nella precedente sezione.

• Per quanto concerne la prova del punto (iii) è sufficiente richiamare la (3.4.11) nel caso particolare di $F(x) = \Phi(x)$ e $\tilde{F}(x) = \phi(x)$. □

Osservazione. Evidenziamo infine che abbiamo sviluppato la trattazione con ***una singola equazione*** (3.5.1) per funzioni continue $\phi_1, \ldots, \phi_r$. Per affrontare la risoluzione di un ***sistema di equazioni***, è sufficiente considerare nella (3.5.1)

$$f_1, \ldots, f_r \; e \; \phi \quad \text{funzioni } \textit{vettoriali.}$$

Inoltre al posto delle (3.5.6), (3.5.7) e (3.5.8), definiremo

$$v(x) = (\xi_1^0(x), \ldots, \xi_r^0(x))$$

$$\text{il } \textit{più corto vettore} \text{ di } \mathbb{R}^r \text{ soluzione dell'equazione}$$

$$\sum_i \xi_i^0(x) f_i(x) = \phi, \quad \text{per ogni } x \text{ fissatto.}$$

(Se per qualche x questa equazione non ha soluzioni, allora la (3.5.1) non ha soluzioni). Osserviamo che dalle $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ e dalla $\phi(x)$, mediante strumenti dell'algebra lineare, si possono facilmente calcolare gli $\xi_i^0(x)$ ed infine partendo dagli $\xi_i^0(x)$, con l'apporto di modifiche intuitive, si può ripetere la prova del Teorema 3.3.5 .

Capitolo 4

Esempi applicativi del metodo

Nel presente capitolo mostreremo alcuni esempi applicativi del metodo risolutivo presentato nel capitolo precedente. Con maggior dettaglio, risolveremo tre equazioni di complessità via via crescente per poi concludere con un caso in cui, non essendo soddisfatti i prerequisiti richiesti, il metodo permette di constatare la non esistenza di soluzioni continue, provando quindi anche su di un piano pratico la necessità delle ipotesi assunte nella trattazione teorica.

4.1 Esempio 1

Consideriamo la seguente equazione lineare a coefficienti continui

$$\phi_1 x + \phi_2 y = x, \qquad \text{su } Q = [0,1]^2. \tag{4.1.1}$$

Sia $\mathcal{Z}$ l'insieme degli zeri comuni di $f_1 = x$ e $f_2 = y$:

$$\mathcal{Z} = \{(0,0)\}$$

e sia

$$\mathcal{H} = (H_{(x,y)} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \lambda_1 x + \lambda_2 y = x\})_{(x,y)\in Q}$$

il fibrato associato all'equazione (4.1.1).
Raffiniamo $\mathcal{H}$ secondo Glaeser.

Notiamo che se $(\bar{x},\bar{y}) \neq (0,0)$, la fibra $H_{(\bar{x},\bar{y})}$ non è vuota poiché $\left(\frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}, \frac{\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}\right) \in H_{(\bar{x},\bar{y})}$.

Sia $(\bar{x},\bar{y}) \neq (0,0)$ e $(\lambda_1,\lambda_2) \in H_{(\bar{x},\bar{y})}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}((\lambda_1,\lambda_2), H_{(x,y)}) &= \left\| \frac{x-(\lambda_1 x+\lambda_2 y)}{x^2+y^2}(x,y) \right\| = \\
&= \frac{|\,(1-\lambda_1)x-\lambda_2 y\,|}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})]{} 0 \text{ poiché } (\lambda_1,\lambda_2) \in H_{(\bar{x},\bar{y})}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H^1_{(\bar{x},\bar{y})} = H_{(\bar{x},\bar{y})},\ .\text{ se } \ (\bar{x},\bar{y}) \neq (0,0).$$

Se $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ allora $H_{(0,0)} = \mathbb{R}^2$, ovvero $H_{(0,0)} \neq \emptyset$ quindi esiste $(\lambda_1,\lambda_2) \in H_{(0,0)}$. Procediamo a raffinare la fibra $H_{(0,0)}$:

$$\operatorname{dist}((\lambda_1,\lambda_2), H_{(x,y)}) = \frac{|\,(1-\lambda_1)x+\lambda_2 y\,|}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0, \text{ vero sse } (\lambda_1,\lambda_2) = (1,0).$$

Osserviamo che il fibrato $\mathcal{H}^1$ è Glaeser-invariante.
Consideriamo ora gli strati di $\mathcal{H}^1$:

$$E(0) = \{(0,0)\}; \quad E(1) = [0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

Notiamo che $k_{min} = 0$. Ciò implica che lo *strato più basso* è $E_1 = E(0)$.

Qui giunti osserviamo che il fibrato $\mathcal{H}^1$ è Glaeser-invariante senza fibre vuote: l'equazione (4.1.1) ammette quindi soluzione continua.
Calcoliamo tale soluzione mediante la determinazione della sezione

$$F(x,y) = (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)).$$

Poniamo

$$F(0,0) = v(0,0) = (1,0), \qquad \text{con } v(0,0) \perp H^1_{(0,0)} \text{ e } v(0,0) \in H^1_{(0,0)}.$$

Poniamo inoltre

$$\tilde{E} = [0,1]^2 \setminus E_1.$$

Notiamo che $\tilde{E}$ contiene un solo strato (ovvero $E(1)$) e quindi costituisce, per l'equazione in oggetto, il passo base del metodo descritto nel capitolo precedente. Si ha pertanto che

$$v_1(x_0, y_0) = \underbrace{\Pi_{(x_0,y_0)} v(x_0, y_0)}_{=v(x_0,y_0)} - \Pi_{(x_0,y_0)} \quad v \underbrace{(0\ ,\ 0)}_{\text{poiché } E_1 = \{(0,0)\}}$$

da cui si ricava che

$$v_1(x_0,y_0) = (0, 0), \qquad \forall (x_0, y_0) \in \tilde{E}.$$

Considerando ora la matrice

$$A_1((x, y), (x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0 y_0} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad \text{con } (x_0, y_0) \in \tilde{E}$$

si ha che

$$F_1(x, y) = A_1((x, y), (x_0, y_0))\, v(x_0, y_0) \text{ è } \textit{sezione} \text{ di } \mathcal{H} \text{ su } \tilde{E}.$$

Si ha quindi che $S_1(x, y)$ può essere scelto come segue

$$S_1(x, y) = \{(x_0, y_0)\}\,, \quad \forall (x, y) \in \tilde{E}.$$

Ora applicando il metodo presentato nel Capitolo 3 si ottiene come sezione di $\mathcal{H}$ su Q

$$F(x, y) = \begin{cases} v(0, 0), & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \underbrace{v(0, 0)}_{=(1,0)} + \underbrace{A_1((x, y), (x_0, y_0))v_1(x_0, y_0),}_{=(0,0)} & \text{se } (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x, y) = (1, 0) \text{ è sezione di } \mathcal{H}.$$

E' immediato che essendo F costante è anche continua su Q.

4.2 Esempio 2

Prendiamo in esame l'equazione lineare a coefficienti continui riportata di seguito

$$\phi_1 x + \phi_2 y = x^2, \qquad \text{su } Q = [0,1]^2. \tag{4.2.1}$$

Sia $\mathcal{Z}$ l'insieme degli zeri comuni di $f_1 = x$ e $f_2 = y$:

$$\mathcal{Z} = \{(0,0)\}$$

e sia

$$\mathcal{H} = (H_{(x,y)} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \lambda_1 x + \lambda_2 y = x^2\})_{(x,y)\in Q}$$

il fibrato associato all'equazione (4.2.1).

Con calcoli analoghi a quelli visti nella sezione (4.1), si ottiene che il raffinamento di Glaeser $\mathcal{H}^1$ di $\mathcal{H}$ è tale che

- $H^1_{(x,y)} = H_{(x,y)}$, se $(x,y) \neq (0,0)$;
- $H^1_{(0,0)} = \{(0,0)\}$;
- $\mathcal{H}^1$ è Glaeser-invariante.

Osserviamo che $\mathcal{H}^1$ ha solo i seguenti due strati

$$E(0) = \{(0,0)\}; \quad E(1) = [0,1]^2 \setminus (0,0).$$

Poniamo inoltre

$$\tilde{E} = [0,1]^2 \setminus E(0).$$

Con procedimento analogo a quanto sviluppato nella sezione (4.1) si determina che

$$v_1(x_0,y_0) = \underbrace{\Pi_{(x_0,y_0)} v(x_0,y_0)}_{=v(x_0,y_0)} - \Pi_{(x_0,y_0)} v \underbrace{(0\ ,\ 0)}_{=(0,0)} = v(x_0,y_0) = \frac{x_0^2}{x_0^2+y_0^2}\,(x_0,y_0).$$

Assumendo ora la matrice

$$A_1((x,y),(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{x^2+y^2} \cdot \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0^3} & 0 \\ 0 & \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0^2 y_0} \cdot \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad \text{con } (x_0,y_0) \in \tilde{E}$$

abbiamo che

$$F_1(x,y) = A_1((x,y),(x_0,y_0))\, v(x_0,y_0) \text{ è } \textit{sezione}\text{di } \mathcal{H} \text{ su } \tilde{E}.$$

Si ha quindi che $S_1(x,y)$ può essere scelto come segue

$$S_1(x,y) = \{(x_0,y_0)\}\,, \quad \forall (x,y) \in \tilde{E}.$$

Applicando ora il metodo presentato nel capitolo precedente si ottiene come sezione di $\mathcal{H}$ su Q

$$F(x,y) = \begin{cases} \overbrace{v(0,0)}^{=0}, & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \underbrace{v(0,0)}_{=0} + \underbrace{A_1(x,y)v_1(x_0,y_0)}_{=\left(\frac{x^3}{x^2+y^2},\, \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)}, & \textit{se } (x,y) \in [0,1]^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \end{cases}$$

Osserviamo che $F(x,y)$ è continua su tutto Q in quanto

- F è continua per $(x,y) \neq (0,0)$

e

- $F(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} (0,0)$

4.3 Esempio 3

Esaminiamo l'equazione lineare a coefficienti continui riportata di seguito:

$$\phi_1 x^2 + \phi_2 y^2 + \phi_3 xyz^2 = x^2y^2z^2, \qquad \text{su } Q = [0,1]^3. \tag{4.3.1}$$

Sia $\mathcal{Z}$ l'insieme degli zeri comuni di $f_1 = x^2$, $f_2 = y^2$ e $f_3 = xyz^2$:

$$\mathcal{Z} = \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

e sia

$$\mathcal{H} = (H_{(x,y)} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 : \ \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 xyz^2 = x^2y^2z^2\})_{(x,y,z)\in Q}$$

il fibrato associato all'equazione (4.3.1).

Raffiniamo $\mathcal{H}$ secondo Glaeser. Osserviamo che

(i) per $(x, y, z) \neq (0, 0, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$H^1_{(x,y,z)} = H_{(x,y,z)};$$

(ii) per $(x, y, z) = (0, 0, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in H_{(0,0,\alpha)}$, allora

$$\mathrm{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)}) = \frac{\mid x^2y^2z^2 - (\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 xyz^2) \mid}{\sqrt{x^4 + y^4 + x^2y^2z^4}}.$$

- Se $\lambda_1 \neq 0$ sia ha che

  $\mathrm{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)})$ *non* tende a 0 per $(x, y, z) \to (0, 0, \alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

  infatti sulla traiettoria $\begin{cases} y = x^2 \\ z = \alpha \end{cases}$ si ha che

$$\mathrm{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)}) \xrightarrow[(x,x^2,\alpha)]{} \mid \lambda_1 \mid .$$

- Se $\lambda_2 \neq 0$ si ha che

  $\mathrm{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)})$ *non* tende a 0 per $(x, y, z) \to (0, 0, \alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

  infatti sulla traiettoria $\begin{cases} x = y^2 \\ z = \alpha \end{cases}$ si ha che

$$\mathrm{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)}) \xrightarrow[(y^2,y,\alpha)]{} -\lambda_2.$$

- Se $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ si ha che

  − per $xy = 0$ si ha

$$\mathrm{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)}) = 0;$$

  − per $xy \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),H_{(x,y,z)}) &= \frac{\mid x^2y^2z^2-\lambda_3xyz^2\mid}{\sqrt{x^4+y^4+x^2y^2z^4}}=\\ &= \frac{\mid xyz^2-\lambda_3z^2\mid}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+z^4}}.\end{aligned}$$

Notiamo ora che

$$\left(x^2-y^2\right)^2 \geq -x^2y^2 \;\Rightarrow\; x^4+y^4 \geq x^2y^2 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2} \geq 1, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{4.3.2}$$

da cui consegue

$$0 \leq \operatorname{dist}((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),H_{(x,y,z)}) \leq \frac{\mid z^2(xy-\lambda_3)\mid}{\sqrt{1+z^4}} \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,\alpha)]{} \frac{\mid \alpha^2(-\lambda_3)\mid}{\sqrt{1+\alpha^4}}.$$

Osserviamo che
− per $\alpha = 0$: $H^1_{(0,0,\alpha)} = \{(0,0,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3\}$;
− per $\alpha \neq 0$: $H^1_{(0,0,\alpha)} \supseteq \{(0,0,0)\}$.

Tuttavia osserviamo che $H^1_{(0,0,\alpha)} \subseteq \{(0,0,0)\}$ poiché

$$\operatorname{dist}((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),H_{(x,y,z)}) = \frac{\mid xyz^2-\lambda_3z^2\mid}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+z^4}} \xrightarrow[\underbrace{(x,x,z)\to(0,0,\alpha)}_{\text{limite sulla traiettoria } y=x}]{} \frac{\mid \alpha^2(-\lambda_3)\mid}{\sqrt{2+\alpha^2}} = 0$$

Notiamo inoltre che

$$\begin{aligned}\frac{\mid \alpha^2(-\lambda_3)\mid}{\sqrt{2+\alpha^2}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_3 = 0\\ \Longrightarrow H^1_{(0,0,\alpha)} \quad &= \quad \{(0,0,0)\}\end{aligned}$$

In conclusione si deduce che

- $H^2_{(x,y,z)} = H^1_{(x,y,z)} = H_{(x,y,z)}$, se $(x,y,z) \notin \mathcal{Z}$.
- $H^2_{(0,0,\alpha)} = H^1_{(0,0,\alpha)} = \{(0,0,0)\}$, se $\alpha \neq 0$.

- $H^2_{(0,0,0)} = \{(0,0,0)\}$, poiché $H^1_{(0,0,\alpha)} = \{(0,0,0)\}$ se $\alpha \neq 0$, e $(0,0,0)$ è *punto di accumulazione* di (0,0,α) con $\alpha \neq 0$.

Gli strati del sotto-fibrato così ottenuto (che risulta essere Glaeser-invariante) sono

$$E(0) = \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3\right\}; \quad E(1) = Q \setminus E(0).$$

Poniamo inoltre

$$\tilde{E} = [0,1]^3 \setminus E(0).$$

Consideriamo ora $\tilde{E}$ e $(x_0, y_0, z_0) \in \tilde{E}$, si ha che

$$v_1(x_0, y_0, z_0) = \Pi_{(x_0,y_0,z_0)} v(x_0, y_0, z_0) - \Pi_{(x_0,y_0,z_0)} \underbrace{v(0,0,z_0)}_{=(0,0,0)} =$$

$$= v(x, y_0, z_0) = \frac{x^2y^2z^2}{x^4 + y^4 + x^2y^2z^4} (x^2, y^2, xyz^2).$$

Sottolineiamo che è stato scelto $(0,0,z_0)$ in quanto è il punto di $E(0)$ che minimizza la distanza da (x_0, y_0, z_0).
Presa ora la matrice

$$A_1((x,y,z),(x_0,y_0,z_0)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x^4y^2z^2}{x^4+y^4+x^2y^2z^4} \cdot \frac{x_0^4+y_0^4+x_0^2y_0^2z_0^4}{x_0^4y_0^2z_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^2y^4z^2}{x^4+y^4+x^2y^2z^4} \cdot \frac{x_0^4+y_0^4+x_0^2y_0^2z_0^4}{x_0^2y_0^4z_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x^3y^3z^4}{x^4+y^4+x^2y^2z^4} \cdot \frac{x_0^4+y_0^4+x_0^2y_0^2z_0^4}{x_0^3y_0^3z_0^4} \end{pmatrix}$$

con $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, si ha che

$$F_1(x,y,z) = A_1((x,y,z),(x_0,y_0,z_0))v(x_0,y_0,z_0) \text{ è sezione di } \mathcal{H} \text{ su } \tilde{E}.$$

Si ha quindi che $S_1(x,y,z)$ può essere scelto come segue

$$S_1(x,y,z) = \{(x_0,y_0,z_0)\}, \quad \forall (x,y,z) \in \tilde{E}.$$

Applicando ora il metodo presentato nel Capitolo 3 si ottiene come sezione di $\mathcal{H}$ su Q

$$F(x,y,z) = \begin{cases} v(0,0,0), & \text{se } x=y=0 \\ \underbrace{v(0,0,0)}_{=(0,0,0)} + A_1((x,y,z),(x_0,y_0,z_0))v_1(x_0,y_0,z_0), & \text{se } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Verifichiamo la continuità di F per $x=y=0$. Considerata

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x^4y^2z^2}{x^4+y^4+x^2y^2z^4}, \frac{x^2y^4z^2}{x^4+y^4+x^2y^2z^4}, \frac{x^3y^3z^4}{x^4+y^4+x^2y^2z^4} \right)$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{x^4y^2z^2}{x^4+y^4+x^2y^2z^4} \le x^2z^2\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \le \frac{1}{2}x^2z^2\frac{x^4+y^4}{x^4+y^4} \le \frac{x^2z^2}{2} \xrightarrow[x^2+y^2\to 0]{} 0, \\ 0 &\le \frac{x^2y^4z^2}{x^4+y^4+x^2y^2z^4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{analogamente a sopra}}}{\le} \frac{y^2z^2}{2} \xrightarrow[x^2+y^2\to 0]{} 0, \\ 0 &\le \frac{x^3y^3z^4}{x^4+y^4+x^2y^2z^4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{analogamente a sopra}}}{\le} \frac{xyz^4}{2} \xrightarrow[x^2+y^2\to 0]{} 0. \end{aligned}$$

La continuità risulta quindi provata.

4.4 Esempio 4 - Equazione di Hochster

Prendiamo in esame l'equazione di Hochster, equazione lineare a coefficienti continui, ma, come noto da letteratura [1], priva di soluzione continua, ovvero consideriamo

$$\phi_1 x^2 + \phi_2 y^2 + \phi_3 xyz^2 = xyz, \qquad \text{su } Q = [0,1]^3. \tag{4.4.1}$$

Sia $\mathcal{Z}$ l'insieme degli zeri comuni di $f_1 = x^2$, $f_2 = y^2$ e $f_3 = xyz$:

$$\mathcal{Z} = \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

e sia

$$\mathcal{H} = (H_{(x,y)} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 : \; \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 xyz^2 = xyz\})_{(x,y,z)\in Q}$$

il fibrato associato all'equazione (4.4.1).

Con calcoli analoghi a quelli visti nella sezione (4.1), si ottiene che il raffinamento di Glaeser $\mathcal{H}^1$ di $\mathcal{H}$ è tale che

$$H^1_{(x,y,z)} = H_{(x,y,z)}, \quad \text{se } (x,y,z) \notin Q \setminus \mathcal{Z}$$

Osserviamo che per $(x,y,z) = (0,0,\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in H_{(0,0,\alpha)}$, si ha

$$\operatorname{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)}) = \frac{|\; xyz - (\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 xyz) \;|}{\sqrt{x^4 + y^4 + x^2 y^2 z^4}}.$$

Se $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ si ha che

$$\operatorname{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)}) \textit{ non} \text{ tende a } 0 \text{ per } (x,y,z) \to (0,0,\alpha),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Questo implica che

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in H^1_{(0,0,\alpha)} \;\Rightarrow\; (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0).$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} 0 \leq \operatorname{dist}((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), H_{(x,y,z)}) &= \frac{|\; z(1-\lambda_3 z) \;|}{\sqrt{\underbrace{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}}_{\substack{\geq 1, \\ \textit{vedi}\ (4.3.2)}} + \underbrace{z^4}_{\geq 0}}} \\ &\leq \;|\; z(1-\lambda_3 z) \;|\; \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,\alpha)]{} \;|\; \alpha(1-\lambda_3\alpha) \;|\;. \end{aligned}$$

Deduciamo che

– per $\alpha = 0 :\; H^1_{(0,0,\alpha)} = \{(0,0,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\}$;

– per $\alpha \neq 0 :\; H^1_{(0,0,\alpha)} \supseteq \left\{\left(0,0,\frac{1}{\alpha}\right)\right\}$.

Tuttavia osserviamo che $H^1_{(0,0,\alpha)} \subseteq \{(0,0,\frac{1}{\alpha})\}$ poiché

$$\operatorname{dist}((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),H_{(x,y,z)}) = \frac{\mid z(1-\lambda_3 z)\mid}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+z^4}} \xrightarrow[\underbrace{(x,x,z)\to(0,0,\alpha)}_{\text{limite sulla traiettoria } y=x}]{} \frac{\mid \alpha(1-\lambda_3\alpha)\mid}{\sqrt{2+\alpha^2}} = 0$$

Notiamo inoltre che

$$\frac{\mid \alpha(1-\lambda_3\alpha)\mid}{\sqrt{2+\alpha^2}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_3 = \frac{1}{\alpha}$$
$$\Longrightarrow H^1_{(0,0,\alpha)} \quad = \quad \{(0,0,\frac{1}{\alpha})\}$$

Qui giunti va, però, osservato che $H^1_{(0,0,0)}$ *non è Glaeser-invariante*, infatti $(0,0,\frac{1}{\alpha}-\lambda_3)$ *non* tende a 0 per $\alpha \longrightarrow 0$, $\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
Operando un successivo raffinamento di Glaeser si trova che

$$H^2_{(0,0,0)} = \emptyset,$$

ovvero il fibrato ha una *fibra vuot*a ed è pertanto violata la condizone necessaria e sufficiente affinché il fibrato $\mathcal{H}$ abbia sezione. Se ne conclude che $\mathcal{H}$ *non ha sezione,* il ché equivale ad affermare che *l'equazione* (4.4.1) *non ha soluzione continua,* come premesso in apertura di questa sezione. Risulta così mostrata anche su un piano pratico la necessità delle condizioni poste nella trattazione teorica del metodo presentato.

Bibliografia

[1] C. Fefferman, J. Kollar, *Continuous Solutions of Linear Equations*, From Fourier analysis and number theory to Radon transforms and geometry, Dev. Math., vol. 28, Springer, New York, 2013, pp. 233-282. MR 2986959

[2] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 3, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967. MR0212575 (35 #3446)

[3] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970

[4] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), no. 1, 63–89. MR1501735

[5] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds, Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. 1, Masson & Cie, ´Editeurs, Paris, 1968. 0251745 (40 #4972)

Ringraziamenti

Vorrei esprimere la mia più sentita gratitudine al Prof. Parmeggiani che nel corso di questi tre anni, sia come mio docente che come mio tutor del Collegio Superiore, ha seguito sempre con grande attenzione e pazienza il mio desiderio di approfondimento, tanto di argomenti pertinenti i corsi frequentati che di tematiche di mio interesse personale. Ogni volta ho riscontrato una totale disponibilità e stupefacente competenza che attualmente costituisce per me il modello formativo da perseguire.
Un caro pensiero va poi alla mia famiglia che mi ha seguito in tutto il corso di studi con grande rigore, ma anche calore, senza mai mancare di farmi sentire la sua presenza specie nei momenti più difficili.
Infine vorrei ricordare quello splendido *gas di studenti* che ha costituito il mio anno di corso: in un ambiente accademico le frequentazioni intellettuali, la loro vivacità e persistenza sono elemento fondamentale per la costruzione di conoscenza. Compagni diversi intorno a me sarebbero risultati in un diverso matematico in me.
A tutti un grazie di cuore.