Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Formule di Rappresentazione e Formule di Media per Funzioni Armoniche

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Lisa Lazzari

II Sessione
Anno Accademico 2017/2018

Alla mamma, al babbo e
a Luca.

Introduzione

Gli oggetti di studio di questa tesi sono le funzioni armoniche e le loro proprietà principali.

Nel primo capitolo vengono presentate alcune nozioni fondamentali per la comprensione dell'elaborato. Viene innanzitutto data la definizione di funzione armonica: funzione di classe C^2 definita su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, che è soluzione dell'equazione di Laplace:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Quest'importante equazione, il cui nome deriva dal matematico, fisico e astronomo Pierre Simon de Laplace, è l'equazione omogenea associata all'equazione di Poisson. Nel XVIII sec. vennero impiegate le equazioni alle derivate parziali per lo studio di fenomeni fisici, come ad esempio l'analisi della corda vibrante. Laplace riformulò problemi di attrazione e repulsione di corpi soggetti a forze newtoniane riguardanti la meccanica celeste e l'elettrostatica, utilizzando proprio queste equazioni. La soluzione di tali equazioni è una funzione u, chiamata potenziale della forza, che ha come derivate parziali l'opposto delle componenti della forza stessa. Nel 1795, Laplace pubblica un articolo *Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes* in cui introduce la funzione potenziale e dimostra che è soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche. Questo risultato, assieme all'equazione di Poisson, permise di semplificare la soluzione di problemi al contorno nel caso di oggetti simili a sfere, le cui soluzioni approssimate sono funzioni armoniche.
Successivamente vengono prese in analisi tre particolari proprietà dell'operatore di Laplace e, infine, vengono definite le funzioni radiali.

Nel secondo capitolo vengono analizzate le formule di rappresentazione di Green, per funzioni armoniche. Prima di tutto vengono fornite le nozioni fondamentali di aperto regolare, normale esterna, integrazione per parti e divergenza, per arrivare infine ad enunciare e dimostrare il teorema di divergenza: dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare e $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\int_{\Omega} divF \, dx = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > \, d\sigma.$$

Grazie a questo teorema, vengono poi analizzate la prima e la seconda identità di Green e, dopo aver definito anche la soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione di Laplace, sarà definita e dimostrata la prima formula di rappresentazione.
La seconda formula di rappresentazione verrà enunciata grazie all'introduzione della formula di Green. Il capitolo termina con il nucleo di Poisson e l'analisi della funzione di Green sul disco $D(0, r)$.

Il terzo capitolo tratta le formule di media: data $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ funzione armonica in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, si hanno:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x) \, d\sigma(x),$$

$$u(x_0) = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u(x) \, dx,$$

dove la prima è la formula di media di superficie e la seconda di volume. Da queste formule verranno affrontati la disuguaglianza di Harnack, il teorema di Liouville e i principi di massimo e minimo forti e deboli, con relative proprietà.

L'ultimo capitolo si occupa di analizzare un primo approccio alla risoluzione del problema di Dirichlet. In primo luogo vengono date le definizioni e analizzate le proprietà delle funzioni subarmoniche e superarmoniche. Questo tipo di funzioni saranno poi necessarie, nella seconda parte del capitolo, per la trattazione del metodo di Perron, tramite il quale viene data una prima risoluzione del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & in \quad \Omega \\ u = \varphi, & in \quad \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e limitato e φ funzione limitata in $\partial\Omega$.

Indice

Capitolo 1

Nozioni di base

In questo primo capitolo verranno fornite alcune nozioni di base, utili alla comprensione degli argomenti trattati in seguito.

1.1 Funzioni armoniche

Definizione 1.1 (Funzione armonica)**.**
Dato Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, u $\in C^2(\Omega)$ è detta funzione armonica in Ω se è soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

in Ω.

Indicheremo con $\mathbb{H}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni armoniche su Ω

Definizione 1.2 (Operatore di Laplace)**.**
Sia Ω aperto in $\mathbb{R}^n$ e $u = u(x_1, ..., x_n)$. Definiamo l'equazione di Laplace come

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2} = 0 \tag{1.2}$$

Nella definizione data di funzione armonica chiedere che $u \in C^2(\Omega)$ non sarebbe necessario. Infatti basterebbe assumere l'esistenza delle derivate parziali di secondo ordine.
Vediamo ora alcune importanti proprietà di questa categoria di funzioni e dell'operatore Laplaciano.

Osservazione 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω. Allora, considerando

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \forall z \in \Omega, \tag{1.3}$$

si ha che

$$\begin{aligned} u &= Ref \\ v &= Imf \end{aligned}$$

sono funzioni armoniche in Ω.

Dimostrazione. Si noti innanzitutto che $u, v \in C^2(\Omega)$. Per le equazioni di Cauchy-Riemann si ha il seguente sistema di equazioni alle derivate parziali per u e v:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+iv) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u+iv) \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

e da questo, per il Teorema di Schwarz, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Allora, in conclusione, $\Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0$, da cui la tesi. □

Essendo l'operatore di Laplace lineare, si avrà, in particolare, che la somma di funzioni armoniche e il prodotto di uno scalare per una funzione armonica sono ancora funzioni armoniche.
Le seguenti tre osservazioni mostrano le proprietà di invarianza nell'equazione di Laplace.

Osservazione 2. Siano $p \in \mathbb{R}^n$ e u funzione armonica in Ω. Allora la funzione traslata

$$u_p(x) = u(x-p), \quad x \in \Omega + \{p\} \tag{1.4}$$

è ancora una funzione armonica in $\Omega + \{p\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x - p \in \Omega\}$.

Dimostrazione. Innanzitutto la traslazione rispetto a p è una trasformazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tale che $\tilde{x} = Tx = x - p$ e l'insieme $\Omega + \{p\} = T^{-1}(\Omega)$. Infatti

$x \in T^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow Tx = x - p \in \Omega$.
Per mostrare che la funzione (1.4) è armonica si osserva che

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[u(x-p)] = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x-p),$$

perciò $\Delta[u(x-p)] = (\Delta u)(x-p) = 0$, essendo $x - p \in \Omega$ per $x \in \Omega + \{p\}$ $\square$

Osservazione 3. La funzione dilatata

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x), \quad x \in \lambda^{-1}\Omega, \tag{1.5}$$

con $\lambda > 0$ e u funzione armonica in Ω, è armonica in $\lambda^{-1}\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda x \in \Omega\}$.

Dimostrazione. Analogamente alla dimostrazione precedente, si nota che la dilatazione rispetto a λ è una trasformazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tale che $\tilde{x} = Tx = \lambda x$ e l'insieme $\lambda^{-1}\Omega = T^{-1}(\Omega)$. Infatti $x \in T^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow Tx = \lambda x \in \Omega$.
Per dimostrare che la funzione definita in (1.5) è armonica, si osserva che

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[u(\lambda x)] = \lambda \frac{\partial u}{\partial x_j}(\lambda x),$$

e quindi $\Delta[u(\lambda x)] = \lambda^2 (\Delta u)(\lambda x) = 0$, essendo $\lambda x \in \Omega$ per $x \in \lambda^{-1}\Omega$. $\square$

Osservazione 4. Date una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con matrice ortogonale rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n \quad [T_{ij}]$, e u funzione armonica in Ω, allora la funzione

$$u_T(x) = u(Tx) \quad \forall x \in T^{-1}(\Omega)$$

è armonica in $T^{-1}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : Tx \in \Omega\}$.

La dimostrazione viene fatta per semplicità nel caso n=2.

Dimostrazione. Si ha

$$Tx = \begin{bmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Tx)_1 \\ (Tx)_2 \end{bmatrix}$$

allora per la regola della catena

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[u_T(x)] = \frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx)\frac{\partial}{\partial x_1}[(Tx)_1] + \frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx)\frac{\partial}{\partial x_1}[(Tx)_2] = T_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx) + T_{21}\frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx)$$

ed analogamente

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[u_T(x)\right] = T_{11}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(Tx) + \left[T_{11}T_{21} + T_{21}T_{11}\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(Tx) + T_{21}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[u_T(x)\right] = T_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx) + T_{21} \frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[u_T(x)\right] = T_{12}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(Tx) + \left[T_{12}T_{22} + T_{22}T_{12}\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(Tx) + T_{22}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (1.8)$$

Così, combinando (1.6), (1.7) e (1.8) e sfruttando il fatto che $I = T^T T$, ovvero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^2 + T_{21}^2 & T_{11}T_{12} + T_{21}T_{22} \\ T_{11}T_{12} + T_{21}T_{22} & T_{12}^2 + T_{22}^2 \end{bmatrix}$$

si trova $\Delta\left[u_T(x)\right] = \Delta u\,(Tx) = 0$ essendo $Tx \in \Omega$ e $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. □

Vediamo ora una categoria di funzioni armoniche, quelle radiali.

1.2 Funzioni radiali

Definizione 1.3 (Funzioni radiali)**.**
La funzione $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ è detta radiale se

$$f\,(x) = u\,(|x|)\,, \quad \textit{con} \quad u : (0, \infty) \to \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Vediamo ora quali sono le funzioni radiali armoniche. Sia $u \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$ e f definita come in (1.9). Allora f è di classe C^2 e si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = u'(|x|)\frac{\partial |x|}{\partial x_j} = u'(|x|)\frac{2|x|}{2x_j} = u'(|x|)\frac{|x|}{x_j}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'(|x|)\frac{x_j}{|x|}\right) = u''(|x|)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|} + u'(|x|)\frac{\delta_{ij}|x| - x_j \frac{x_i}{|x|}}{|x|^2} =$$

$$= u''(|x|)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|} + u'(|x|)\frac{\delta_{ij}|x|^2 - x_i x_j}{|x|^3}$$

Allora, posto $r = |x|$, si ha

$$\nabla f(x) = u'(r)\frac{x}{r}$$

e per $i = j$:

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_j}(x) = u''(r) \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{|x|^2} + u'(r) \sum_{j=1}^{n} \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3} =$$

$$= u''(r) + u'(r)\frac{n-1}{|x|} = u''(r) + u'(r)\frac{n-1}{r}.$$

Allora $f(x) = u(|x|)$ è armonica se e solo se:

$$u''(r) + u'(r)\frac{n-1}{|r|} = 0 \Longleftrightarrow r^{n-1}\left(u'' + \frac{n-1}{r}u'\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (r^{n-1}u')' = 0 \Longleftrightarrow r^{n-1}u' = c \Longleftrightarrow u' = \frac{c}{r^{n-1}}.$$

Quindi

$$u(r) = \begin{cases} clogr + c_0, & n = 2 \\ c\frac{r^{2-n}}{2-n} + c_0, & n \geq 3 \end{cases}$$

Si può perciò concludere che, a meno di costanti, le funzioni radiali armoniche sono

$$f(x) = u(|x|) = u(r) = \begin{cases} logr, & n = 2 \\ r^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Capitolo 2

Formule di rappresentazione di Green

In questo capitolo verranno enunciate le formule di rappresentazione per le funzioni armoniche.

2.1 Preambolo

Prima di procedere con la definizione delle formule di rappresentazione di Green per funzioni armoniche, è necessario dare alcune definizioni utili.

Definizione 2.1 (Aperto regolare).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Ω si dice regolare se:

- Ω è limitato (ha frontiera compatta);
- int($\bar{\Omega}$)=Ω;
- $\partial\Omega$ è una (n-1)-varietà di classe almeno C^1.

Definizione 2.2 (Normale esterna).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto regolare. Un vettore $\nu \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, si dice normale esterna a Ω in $x \in \partial\Omega$ se:

- $\nu \perp \partial\Omega$ in x;
- $\exists \delta > 0$ tale che $x + t\nu \notin \bar{\Omega}, \quad x - t\nu \in \Omega, \quad \forall t \in (0, \delta)$.

Teorema 2.1.1 (Integrazione per parti).
Dati Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Allora:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f\nu_j\, d\sigma, \quad j = 1, ..., n \tag{2.1}$$

dove $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ *è la normale esterna a* Ω*.*

Definizione 2.3 (Divergenza)**.**
Siano Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$ e $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Si definisce divergenza di F:

$$divF = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}.$$

Siamo ora in grado di enunciare il terorema di divergenza, teorema fondamentale per lo studio delle funzioni armoniche e le formule di media.

Teorema 2.1.2 (Teorema di divergenza)**.**
Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *aperto regolare e* $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$*, allora:*

$$\int_\Omega divF\, dx = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > \, d\sigma, \tag{2.2}$$

con $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ *normale esterna a* Ω*.*

Dimostrazione. Dal teorema di integrazione per parti segue:

$$\int_\Omega divF\, dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} F_j \nu_j \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} F_j \nu_j \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > \, d\sigma$$

. □

Osservazione 5. Abbiamo visto come il teorema della divergenza derivi dal teorema di integrazione per parti. Vale però anche il viceversa:
dati Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$ e $F = (0, ..., f, ..., 0)$ con $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ nel posto j-esimo, si ha:

$$< F, \nu >= f\nu_j \quad e \quad divF = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Applicando il teorema della divergenza otteniamo:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j \, d\sigma.$$

2.2 Formula di Green per Δ

Come conseguenza del teorema della divergenza vedremo ora le identità di Green, da cui derivano le formule di rappresentazione.

Proposizione 2.2.1 (Prima identità di Green)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto regolare,* $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ *e* $v \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$*. Allora:*

$$\int_\Omega v\Delta u\,dx + \int_\Omega Du \cdot Dv\,dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma \tag{2.3}$$

.

Dimostrazione. Poniamo $F = vDu$, allora:

$$divF = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(v(D_j u))}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = v\Delta u + Du \cdot Dv.$$

Applicando il teorema della divergenza:

$$\int_\Omega (v\Delta u + Du \cdot Dv)\,dx = \int_{\partial\Omega} < vDu, \nu > \,d\sigma = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\sigma.$$

□

Proposizione 2.2.2 (Seconda identità di Green)**.**
Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto regolare,* $u, v \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$*, allora:*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\,d\sigma. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Si ha che:

$$u\Delta v - v\Delta u = \sum_{j=1}^{n}\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j} - \frac{\partial\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j} - v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j} = div(uDv - vDu).$$

Applicando ora il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_\Omega div(uDv - vDu)\,dx = \int_{\partial\Omega} < uDv - vDu, \nu > \,d\sigma =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (u < Dv, \nu > -v < Du, \nu >)\,d\sigma = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\,d\sigma.$$

□

Vediamo due particolarità delle identità di Green:

Osservazione 6. Se nella prima identità di Green si sceglie $u = v$, otteniamo:

$$\int_\Omega \left(u\Delta u + |Du|^2\right)\, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

L'identità così ottenuta è detta identità dell'energia.

Osservazione 7. Scegliendo $v \equiv 1$ nella seconda identità di Green, si ottiene:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Prima di vedere le formule di rappresentazione di Green, definiamo la soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione di Laplace. Tale formula si ottiene dalla seconda identità di Green e dalla soluzione radiale dell'equazione di Laplace:
Fissato $x_0 \in \Omega$, aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, si ha:

$$\Phi(x - x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} log|x - x_0|, & n = 2 \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x - x_0|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases} \tag{2.5}$$

dove ω_n è il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$.

2.3 Formule di rappresentazione

Siamo ora in grado di definire le formule di rappresentazione di Green.

Proposizione 2.3.1 (Prima formula di rappresentazione di Green)**.**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 3$*, aperto regolare,* $u \in C^2(\bar{\Omega})$*. Sia* $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *la funzione radiale definita come in* (2.5)*. Allora* $\forall x_0 \in \Omega$*, si ha:*

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Phi(x - x_0) - u(x)\frac{\partial \Phi(x - x_0)}{\partial \nu}\right) d\sigma - \int_\Omega \Phi(x - x_0)\Delta u\, dx. \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, tale che la palla chiusa $\overline{D(x_0, \varepsilon)} \subseteq \Omega$. Definiamo

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{D(x_0, \varepsilon)};$$

che è un aperto regolare, e poniamo:

$$v(x) = \Phi(x - x_0)n(n - 2)\omega_n = |x - x_0|^{2-n},$$

di classe C^∞ in $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \supseteq \overline{\Omega}_\varepsilon$.
Applicando la seconda identità di Green alle funzioni u e v su Ω_ε, si ottiene:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Vogliamo il passaggio al limite per $\epsilon \to 0$, nell'identità precedente. Procediamo per passi:

1. Per come è stata definita, v risulta essere armonica in Ω_ε, avremo perciò:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v\Delta u\, dx = -\int_{\Omega} \chi_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u\, dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -\int_{\Omega} v\Delta u\, dx.$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue, infatti, essendo $u \in C^2(\bar{\Omega})$, Δu è continua sul compatto $\bar{\Omega}$ e perciò limitata e $|\chi_{\Omega_\varepsilon}| \leq 1 \quad \forall \varepsilon > 0$. Inoltre $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, infatti, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n \quad \exists R > 0$ tale che $K \subseteq D(x_0, R)$, allora abbiamo:

$$\int_K v(x)\, dx \leq \int_{D(x_0,R)} v(x)\, dx = \int_{|x-x_0|<R} |x - x_0|^{2-n}\, dx.$$

Ponendo $y = x - x_0$:

$$\int_K v(x)\, dx \leq \int_{|x-x_0|<R} |x - x_0|^{2-n}\, dx = \int_{|y|<R} |y|^{2-n}\, dx =$$

$$= \int_0^R \int_{|y|=r} \left(|y|^{2-n}\, d\sigma(y) \right) dr = \int_0^R r^{2-n} n\omega_n r^{n-1}\, dr = n\omega_n \int_0^R r\, dr = n\omega_n \frac{R^2}{2} < +\infty.$$

Allora v è localmente sommabile. E' così giustificato il passaggio al limite precedente sotto il segno di integrale.

2. Consideriamo

$$\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

La derivata normale di una funzione radiale è ancora una funzione radiale. Infatti, ricordando che la normale esterna a $D(x_0, \varepsilon)$ è $\nu = \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$, si ha:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} = \langle D\left(|x - x_0|^{2-n} \right), \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \rangle =$$

$$= \langle (2-n)|x-x_0|^{1-n}\left(\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right), \frac{x-x_0}{|x-x_0|}\rangle = (2-n)|x-x_0|^{1-n}.$$

Su $\partial D(x_0,\varepsilon)$ risulta che $\varepsilon = |x-x_0|$, perciò:

$$-\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\sigma = -\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u(2-n)\varepsilon^{1-n}\,d\sigma =$$

$$= (n-2)\left(\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} (u(x)-u(x_0))\,d\sigma + \int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u(x_0)\,d\sigma\right)\varepsilon^{1-n} =$$

$$= (n-2)\varepsilon^{1-n}(o(1)n\omega_n\varepsilon^{n-1} + u(x_0)n\omega_n\varepsilon^{n-1}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} n(n-2)\omega_n u(x_0).$$

3. Studiamo ora la quantità

$$\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma.$$

Si ha:

$$\left|\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma\right| \le \sup_{\overline{\Omega}}|Du|\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} |x-x_0|^{2-n}\,d\sigma(x) =$$

$$c(u)\varepsilon^{2-n}n\omega_n\varepsilon^{n-1} = c(u)n\omega_n\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

In conclusione abbiamo:

$$-\int_\Omega v\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\,dx + n(n-2)\omega_n u(x_0) + 0.$$

Da cui segue:

$$-\int_\Omega \Phi(x-x_0)n(n-2)\omega_n\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\,dx + n(n-2)\omega_n u(x_0).$$

Isolando al primo membro $u(x_0)$ e per come è stata definita v, abbiamo la tesi.

□

Osservazione 8. Se $u \in \mathbb{H}(\Omega)$, allora:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\left(\Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Phi(x-x_0)}{\partial \nu}\right)\,d\sigma, \quad \forall x_0 \in \Omega.$$

Osservazione 9. Se nella prima formula di rappresentazione prendiamo $\Omega = D(x_0, r)$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}_+$, sfruttando il fatto che $r = |x - x_0|$ sul bordo, otteniamo:

$$u(x_0) = \int_{\partial D(x_0,r)} \left(\Phi(x - x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Phi(x - x_0)}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{D(x_0,r)} \Phi(x - x_0)\Delta u(x)\, dx =$$

$$= \Phi(r) \int_{\partial D(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - \Phi'(r) \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma - \int_{D(x_0,r)} \Phi(x - x_0)\Delta u(x)\, dx =$$

$$= \Phi(r) \int_{D(x_0,r)} \Delta u\, dx + \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma - \int_{D(x_0,r)} \Phi(x - x_0)\Delta u(x)\, dx,$$

allora:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma - \int_{D(x_0,r)} (\Phi(x - x_0) - \Phi(r))\Delta u(x)\, dx.$$

Vediamo ora la prima formula fondamentale di Green nel caso bidimensionale, analizzando la scelta delle costanti in (2.5).

Osservazione 10. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ e sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ funzione radiale armonica definita come in (2.5). Allora, per ogni $x_0 \in \Omega$ vale la formula di rappresentazione (2.6) con $c = -\frac{1}{2\pi}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla precedente, bisogna però riadattare lo studio di

$$\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Infatti:

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \Phi'(r) = c\frac{1}{r},$$

da cui:

$$-\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma = -\int_{|x-x_0|=\varepsilon} u(x)\frac{c}{\varepsilon}\, d\sigma(x) + \int_{|x-x_0|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}(c log\varepsilon)\, d\sigma(x) = -I_1 + I_2.$$

Stimiamo la quantità I_2 applicando un cambio di variabili e sfruttando il teorema di Weierstrass:

$$|I_2| \leq |c||\varepsilon log\varepsilon| \int_{|z=1|} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0 + \varepsilon z) \right| d\sigma(z) \leq |c||\varepsilon log\varepsilon|\eta \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Applichiamo lo stesso cambio di variabili alla quantità I_1:

$$I_1 = \frac{c}{\varepsilon}\varepsilon \int_{|z|=1} u(x_0 + \varepsilon z)\, d\sigma(z) = c2\pi \left(\frac{1}{|\partial D(0, 1)|} \int_{|z|=1} u(x_0 + \varepsilon z)\, d\sigma(z) \right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} c2\pi u(x_0).$$

Allora, affinchè valga la prima formula di rappresentazione nel caso $n = 2$, deve essere $c = -\frac{1}{2\pi}$. $\square$

Definizione 2.4 (Funzione di Green)**.**
Sia Ω aperto regolare e sia $x \in \Omega$ fissato. Supponiamo esista una funzione $h_x \in C^2(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{H}(\Omega)$ tale che $h_x(y) = \Phi(x-y), \quad \forall y \in \partial\Omega$.
Se h_x esiste per ogni $x \in \Omega$, si definisce la funzione di Green per Ω:

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - h_x(y), \quad \forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y.$$

Proposizione 2.3.2 (Seconda formula di rappresentazione di Green)**.**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare, con funzione di Green G, e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Per ogni $x \in \Omega$ vale:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}\,d\sigma(y) - \int_{\Omega} \Delta u(y) G(x,y)\,dy. \tag{2.7}$$

La quantità $-\frac{\partial G}{\partial \nu}$ è detta Nucleo di Poisson per Ω.

Dimostrazione. Si applica la seconda identità di Green alle funzioni u e h_x, così si ha:

$$\int_{\Omega} (u\Delta h_x - h_x \Delta u)\,dy = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial h_x}{\partial\nu} - h_x \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma.$$

Essendo h_x armonica per definizione, si ha:

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial h_x}{\partial\nu} - h_x \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma + \int_{\Omega} h_x \Delta u\,dy.$$

Sommando membro a membro questa espressione con la prima formula di rappresentazione e sfruttando la simmetria della funzione Φ, si ottiene:

$$\begin{aligned} u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[(\Phi(x-y) - h_x(y))\frac{\partial u}{\partial\nu} - u(y)\left(\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial\nu} - \frac{\partial h_x(y)}{\partial\nu}\right)\right] d\sigma + \\ + \int_{\Omega} \Delta u (h_x(y) - \Phi(x-y))\,dy. \end{aligned}$$

Ricordando che $G \equiv 0$ su $\partial\Omega$, allora:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}\,d\sigma(y) - \int_{\Omega} \Delta u(y) G(x,y)\,dy.$$

□

2.4 Il nucleo di Poisson

Cominciamo con la definizione di inversione rispetto alla frontiera del disco di centro 0 e raggio r.

Definizione 2.5 (Inversione)**.**
Sia $D = D(0,r)$, $r > 0$, un disco aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.
Per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la funzione

$$x \longmapsto \overline{x} = \begin{cases} \left(\frac{r}{|x|}\right)^2 x, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

si definisce inversione rispetto a $\partial D(0,r) = \partial D$.

Osservazione 11. L'inversione rispetto a ∂D, cioè la funzione $x \longmapsto \overline{x}$, agisce in questo modo:
fissati $x \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}_+$, tali che $|x| > r$, allora vale:

$$|\overline{x}| = \frac{r^2}{|x|^2}|x| = \frac{r^2}{|x|} < r.$$

Tutti i punti al di fuori di $D(0,r)$, tramite questa funzione vengono portati all'interno del disco.
Allo stesso modo, con le ipotesi precedenti, ma tali che $|x| < r$, si ha:

$$|\overline{x}| = \frac{r^2}{|x|^2}|x| = \frac{r^2}{|x|} > r.$$

Cioè tutti i punti all'interno di $D(0,r)$, vengono portati al di fuori del disco.
Se invece $|x| = r$, la mappa in (2.8) coincide con la funzione identità.

Proposizione 2.4.1.
La funzione di Green del disco $D(0,r)$ è:

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi\left((\overline{x}-y)\frac{|x|}{r}\right), \quad \forall x,y \in D(0,r), \quad x \neq y. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Sia $x \in D(0,r)$, $\forall y \in \partial D(0,r)$, calcoliamo:

$$\left(\frac{|x-y|}{|\overline{x}-y|}\right)^2 = \frac{|x-y|^2}{|\overline{x}-y|^2} = \frac{|x|^2+|y|^2-2<x,y>}{|\overline{x}|^2+|y|^2-2<\overline{x},y>} = \frac{|x|^2+r^2-2<x,y>}{\left|\left(\frac{r}{|x|}\right)^2 x\right|^2 + r^2 - 2 < \frac{r^2}{|x|^2}x, y>} =$$

$$= \frac{|x|^2 + r^2 - 2 < x, y >}{\left(\frac{r}{|x|}\right)^2 (|x|^2 + r^2 - 2 < x, y >)} = \left(\frac{|x|}{r}\right)^2$$

Allora

$$\frac{|x-y|}{|\overline{x}-y|} = \frac{|x|}{r}, \quad \forall x \in D(0,r), x \neq 0, \forall y \in \partial D(0,r).$$

Da ciò deriva che:

$$|x-y|^{2-n} = \left(|\overline{x}-y|\frac{|x|}{r}\right)^{2-n} \Rightarrow \Phi(x-y) = \Phi\left((\overline{x}-y)\frac{|x|}{r}\right) = \left(\frac{|x|}{r}\right)^{2-n} \Phi(\overline{x}-y).$$

Osserviamo ora che la funzione:

$$y \longmapsto \Phi\left((\overline{x}-y)\frac{|x|}{r}\right) = \left(\frac{|x|}{r}\right)^{2-n} \Phi(\overline{x}-y).$$

verifica le condizioni richieste dalla funzione h_x:

1. è $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{\overline{x}\})$, cioè è $C^\infty(\overline{D})$;
2. è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{\overline{x}\} \Rightarrow$ è armonica in D;
3. ristretta a ∂D coincide con Φ.

Perciò, per ogni $x \in D(0,r)$, $x \neq 0$, la funzione di Green per $D(0,r)$ è:

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi\left((\overline{x}-y)\frac{|x|}{r}\right), \quad \forall y \in D(0,r).$$

□

Proposizione 2.4.2 (Nucleo di Poisson per $D(0,r)$)**.**
Il nucleo di Poisson per il disco $D(0,r)$ è:

$$P(x,y) = \frac{1}{n\omega_n r}\frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \quad x \in D, y \in \partial D. \tag{2.10}$$

Traslando le variabili x e y, si ha che il nucleo di Poisson per $D(\alpha,r)$ è:

$$P(x,y) = \frac{1}{n\omega_n r}\frac{r^2 - |x-\alpha|^2}{|x-y|^n}. \tag{2.11}$$

Dimostrazione.

$$P(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = - < \nabla_y G(x,y), \nu >, \quad x \in D, y \in \partial D \quad e \quad \nu = \frac{y}{r}$$

Ora calcoliamo:

$$\nabla_y G(x,y) = \nabla_y \left(\Phi(x-y) - \Phi\left((\overline{x} - y)\frac{|x|}{r} \right) \right) =$$

$$= \nabla_y \left(\frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x-y|^{2-n} - \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\left| (\overline{x} - y)\frac{|x|}{r} \right|^{2-n} \right) =$$

$$= -\frac{1}{n\omega_n}\left(|x-y|^{1-n}\left(\frac{x-y}{|x-y|} \right)(-1) - \left(\frac{|x|}{r} \right)^{2-n} |\overline{x} - y|^{1-n}\left(\frac{\overline{x} - y}{|\overline{x} - y|} \right)(-1) \right) =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n|x-y|^n}\left(x - y - \left(\frac{|x|}{r} \right)^{2-n}\left(\frac{|x-y|}{|\overline{x} - y|} \right)^n (\overline{x} - y) \right) =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n|x-y|^n}\left(x - y - \left(\frac{|x|}{r} \right)^{2-n}\left(\frac{|x|}{r} \right)^n (\overline{x} - y) \right) = \frac{1}{n\omega_n|x-y|^n}\left(x - y - x + \left(\frac{|x|}{r} \right)^2 y \right) =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n|x-y|^n}\left(\frac{y}{r^2} \right)\left(|x|^2 - r^2 \right).$$

Moltiplichiamo tale risultato per la normale esterna al disco, avremo:

$$- < \nabla_y G(x,y), \frac{y}{r} >= \frac{1}{n\omega_n|x-y|^n}\frac{1}{r}\left(r^2 - |x|^2 \right) < \frac{y}{r}, \frac{y}{r} >= \frac{1}{n\omega_n r}\left(\frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \right).$$

$\square$

Capitolo 3

Formule di media per funzioni armoniche

Introduciamo ora le formule di media di Gauss per le funzioni armoniche, analoghe alla formula integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe. Tali formule hanno perciò il ruolo di farci conoscere il valore di una funzione in ogni punto del dominio in cui è definita.
Ricordiamo che $\mathbb{H}(\Omega) = \{f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}), \Delta f = 0 \quad in \quad \Omega\}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, è l'insieme delle funzioni armonica di classe C^2.

Teorema 3.0.3 (Formula di media di superficie).
Sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Per ogni disco $D(x_0, r)$, tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$, vale:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x) = m_r(u)(x_0). \tag{3.1}$$

Ciò significa che la funzione u valutata nel centro del disco è uguale alla media integrale di u calcolata sul bordo del disco.

Dimostrazione. E' conseguenza quasi immediata della seconda formula di rappresentazione di Green (2.7):

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma - \int_{D(x_0,r)} (\Phi(x - x_0) - \Phi(r))\Delta u(x)\, dx.$$

Essendo u armonica per ipotesi in Ω, allora $\Delta u = 0$ in $D(x_0, r)$, così otteniamo:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

□

Osservazione 12. Dati f funzione olomorfa in $\Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega_0$ e $r > 0$ tali che $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega_0$, allora la formula (3.1) può essere dedotta dalla formula di Cauchy per f.

Dimostrazione.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z)\, dt = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z) r\, dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(z_0,r)} f(z)\, d\sigma(z) =$$

$$= \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(z_0,r)} f(z)\, d\sigma(z).$$

□

Teorema 3.0.4 (Formula di media di volume)**.**
Sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Per ogni disco $D(x_0, r)$, tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$, vale:

$$u(x_0) = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u(x)\, dx = M_r(u)(x_0). \tag{3.2}$$

Cioè la funzione u valutata nel centro del disco è uguale alla media integrale di u sul disco.

Dimostrazione. Applicando la formula di media di superficie otteniamo:

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,\rho)} u(x)\, d\sigma(x), \quad \forall \rho \in (0, r].$$

Moltiplicando entrambi i membri per ρ^{n-1} e integrando poi rispetto a ρ in $(0, r]$, risulta:

$$\int_0^r \rho^{n-1} u(x_0)\, d\rho = \frac{1}{n\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x) \right) d\rho,$$

da cui:

$$u(x_0) \left[\frac{\rho^n}{n} \right]_0^r = u(x_0) \frac{r^n}{n} = \frac{1}{n\omega_n} \int_{D(x_0,r)} u\, dx.$$

In conclusione:

$$u(x_0) = \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{D(x_0,r)} u\, dx = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u\, dx.$$

□

Osservazione 13. Sia $u \in C^2(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora u verifica la formula di media di superficie se e solo se verifica la formula di media di volume.

Dimostrazione.
$\Rightarrow$): u verifica per ipotesi la formula di media di superficie, allora, procedendo come per la dimostrazione della formula (3.2), si prova che u soddisfa la formula di media di volume.
$\Leftarrow$): Viceversa, supponiamo che u soddisfi la formula di media di volume, cioè:

$$u(x_0) = \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{D(x_0,r)} u(x)\, dx, \quad \forall D(x_0, r) \quad t.c. \quad \overline{D(x_0,r)} \subseteq \Omega.$$

Allora:

$$u(x_0) = \frac{1}{r^n \omega_n} \int_0^r \left(\int_{|x-x_0|=\rho} u\, d\sigma \right) d\rho, \quad \rho \in (0, r].$$

Moltiplicando entrambi i membri per $r^n \omega_n$ e derivando rispetto ad r, applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale nel membro di destra, si ottiene:

$$n\omega_n r^{n-1} u(x_0) = \int_{|x-x_0|=r} u\, d\sigma - \int_{|x-x_0|=0} u\, d\sigma = \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma.$$

In conclusione:

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma, \quad \forall D(x_0, r) \quad t.c. \quad \overline{D(x_0,r)} \subseteq \Omega.$$

Da cui la tesi. □

Le formule di media appena trattate caratterizzano le funzioni armoniche:

Teorema 3.0.5.
Sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
Se u soddisfa le formule di media, cioè:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0,r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u\, d\sigma, \quad \forall D(x_0, r) \quad t.c. \quad \overline{D(x_0,r)} \subseteq \Omega,$$

allora u è armonica in Ω.

Dimostrazione. La dimostrazione viene fatta per assurdo:
supponiamo esista un punto $x_0 \in \Omega$ tale che $\Delta u(x_0) \neq 0$, allora, per il teorema di permanenza del segno, esiste un disco $D = D(x_0, r_0) \subset \Omega$ tale che $\Delta u > 0$ in D. Definiamo la funzione:

$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x), \quad \forall r < r_0.$$

Tale funzione è, per ipotesi, uguale a $u(x_0)$. Allora:

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{D(x_0,r)} \Delta u(x)\, dx > 0,$$

che è assurdo $\Rightarrow u$ è armonica. □

Corollario 3.0.6.
Sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
u è soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in Ω
$\iff$ *$\forall r > 0$ tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$ vale:*

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x),$$

$\iff$ *$\forall r > 0$ tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$ vale:*

$$u(x_0) = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza dei teoremi 3.0.3, 3.0.4, 3.0.5 e dell'osservazione 13. □

3.1 Conseguenze delle formule di media

In questa sezione verranno presentate alcune particolarità delle funzioni armoniche, basate sulle formule di media appena viste.

3.1.1 Disuguaglianza di Harnack e teorema di Liouville

Teorema 3.1.1 (Disuguaglianza di Harnack sui dischi)**.**
Sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, una funzione armonica non negativa in Ω. Siano $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$, tali che $D(x_0, 4r) \subseteq \Omega$.
Allora esiste una costante c, dipendente da n, tale che valga:

$$\sup_{D(x_0,r)} \leq c(n) \inf_{D(x_0,r)} u, \quad c(n) = 3^n. \tag{3.3}$$

Tale espressione è detta disuguaglianza di Harnack.

Dimostrazione. Dimostrare la (3.3), equivale a provare che

$$u(x_1) \leq c(n)u(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in D(x_0, r).$$

Siano perciò $x_1, x_2 \in D(x_0, r)$. Essendo $D(x_1, r) \subset D(x_0, 4r) \subseteq \Omega$, si può applicare la formula di media di volume a $D(x_1, r)$:

$$u(x_1) = \frac{1}{|D(x_1, r)|} \int_{D(x_1,r)} u(x)\, dx = \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{D(x_1,r)} u(x)\, dx.$$

Essendo $D(x_1, r) \subseteq D(x_2, 3r)$, si ha:

$$\frac{1}{r^n \omega_n} \int_{D(x_1,r)} u(x)\, dx \leq \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{D(x_2,3r)} u(x)\, dx =$$

$$= \frac{\omega_n (3r)^n}{\omega_n r^n} \frac{1}{|D(x_2, 3r)|} \int_{D(x_2,3r)} u(x)\, dx = 3^n u(x_2).$$

Nell'ultimo passaggio si è applicata la formula di media di volume a u in $D(x_2, 3r) \subset D(x_0, 4r) \subseteq \Omega$.
In conclusione abbiamo ottenuto:

$$u(x_1) \leq c(n)u(x_2),$$

con x_1 e x_2 generici in $D(x_0, r)$. □

Il seguente teorema è conseguenza della disuguaglianza di Harnack:

Teorema 3.1.2 (Teorema di Liouville)**.**
Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ armonica e inferiormente limitata. Allora u è limitata.

Dimostrazione. Poniamo $w = \inf_{\mathbb{R}^n} u$ e $v = u - w$. Allora:

$$v \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^n), \quad v \geq 0, \quad \inf_{\mathbb{R}^n} v = 0.$$

Si può applicare la disuguaglianza di Harnack su v, poichè soddisfa tutte le ipotesi; scegliendo $x_0 = 0$ si ha:

$$\sup_{D(0,r)} v \leq 3^n \inf_{D(0,r)} v, \quad \forall r > 0.$$

Passando al limite per $r \to 0$, si ottiene:

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R}^n} v \leq \inf_{\mathbb{R}^n} v \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^n} v = \inf_{\mathbb{R}^n} v = 0.$$

Allora $v \equiv 0$, cioè $u \equiv w$. □

Corollario 3.1.3.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $K \subset \Omega$ un compatto. Esiste allora una costante $c = c(K, \Omega) > 0$ tale che:

$$\sup_K u \leq c \inf_K u, \quad \forall u \in \mathbb{H}(\Omega), \quad u \geq 0. \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che esiste un insieme connesso e compatto $K^* \subseteq \Omega$ tale che $K \subseteq K^*$.
Infatti, per la proprietà del ricoprimento finito, è possibile ricoprire K con un numero finito di dischi $D(x_j, r_j)$, $\quad j = 1, ..., p$ tali che $\overline{D(x_j, r_j)} \subseteq \Omega$.
Essendo Ω aperto e connesso, esiste $\forall j = 1, ..., p-1$ una poligonale $P_j \subseteq \Omega$ tale che $[x_j, x_{j+1}] \in P_j$, allora:

$$K^* = \left(\bigcup_{j=1}^{p} \overline{D(x_j, r_j)} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p-1} P_j \right)$$

è un compatto connesso contenuto in Ω.
Sempre per la proprietà del ricoprimento finito, esiste $r > 0$ tale che:

$$K^* \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} D(z_j, r_j), \quad \overline{D(z_j, 4r_j)} \subseteq \Omega, \quad \forall j = 1, ..., q.$$

Essendo K^* connesso, non è restrittivo supporre:

$$\left(\bigcup_{j \leq k} D(x_j, r_j) \right) \cap D(x_{k+1}, r_{k+1}) \neq 0, \quad \forall k = 1, ..., q-1 \quad \textit{con} \quad k \gg 2. \tag{3.5}$$

Infatti, posto $D_j = D(x_j, r_j)$ si avrà $D_j \cap D_i \neq 0, \quad j \geq 2$, in caso contrario D_i e $\bigcup_{j=1}^{q} D_j$ sarebbero due aperti che spezzano K^*.
Rinumerando i D_j possiamo supporre che $D_1 \cap D_2 \neq 0$. Ora, per la connessione di K^*, esiste $j \geq 3$ tale che:

$$(D_1 \cup D_2) \cap D_j \neq 0$$

poichè in caso contrario $D_1 \cup D_2$ e $\bigcup_{j=3}^{q} D_j$ sarebbero due aperti che spezzano K^*.
Ora come prima, rinumerando i D_j possiamo supporre che $(D_1 \cap D_2) \cup D_3 \neq 0$.
Per iterazione si arriva così a provare la (3.5).
Per il teorema precedente vale:

$$\sup_{D_j} u \leq 3^n \inf_{D_j} u, \quad \forall u \in \mathbb{H}(\Omega), \quad u \geq 0, \quad \forall j = 1, ..., q. \tag{3.6}$$

Per proseguire con la dimostrazione è necessario enunciare il seguente lemma:

Lemma 3.1.4. *Sia* $u : A \cup B \to \mathbb{R}$*, con* $A \cap B \neq 0$ *e* $u \geq 0$*. Supponiamo che sia:*

$$\sup_A u \leq c_A \inf_A u,$$
$$\sup_B u \leq c_B \inf_B u,$$

con $c_A, c_B \geq 1$*. Allora:*

$$\sup_{A \cup B} u \leq c_A c_B \inf_{A \cup B} u. \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Siano $x \in A, \quad y \in B$ e $z \in A \cup B$. Per le ipotesi del lemma si ha:

$$u(x) \leq c_A u(z), \quad u(z) \leq c_B u(y) \Rightarrow u(x) \leq c_A c_B u(y).$$

Allora, poichè $c_A c_B \geq c_A$ e $c_A c_B \geq c_B$, si prova che:

$$u(x) \leq c_A c_B u(y), \quad \forall x, y \in A \cup B.$$

□

Torniamo alla dimostrazione del corollario. Applicando più volte il lemma appena visto si ha:

$$\sup \bigcup D_j u \leq 3^{qn} \inf \bigcup D_j u, \quad \forall u \in \mathbb{H}(\Omega), \quad u \geq 0.$$

Infine, essendo $K \subseteq K^* \subseteq \bigcup D_j$, si ottiene:

$$\sup_K u \leq \sup_{\bigcup D_j} u \leq 3^{qn} \inf_{\bigcup D_j} u \leq 3^{qn} \inf_K u,$$

che prova la tesi. □

Teorema 3.1.5.
Data una successione di funzioni armoniche $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *in* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto connesso, tali che:*

- $u_k \leq u_{k+1}$*;*
- *esiste* $x_0 \in \Omega$ *tale che* $\sup u_k(x_0) < +\infty$*.*

Allora la successione converge uniformemente sui compatti di Ω*.*

Dimostrazione. Preso K un compatto di Ω, poniamo $K_{x_0} = K \cup \{x_0\}$. Allora per il corollario precedente si ha, assumendo $n \geq m$:

$$\sup_{K_{x_0}} |u_n - u_m| = \sup_{K_{x_0}} (u_n - u_m) \leq c \inf_{K_{x_0}} (u_n - u_m) \leq c\,(u_n(x_0) - u_m(x_0)) =$$

$$= c|u_n(x_0) - u_m(x_0)| \overset{n,m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

3.1.2 Il principio del massimo

In questa sezione analizzeremo i principi di massimo forte e debole. Per il primo sono necessarie le formule di media e prova che nel caso di funzioni armoniche non sono ammessi punti di massimo interni al dominio, a meno che la funzione non sia costante. Il secondo invece non fa uso delle formule di media, ma sarà fondamentale per la dimostrazione dell'unicità della soluzione del problema di Dirichlet.

Corollario 3.1.6.
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e $u, v \in \mathbb{H}(\Omega)$ tali che $u \geq v$ in Ω. Allora, se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = v(x_0)$, si ha:

$$u \equiv v, \quad in \quad \Omega.$$

Dimostrazione. Poniamo $w = u - v$. Si ha che w è armonica in Ω e $w \geq 0$. Allora per la (3.4), esiste una costante $c_x > 0, \quad x \in \Omega$, tale che:

$$0 \leq w(x) \leq \sup_{\{x,x_0\}} w(x) \leq c_x \inf_{\{x,x_0\}} w(x) \leq c_x w(x_0) = 0,$$

da cui $w(x) = 0 \Rightarrow u(x) \equiv v(x)$. □

Teorema 3.1.7 (Principio del massimo forte)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Supponiamo esista $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) \geq u(x), \quad \forall x \in \Omega$. Allora u è costante in Ω.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal corollario precedente, in quanto le funzioni costanti sono armoniche in Ω. Equivalentemente:
Sia $M = \{y \in \Omega : u(y) = u(x_0)\}$. Vogliamo provare che M è aperto e chiuso in Ω.
M è chiuso, poichè controimmagine continua di $\{0\}$ che è chiuso, in quanto punto.
Vediamo ora che M è aperto:
ponendo $v = u - u(y_0), \quad y_0 \in \Omega$ fissato, si ha $v \in \mathbb{H}(\Omega)$ e $v \leq 0$. Applicando la formula di media di volume si ha:

$$0 = v(y_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{D(y_0,r)} v(x)\, dx, \quad \forall r > 0 \quad t.c. \quad \overline{D(y_0,r)} \subseteq \Omega.$$

Essendo $v(x) \leq 0$, si deve avere necessariamente $v = 0$ quasi dappertutto in $D(y_0, r)$ e poichè u è continua in Ω, allora $v = 0$ in $D(y_0, r)$, cioè:

$$u(x) = u(y_0) = u(x_0), \quad \forall x \in D(y_0, r).$$

Allora $D(y_0, r) \subseteq M$, da cui M è aperto in Ω.
Poichè in un connesso gli unici insiemi sia aperti che chiusi sono il vuoto e l'insieme stesso, allora $\Omega \equiv M$, essendo $x_0 \in M$. □

Teorema 3.1.8 (Principio del minimo forte)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto connesso e* $u \in \mathbb{H}(\Omega)$*. Se esiste un punto* $x_0 \in \Omega$ *tale che* $u(x_0) \leq u(x), \quad \forall x \in \Omega$*, allora u è costante in* Ω*.*

Dimostrazione. E' sufficiente applicare il principio del massimo forte alla funzione $-u$. □

Osservazione 14. Sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ armonica in Ω, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, allora valgono contemporaneamente i principi di massimo e minimo forte. Ciò asserisce che una funzione armonica non ammette punti di massimo o minimo interni al dominio, a meno che tale funzione non sia costante.

Osservazione 15. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ e $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$.
Il problema di Dirichlet relativo a Ω e φ è:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{3.8}$$

e consiste nel trovare una funzione $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega})$, tale che:

$$\Delta u(x) = f, \quad \forall x \in \Omega \quad e \quad \lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y) \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Dal principio del massimo forte segue che tale problema ha al più una soluzione.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che (3.8) abbia come soluzioni u, v. Poniamo $w = u - v$, allora w è continua in $\bar{\Omega}$ e di classe C^2 in Ω, tale che:

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0, & \forall x \in \Omega \\ w(y) = 0, & \forall y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Allora, essendo $w \neq 0$ per assurdo, dovrebbe esistere un punto $x_0 \in \Omega$, tale che:

$$w(x_0) = \max_{\Omega} w \quad oppure \quad w(x_0) = \min_{\Omega} w, \quad w(x_0) \neq 0.$$

Allora sarebbe $w \equiv$costante sulla componente connessa contenente x_0, cioè $w(y) = w(x_0) = 0$, per qualche $y \in \partial\Omega$. □

Teorema 3.1.9 (Principio del massimo debole)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato e* $u \in \mathbb{H}(\Omega)$*. Supponiamo sia:*

$$\limsup_{x \to y} u(x) \leq 0, \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Allora $u \leq 0$ *in* Ω*.*

Dimostrazione. Per dimostrare tale teorema è necessario il seguente lemma:

Lemma 3.1.10. *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Allora esiste $x_0 \in \bar{\Omega}$ tale che:*

$$\sup_{\Omega \cap D(x_0,\rho)} u = \sup_{\Omega} u, \quad \rho > 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non ci sia uguaglianza e che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ esista ρ_x sia:

$$\sup_{\Omega \cap D(x_0,\rho_x)} u = \sup_{\Omega} u. \tag{3.9}$$

Dal ricoprimento aperto di $\bar{\Omega}$,

$$\bar{\Omega} \subseteq \bigcup_{x \in \bar{\Omega}} D(x, \rho_x),$$

è possibile estrarre, per la compattezza di $\bar{\Omega}$, un sottoricoprimento finito:

$$\bar{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} D(x_j, \rho_{x_j}), \quad x_1, ..., x_p \in \bar{\Omega}.$$

Allora:

$$\sup_{\Omega} u = \max_{j=1,...,p} \left(\sup_{\Omega \cap D(x_j,\rho_{x_j})} u \right),$$

che è in contraddizione con la (3.9). □

Torniamo alla dimostrazione del teorema:
il lemma garantisce l'esistenza di un $x_0 \in \bar{\Omega}$ tale che:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega \cap D(x_0,\rho)} u, \quad \rho > 0. \tag{3.10}$$

Se $x_0 \in \partial\Omega$, da (3.10) segue:

$$0 \geq \lim_{x \to x_0} \sup u(x) = \lim_{\rho \to 0} \left(\sup_{\Omega \cap D(x_0,\rho)} u \right) = \sup_{\Omega} u,$$

quindi $u \leq 0$ in Ω. Se $x_0 \in \Omega$, da (3.10) e dalla continuità di u in x_0, si ha:

$$u(x_0) = \lim_{x \to x_0} u(x) = \lim_{x \to x_0} \sup u(x) = \lim_{\rho \to 0} \left(\sup_{\Omega \cap D(x_0,\rho)} u \right) = \sup_{\Omega} u.$$

Quindi x_0 è un punto di massimo interno per la funzione e dal principio di massimo forte deriva che $u = u(x_0)$ nella componente connessa Ω_{x_0} contenente x_0.
Sia $y \in \partial\Omega_{x_0}$, dato $x \in \Omega_{x_0}$ si ha:

$$\limsup_{x \to y} u(x) = u(x_0). \tag{3.11}$$

Dato poi $z \in \Omega$, essendo $\Omega_{x_0} \subseteq \Omega$,

$$\limsup_{x \to y} u(x) \leq \limsup_{z \to y} u(z). \tag{3.12}$$

Infine, essendo $y \in \partial\Omega_{x_0} \subseteq \partial\Omega$, segue che:

$$\limsup_{z \to y} u(z) \leq 0. \tag{3.13}$$

Componendo (3.11), (3.12) e (3.13) si ottiene:

$$\max_{\Omega} u(x) = u(x_0) \leq 0 \Rightarrow u \leq 0 \quad in \quad \Omega.$$

$\square$

Teorema 3.1.11 (Principio del minimo debole)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Supponiamo:

$$\liminf_{x \to y} u(x) \geq 0, \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Allora $u \geq 0$ in Ω.

Dimostrazione. Basta applicare il principio del massimo debole alla funzione $-u$. $\square$

Capitolo 4

Il problema di Dirichlet

Prima di affrontare il problema di Dirichlet, definiamo le funzioni sup- e sub- armoniche, che saranno utili per analizzare il metodo di Perron.

4.1 Funzioni superarmoniche e subarmoniche

Definizione 4.1 (Funzioni superarmoniche).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Allora u si dice funzione superarmonica in Ω se:

$$u(x) \geq M_r(u)(x), \quad \forall D(x,r) \quad tale \quad che \quad \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega.$$

D'ora in avanti l'insieme delle funzioni superarmoniche in Ω sarà indicato come $\mathbb{S}(\Omega)$.

Definizione 4.2 (Funzioni subarmoniche).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Allora u si dice funzione subarmonica in Ω se:

$$u(x) \leq M_r(u)(x), \quad \forall D(x,r) \quad tale \quad che \quad \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega.$$

In particolare, u è una funzione subarmonica se $-u$ è superarmonica, cioè se $-u \in \mathbb{S}(\Omega)$.

Osservazione 16. Vale:

$$\mathbb{H}(\Omega) = \mathbb{S}(\Omega) \cap (-\mathbb{S}(\Omega)).$$

Dimostrazione.
$\subseteq$): sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$, allora $u \in C^2(\Omega)$ e verifica la formula di media di volume:

$$u(x) = M_r(u)(x), \quad \forall D(x,r) \quad tale \quad che \quad \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega.$$

Perciò u, per le definizioni date, è sia superarmonica che subarmonica.
$\supseteq$): u è continua in Ω per le definizioni di funzioni superarmoniche e subarmoniche, valgono inoltre le disuguaglianze:

$$u(x) \geq M_r(u)(x), \quad \forall D(x,r) \quad tale \quad che \quad \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$$

e

$$u(x) \leq M_r(u)(x), \quad \forall D(x,r) \quad tale \quad che \quad \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega.$$

Allora u verifica la formula di media di volume. Per il teorema di Koebe la funzione è armonica. □

Proposizione 4.1.1.
Sia $u \in C^2(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora u è superarmonica (subarmonica) se e solo se $\Delta u(x) \leq 0$ (≥ 0).

Dimostrazione. La dimostrazione verrà fatta solo per le superarmoniche, poichè quella per le subarmoniche è analoga.
$\Leftarrow$): per ipotesi $\Delta u(x) \leq 0$. Dalla formula di rappresentazione sui dischi si ha:

$$u(x) = \frac{1}{|\partial D(x,r)|} \int_{\partial D(x,r)} u(y)\, d\sigma(y) - \int_{D(x,r)} (\Phi(y-x) - \Phi(r))\, \Delta u(y)\, dy,$$

per ogni $D(x,r)$, tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$.
Essendo $\Phi(y-x) - \Phi(r) > 0$ e $\Delta u \leq 0$, vale:

$$u(x) \geq \frac{1}{|\partial D(x,r)|} \int_{\partial D(x,r)} u(y)\, d\sigma(y) = m_r(u)(x),$$

da cui:

$$u(x) \geq M_r(u)(x).$$

Allora u è superarmonica.
$\Rightarrow$): viceversa, sia u superarmonica. Per assurdo, sia $\Delta u(x_0) > 0, \quad x_0 \in \Omega$. Allora $\Delta u > 0$ in un intorno Ω_0 di x_0. Da cui segue che u è subarmonica in Ω_0.
D'altra parte, però, $u \in \mathbb{S}(\Omega_0)$, essendo $u \in \mathbb{S}(\Omega)$. Per l'osservazione 16 $u \in \mathbb{H}(\Omega_0)$, cioè:

$$\Delta u = 0 \quad in \quad \Omega_0.$$

Ciò però contraddice l'ipotesi $\Delta u > 0$. □

Vediamo ora le formule di media, viste per le funzioni armoniche, adattate alle funzioni subarmoniche e superarmoniche.

Teorema 4.1.2 (Formula di sotto(sopra)-media di superficie)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ funzione subarmonica (superarmonica) in Ω.
Allora, per ogni disco $D(x_0, r)$ tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$, vale la formula di sotto(sopra)-media di superficie:

$$u(x_0) \leq (\geq) \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x). \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Consideriamo un disco $D = D(x_0, r_0) \subset \Omega$ su cui definiamo, per ogni $r < r_0$, la funzione:

$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

Applicando il cambio di variabili $x = x_0 + rz$ ed assumendo come normale esterna a $D(x_0, r)$ in x_0 il vettore $\nu = \frac{x - x_0}{r}$, possiamo scrivere:

$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial D(0,1)} u(x_0 + rz)\, d\sigma(z).$$

Allora:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial D(0,1)} \nabla u(x_0 + rz) z\, d\sigma(z) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} \nabla u(x) \frac{x - x_0}{r}\, d\sigma(x) =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{D(x_0,r)} \Delta u(x)\, dx \geq (\leq) 0.$$

Da ciò deduciamo che φ è crescente (decrescente) $\forall r \in (0, r_0)$. Allora:

$$\varphi(r) \geq (\leq) \lim_{r \to 0} \varphi(r) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial D(0,1)} u(x_0 + rz)\, d\sigma(z) = u(x_0).$$

Da cui, per u subarmonica vale:

$$u(x_0) \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

Mentre per u superarmonica:

$$u(x_0) \geq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

$\square$

Teorema 4.1.3 (Formula di sotto(sopra)-media di volume)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto e* $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ *funzione subarmonica (superarmonica) in* Ω.
Allora, per ogni disco $D(x_0, r)$ *tale che* $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$, *vale la formula di sotto(sopra)-media di volume:*

$$u(x_0) \leq (\geq) \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x). \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Sfruttando la proprietà di monotonia dell'integrale e partendo dal fatto che valga la (4.1), anzichè la (3.1), la dimostrazione risulta analoga a quella della formula di media di volume per funzioni armoniche. □

Vediamo ora due definizioni di funzioni subarmoniche (superarmoniche), che sono in realtà equivalenti:

Definizione 4.3.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ si dice subarmonica (superarmonica) continua in Ω se per ogni disco $D = D(x, r)$, tale che $\overline{D} \subseteq \Omega$, vale la formula di sotto(sopra)-media:

$$u(x) \leq (\geq) \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u\, d\sigma. \tag{4.3}$$

Definizione 4.4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ si dice subarmonica (superarmonica) in Ω se per ogni disco $D = D(x, r)$, tale che $\overline{D} \subseteq \Omega$, e per ogni funzione h armonica in D, vale:

$$u \leq (\geq) h \quad su \quad \partial D \Rightarrow u \leq (\geq) h \quad in \quad D. \tag{4.4}$$

Proviamone ora l'equivalenza:

Dimostrazione.

1. Sia $u \in C(\Omega)$ funzione per cui valga la formula di sotto-media:
$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u\, d\sigma,$$
per ogni $D = D(x, r)$ tale che $\overline{D(x, r)} \subseteq \Omega$
Sia h una funzione armonica in D, tale che $u \leq h$ in ∂D. Allora:
$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u\, d\sigma \leq \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} h\, d\sigma = h(x),$$
cioè $u \leq h$ in D.

2. Sia $u \in C(\Omega)$ tale che, per ogni $D = D(x,r)$, con $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$, e per ogni funzione h armonica in D, valga (4.4).
Fissato un disco D tale che $\overline{D} \subseteq \Omega$, possiamo dire che $u \in C(\partial D)$. Consideriamo come funzione h armonica in D la funzione:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{r^2-|x|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial D} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y), & x \in D \\ \varphi(x), & x \in \partial D \end{cases} \tag{4.5}$$

con dato al bordo u.
Per ipotesi $u \leq h$ in tutto il disco D, allora:

$$u \leq h = \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} h \, d\sigma = \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u \, d\sigma,$$

cioè u verifica la formula di sotto-media.

□

Per le funzioni superarmoniche valgono i principi del minimo debole e del minimo forte; per le funzioni subarmoniche valgono invece i principi del massimo debole e del massimo forte. Le dimostrazioni sono analoghe e quelle già viste per le funzioni armoniche.
Vediamo quanto detto per le funzioni subarmoniche:

Proposizione 4.1.4.
Per funzioni subarmoniche in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, definite come in 4.4, valgono:

- *principio del massimo debole:*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial D} u;$$

- *principio del massimo forte:*
siano u subarmonica e v superarmonica in Ω, dominio limitato, tali che $u \leq v$ in ∂D. Allora $v > u$ in Ω, oppure $v \equiv u$;

- *date $u_1, ..., u_n$ funzioni subarmoniche in Ω, allora $u(x) = \max\{u_1, ..., u_n\}$ è ancora subarmonica in Ω.*

Dimostrazione. Le dimostrazioni del punto 1 e 3 sono immediate.
Vediamo invece la dimostrazione del punto 2:
supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che:

$$(u - v)(x_0) = \sup_{\Omega}(u - v) = M \geq 0.$$

Per ipotesi $v \geq u$ in $\partial\Omega$, allora assumiamo l'esistenza di un disco $D = D(x_0, r)$, tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$, tale che:

$$(u - v)(x) \neq M, \quad \forall x \in \partial D.$$

Siano $\bar{u}$, $\bar{v}$, funzioni armoniche definite come (4.5), uguali rispettivamente a u e v in ∂D. Allora, sfruttando la prima proprietà:

$$M \geq 0 \geq \sup_{\partial D}(\bar{u} - \bar{v}) \geq (\bar{u} - \bar{v})(x_0) \geq (u - v)(x_0) = M.$$

Dal principio del massimo forte per le funzioni armoniche si ha che $(\bar{u} - \bar{v}) \equiv M$ in D e vale:

$$(u - v)(x) = M, \quad \forall x \in \partial D;$$

ma ciò è assurdo, poichè contraddice la scelta di D. $\square$

Siamo ora in grado di affrontare il problema di Dirichlet, utilizzando il metodo di Perron.

4.2 Il metodo di Perron

Definizione 4.5.
Sia $u \in C(\Omega) \cap \mathbb{S}(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Per ogni disco $D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$, sia $\varphi \in C(\partial D)$. Sia dato inoltre il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & in \quad D \\ u = \varphi & in \quad \partial D \end{cases} \tag{4.6}$$

La soluzione di (4.6) sarà indicata come H_φ^D.
Infine sia $u_D : \Omega \to \mathbb{R}$, definita come:

$$u_D(x) = \begin{cases} u(x) = 0, & x \in \Omega \setminus D \\ H_\varphi^D, & x \in D \end{cases}$$

Vediamo ora alcune proprietà di u_D:

Proposizione 4.2.1.
Per ogni $u \in C(\Omega) \cap \mathbb{S}(\Omega)$ e per ogni disco $D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$, si ha:

1. *$u_D \leq u$.*
2. *$u_D \in C(\Omega) \cap \mathbb{S}(\Omega)$*

Dimostrazione. Prima di procedere con la dimostrazione, è necessario enunciare il seguente lemma:

Lemma 4.2.2. *Sia $u \in C(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Sono equivalenti:*

- $u \in \mathbb{S}(\Omega)$
- $\forall D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega \Rightarrow u|_D \geq H_\varphi^D$
- $\forall D = D(x,r) \subseteq \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega \Rightarrow u(x) \geq \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} u(y)\, d\sigma(y).$

Dimostrazione.
(1) $\Rightarrow$ (2): Posta $v : D \to \mathbb{R}, \quad v(x) = u(x) - H_\varphi^D(x)$, v risulta essere superarmonica in D, poichè è somma di u e di una funzione armonica. Inoltre v è continua in D e vale $v|_{\partial D} = 0$.
Per il principio del minimo per funzioni superarmoniche vale:

$$v \geq 0 \quad in \quad D, \Rightarrow u|_D \geq H_\varphi^D.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Dalla formula di Poisson si ottiene:

$$\int_{\partial D(x,r)} P(x,y) u(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{|\partial D(x,r)|} \int_{\partial D(x,r)} u(y)\, d\sigma(y).$$

Poichè per ipotesi vale (2):

$$u(x) \geq H_\varphi^D(x) = \int_{\partial D(x,r)} P(x,y) u(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{|\partial D(x,r)|} \int_{\partial D(x,r)} u(y)\, d\sigma(y), \Rightarrow (3).$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Sia $0 < \rho < r$, allora per la (3) si ha:

$$u(x) \geq \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial D(x,\rho)} u(y)\, d\sigma(y),$$

da cui:

$$n\omega_n \rho^{n-1} u(x) \geq \int_{\partial D(x,\rho)} u(y)\, d\sigma(y).$$

Integrando entrambi i membri su $]0, r[$, si ottiene:

$$n\omega_n \left(\int_0^r \rho^{n-1}\, d\rho \right) u(x) \geq \int_0^r \int_{\partial D(x,\rho)} u(y)\, d\sigma(y),$$

cioè:

$$\omega_n r^n u(x) \geq \int_{\partial D(x,r)} u(y)\, dy.$$

$\square$

Siamo ora in grado di dimostrare la proposizione:
Se $u \in C(\Omega) \cap \mathbb{S}(\Omega)$, per il lemma si ha che $u \geq u_D$ ed è evidente che $u_D \in C(\Omega)$. Proviamo che $u_D \in \mathbb{S}(\Omega)$.
Sia D' un disco tale che $\overline{D'} \subseteq \Omega$ e sia $h = H^{D'}_{u_{D|_{\partial D'}}}$.
Poichè $u_D \leq u$ e $u \in \mathbb{S}(\Omega)$, si ha:

$$u_{|_{D'}} \geq H^{D'}_{u_{|_{\partial D'}}} \geq H^{D'}_{u_{D|_{\partial D'}}} = h.$$

Se $D' \cap D = \emptyset$, per il lemma, si ha che $u_D \in \mathbb{S}(\Omega)$, poichè $u_{D|_{D'}} = u_{|D'}$.
Supponiamo ora che $D' \cap D \neq \emptyset$, allora:

$$u_D - h \geq 0, \quad in \quad \partial(D' \cap D), \tag{4.7}$$

infatti abbiamo già provato che $h \leq u_{|D'}$ e $u_D = h$ sul bordo di D'.
Per il principio del minimo, da (4.7), si ha:

$$u_D - h \geq 0, \quad in \quad D' \cap D.$$

Allora riassumendo:

$$h \leq \begin{cases} u_D, & D' \cap D \\ u = u_D, & D' \setminus D \end{cases}$$

e ciò prova la tesi. □

Definizione 4.6 (Subfunzioni e superfunzioni)**.**
Sia $\Omega\mathbb{R}^n$ un dominio limitato e sia φ una funzione limitata in $\partial\Omega$. Una funzione subarmonica $u \in C(\Omega)$ si dice subfunzione, relativa a φ, se vale $u \leq \varphi$ in $\partial\Omega$. Allo stesso modo, u superarmonica in $C(\Omega)$ si dice superfunzione relativa a φ se vale $u \geq \varphi$ in $\partial\Omega$.

Osservazione 17. Sia $\Omega\mathbb{R}^n$ un dominio limitato e sia φ una funzione limitata in $\partial\Omega$. Allora ogni subfunzione relativa a φ è minore o uguale ad ogni superfunzione relativa a φ.

Dimostrazione. Siano u subfunzione e v superfunzione relative a φ.Posta $w = u - v$, allora è una subfunzione relativa a 0 e, essendo w subarmonica, per il principio del massimo debole visto nella proposizione 4.1.4 si ha:

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\omega} w \leq 0,$$

cioè $u \leq v$ in Ω. □

L'insieme delle subfunzioni relative a φ è indicato con S_φ. Tale insieme gode di due importanti proprietà:

Osservazione 18. $S_\varphi \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Essendo φ limitata in $\partial\Omega$, posto $m = \inf_{\partial\Omega} \varphi$, allora $m \in S_\varphi$. □

Osservazione 19. $\sup_{v \in S_\varphi} v(x) < +\infty, \quad \forall x \in \Omega$.

Dimostrazione. Poniamo $M = \sup_{\partial\Omega} \varphi$. Essendo φ limitata in $\partial\Omega$, $M < +\infty$.
Prendiamo ora $v \in S_\varphi$.
Allora $v - M \leq \varphi - M \leq 0$ in $\partial\Omega$. Applicando il principio del massimo debole della proposizione 4.1.4, si ha che $v \leq M$ in Ω, allora:

$$\sup_{v \in S_\varphi} v(x) \leq M < +\infty, \quad \forall x \in \Omega.$$

□

Definizione 4.7.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ poniamo:

$$H_\varphi^\Omega = \sup_{v \in S_\varphi} v(x) = u(x).$$

Enunciamo ora il teorema di Perron:

Teorema 4.2.3 (Teorema di Perron)**.**
Per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato, la funzione:

$$u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x), \tag{4.8}$$

è armonica in Ω.

Dimostrazione. Dal principio del massimo debole ogni funzione $v \in S_\varphi$ soddisfa $v \leq \sup \varphi$, allora u è ben definita. Basta provare allora che u è armonica in D.
Per la definizione di u, esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_\varphi$, tale che $u_n(x) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u(x)$. Si può supporre che tale successione sia crescente: ponendo $v_n = \max\{u_1, ..., u_n\}$, si vede che $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente per costruzione; è contenuta in S_φ per il punto (3) della proposizione 4.1.4 e $u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Perciò:

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x) \leq \lim_{n \to +\infty} v_n(x) \leq u(x),$$

da cui $v_n(x) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u(x)$.
Si può dire inoltre che u_n è armonica in D, per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $h =$

$\lim_{n\to+\infty} u_n(x)$ è armonica in D. Se $u(x) = h$ in D, il teorema sarebbe provato.
Supponiamo allora per assurdo che $u(x) \neq h$, esiste allora $y \in D, \quad y \neq x$, tale che $u(y) \neq h(y)$, ma essendo:

$$h = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq \sup_{u\in S_\varphi} u = H_\varphi^\Omega,$$

avremo:

$$H_\varphi^\Omega(y) = u(y) > h(y).$$

Costruendo come prima una successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_\varphi$, tale che $w_n(y) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(y)$, non è restrittivo supporre che sia crescente, armonica in $D, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $w_n \geq u_n$. Passando al limite per $n \to +\infty$, dall'ultima proprietà elencata, ricaviamo che $w \geq h$ in D.
Allora:

$$u(x) = h(x) \leq w(x) \leq u(x).$$

Quindi $w(x) = h(x)$ e dal principio del massimo forte per le funzioni armoniche si ha $h = w$ in D, perciò $h(y) = w(y) = u(y)$, ma per l'ipotesi $h(y) < u(y)$ si ha un assurdo.
Allora $h = u$ in D, cioè u è armonica in D. □

La funzione armonica trovata nel precedente risultato è chiamata soluzione di Perron del problema di Dirichlet.

Osservazione 20. Se il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & in \quad \Omega \\ u = \varphi, & in \quad \partial\Omega \end{cases}$$

ha come soluzione classica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, allora:

$$u = H_\varphi^\Omega.$$

Dimostrazione. Sia $u \in S_\varphi$, allora $u \leq \sup_{v\in S_\varphi} v = H_\varphi^\Omega$. Poichè anche $v \in S_\varphi$, allora:

$$\lim_{\partial\Omega} \sup(v-u) \leq 0, \quad v - u \in \mathbb{S}(\Omega).$$

Allora $v \leq u$ in Ω, perciò $H_\varphi^\Omega = \sup_{v\in S_\varphi} v \leq u$. da cui si ottiene $u = H_\varphi^\Omega$. □

Grazie all'osservazione precedente siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema:

Teorema 4.2.4.
Il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & in \quad \Omega \\ u = \varphi, & in \quad \partial\Omega \end{cases}$$

ammette soluzione se e solo se:

$$\lim_{\Omega \ni x \to y} H_\varphi^\Omega(x) = \varphi(y),$$

per ogni $y \in \partial\Omega$.

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza diretta dell'osservazione precedente. □

I punti che verificano la condizione del teorema sono detti regolari. Prima di dare la definizione di punto regolare è utile analizzare il concetto di barriera. Infatti nel metodo di Perron lo studio del comportamento al bordo della soluzione è separato dal problema dell'esitenza. L'assunzione continua di valori al bordo è legata alle proprietà geometriche del contorno proprio attraverso il concetto di funzione barriera.

Definizione 4.8 (Funzione barriera)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e $\xi \in \partial\Omega$ un punto. Allora una funzione $w = w_\xi \in C(\overline{\Omega})$ è detta barriera relativa a Ω, in ξ, se verifica:

1. w è superarmonica in Ω;

2. $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$, $w(\xi) = 0$.

Il concetto di barriera appena enunciato può essere localizzato al bordo $\partial\Omega$:

Definizione 4.9 (Barriera locale)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e $\xi \in \partial\Omega$ un punto. Allora una funzione $w = w_\xi \in C(\overline{\Omega})$ è detta barriera locale in ξ se esiste un intorno U di ξ, tale che valga la definizione di barriera per w in $\Omega \cap U$.

A partire dalla definizione di barriera locale, possiamo enunciare il concetto di barriera relativa a Ω in ξ come segue:

Osservazione 21. Dato un disco $D \subseteq \mathbb{R}^n$, tale che $\xi \in D \subseteq \overline{D} \subseteq U$, e posto $m = \inf_{U \setminus D} w > 0$, la funzione:

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} \min(m, w(x)), & x \in \overline{\Omega} \cap D \\ m, & x \in \overline{\Omega} \setminus D \end{cases} \tag{4.9}$$

è una barriera in ξ, relativa a Ω.

Dimostrazione. La continuità di $\bar{w}$ e la seconda proprietà di funzione barriera sono immediate. La proprietà (1) di funzione barriera, cioè l'essere superarmonica in Ω, è garantita dal (3) punto della proposizione 4.1.4, applicata a funzioni superarmoniche. □

Definizione 4.10 (Punto regolare)**.**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato, $\xi \in \partial\Omega$ è un punto regolare se esiste una barriera in quel punto.

Il lemma seguente evidenzia un primo legame tra il concetto di barriera e il comportamento al bordo della soluzione del classico problema di Dirichlet.

Lemma 4.2.5. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e φ una funzione limitata su $\partial\Omega$. Sia u una funzione armonica in Ω definita dal teorema di Perron (Teorema 4.2.3). Se $\xi \in \partial\Omega$ è un punto regolare e φ è continua in ξ, allora $u(x) \stackrel{x\to\xi}{\longrightarrow} \varphi(\xi)$.*

Dimostrazione. Sia fissato $\varepsilon > 0$ e poniamo $M = \sup|\varphi|$. Poichè ξ è un punto regolare, esiste una barriera w in ξ. Inoltre, per la continuità di φ, esistono due costanti δ e k, tali che: $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$, se $|x - \xi| < \delta$, e $kw(x) \geq 2M$, se $|x - \xi| \geq \delta$.
Le funzioni $\varphi(\xi)+\varepsilon+kw$ e $\varphi(\xi)-\varepsilon-kw$ sono rispettivamente una superfunzione e una subfunzione relative a φ. Quindi, dalla definizione di u e ricordando il fatto che ogni superfunzione domina ogni subfunzione, abbiamo:

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x),$$

oppure:

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Poichè $w(x) \stackrel{x\to\xi}{\longrightarrow} 0$, si ha $u(x) \stackrel{x\to\xi}{\longrightarrow} \varphi(\xi)$. □

Grazie a questo lemma, possiamo concludere con il seguente teorema, che è condizione necessaria e sufficiente per la risoluzione del classico problema di Dirichlet per il Laplaciano in un arbitrario dominio limitato.

Teorema 4.2.6.
Il classico problema di Dirichlet per il Laplaciano, in un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, è risolubile per qualsiasi funzione continua su $\partial\Omega$ se e solo se tutti i punti del bordo sono regolari.

Dimostrazione. Se $\varphi \in C(\partial\Omega)$ e i punti del bordo di Ω sono regolari, allora il lemma precedente afferma che la funzione armonica che verifica il metodo di Perron risolve il classico problema di Dirichlet, avente φ come dato al bordo. Viceversa, supponiamo che il problema di Dirichlet sia risolto per ogni funzione continua al bordo di Ω. Sia $\xi \in \partial\Omega$, allora la funzione $\varphi(x) = |x - \xi|$ è continua in $\partial\Omega$ e la funzione armonica che risolve il problema di Dirichlet in Ω, con dato al bordo φ, risulta essere una barriera in ξ. Perciò ξ è regolare, come ogni punto di $\partial\Omega$. $\square$

Bibliografia

[1] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Second Edition, Springer-Verlag New York, 2000.

[2] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol 19, 1998.

[3] B. Abbondanza, *Formule di Media e Funzioni Armoniche*, Tesi di Laurea specialistica in Analisi Matematica, II sessione anno accademico 2009/2010, Università degli Studi di Bologna.

[4] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag New York, 1977.

Ringraziamenti

Devo ancora realizzare il fatto di aver finito questa prima parte del mio percorso, di avercela finalmente fatta. Avrei potuto terminare prima, ma non rimpiango nulla di quello che ho fatto in questi anni in contemporanea con i miei studi, come ad esempio la mia danza. Per questo ringrazio in primis, dal profondo del mio cuore, Sofia, la mia migliore amica, la mia ballerina, la mia confidente, la mia compagnia di viaggi e di avventure; senza di te non sarei la persona che sono ora. In secondo luogo ringrazio tutte le mie splendide bimbe, ormai cresciute, che mi seguono e mi sono vicine da anni e che ho visto diventare delle splendide donne.
Ringrazio le mie due Chorrize, Lotti e Fra. Ci siamo trovate per caso, ma è nata un'amicizia inaspettata che mi auguro duri per sempre, perchè siamo il trio delle meraviglie.
Ringrazio Gianlu, mio compagno fidato di studi, mio confidente e amico fedele. Sono davvero grata di averti ancora al mio fianco, soprattutto in un momento come questo, per me molto importante.
Grazie alle mie chicche Fiamma, Sofi e Lu che, nonostante tutto, sono sempre accanto a me.
Grazie alla prof.ssa A. Montanari per i suoi preziosi consigli e per avermi fornito tutti gli strumenti di cui avevo bisogno per portare a compimento la mia tesi.
Un ringraziamento particolare ai miei genitori e a mio fratello Luca, grazie per avermi resa la persona indipendente che sono ora, grazie per avermi permesso di vivere le mie passioni, grazie per essere sempre dalla mia parte, nonostante starmi vicino non sia sempre così facile.
Dedico questo primo successo anche ai miei fantastici nonni: Lina, Claudio, Carla e Carlo, che sono sicura mi stia guardando fiero da lassù.
Un ringraziamento speciale al Lattico e ai suoi inquilini per l'alloggio offerto.
Credo che ognuno abbia un tempo di riuscita nella vita diverso dagli altri. Il mio non poteva essere che questo: ho amiche e amici che non cambierei per nulla al mondo, una famiglia che mi sostiene in tutto quello che faccio e poi ho incontrato te, Marco. Sei stato la mia ancora di salvezza in queste

settimane. Hai vissuto la mia laurea in prima persona, crisi comprese, avendo sempre una parola di conforto per me. Grazie per la sopportazione, grazie per il supporto, grazie per essere semplicemente te.