Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

ESPONENZIALI E LOGARITMI: IL VIAGGIO DIDATTICO.

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
ELENA TARTARINI

Sessione II
Anno Accademico 2016/2017

"Il mondo è nelle mani di coloro che hanno il coraggio di sognare e di correre il rischio di vivere i propri sogni"

Paulo Coelho

Indice

Introduzione

Oggi esistono calcolatrici e computer e non ci si rende conto di quanto sia importante fare i calcoli rapidamente ed in modo preciso anche senza di esse. Quando Nepero inventò i logaritmi, i matematici contemporanei, dissero che era stata loro regalata la metà della vita: infatti l'occupazione principale dei matematici e degli astronomi era quella di calcolare la posizione dei pianeti, nel presente, nel passato e nel futuro e l'espressione "calcoli astronomici" non era certo un modo di dire.
Con i logaritmi è possibile trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e di radici in quozienti, semplificando così tutte le operazioni.
La cosa che si nota maggiormente è che tale caratteristica dei logaritmi negli anni è stata perduta e gli studenti non riconoscono in essi tali proprietà. Agli studenti vengono proposte le varie proprietà e il fatto che il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale, ma non gli vengono mai proposti esercizi di calcolo, del tipo $\sqrt[16]{6523499}$ oppure $(673458009 : 24678329)$.
Questa tesi nasce dall'esigenza di voler valutare in modo sufficientemente completo l'apprendimento, da parte degli studenti, delle funzioni esponenziali e logaritmiche. Si nota che, nella maggioranza dei casi, ciò che rimane agli alunni dall'esperienza scolastica sono solo poche nozioni, apprese perlopiù dalla semplice memorizzazione delle regole formali dei logaritmi, ottendo così un apprendimento meccanico, ripetitivo e non una conoscenza profonda dell'argomento. Si è quindi voluto valutare il grado di apprendimento delle classi da noi studiate e alcune possibili strategie didattiche per aiutarli a comprendere al meglio tali argomenti.
Le classi dai noi studiate sono delle quarte e delle quinte liceo scientifico, esse hanno già introdotto, durante il terzo anno, le nozioni base delle funzioni come dominio, codominio, funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Con questi strumenti ogni studente è in grado di apprendere al meglio il legame che intercorre tra gli esponenziali ed i logaritmi.
Nel primo capitolo sono stati analizzati dei testi in didattica e sono stati riportati i dati più rilevanti per questa tesi.

Nel secondo capitolo si è contestualizzato storicamente lo sviluppo di queste due funzioni, partendo dalle prime scoperte sugli esponenziali riconducibili agli antichi egizi, fino ad arrivare a Nepero, " l'inventore " del logaritmo.
Nel terzo capitolo, parte centrale della tesi, viene, per prima cosa, presentato il test che è stato sottoposto agli studenti e successivamente ne vengono analizzati gli errori e i possibili modi per cercare di ridurli.
Nel quarto, ed ultimo capitolo, vi sono presentate le conclusioni di tale lavoro.

Capitolo 1

Storia dei logaritmi e degli esponenziali

1.1 Babilonesi

La storia degli esponenziali e dei logaritmi ha origine malti secoli fa. Le prime testimonianze ritrovate risalgono all'epoca degli egizi. Nel papiro di Rhind compaiono riferimenti a progressioni aritmetiche e geometriche. Uno dei primi problemi ritrovati risale all'epoca dei Babilonesi. Riguardo a questo periodo sono state ritrovare varie tavolette. In esse vi erano sia tavole di moltiplicazione, che tavole di inversione, le quali venivano utilizzate per le divisioni. Sembra che avessero anche delle tavole per le radici quadrate e cubiche ed una buona conoscenza delle progressioni aritmetiche e geometriche. Certamente loro non hanno scritto teorie, ma attraverso l'uso di problemi pratici, hanno elaborato idee matematiche riconducibili anche ai logaritmi ed esponenziali.
Su una tavoletta Babilonese (2000 a.C.) appare il seguente problema:
Un capitale di una mina, posto all'interesse del 20% dopo 5 anni raddoppia; se il capitale così raddoppiato si mette a frutto e dopo 5 anni si reinveste tutto il capitale raddoppiato e così via..., quale sarà il capitale accumulato dopo 6 lustri?
Tale problema si potrebbe riscrivere, in notazione moderna, attraverso la seguente espressione:
2^x con $x =$ numero dei lustri passati.
In tal caso sostituendo ad x il valore 6 si riuscirebbe a calcolare tale capitale.
Dunque i matematici Babilonesi seppero mettere a confronto progressioni aritmetiche e progressioni geometriche: da tale confronto nascerà in seguito il concetto di Logaritmo.

1.2 Aristotele

Nell'arco degli anni successivi non vi fù un grande studio degli esponenziali e ancor meno dei logaritmi. L'unica traccia che abbiamo è con Aristotele (278-212), egli riuscì a rappresentare nemeri grandi attraverso l'uso delle potenze di 10. Nel linguaggio moderno tale proprietà si tradurrebbe in $10^m * 10^n = 10^{m+n}$ con $n, m \in \mathbb{N}$.

1.3 Nicola Oresme

Nell'opera *De proportionibus* , composta verso il 1360, Oresme generalizzò la teoria delle proporzioni fino a includere qualsiasi potenza frazionaria razionale e riuscì a formulare regole per la combinazione di proporzioni, che sono equivalenti alle nostre leggi degli esponenti, espresse nella odierna notazione dalle formule $10^m * 10^n = 10^{m+n}$ e $(x^n)^m = x^{mn}$ con $n, m \in \mathbb{Q}$.

1.4 Nicolas Chuquet

Nicolas Chuquet, nel 1484, scrisse un'opera intitolata *Triparty en la Science des Nombres.* Quest'opera non assomiglia a nessun'alta opera di aritmetica o di matematica e gli unici autori citati sono Boezio e Campano. L'opera è suddivisa in tre parti. Nella prima parte tratta di operazioni aritmetiche razionali e include un'esposizione del sistema di numerazione indo-arabo. Nella seconda parla delle radici dei numeri. Nell'ultima parte, di gran lunga la più importante, tratta del Triparty, ossia la regola dell'incognita, quella che noi chiameremo algebra. In questa parte compaiono incognite sia con esponente intero positivo che non esponente nullo che con esponente intero negativo. Una tale notazione metteva a nudo le leggi degli esponenti, che Chuquet poteva aver appreso attraverso lo studio dell'opera di Oresme. Un esempio di tali calcoli è dato da, scritto in notazione moderna: $72x : 8x^3 = 9x^{-2}$.
All'interno di tale libro è presente anche un problema riconducibile ai logaritmi, anche se tale concetto all'epoca non esisteva ancora. Il problema era il seguente:
Una botte si svuota ogni giorno di un decimo del suo contenuto. Dopo quanto tempo il contenuto si sarà dimezzato?
La soluzione di tale problema si trova risolvendo l'equazione $\left(\frac{9}{10}\right)^x = \frac{1}{2}$, ma

non esisteva all'epoca questa scrittura. L'autore riporta inizialmente i valori delle quantità contenute nella botte all'inizio di ogni giorno, supponendo che all'inizio alla botte piena equivalesse l'unità.

Giorni	**Liquido contenuto**
Giorno 1	1
Giorno 2	0.9
Giorno 3	0.81
Giorno 4	0.729
Giorno 5	0.6561
Giorno 6	0.59049
Giorno 7	0.531441
Giorno 8	0.478297

Dedusse così che il dimezzamento sarebbe avvenuto nel corso del settimo giorno. Per poter calcolare in maniera più precisa il momento della giornata in cui era avvenuto tale dimezzamento, utilizzò l'interpolazione lineare nel seguente modo:

$$1 : t = (0,531 - 0,478) : (0,531 - 0,5)$$

Ne seguirà che:

$$t = \frac{0,531 - 0,5}{0,531 - 0,478} = 0,592$$

Il che corrisponde a 14 ore e 12 minuti. Il vero risultato sarebbe 13 ore e 53 minuti. Tale arrotondamento per eccesso è dovuto al fatto che $(0,9)^x$ è una funzione convessa e quindi la corda sta sopra al grafico.
Nel grafico sottostante è stata riprodotta la curva logaritmica da noi considerata e il segmento che congiunge il punto $A(7; 0.531441)$ e $B(8; 0.478297)$. Attraverso l'interpolazione lineare troveremo, dunque, un punto su tale retta, anche se il risultato corretto dovrebbe stare sulla curva logaritmica.

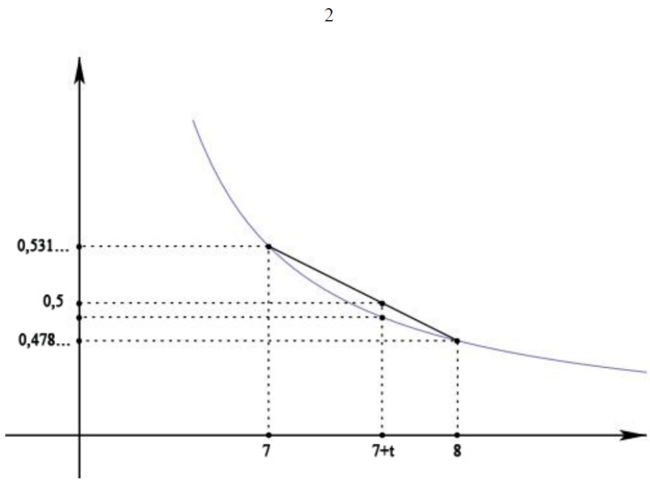


Figura 1.1: Grafico del logaritmo e della retta

1.5 John Napier

John Napier non fu un matematico di professione ma nel 1614 pubblicò l'opera *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, che tradotto sarebbe *Descrizione della regola meravigliosa dei logaritmi*. L'idea centrale su cui si basa l'invenzione del Napier può essere spiegata molto semplicemente. Per mantenere molto vicini tra loro i termini di una progressione geometrica delle potenze intere di un numero dato è necessario assumere come numero dato una cifra molto vicina all'uno. Napier decise pertanto di usare come suo numero base $1 - 10^{-7}$ (ossia 0.99999999). Ora i termini della progressione delle potenze crescenti sono effettivamente molto vicini tra loro. Per ottenere un maggiore equilibrio e per evitare cifre decimali moltiplicò ciascuna potenza per 10^7. Quindi, se $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, allora L è il logaritmo neperiano del numero N. Per esempio il logaritmo di 10^7 era 0. Se egli avesse diviso per 10^7 i numeri e i logaritmi, si sarebbe ottenuto un sistema di logaritmi in base $\frac{1}{e}$: infatti $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ è vicino a :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}. \tag{1.1}$$

È da sottolineare che i principi su cui si basavano le regole sui logaritmi venivano da lui spiegate attraverso uno studio di tipo cinematico. Egli immagina due punti in movimento su due semirette distante, di origine A e a; il primo si muove a velocità costante mentre il secondo ha inizialmente la stessa velocità iniziale del primo ma, successivamente, diminuisce la sua velocità, in modo tale che in tempi uguali percorre parti uguali di un segmento $[a, b]$ della semiretta su cui si muove. Si può notare che tale moto è dato dalla risoluzione del seguente problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'' = -ky' & k > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = v_0 & v_0 > 0 \end{cases}$$

Tale soluzione è: $y(x) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kx})$

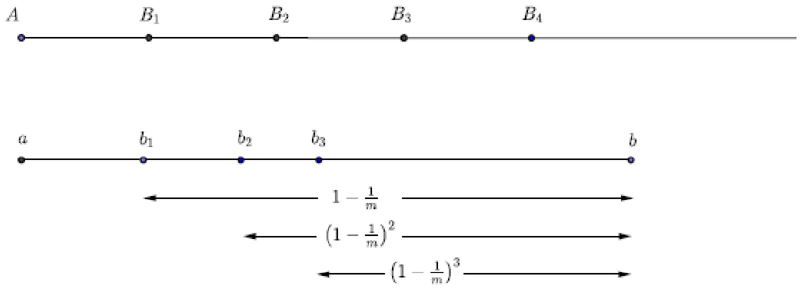


Figura 1.2: Moti dei differenti punti

Si assume come unità di misura la lunghezza del segmento di estremi a e b.

La descrizione dei due moti viene discretizzata fissando un numero intero m; viene scelto il punto b_1 sul segmento $[a, b]$ in modo che $[a, b_1]$ sia $\frac{1}{m}$. Nel tempo in cui il punto partito da a raggiunge b_1 , quello partito da A raggiunge un punto B_1 . Nel successivo intervallo di tempo di uguale durata, lungo la semiretta di origine A si raggiunge un punto B_2 con $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2}$; lungo l'altra semiretta si raggiunge b_2 in modo che:

$$\overline{b_2b} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\overline{b_1b} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2\overline{ab} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2$$

E così via: i punti B_3 ,B_n , si succedono equidistanti tra loro; i punti b_3, b_n, sono invece tali che le misure $\overline{b_nb}$ formano una progressione geometrica di ragione $1 - \frac{1}{m}$. Napier definisce logaritmo di $\overline{b_nb}$ la lunghezza $\overline{AB_n}$; come avevamo anticipato, vengono messe in corrispondenza una progressione geometrica e una aritmetica. La scelta che fa Napier per m è $m = 10^7$; e con ciò si riprende il discorso fatto precedentemente.

1.6 Henry Briggs

Herry Briggs ammirò da subito il lavoro di Nepier e nel 1615 gli fece visita. Essi discussero possibili modifiche da introdurre nel metodo dei logaritmi. Briggs propose che si dovessero utilizzare le potenze di 10, cosa a cui Napier aveva già pensato. I due matematici giunsero quindi a una conclusione: che il logaritmo di 10 fosse uno e che il logaritmo di uno fosse zero. Tale collaborazione durò pochi anni a causa della morte di Napier nel 1617. Ricadeva, pertanto, su Briggs il compito di compilare la prima tavola dei logaritmi comuni, o briggsiani. Invece che considerare le potenze di un numero vicino a 1, come aveva fatto precedentemente Napier, Briggs partiva da $\log 10 = 1$ e trovava poi altri logaritmi mediante successive estrazioni di radici. Per esempio trovando $\sqrt{10} = 3,162277$, aveva che $\log 3,162277 = 0.5000000$ e da $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{31,62277} = 5,623413$, aveva che $\log 5,623413 = 0.7500000$. Continuando in questo modo calcolò altri logaritmi comuni. Nel 1617 pubblicò *Logarithmorum chilias prima*, ossia i logaritmi dei numeri da 1 a 100, calcolati ciascuno fino alla quattordicesima cifra dopo la virgola. Nel 1624, nell'opera *Arithmetica logarithmica*, ampliò la sua tavola fino ad includere i logaritmi comuni dei numeri da 1 a 20.000 e da 90.000 a 100.000, calcolati anche questa volta fino alla quattordicesima cifra decimale. Tali tavole vennero usate fino agli anni '70 del XX secolo, quando l'avvento delle calcolatrici scientifiche le ha rese obsolete.

1.7 Evangelista Torricelli

I primi a trattare la curva logaritmica furono Evangelista Torricelli (1608-1647) ed ancora Christiaan Huygens. Cronologicamente l'onore di avere studiato per primo la curva logaritmica, determinandone le principali proprietà, spetta a Torricelli nella *De hemihyperbole Logarithmica* la cui stesura in forma manoscritta va fatta risalire al 1644. In tale opera Torricelli fornisce la seguente costruzione per punti della curva.

La spiegazione della figura sarà semplice: si consideri una retta DE illimitata da ambo le parti su cui ci prendono due punti D ed E arbitrari. Si traccino due segmenti perpendicolari DA ed EC. Diviso in due parti uguali il segmento DE in F, si tracci la perpendicolare FB media geometrica tra DA ed EC, cioè $\overline{FB} = \sqrt{\overline{DA} * \overline{CE}}$ *e bisecate ancora le parti ottenute in G ed M, si traccino GH ed MN entrambi medi proporzionali tra i segmenti adiacenti. E si proceda in questa suddivisione tante volte quanto si vuole. I punti A, B, C e i successivi, ottenuti con questo procedimento, appartengono al grafico di una funzione logaritmica.*

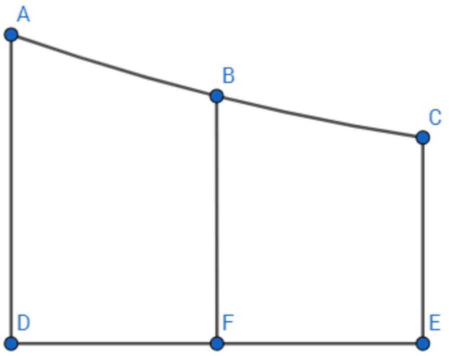


Figura 1.3: Prima suddivisione

Torricelli, quindi, si occupa dei logaritmi attraverso l'integrazione dell'iperbole $y = \frac{1}{x}$. Fissato un numero positivo n, sia $b = 1 + \frac{1}{n}$. Sull'asse degli ascisse si considerano i punti 1, b, b^2,..., b^n=B. Successivamente si costruisce la funzione a scala in modo tale da valere b^{-k} tra b^k e b^{k+1}. Il sottografico di tale funzione è un plurirettangolo formato da n rettangoli, ciascuno dei quali ha area $\left(b^{k+1} - b^k\right) * b^{-k} = b - 1$. I punti segnati sull'asse delle ascisse si seguono in progressione geometrica mentre le aree seguono una progressione aritmetica, quindi possono essere pensate come i logaritmi di 1, b, b^2,..., b^n.

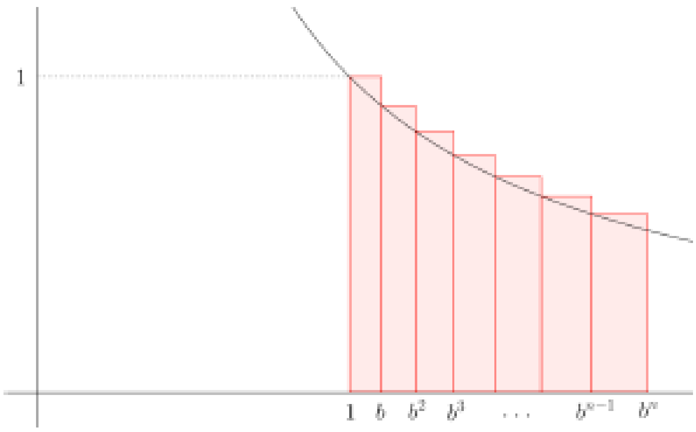


Figura 1.4: Aree

Cerchiamo ora di capire quale sia la base di questi logaritmi. La corrispondenza su scritta definisce che $\log_r b^n = n * (b-1)$ quindi, in particolare: $\log_r \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = n * \frac{1}{n} = 1$. Necessariamente $r = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Si nota quindi che se n assume via a via valori più grandi la base $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ si avvicina al numero e e che le aree dei plurirettangoli approssimano sempre per eccesso ma con precisione crescente, le aree sottese dall'iperbole. Quindi tale costruzione di Torricelli stabilisce che:

$$\int_1^a \frac{1}{x}\, dx = \ln a$$

1.8 Tavole Logaritmiche

Le tavole logaritmiche, come abbiamo detto in precedenza, sono state uno strumento fondamentale per il calcolo dei logaritmi prima dell'avvento delle calcolatrici scientifiche. Tali tavole sono tutte in base 10. Il motivo di tale scelta è dato dal fatto che la parte decimale dei logaritmi si ripete ogni volta che moltiplichiamo per 10 il numero da cui siamo partiti in questo modo è possibile costruire un'unica tavola invece che tante tavole simili tra loro. Basta aggiustare il valore della parte intera. Questo è spiegato efficacemente dalla proprietà dei logaritmi: $\log a * b = \log a + \log b$, cioè se si considera :

- $\log 324 = \log 100 * 3,24 = \log 100 + \log 3,24$
- $\log 3240 = \log 1000 * 3,24 = \log 1000 + \log 3,24$
- $\log 32,4 = \log 10 * 3,24 = \log 10 + \log 3,24$

Dato che i logaritmi di 10, 100 e 1000 li conosciamo il problema si sposta sul calcolo di $\log 3,24$. Quindi i numeri presenti in tabella sono le parti decimali dei logaritmi, la parte intera la dobbiamo mettere noi. Quindi per prima cosa è importante distinguere la mantissa dalla caratteristica. La mantissa, che corrisponde alle cifre decimali, è ciò che ci viene fornito dalle tavole logaritmiche mentre la caratteristica è il numero che precede la virgola. La caratteristica si trova nel seguente modo:
Sia a, $a \in \mathbb{Q}^+$ allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $10^n \leq a < 10^{n+1}$. Tale n si chiama caratteristica.
Mostriamo un esempio per chiarire l'uso di tale tavole, la tavola usata è una tabella dove troviamo i logaritmi compresi tra 1 e 100 e con mantissa di sole

4 cifre.
Per trovare il $\log 37,8962$ si nota che la caratteristica $n = 1$ Consideriamo ora le prime 3 cifre significative, si ha che 378,962 è compreso tra 378 e 379. All'interno della tabella andiamo a cercare inizialmente il numero 37 nella colonna più a sinistra. Poi scorriamo fino a che non entriamo della colonna relativa al numero 8 nella prima riga.

	0	1	2	3	4	4	6	7	8	9
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786

	0	1	2	3	4	4	6	7	8	9
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786

Per ottenere una migliore approssimazione possiamo calcolare una interpolazione lineare:

$$5775 + 0.962 * (5786 - 5775) = 5785$$

Ottendo così:

$$\log 37,8962 = 1,5785$$

Tali Tavole logaritmiche vengono spesso usate in caso di moltiplicazioni o divisioni di numeri. Per esempio potrei considerare tale divisione: 673458009: 2467832. Questa si può risolvere come una divisione normale oppure si possono usare i logaritmi nel seguente modo:

$$\log (673458009 : 24678329) = \log 673458009 - \log 24678329$$

inizialmente calcoliamo $\log 673458009$ come abbiamo fatto in precedenza. Per prima cosa definiamo la caratteristica di tale numero che è 8 dopo di che andiamo a vedere le mantisse per 673 e per 674, che valgono rispettivamente : 8274 e 8280. Interpoliamo per ottenere una migliore approssimazione:

$$8274 + 0.458009 * (8280 - 8274) = 8276$$

Ne viene che $\log 673458009 = 8.8276$.
Ora calcoliamo $\log 2467832$, allo stesso modo sappiamo che la caratteristica è 7. Le mantisse per 246 e per 247, valgono rispettivamente: 3909 e 3927. Interpolando si ottiene:

$$3909 + 0.78329 * (3927 - 3909) = 3923$$

Quindi $\log 24678329 = 7.3923$. Tornando ora all'operazione iniziale si ha che:

$$\log (673458009 : 24678329) = \log 673458009 - \log 24678329 = 8.8276 - 7.3923 = 1.4353$$

Ora si tratta di ripetere il percorso al contrario per poter calcolare il valore della divisione iniziale. Per prima cosa notiamo che la caratteristica è 2, quindi il numero sarà compreso tra 100 e 999. Per trovare tale valore andiamo a cercare nella tabella la riga che contiene la mantissa 4353 o un valore vicino ad esso.

	0	1	2	3
27	4314	4330	<u>4346</u>	<u>4362</u>

Nella tavola non compare direttamente il numero cercato quindi si dovrà fare ancora una interpolazione.

$$272 + \frac{4353 - 4346}{4362 - 4346} = 272 + \frac{7}{16} = 272,4375 \simeq 272.4$$

Il risultato di questa divisione, pertanto, sarà approssimato a:

$$(673458009 : 24678329) \simeq 27,24$$

Con la calcolatrice il risultato ottenuto è 27.78944. Un altro possibile esempio, dove si sfruttano le proprietà dei logaritmi è il seguente $\sqrt[16]{6523499}$. In questo caso si tratta di risolvere inizialmente la seguente operazione:

$$\log \sqrt[16]{6523499} = \frac{1}{16} * \log(6523499) = \frac{1}{16} * 6.8144 = 0.4259$$

ora per calcolare il risultato si interpolano i risultati delle mantisse. Risulterà che:

$$\sqrt[16]{6523499} = 2.626$$

Il risultato che otterrei con la calcolatrice è 2.66627.

Tavola logaritmica (mantisse con 4 cifre) - **Logarithmic table** (4 digit)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Capitolo 2

Studi in Didattica della Matematica

Per poter interpretare e per analizzare al meglio le difficoltà degli studenti nel capire le funzioni esponenziali e logaritmiche, sono state analizzate varie ricerche a tale proposito: inizialmente sono state studiate le tecniche di apprendimento della matematica in generale e i vari ostacoli riscontrati dagli studenti, successivamente si è analizzato il caso specifico di esponenziali e logaritmi.

2.1 Polya

Gyorye Polya, nato a Budapest il 13 dicembre del 1887, è stato un matematico ungherese. Lavorò su una grande varietà di argomenti matematici, incluse le serie, la teoria dei numeri, il calcolo combinatorio e la probabilità. Durante l'ultimo periodo della sua vita cercò di caratterizzare i metodi generali che usiamo per risolvere i problemi, descrivendo come le loro soluzioni dovrebbero essere recepite ed insegnate. Tra i suoi numerosi libri, il libro di cui andò più fiero fu How to Solve It, pubblicato nel 1945 negli Stati Uniti. Il libro è poi stato tradotto in 17 lingue e sono state vendute più di un milione di copie. Tale libro ha avuto talmente tanto successo che è difficile trovare un testo sull'euristica moderna in cui non vi si faccia riferimento. Inoltre questa tecnica di problem solving viene tutt'ora insegnata agli studenti.

How to solve it

Il libro prefigura una nuova tecnica per poter risolvere i problemi attraverso vari passaggi:

- ***Identificazione del problema e comprensione del problema***
Questo punto viene spesso tralasciato dagli insegnanti poichè può risultare abbastanza evidente, ma si è visto che per molti studenti la comprensione del testo è un ostacolo. Polya suggerisce alcune domande da sottoporre allo studente per aiutarlo a capire quali sono le informazioni importanti e quali sono i risultati a cui deve arrivare. Alcune possibili domande potrebbero essere: Cosa ti viene chiesto di trovare o mostrare? Ci sono sufficienti informazioni per poter risolvere il problema? Ecc.

- ***Creare un piano***
Polya dice che ci sono vari modi per poter risolvere un problema e che l'abilità di uno studente sta nello scegliere il metodo più facile e veloce. Questo lo si impara, principalmente, con la risoluzione di vari esercizi. Polya fornisce anche un elenco delle possibili strategie da usare: Cerca un modello, Disegna un'immagine, Risolvi un problema più semplice, Usa un modello, Lavora indietro, Utilizza una formula, sii creativo, Usa la tua testa.

- ***Esecuzione del piano***
Questo passaggio è più semplice, in quanto richiede di eseguire operazioni usando il piano precedentemente scelto.

- ***Guardare indietro***
Questo punto è fondamentale per lo studente. Si riesce a capire quali sono stati gli errori e quale strategia è meglio usare. Questa riflessione aiuterà lo studente nella risoluzione di problemi futuri.

Se questa tecnica non riesce, Polya, suggerisce:

- ***If you can't solve a problem, then there is an easier problem you can solve: find it.*** Se non riesci a risolvere un problema, allora c'è un problema più facile che tu sai risolvere: trovalo

- ***If you cannot solve the proposed problem, try to solve first some related problem. Could you imagine a more accessible related problem?*** Se non riesci a risolvere il problema proposto, prova a risolvere alcuni problemi correlati. Potresti immaginare un problema più accessibile?

2.2 Skemp

Richard Skemp fu uno dei pionieri nella ricerca in didattica della matematica, fu uno dei primi che legò le discipline della matematica e della psicologia. Egli ha richiamato entrambe queste discipline per spiegare l'apprendimento nella matematica. La principale scoperta su questo argomento fu che gli studenti costruiscono schemi per collegare ciò che già conoscono con i nuovi concetti appresi. Secondo Skemp, la matematica coinvolge un'estesa gerarchia di concetti, non possiamo formare alcun concetto particolare finchè non abbiamo formato tutti i concetti da cui dipende. Inoltre ha sostenuto che anche le emozioni svolgono una parte dominante sul modo in cui apprendiamo. Secondo lui vi sono due tipi di apprendimento in matematica, quindi due modi di capire:

- ***Conoscenza strumentale***
  Un tipo di apprendimento meccanico. Lo studente apprende la regola / metodo / algoritmo che fornisce i risultati richiesti dall'insegnante. Si può parlare di conoscenza strumentale nei casi in cui uno studente dimostra di sapere come applicare un principio o una procedura, senza necessariamente apprezzare la sua relazione con una certa struttura matematica o la ragione per cui il procedimento funziona. Questo tipo di conoscenza è il prodotto di un apprendimento meccanico di regole, teoremi e delle loro specifiche applicazioni.

- ***La comprensione relazionale***
  È un apprendimento più significativo, in cui l'alunno è in grado di comprendere i legami e le relazioni che danno alla matematica la sua struttura. Tale metodo di apprendimento è più vantaggioso a lungo termine e aiuta la motivazione dello studente nello studio della matematica.

Se l'insegnamento è prevalentemente di tipo strumentale, lo studente ha pochi problemi a breve termine, ma avrà difficoltà quando dovrà affrontare un problema in cui le regole, che conosce, non si adattano perfettamente. Infatti, la conoscenza strumentale, implica una molteplicità di regole piuttosto che pochi principi che hanno applicazioni generali. Nel caso contrario lo studente che pretenderebbe di capire relazionalmente, ma ha un insegnamento basato sullo strumentale, può arrivare a maturare delusione e rifiuto nei riguardi della matematica.
I vantaggi, secondo Skemp, della conoscenza strumentale sono:

1. All'interno del suo contesto, la matematica strumentale è più facile da capire.

2. Le ricompense sono immediate e più evidenti. Tutti abbiamo provato il piacere di voltare la pagina e vedere che i risultati delle nostre operazioni coincidono con quelli dati dal libro; ciò ci ha fatto acquisire fiducia.

3. Siccome c'è meno conoscenza coinvolta, pensando strumentalmente si può avere la risposta giusta più velocemente e con più affidabilità.

La matematica relazionale presenta questi vantaggi:

1. È più adattabile a nuove situazioni.

2. È più facile da ricordare, basandosi su pochi principi generali.

3. La conoscenza relazionale è un obiettivo valido di per sè.

4. La conoscenza relazionale è organica di per sè, cioè la soddisfazione che si prova ad essere in grado di assolvere nuovi compiti stimola l'esplorazione.

Un'insegnante opta per la conoscenza strumentale sulla base dei seguenti fattori:

1. Occorre troppo tempo per la conoscenza relazionale e questo porta alla semplice acquisizione di una determinata tecnica.

2. È difficile valutare se una persona capisce in modo strumentale o relazionale. A causa dell'alto numero di studenti per classe, spesso questi sono giudicati da ciò che scrivono su un foglio e non mediante un colloquio.

3. Gli esami vertono maggiormente su questo tipo di conoscenze, quindi con questo tipo di insegnamento nell'immediato si ha maggior riscontro positivo sull'esito dei test.

4. La grande difficoltà degli insegnanti a ristrutturare i loro schemi esistenti da lungo tempo e il fatto che i colleghi della propria scuola insegnano in maniera strumentale.

Vagliare questi fattori per fare le proprie scelte implica che l'insegnante abbia consapevolezza della distinzione tra i due modi di sapere ed imparare la matematica e che la sua conoscenza della matematica sia di tipo relazionale.

2.3 Ricerche in didattica della matematica: logaritmi ed esponenziali

Dopo che si sono visti i problemi generali e una visione ampia della matematica, si sono studiate le difficoltà di apprendimento negli argomenti specifici: qui parliamo di Logaritmi ed Esponenziali.

2.4 Webber

Webber Keith nel 2002 ha pubblicato un articolo di ricerca intitolato STUDENTS' UNDERSTANDING OF EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS. Da questo articolo si evince che le funzioni esponenziali e logaritmiche sono concetti matematici fondamentali che svolgono ruoli centrali in matematica avanzata. Purtroppo, questi sono anche concetti che danno agli studenti gravi difficoltà. Nell'articolo si propone una teoria riguardante la comprensione di queste funzioni fornendo un set delle costruzioni mentali che uno studente può utilizzare per sviluppare la propria comprensione di questi argomenti. Uno dei dati più importanti che si può notare leggendo questo articolo è che, mentre tutti gli studenti partecipanti a tale studio riuscivano nel calcolo di esponenti, come per esempio 2^2, 3^3 etc, solo pochi studenti riuscivano a comprendere il processo alla base delle funzioni esponenziali. Infine vi sono presentate delle possibili attività didattiche per favorire la comprensione agli studenti di questi concetti. Secondo Webber, per poter aiutare lo studente a capire a pieno le funzioni esponenziali, con dominio $\mathbb{R}$, è necessario prima capire alcuni semplici casi. Inizialmente, infatti, verranno viste le funzioni esponenziali con esponente in $\mathbb{N}$, successivamente in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ per poi arrivare ad $\mathbb{R}$. In tale ricerca vengono visti 4 possibili step di apprendimento della funzione esponenziale:

1. ***Elevamento a potenza visto come un'azione.***
   In questo procedimento lo studente è in grado di calcolare operativamente le varie potenze con esponente naturale e grazie a ciò riesce a cogliere varie informazioni riguardo al numero. Quindi l'alunno riesce ad interpretare b^x solo se lo riesce a calcolare.

2. ***Elevamento a potenza visto come un processo.***
   Lo studente è in grado di trovare alcune informazioni riguardo al numero b^x, con $x \in \mathbb{N}$ senza effettivamente calcolarlo. Ad esempio possono riconoscere che 2^x è una funzione crescente e sempre positiva.

3. ***Funzione esponenziale come un risultato di un processo.***
Dalla comprensione dell'esponenziale b^x, $x \in \mathbb{N}$, visto come il prodotto di b per sé stesso x-volte, lo studente riuscirà a comprendere maggiormente alcune proprietà come $b^x * b^y = b^{x+y}$ con $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$.

4. ***Generalizzazione***
Fino a questo punto lo studente è in grado di conoscere le funzioni esponenziale con dominio=$\mathbb{N}$ ora è il momento di estendere il concetto a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$. Si chiede quindi a uno studente di ragionare sul valore di $2^{\frac{1}{2}}$. Mediamente lo studente risponde $\sqrt{2}$ utilizzando le regole studiate in precedenza ma non ragiona sul fatto che $\sqrt{2}$ è l'unico numero logicamente coerente che si qualificherebbe come "un fattore mezzo di 2", infatti $2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ e $\sqrt{2} * \sqrt{2}$=2.

Successivamente vengono proposte alcune domande allo studente per cercare di capire se è riuscito a vedere l'esponenziale come processo.
Infine vi è una parte dedicata alle possibili tecniche di insegnamento per migliorare e minimizzare le incomprensioni da parte degli studenti:

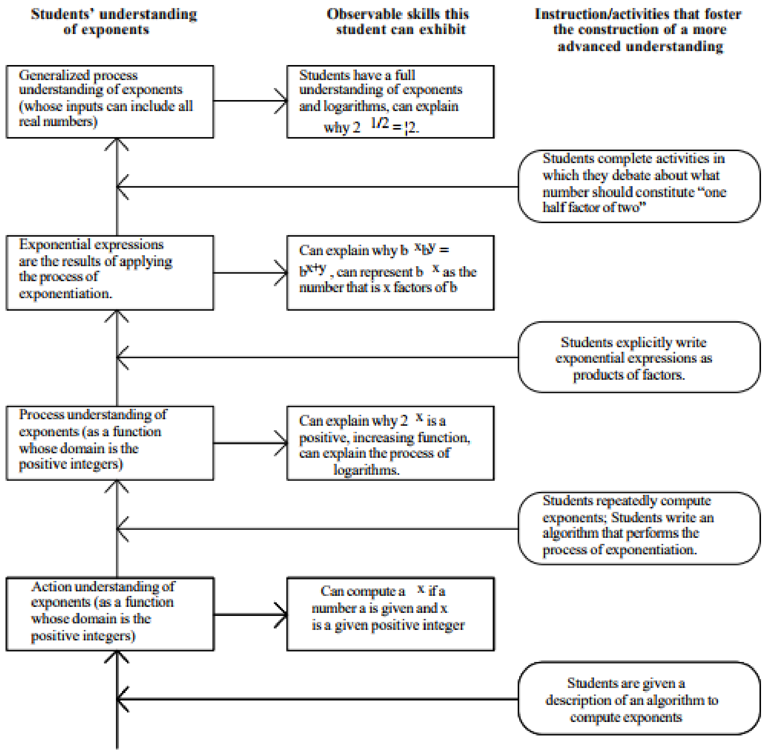
1. ***Comprensione dell'elevamento a potenza come un processo.***
Uno strumento efficace per condurre gli studenti a interiorizzare un'azione come un processo è dato dal fargli scrivere un programma al computer che esegue tale azione. La prima attività proposta consiste nel far scrivere agli studenti, in un programma apposito, a^x e di commentare il ruolo di x in tale funzione. L'altra attività è di tipo più operativo e consiste nel fargli alcune domande come: $(-1)^x$ perchè è negativo se x è dispari? Oppure, come mai 2^{x+1} è due volte più grande di 2^x? Questo genere di attività porterà lo studente ad avere una maggior manualità e conoscenza dei processi che avvengono negli esponenziali.

2. ***Funzione esponenziale vista come un risultato di un processo.***
Gli studenti dovranno scrivere 2^3come $2 * 2 * 2$, cioè come il prodotto di tre fattori di 2. Successivamente gli verrà chiesto di spiegare esercizi del tipo $2^3 * 2^7 = 2^{10}$

3. ***Generalizzazione.***
Inizialmente ci sarà una discussione per capire cosa vuol dire essere un fattore mezzo di 2 e successivamente di dovrà discutere della validità di tale scelta.

In questo articolo è presente anche uno schema sulle strategie di apprendimento e di sviluppo del concetto di esponenziale. La colonna più a sinistra rappresenta i vari step per capire gli esponenziali, nella colonna centrale si hanno le competenze osservabili di ogni studente, infine a destra abbiamo le tecniche didattiche per poter aiutare lo studente a superare le difficoltà.

Figure 1. Stages of students' understanding as they develop an understanding of exponents



2.5 Confrey

Confrey nel 1991, scrisse: Le funzioni esponenziali presentano un grande spazio, ricco e vario, per esaminare e capire i modi in cui apprendono gli studenti i concetti matematici. Confrey sviluppò un modello di investigazione per capire come gli studenti apprendono le funzioni esponenziali per poi riportarlo in un quadro interpretativo, che risulta utile per modellare la comprensione degli studenti. I temi riguardavano: gli esponenti, le espressioni esponenziali e le funzioni esponenziali. Essi vengono divisi in 5 quadri interpretativi che vanno dal più semplice al più complicato.

1. ***Funzioni esponenziali visti come numeri.***
   In questo punto l'autore tratta dell'apprendimento di esponenti con esponente negativo o frazionario. Lo studente sa fare e ha capito cosa vuol dire fare 9^2 ma quando gli viene chiesto di elevare alla zero o a un numero negativo o a un numero frazionario lo studente perde la connessione con l'interpretazione data precedentemente dell'esponenziale. Inoltre si è notato che hanno difficoltà a mettere in ordine crescente numeri come: $\frac{1}{3}$, 9^3, 9^{-3}, 2, 9^0, 10, -3 ed -1. Il problema è dato dal fatto che lo studente fatica a vedere l'esponenziale con esponente frazionario o negativo come un numero. Questa scarsa padronanza di esponenti negativi o frazionari porterà, lo studente, ad avere difficoltà anche nel calcolo dei logaritmi, essendo, tale funzione, generalmente presentata come funzione inversa della funzione esponenziale.

2. ***Espressioni esponenziali e il significato delle operazioni.***
   In questo caso si esamina il tentativo di uno studente nel dare un significato operativo ad un esponente negativo. Il passaggio cruciale è il capire che l'esponente negativo porta al reciproco del numero dato e non è il numero opposto, inteso come segno. Successivamente si cerca di capire il legame biunivoco tra il prodotto di esponenziali, con stessa base, e la somma di tali esponenti. Tale isomorfismo viene tradotto facilmente nei logaritmi. Per esempio

$$\ln 3 + \ln 5 - \ln 10 = \ln\left(\frac{3 * 5}{10}\right) \tag{2.1}$$

3. ***Esponenziali come un'operazione sistematica.***
   Ora si cerca di generalizzare l'operazione, quindi si cerca di passare da un carattere operativo a un carattere di tipo sistematico. Ma cosa vuol dire approccio sistematico? Significa fare vedere il legame biunivoco che lega gli esponenziali alle funzioni esponenziali, attraverso la formula $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, così da aiutare lo studente nel comprendere al meglio gli esponenziali con esponente negativo, frazionario e i logaritmi.

4. ***Esponenziali come contatori.***
   In questo punto si cerca di capire se lo studente effettua conti in base alla logica dell'esercizio o se segue solo le regole impartite dall'insegnate. Per esempio: $\ln 2{+}\ln 2{+}\ln 2$ di solito viene visto come $\ln(2 * 2 * 2)$ e non ci si accorge che lo si può anche vedere come $3 * \ln 2$

5. ***Esponenziali come funzioni.***
   In primo luogo ci si chiede se lo studente ha inteso in maniera chiara

l'esponenziale come funzione. Cioè se ha capito qual' è il suo dominio, quali solo le sue immagini, se presenta punti di massimo o di minimo, quali sono le sue intersezioni con gli assi e se è una funzione crescente o decrescente in base ai casi. Si chiede di avere una buona padronanza anche per quanto riguarda l'interpretazione grafica. Inoltre si cerca di sottolineare i legami di queste funzioni con la vita di tutti i giorni, di come e quando esse entrano in gioco. Conferendo così un senso pratico a tali funzioni.

Capitolo 3

Test

3.1 Introduzione

In questa tesi si è voluto studiare il grado di apprendimento degli studenti sui temi dei logaritmi e degli esponenziali. Per poter fare ciò abbiamo pensato ad un test da poter somministrare a classi di quarta e quinta del liceo scientifico. Nello specifico, si sono studiate due quinte e due quarte di un liceo situato nella periferia di Bologna. La scelta di somministrare il test a classi distinte è stata dettata dall'interesse nel voler osservare come essi apprendano e mantengano un determinato concetto matematico. Si è anche cercato di capire se uno studente che possiede maggiori conoscenze è in grado di ottenere migliori risultati rispetto a chi ha appena intrapreso l'argomento. Ogni domanda è stata pensata al fine di utilizzare gli schemi che abbiamo descritto nel capitolo 1. Le domande sono state, inoltre, pensate in modo tale da utilizzare i processi matematici di:

- ***Formulating***
  Il processo Formulare in forma matematica prevede l'identificazione delle opportunità di applicare e usare la matematica, vale a dire rendersi conto del fatto che è possibile applicare la matematica per comprendere o risolvere un particolare problema o sfida.

- ***Employing***
  Nel processo Utilizzare, gli studenti mettono in atto tutti i procedimenti necessari per ottenere i risultati e giungere a una soluzione matematica (ad esempio eseguendo calcoli aritmetici, risolvendo equazioni, facendo deduzioni logiche partendo da ipotesi matematiche.)

- ***Interpreting***
  Il processo Interpretare si riferisce alle capacità degli studenti di riflet-

tere su soluzioni, risultati o conclusioni matematiche e di interpretarle nel contesto di problemi reali. Prevede la traslazione di soluzioni o ragionamenti matematici riportandoli nel contesto del problema

Tale linguaggio fornisce una struttura utile e significativa per analizzare ed organizzare i processi matematici utilizzati dagli studenti durante la risoluzione di un problema. La suddivisione è stata usata la prima volta durante l'indagine OCSE-Pisa del 2012.

3.2 Il test

1. 5^{19} è un numero pari o dispari? Motiva tale risposta.

2. Risolvi la seguente equazione:
$$2^{x+1} + 2^x = 18$$

3. Risolvi la seguente disequazione:
$$2 - \log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$$

4. È vero o falso che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq -2$:
$$\square \ln (2x+4)^4 = 4 \ln (2x+4)$$
$$\square \ln (2x+4)^4 = 2 \ln (2x+4)^2$$

5. Risolvi la seguente disequazione:
$$\log_2 (4^x - 2^x) < 1$$

6. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

   a) Quanti saranno dopo un'ora?

   b) Dopo x ore?

   c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri?

Il tempo assegnato per svolgere il questionario è di 1 ora. Ogni studente ha riportato il nome e cognome all'interno del compito al solo scopo di poter discutere, in seguito, eventuali chiarimenti riguardo alle risposte ritenute più interessanti.
Gli esercizi sono stati scelti nel seguente modo:

- Nel primo esercizio si è voluto valutare se gli studenti hanno inteso l'elevamento a potenza come azione o come processo, cioè se sono in grado di riconoscere alcune proprietà delle potenze senza dover calcolare il valore della potenza stessa. Per poter capire ciò è stato chiesto ai ragazzi di motivare la risposta.

- Nel secondo esercizio si è cercato di capire se gli studenti hanno compreso a pieno le proprietà di cui godono gli esponenziali. Inoltre si è voluta valutare la capacità che ha uno studente nel passare da uno schema risolutivo ad un altro (da equazione esponenziale a equazione lineare).

- Nel terzo esercizio volevamo valutare la conoscenza del logaritmo; in particolare del fatto che è una funzione decrescente quando la base è compresa tra 0 ed 1 e di come esso sia riconducibile ad un esponenziale.

- Nel quarto esercizio ci si aspetta che molti studenti tendano a dimenticare che $\log a^n = n \log a$ solo se $a > 0$. Di solito si tende ad applicare tale proprietà, all'interno degli esercizi, con poca consapevolezza di ciò che si sta facendo, portando lo studente a dimenticare le ipotesi su cui si basa la proprietà.

- Nel quinto esercizio le difficoltà erano interpretare correttamente le proprietà dei logaritmi e il loro dominio. Inoltre, durante lo svolgimento, si sono volute valutare le conoscenze dello studente sia strumentali, cioè il saper riconoscere le peculiarità dei logaritmi, sia relazionali, cioè la capacità di passare da uno schema risolutivo ad un altro.

- Nel sesto esercizio si è analizzata la capacità che hanno gli studenti nel legare una situazione reale ad una formula matematica.

3.3 Correzione del test

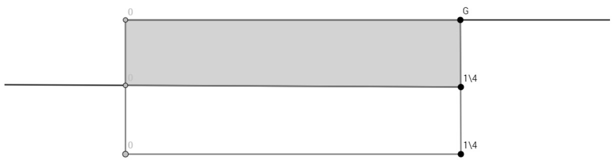
1. 5^{19} è dispari in quanto la sua fattorizzazione, che come noto è unica, non contiene il fattore due.

2.

$$\begin{aligned} 2^{x+1} + 2^x &= 18 \\ 2 * 2^x + 2^x &= 18 \\ 3 * 2^x &= 18 \\ 2^x &= 6 \\ x &= \log_2 6 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 2 - \log_{\frac{1}{2}} x &\leq 0 \qquad\qquad C.E. x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x &\geq 2 \\ x &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Soluzione: $0 < x \leq \frac{1}{4}$

4. $\ln{(2x+4)}^4 = 4\ln{(2x+4)}$ Falsa. Il C.E del logaritmo a sinistra è dato da:

$$\begin{aligned} (2x+4)^4 &> 0 \\ x &\neq -2 \end{aligned}$$

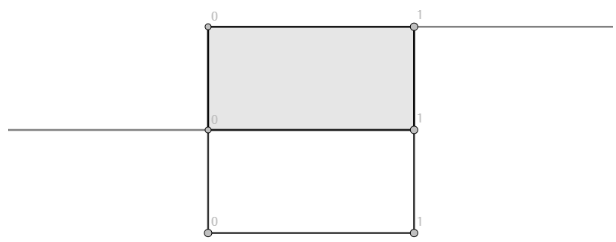
Il C.E della parte a destra è:

$$\begin{aligned}(2x+4) &> 0\\ x &> -2\end{aligned}$$

Quindi non è vero che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq -2$ si ha l'uguaglianza. Nella seconda parte abbiamo: $\ln{(2x+4)}^4 = 2\ln{(2x+4)}^2$. Essendo entrambe definite per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq -2$ si ha che l'uguaglianza è verificata, per la nota proprietà dei logaritmi.

5.

$$\begin{aligned}
\log_2 4^x - 2^x &< 1 & &C.E.\\
2^{2x} - 2^x - 2 &< 0 & 4^x - 2^x &> 0\\
2^x &= t & &\\
t^2 - t - 2 &< 0 & t^2 - t &> 0\\
t_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} & t(t-1) &> 0\\
-1 < t &< 2 & t < 0 &\vee t > 1\\
&\begin{cases}2^x > -1\\ 2^x < 2\end{cases} & 2^x < 0 &\vee 2^x > 1\\
x &< 1 & x &> 0
\end{aligned}$$



Soluzione: $0 < x < 1$

6. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

a) Quanti saranno dopo un'ora? $2000 * 3 = 6000$ (batteri)

b) Dopo x ore? $2000 * 3^x$

c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri?

$$\begin{aligned} 2000 * 3^x &= 54000 \\ 3^x &= \frac{54000}{2000} \\ 3^x &= 27 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

3.4 I risultati

Inizialmente è stata fatta un'analisi generale sulla riuscita del test. Tale analisi si è svolta differenziando le classi, essendo composte da quarte e quinte ed essendo seguite da professori distinti. Ci si aspettava un esito migliore per le classi di quarta dato che tali argomenti erano appena stati trattati e verificati. In quinta ci si aspettava un esito migliore riguardo l'esercizio 4, poichè era stato appena trattato in maniera ampia e dettagliata la questione del campo di esistenza. Vediamo ora l'andamento generale suddiviso per classi e sezioni.

es1	16 dispari	0 pari		1 manca
es2	8 corretto	6 errato	2 risultato non trasformato	2 manca
es3	4 corretto	8 errato	6 non presenta le C.E.*	0 manca
es4	12 (V;V)	0 (F;F)	4 (V;F)	2 (F;V)
es5	3 corretto	12 errato	2 non presenta le C.E.*	1 manca
es6	18 a-corretto	5 b-corretto	9 c-corretto	0 manca
	0 a-errato	13 b-errato	9 c-errato	0 manca

Classe 4^aA, numero complessivo di studenti 18.

es1	25 dispari	0 pari		0 manca
es2	9 corretto	3 errato	8 risultato non trasformato	5 manca
es3	1 corretto	15 errato	8 non presenta le C.E.*	1 manca
es4	19 (V;V)	3 (F;F)	0 (V;F)	3 (F;V)
es5	5 corretto	13 errato	7 non presenta le C.E.*	0 manca
es6	25 a-corretto	7 b-corretto	9 c-corretto	0 manca
	0 a-errato	18 b-errato	16 c-errato	0 manca

Classe 4^aB, numero complessivo di studenti 25.

es1	19 dispari	0 pari		2 manca
es2	8 corretto	6 errato	1 risultato non trasformato	6 manca
es3	5 corretto	3 errato	13 non presenta le C.E.*	0 manca
es4	12 (V;V)	5 (F;F)	4 (V;F)	0 (F;V)
es5	3 corretto	9 errato	9 non presenta le C.E.*	0 manca
es6	20 a-corretto	10 b-corretto	10 c-corretto	manca
	1 a-errato	11 b-errato	11 c-errato	manca

Classe 5^aA, numero complessivo di studenti 21.

es1	20 dispari	1 pari		0 manca
es2	9 corretto	3 errato	8 risultato non trasformato	5 manca
es3	3 corretto	7 errato	11 non presenta le C.E.*	0 manca
es4	18 (V;V)	1 (F;F)	2 (V;F)	0 (F;V)
es5	3 corretto	5 errato	12 non presenta le C.E.*	1 manca
es6	21 a-corretto	12 b-corretto	14 c-corretto	manca
	0 a-errato	9 b-errato	7 c-errato	manca

Classe 5^aB, numero complessivo di studenti 21.

Dai risultati riportati non si nota una notevole differenza, poichè sono omogenei e non dipendono dal diverso professore o dal diverso anno accademico. Per questo motivo successivamente, durante l'analisi specifica per ogni esercizio, si conidereranno le varie classi come un'unica classe. La cosa che le accumuna è il fatto che tutti i ragazzi hanno trovato molto semplice il test. Tale considerazione però non rispecchia i risultati, che sono stati appena sufficienti.

[1]

[1]*il campo di esistenza manca ma il resto è svolto correttamente.

3.5 Analisi degli errori nello specifico: esercizio 1

Questo primo esercizio è stato pensato per capire se gli studenti vedono l'elevamento a potenza come azione o come processo (Webber). Come si evince dalle tabelle precedenti il $94,12\%$ degli studenti ha risposto dispari, l' $1,18\%$ ha risposto pari e il $4,70\%$ non ha risposto. Da questi dati si potrebbe pensare che quasi tutti vedano l'elevamento a potenza come un processo, ma vedendo le loro motivazioni, si nota che sono molto legati all'azione piuttosto che al processo. Vediamo ora come si possono suddividere le varie motivazioni forniteci dagli studenti

1. 25 ragazzi hanno presentato all'interno del compito vari conti, come $5^1 = 5, 5^2 = 25, 5^3 = 125$ e poi hanno concluso la loro dimostrazione dicendo che il numero è dispari dato che termina con 5. [Fig: 3.1]

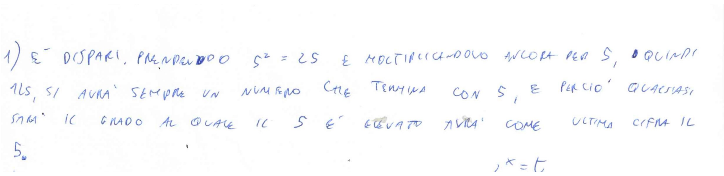


Figura 3.1: Motivazione:termina con 5

2. 37 ragazzi hanno presentato la dimostrazione più o meno corretta senza l'uso di conti. [Fig: 3.2] [Fig: 3.3]

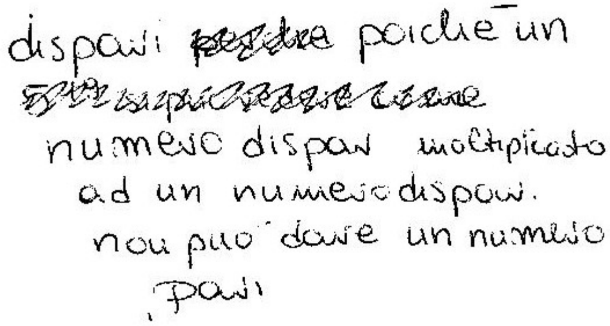


Figura 3.2: Motivazione corretta

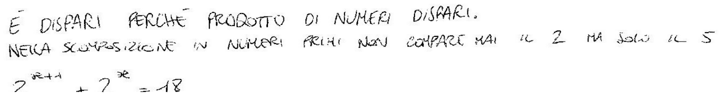


Figura 3.3: Motivazione corretta

3. 12 hanno risposto dicendo che è dispari perchè è un numero dispari elevato a un numero dispari . [Fig: 3.4]

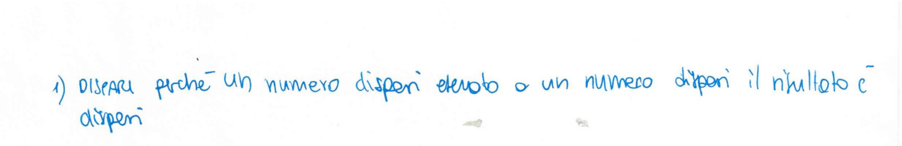


Figura 3.4: Base dispari ed esponente dispari

4. 1 ragazzo ha motivato la scelta dispari dicendo che la dimostrazione era il conto fatto con la calcolatrice:$1,907348633 * 10^{13}$. [Fig: 3.5]

   Il ragazzo è stato intervistato a proposito di tale risposta:
   Intervistatrice: Come mai sostiene che $1,907348633 * 10^{13}$ è dispari?
   Studente: Il numero è dispari dato che termina con il numero 3.
   Intervistatrice: Qual'è il significato di 10^{13}?
   Studente: Non saprei.
   Intervistatrice: Vuol dire che bisogna moltiplicare il numero trovato per 10^{13}. In questo caso si otterrebbe 19073486330000.Quindi il numero termina con 0. Allora il numero è pari?
   Studente: No il numero è dispari. In questo caso termina con 0 ma questa è solo un'approssimazione dovuta all'uso della calcolatrice.
   Lo studente quindi capisce di aver dato una motivazione errata sul perchè tale numero risulta essere dispari, ma convinto del fatto che fosse dispari, riesce a dare un'interpretazione giusta del risulato.

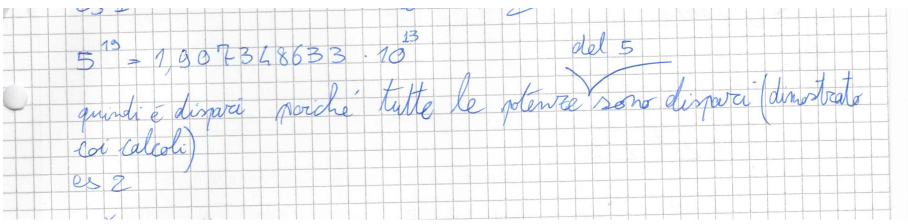


Figura 3.5: Motivazione: calcolo con calcolatrice.

5. 1 sola persona ha sostenuto che fosse pari, affermando che tale numero termina con 0. Tale studente avrà anch'esso effettuato il conto con la calcolatrice trovando 19073486330000, come risultato. Non si è accorto però che tale risultato era una approssimazione causata dall'uso della calcolatrice. [Fig: 3.6]

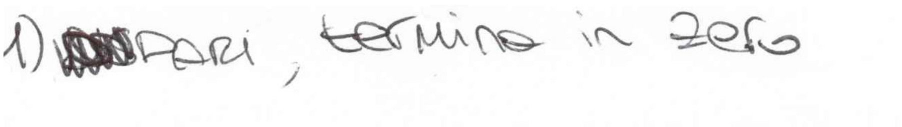
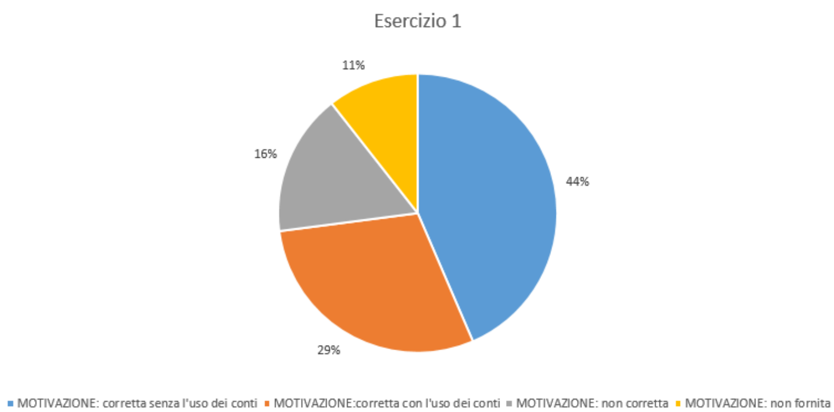


Figura 3.6: Risposta pari

6. 6 non hanno fornito alcuna motivazione.

Analizzando le risposte forniteci è evidente che la gran parte degli studenti è legata alla visione di esponenziale come azione, e solo pochi hanno appreso a pieno la distinzione tra azione-processo di cui abbiamo parlato nel capitolo Ricerche in Didattica. Tale difficoltà nel capire questa differenza si ripercuoterà nell'uso e nella interpretazione delle proprietà degli esponenziali. Nonostante lo studente sia a conoscenza degli esponenziali, dalla scuola secondaria di primo grado, fatica a generalizzare tale processo. Il tutto può essere dovuto al fatto che allo studente gli è sempre stato richiesto un conto, un risultato e quasi mai un valore generale da cui trarre conclusioni. La tabella seguente schematizza maggiormente i risultati.
I processi matematici utilizzati nella risoluzione dell'esercizio riguardano l'employing e l'interpreting.



3.6 Analisi degli errori nello specifico: esercizio 2

Tale esercizio è stato pensato per cercare di capire se gli studenti avevano appreso due cose. La prima riguarda l'uso corretto degli esponenziali e delle loro proprietà. La seconda cosa che si è voluta valutare è la capacità che possiede un ragazzo nel passare da uno schema di risoluzione ad un altro. Inizialmente si trova davanti un equazione esponenziale e successivamente si può ricondurre ad un'equazione lineare, attraverso una sostituzione, per poi ritornare ad una forma esponenziale.
L'errore che si temeva maggiormente era il seguente:

$$\begin{aligned} 2^{x+1} + 2^x &= 18 \\ 2^{x+1} + 2^x &= 2^4 + 2 \\ x + 1 + x &= 4 + 1 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Nel quale, nel terzo passaggio, lo studente applica una proprietà inesistente, cioè passa da una somma tra esponenziali ad una somma tra esponenti. Se si volesse ottenere tale risultato l'equazione di partenza dovrebbe essere:

$$\begin{aligned} 2^{x+1} * 2^x &= 2^4 * 2 \\ x + 1 + x &= 4 + 1 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sottolineiamo che le somme all'esponente sono delle moltiplicazioni tra esponenziali.
Il processo matematico che gli studenti avrebbero dovuto applicare riguarda esclusivamente l'employing, dato che allo studente non è stato chiesto di contestualizzare il problema in una situazione reale o di commentare il risultato ottenuto. Dà ciò che si evince delle prove OCSE-Pisa gli studenti italiani risultano più pronti per quanto riguarda questa categoria.
Per la correzione iniziale di tale esercizio è stata utilizzato il seguente schema:

1. corretto; l'esercizio presenta tutti i passi corretti e il risultato finale è anch'esso corretto.[Fig: 3.7]

2) $2^{x+1} + 2^{x} = 18$

$$2^{x+1} + 2^{x} = 2^{4} + 2$$

$$2^{x} \cdot 2 + 2^{x} = 18 \qquad 2^{x} = t$$

$$2t + t = 18$$

$$3t = 18$$

$$t = 6$$

$$2^{x} = t$$

$$2^{x} = 6$$

$$x = \log_{2} 6$$

Figura 3.7: Corretto.

2. Incompiuto; l'esercizio presenta tutti i passaggi corretti ma il risultato non è stato trasformato da esponenziale a logaritmo. I ragazzi presentano come soluzione: $2^x = 6$.[Fig: 3.8]

---

2) $2^{x+1} + 2^{x} = 18$

$$2^{x+1} + 2^{x} - 18 = 0$$

$$2^{x+1} + 2^{x} - 2 \cdot 3^{2} = 0$$

$$2^{x} \cdot 2 + 2^{x} - (2 \cdot 3^{2}) = 0$$

$$2^{x} \cdot 2 + 2^{x} \cdot 2^{0} - 2 \cdot 3^{2} = 0 \qquad 2^{x} = t$$

$$2t + t - 18 = 0$$

$$3t - 18 = 0$$

$$t = 6$$

Figura 3.8: Incompiuto.

3. errato; l'esercizio presenta dei passaggi errati che successivamente vedremo in dettaglio.

4. mancante; esercizio non è stato svolto dallo studente.

In generale ci si aspettava un andamento migliore per le classi di 4^a rispetto a quelle di 5^a poichè questo argomento è stato trattato all'inizio della 4^a. Nelle 4^a gli esercizi corretti, e quelli non trasformati, corrispondono al $55,8\%$, nelle classi di 5^a corrispondono al $57,1\%$. Tale risultato non rispecchia le aspettative.
Andiamo ora a vedere quali sono stati gli errori commessi dagli studenti:

1. Il primo tipo di errore che ci aspettavamo, cioè l'uso errato delle proprietà delle potenze, descritto dettagliatamente poco prima, è stato commesso da 10 studenti. [Fig: 3.9]

—

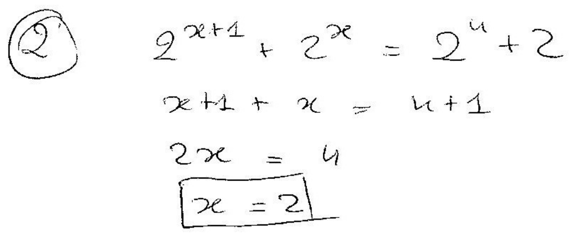
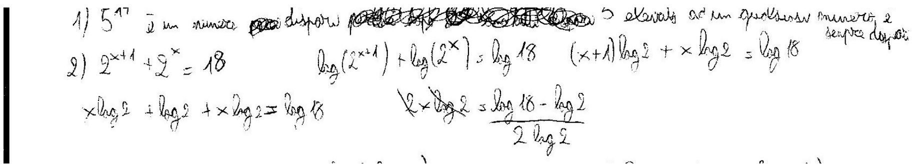


Figura 3.9: Errore atteso.

2. In questo caso gli studenti eseguono un passaggio al logaritmo che li porta a sbagliare, questo errore è molto interessante dato che fa capire allo studente quando può risolvere un'equazione esponenziale applicando un logaritmo. Il problema, in questo caso, è che gli alunni tendono a vedere le somme tra esponenziali come somme tra logaritmi. Sarebbe bene sensibilizzare gli studenti proponendo loro esercizi privi di incognite per dimostrargli che non vale tale uguaglianza. Sono stati coinvolti in tale errore 6 studenti. [Fig: 3.10][Fig: 3.11][Fig: 3.12]

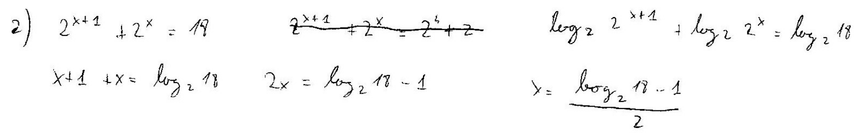


1) 5^{17} è un numero dispari ... elevato ad un qualsiasi numero è sempre dispari

2) $2^{x+1}+2^x=18 \qquad \log(2^{x+1})+\log(2^x)=\log 18 \qquad (x+1)\log 2 + x\log 2 = \log 18$

$x\log 2 + \log 2 + x\log 2 = \log 18 \qquad 2x\log 2 = \dfrac{\log 18 - \log 2}{2\log 2}$

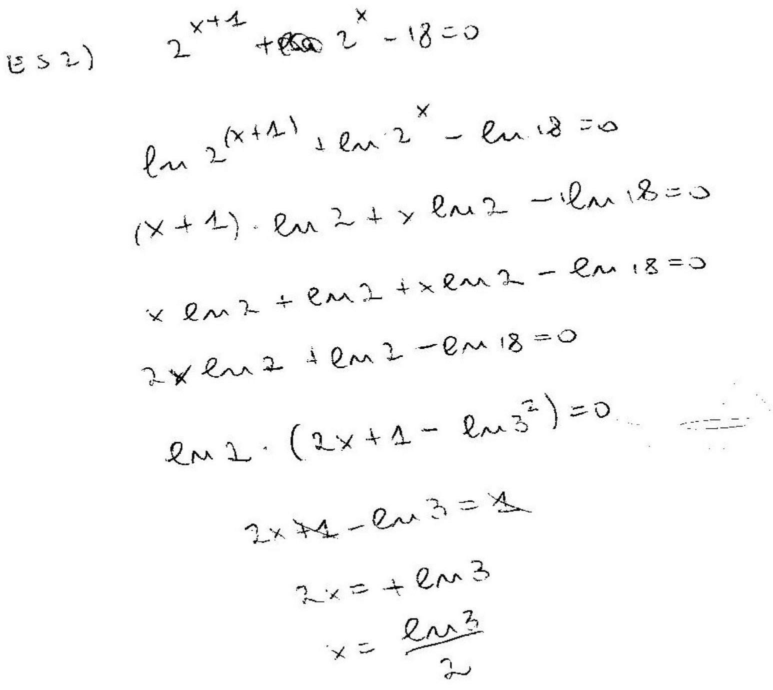
Figura 3.10: Errato.



2) $2^{x+1}+2^x=18 \qquad \cancel{2^{x+1}+2^x=2^4+2} \qquad \log_2 2^{x+1} + \log_2 2^x = \log_2 18$

$x+1+x=\log_2 18 \qquad 2x=\log_2 18 - 1 \qquad x=\dfrac{\log_2 18 - 1}{2}$

Figura 3.11: Errato.



ES 2) $2^{x+1}+2^x-18=0$

$\ln 2^{(x+1)} + \ln 2^x - \ln 18 = 0$

$(x+1)\cdot\ln 2 + x\ln 2 - \ln 18 = 0$

$x\ln 2 + \ln 2 + x\ln 2 - \ln 18 = 0$

$2x\ln 2 + \ln 2 - \ln 18 = 0$

$\ln 2\cdot(2x+1-\ln 3^2)=0$

$2x\cancel{+1}-\ln 3=\cancel{1}$

$2x=+\ln 3$

$x=\dfrac{\ln 3}{2}$

Figura 3.12: Errato.

3. un altro errore è dato dalla trasformazione di una somma tra esponenziali con la stessa base, in un prodotto tra tali esponenti. Si ottiene: $2^{x^2+x} = 2^1 + 2^4$ questo errore è stato commesso da 1 persona. Questo conto potrebbe essere ricondotto a una confusione che fa lo studente, tra le proprietà degli esponenziali e quelle dei logaritmi. Inoltre contiene anche un errore di calcolo. [Fig: 3.13]

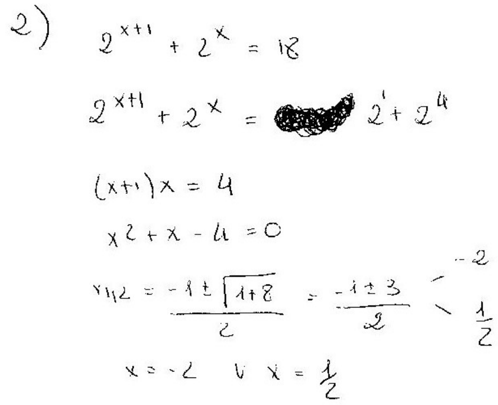


Figura 3.13: Errato.

4. un altro caso è dato dalla trasformazione di una somma di esponenti in una somma tra le basi. Errore commesso da 1 solo studente. In questo esercizio lo studente conferma il fatto che non ha fatto sue le proprietà degli esponenziali e molto probabilmente non ha neanche capito quale sia l'uso della proprietà $2^x * 2^y = 2^{x+y}$. Con questo studente sarebbe opportuno riaffrontare il tema degli esponenti a livello base, molto probabilmente, durante la scuola secondaria di primo ordine lo studente non ha ben appreso le nozioni degli esponenziali. [Fig: 3.14]

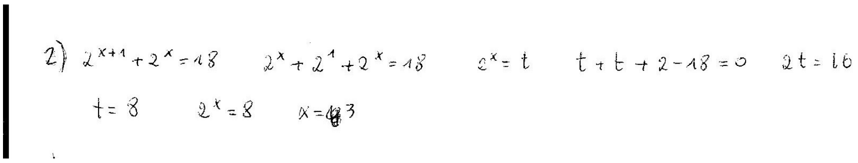


Figura 3.14: Errato.

5. in questa risoluzione, invece, lo studente inizialmente sostituisce $t = 2^x$ ed applica correttamente le proprietà dei logaritmi, ma successivamente quando deve risolvere $2^x = 6$ usa in maniera errata le proprietà degli esponenziali. [intervista] [Fig: 3.15]

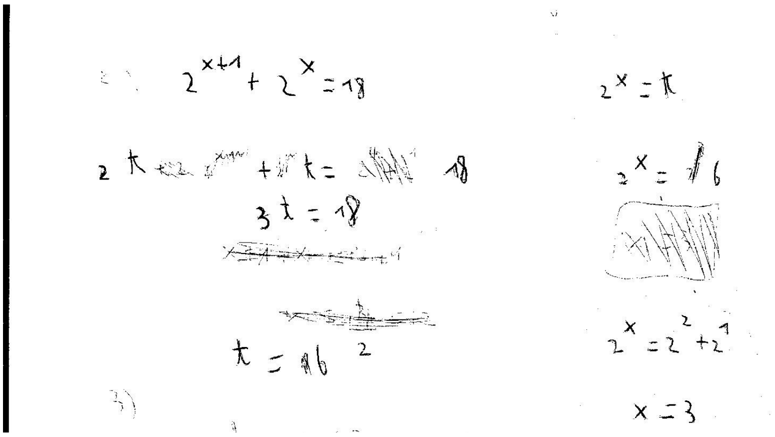


Figura 3.15: Errato.

6. questi studenti hanno un idea sbagliata sul come si passi da esponenziale a logaritmo infatti essi sostengono che $2^x = 6$ implichi $\log_2 x = 6$. In questo caso trasformano solo un temine, quello di sinistra, in un logaritmo lasciando inalterato il secondo termine. Questo errore è stato commesso da 2 persone. Il risultato da loro ottenuto risulta essere $x = 64$, si nota quindi che lo studente non è in grado di valutare autonomamente la correttezza del proprio risultato. Gli studenti avrebbero potuto sostituire $x = 64$ all'equazione iniziale, accorgendosi così dell'errore commesso. Questa valutazione a posteriori non è quasi mai presente. [Fig: 3.16]

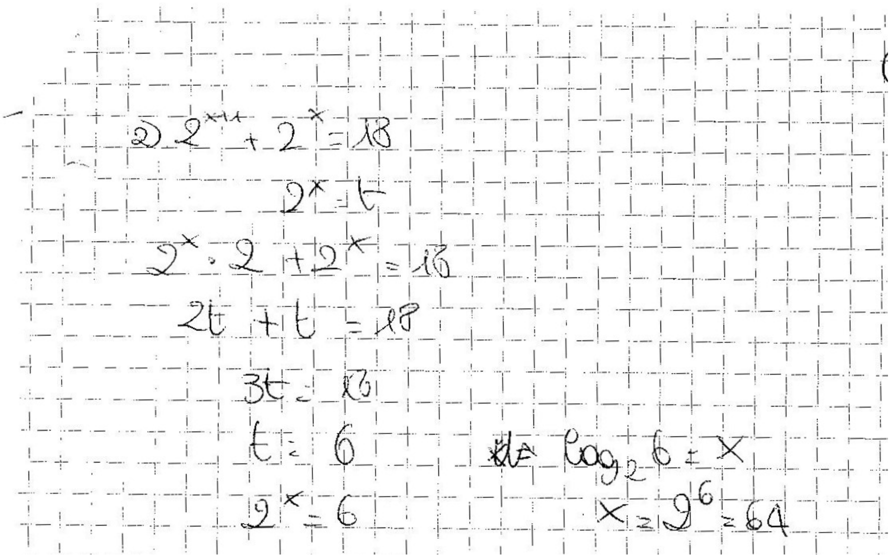


Figura 3.16: Errato.

7. 3 persone non hanno terminato lo svolgimento dell'esercizio nonostante avessero intrapreso la strada corretta.

3.7 Intervista

Gli errori si basano, principalmente, su una cattiva interpretazione delle proprietà degli esponenziali e dei logaritmi, inoltre si tendono a confondere le varie proprietà. Per quanto riguarda questo esercizio sono stati intervistati due ragazzi. Il primo è stato scelto perchè durante lo svolgimento dell'esercizio, procede in maniera corretta, ma successivamente sbaglia nel calcolo del risultato. [Fig: 3.17]

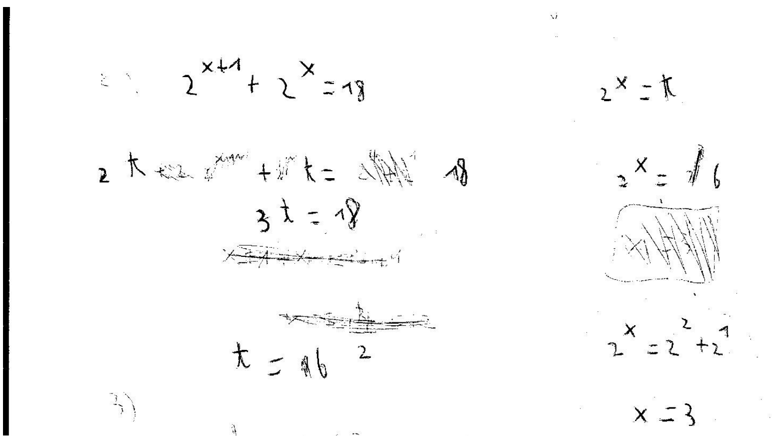


Figura 3.17: Intervista 1

Intervistatrice: Come mai utilizzi due strategie risolutive diverse all'interno dello stesso esercizio? Quale delle due ritieni che sia corretta?
Studente: Ritengo che sia corretta la prima parte, quando sono arrivato alla fine non sapevo come fare a calcolare la x.
Intervistatrice: Qual'è stato l'errore che hai commesso in quel passaggio?
Studente: Non saprei.
Lo studente fatica a capire che $2^x = 2^2 + 2^1$ non implica che $x = 2 + 1$. Riconosce che c'è qualcosa di sbagliato ma non capisce che cosa sia.
Intervistatrice: Se ti chiedessi la soluzione di $2^x = 8$?
Studente: Sarebbe $2^x = 2^3$ quindi $x = 3$.
Intervistatrice: Corretto. Quindi essendo 3 soluzione di $2^x = 8$ come può essere anche soluzione di $2^x = 6$ essendo 6 diverso da 8? Inoltre la proprietà da te utilizzata varrebbe solo se tra 2^2 e 2^1 ci fosse una moltiplicazione. Tale esercizio si risolveva con il passaggio al logaritmo.
L'altro studente invece effettua un passaggio al logaritmo di tutti i fattori.

Questo passaggio è stato effettuato da almeno uno studente per classe. [Fig: 3.18]

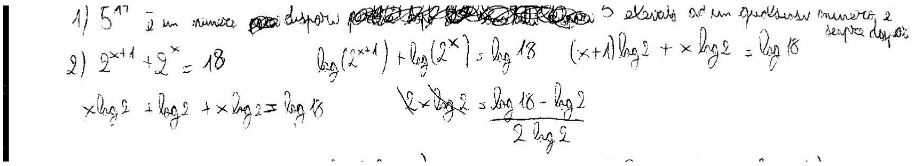
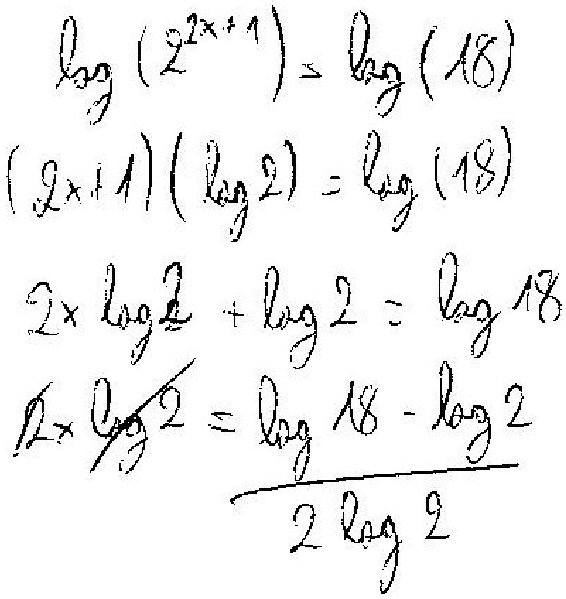


Figura 3.18: Intervista 2

Intervistatrice: potresti risolvere $2^{2x+1}=18$?
Studente:Lo studente presenta tale risoluzione.



Intervistatrice: Se noti tale risultato è identico al risultato che tu hai presentato all'interno del compito, ma com'è possibile dato che l'equazione iniziale è diversa?
Studente: Penso di aver risposto correttamente ad entrambe ma a quanto pare una delle due non risulta corretta, io però non riesco a trovare l' errore.

Intervistatrice: Il fatto è che non si può passare al logaritmo se l'espressione esponenziale non presenta un unico fattore a sinistra e un unico fattore a destra. Nel caso iniziale hai quindi mantenuto il segno di somma tra logaritmi, ma una somma tra logaritmi non corrisponde a una somma tra esponenziali.

Dopo aver analizzato gli errori e intervistato alcuni degli studenti si evince che le difficoltà degli studenti nel riconoscere e usare correttamente le proprietà degli esponenziali sono grandi. Un possibile modo per aiutarli a sensibilizzarli maggiormente, secondo noi, è dato dal vedere esplicitamente che, con l'utilizzo delle loro proprietà, un uguaglianza, che inizialmente risulta corretta, succesivamente non lo è più.
Forniamo il seguente esempio:

$$\begin{aligned} 2^3 + 2^5 &= 40 \\ 8 + 32 &= 40 \end{aligned}$$

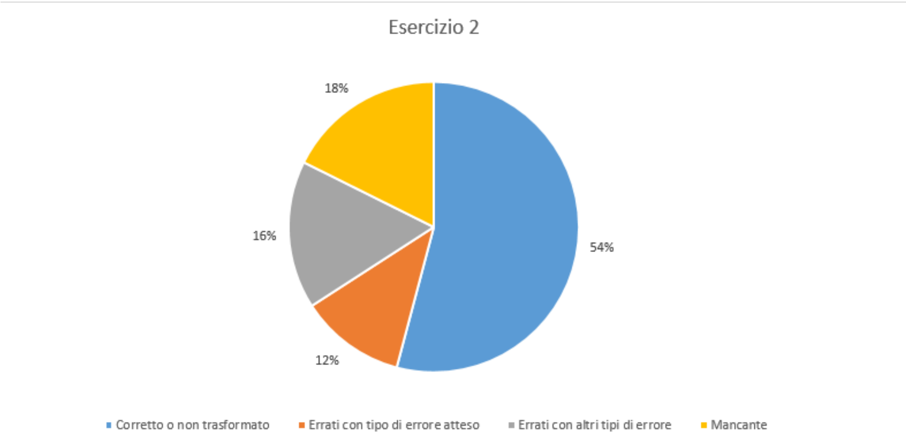
Certamente, tale uguaglianza è vera. Proviamo a vedere che cosa succede se, invece del calcolo esplicito, uso la proprietà errata nel quale a una somma tra esponenziali corrisponde una somma tra esponenti:

$$\begin{aligned} 2^3 + 2^5 &= 40 \\ 2^{3+5} &= 40 \\ 2^8 &= 40 \\ 256 &= 40 \end{aligned}$$

Ecco un conto facile che convince subito lo studente del proprio errore. Potremmo svolgere tale esercizio applicando in modo scorretto il logaritmo nel passaggio dalla prima alla seconda riga:

$$\begin{aligned} 2^3 + 2^5 &= 40 \\ \log_2 2^3 + \log_2 2^5 &= \log_2 40 \\ 3 * \log_2 2 + 5 * \log_2 2 &= \log_2(2^3 * 5) \\ 8 &= \log_2(2^3 * 5) \end{aligned}$$

Riassumiamo ora con un grafico a torta l'andamento degli studenti.



3.8 Analisi degli errori nello specifico: esercizio 3

L'esercizio ha presentato varie difficoltà. Come si può notare solo il 15% è riuscito a svolgerlo correttamente.
Gli errori che ci aspettavamo erano due. Il primo riguarda la mancanza del campo di esistenza, si nota che spesso lo studente tralascia questo conto quando non gli è esplicitamente richiesto. Il secondo errore riguarda il fatto che lo studente deve riconoscere che $\log_{\frac{1}{2}} x$ è una funzione decrescente, quindi quando svolgerà il passaggio da $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$ a $x \leq \frac{1}{4}$ deve ricordarsi di cambiare il verso della disequazione.
Per quanto riguarda il campo di esistenza esso è l'errore maggiormente riscontrato, il 45% si è dimenticato questo passaggio fondamentale. Questo risultato non rispecchia le aspettative avendo tutte le classi trattato ampiamente questo punto delicato. La mancanza di tale conoscenza può derivare dal fatto che talvolta non è chiaro il passaggio da esponenziale a logaritmo. Infatti i ragazzi tendono a vedere il logaritmo ed esponenziale come due cose relativamente distinte e faticano nel capire a pieno tale legame.
Il secondo errore atteso è stato riscontrato in 12 studenti.
Vediamo ora in dettaglio i tipi di errori commessi dai vari studenti:

1. 13 studenti hanno svolto l'esercizio correttamente, nell'esempio riportato però la studentessa gira il verso della disequazione prima di passare al logaritmo entrambi i fattori e prima di eliminare il logaritmo. [Fig: 3.19] Ciò ci vuol dire che ha studiato ma non ha capito a pieno ciò che sta facendo. È da notare che questa studentessa è una delle più brillanti nella classe. Inoltre, nonostante il risultato risulti corretto, non è corretto l'esercizio. [Fig: 3.20].

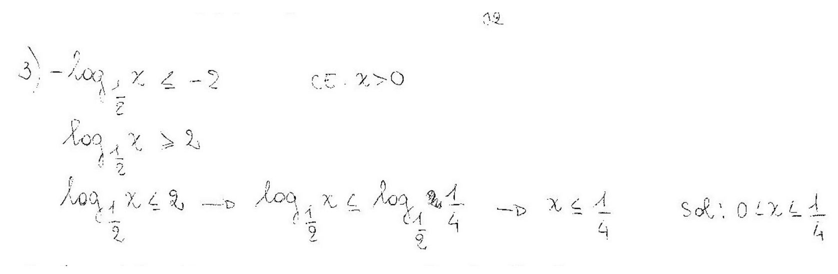


Figura 3.19: Errore concettuale

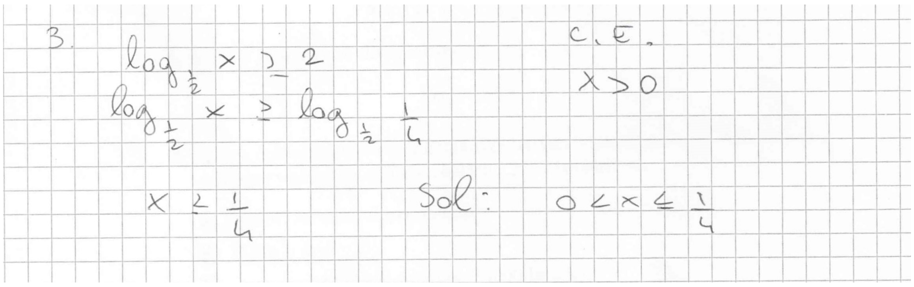


Figura 3.20: Corretto

2. 32 ragazzi hanno tralasciato il campo di esistenza ma hanno svolto il restante esercizio correttamente. [Fig: 3.21]

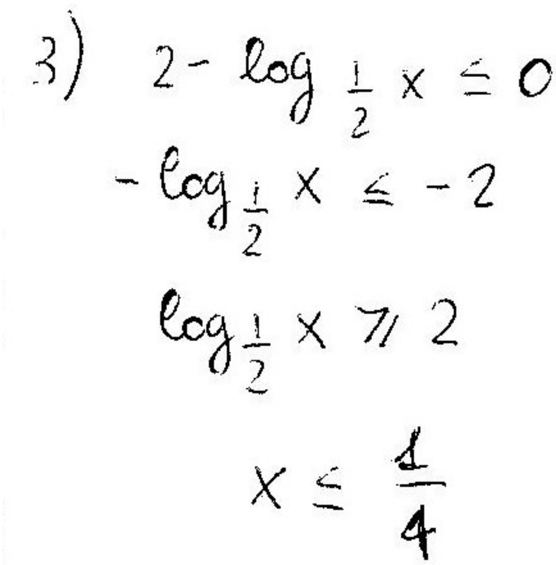
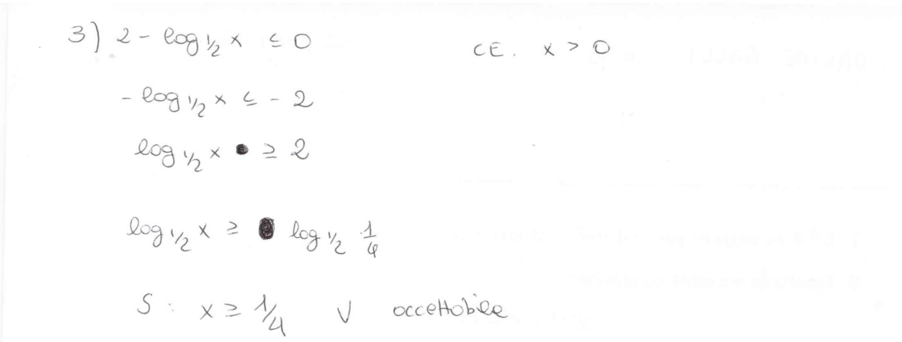


Figura 3.21: Manca C.E.

3. 12 studenti non hanno cambiato il verso della disequazione quando hanno fatto il passaggio da logaritmo ad esponenziale. 7 di loro non hanno neanche fatto le C.E. [Fig: 3.22]



3) $2 - \log_{1/2} x \leq 0$ CE. $x > 0$

$-\log_{1/2} x \leq -2$

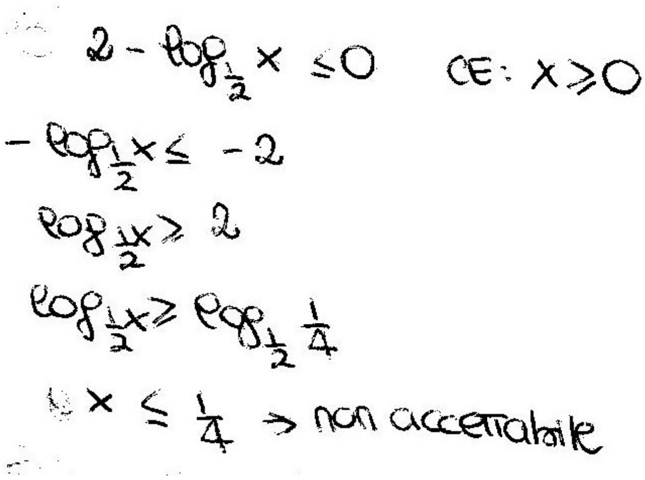
$\log_{1/2} x \geq 2$

$\log_{1/2} x \geq \log_{1/2} \frac{1}{4}$

S: $x \geq 1/4$ V accettabile

Figura 3.22: Mancano le C.E. e non gira il verso della disequazione

4. 1 studente esegue bene i passaggi ma quando confronta $x > 0$ e $x \leq \frac{1}{4}$ sostiene che è impossibile . [Fig: 3.23] 2 ragazzi, invece, eseguono tutto correttamente ma non confrontano le C.E con il risultato.



$2 - \log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$ CE: $x \geqslant 0$

$-\log_{\frac{1}{2}} x \leq -2$

$\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 2$

$\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

$x \leq \frac{1}{4}$ → non accettabile

Figura 3.23: Confronto errato

5. 14 persone non hanno chiaro il passaggio da logaritmo ad esponenziale e le proprietà di cui essi godono. Con questo fatto si mette in risalto che non è chiara la funzione del logaritmo. In seguito analizzeremo dettagliatamente tali errori.

6. 3 persone si bloccano.

La parte più interessante è vedere cosa hanno risposto quei 10 ragazzi che non hanno ben chiare le proprietà dei logaritmi. Altra cosa da notare è che 6 studenti non hanno fatto le C.E. in questo esercizio ma le hanno fatte per l'esercizio 5.
Cerchiamo ora di capire quali sono stati gli errori commessi dai 14 studenti che hanno sbagliato completamente l'esercizio. Suddividiamo tali errori in due categorie: la prima riguarda chi non ha capito il passaggio da esponenziale a logaritmo, cioè il passaggio da $\log_a x = b$ a $a^b = x$. La seconda categoria, riguarda quei studenti che non hanno appreso a pieno le proprietà dei logaritmi ed il loro utilizzo in una equazione.

3.9 Prima categoria

Questo ragazzo, dato il passaggio da $\log_a x = b$ a $a^b = x$, inverte a e b trovando un risultato errato. [Fig: 3.24]

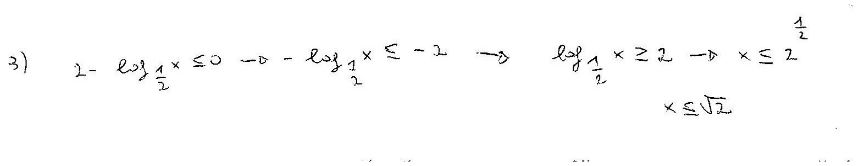


Figura 3.24: Prima categoria

Questo tipo di errore è stato riscontrato in altri casi anche se con sviluppi differenti. Per esempio:

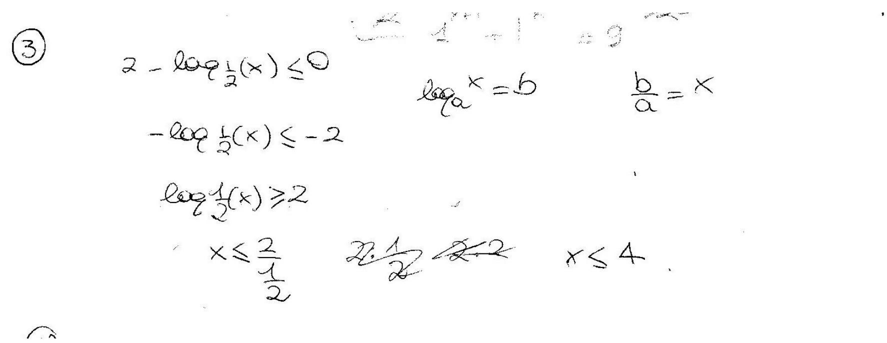


Figura 3.25: Prima categoria

In questo caso effettua una divisione tra b ed a; qua si perde il legame tra logaritmo ed esponenziale.[Fig: 3.25]
Qua la domanda che si pone lo studente per trovare come risultato -1 è la seguente: " Quale esponente devo dare a 2 per ottenere $\frac{1}{2}$? ". Lo studente non si rende conto che il risultato, da lui ottenuto, fornirebbe una disequazione iniziale priva di significato. [Fig: 3.26]

3) $2-\log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$; $-\log_{\frac{1}{2}} x \leq -2$; $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$; $x \leq -1$

Figura 3.26: Prima categoria

In questo caso, oltre all'errore nel dire che $2 = \log_{\frac{1}{2}}(-2)$, c'è un errore di fondo. In questo passaggio infatti si pone il 2 uguale a qualcosa di inesistente, essendo l'argomento del logaritmo minore di 0.[Fig: 3.27] Tale errore è stato commesso anche da un altro studente che, successivamente, non cambia neanche il verso della disequazione. [Fig: 3.28]

3) $2-\log_{\frac{1}{2}} x \leq 0 \qquad \log_{\frac{1}{2}} x \geq 2 \qquad \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} -2$

$x \leq -2$

Figura 3.27: Prima categoria

3)

$2-\log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$

$-\log_{\frac{1}{2}} x \leq -2$

$\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$

$\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} -2$

$x \geq -1$

Figura 3.28: Prima categoria

Quest'ultima risoluzione, in realtà, rientra in entrambe le categorie. Poichè anch'essa presenta un passaggio al logaritmo inesistente ed inoltre confonde totalmente le proprietà di cui godono i logaritmi. Infatti il meno tra logaritmi non diventa una divisione tra gli argomenti dei logaritmi ma fra i logaritmi stessi, ed inoltre lo 0 non viene trasformato prima di togliere il logaritmo. [Fig: 3.29]

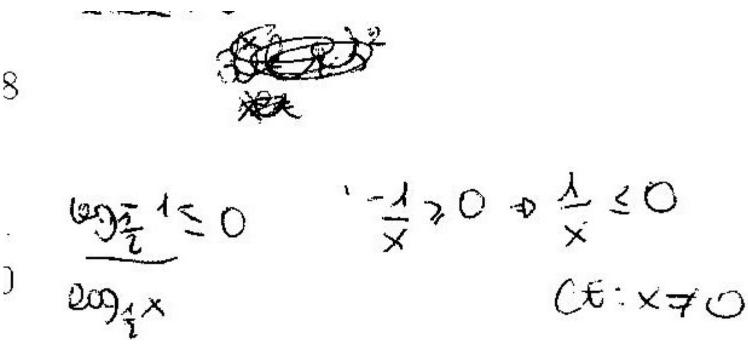


Figura 3.29: Prima categoria

3.10 Seconda categoria

Qua analizziamo gli errori nell'uso delle proprietà dei logaritmi.
Questo studente ha usato correttamente le proprietà del logaritmo ma non ha considerato il suo campo di esistenza. Inoltre si nota che nello studio del segno del denominatore e del numeratore non ha considerato che il denominatore va posto solo maggiore di zero e non maggiore-uguale a zero. [Fig: 3.30]

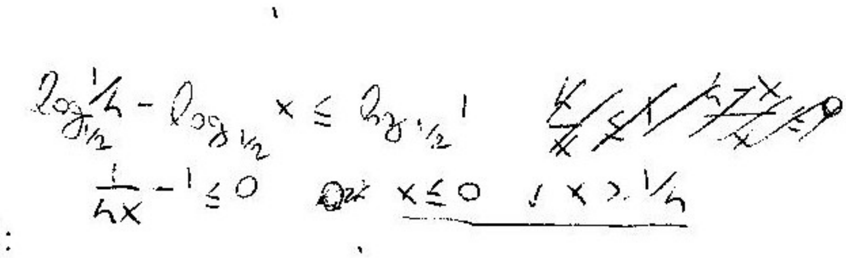


Figura 3.30: Seconda categoria

Errori gravi sull'uso delle proprietà li troviamo in questi altri studenti. Il primo "semplifica" per $\log_{\frac{1}{2}}$ come se fosse un fattore. Tale errore lo hanno commesso 2 studenti. [Fig: 3.31] [Fig: 3.32]

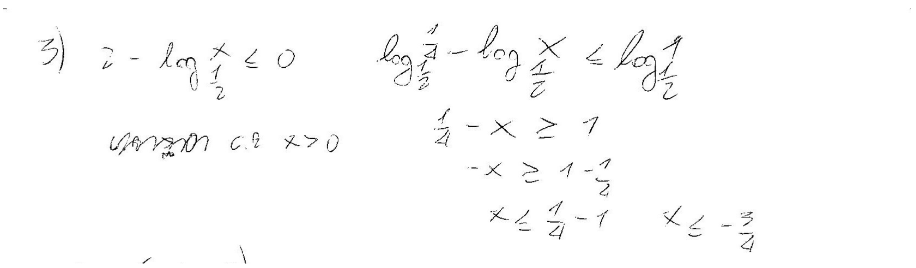


Figura 3.31: Seconda categoria

$$3)\ 2-\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}-\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$\frac{1}{4}-x-1 \leq 0$$

$$1-4x-4 \leq 0$$

$$-4x \leq +3$$

$$x \geq \frac{3}{4}$$

Figura 3.32: Seconda categoria

Un secondo studente, nel penultimo passaggio presenta lo stesso tipo di errore. Lo studente doveva trasportare il segno di sottrazione presente davanti al logaritmo all'esponente dell'argomento del logaritmo, ottenendo così un passaggio corretto. [Fig: 3.33]

$$2-\log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$$

$$-\log_{\frac{1}{2}} x \leq -2$$

$$-\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geq -\log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$x \leq -4$$

Figura 3.33: Seconda categoria

Infine quest'altro studente effettua la divisione tra $\frac{1}{4}$ ed x in maniera errata, confondendo la linea di frazione principale. [Fig: 3.34]

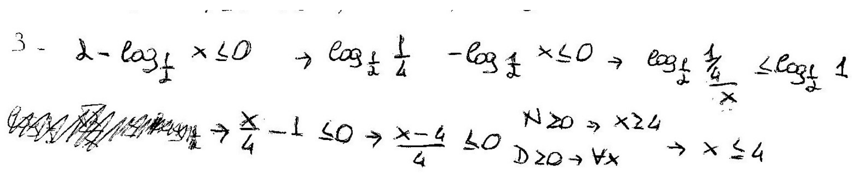
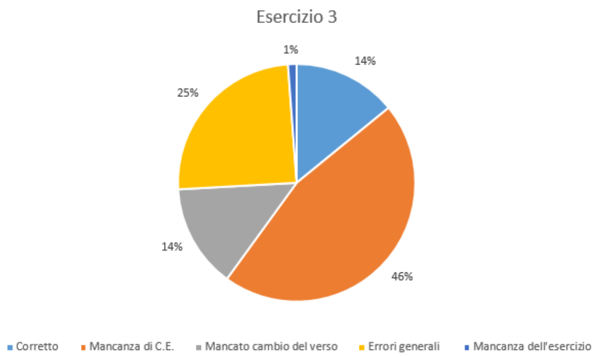
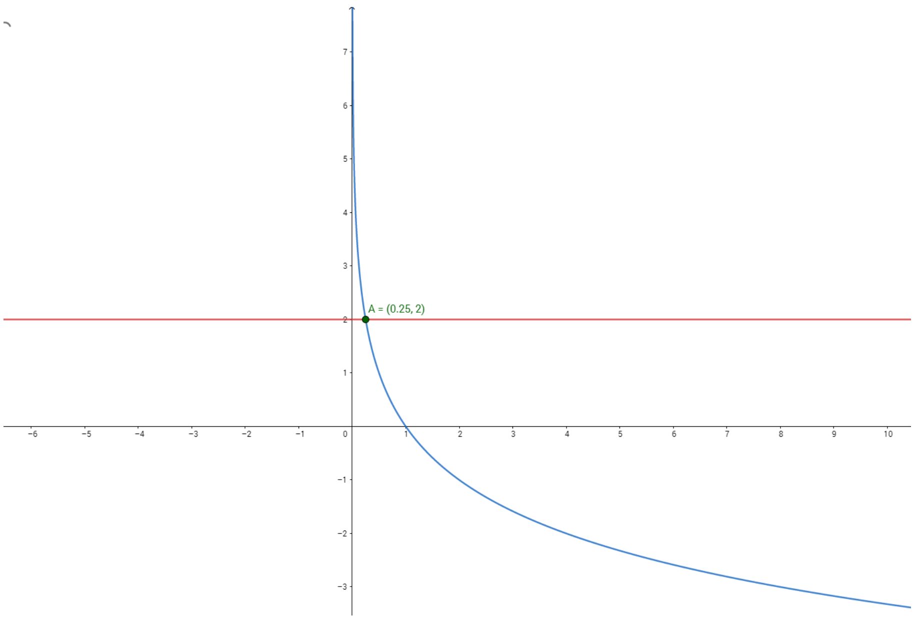


Figura 3.34: Seconda categoria

3.11 Suggerimenti didattici



Dal grafico a torta di nota che molti studenti hanno difficoltà a svolgere correttamente una disequazione logaritmica. Per poter migliorare tale rendimento si potrebbero proporre anche degli esercizi di tipo grafico. Per esempio, nel nostro caso, si poteva pensare di chiedere allo studente di disegnare, in un piano cartesiano, sia il grafico di $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ sia quello di $y = 2$. Dal grafico lo studente può capire quali sono, in maniera qualitativa, le soluzioni così da confrontare il risultato da lui ottenuto con ciò che gli suggerisce il grafico.



Nel grafico abbiamo riportato in rosso la retta $y = 2$ e in blu $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Successivamente abbiamo evidenziato il punto di contatto A. Si nota che il grafico del logaritmo è maggiore della retta nei punti antecedenti A e maggiori di 0.
Tale lavoro può essere fatto anche prima di una verifica all'interno di un laboratorio informatico, con l'utilizzo del programma Geogebra. L'operazione, fatta attraverso questo portale, porta gli studenti ad avere una maggiore visione dell'algebra, cioè crea un legame fra le equazioni, disequazioni e il mondo dei grafici. Avendo le classi da noi studiate già affrontato questo argomento, sarebbe opportuno mostrare agli studenti i vari metodi grafici col quale essi possono trovare, sempre in maniera qualitativa, il risultato. Si nota che, sempre di più, gli studenti non sanno effettuare questo passaggio e questo è dovuto anche al tipo di insegnamento a loro impartito, perlopiù basato su conti e non su grafici.

3.12 Analisi degli errori nello specifico: esercizio 4

Questo esercizio è stato valutato banale dagli studenti ma è molto allarmante il suo esito. Per prima cosa solo il $5,8\%$ ha risposto correttamente, e questi studenti provengono tutti dalle classi di 4^a. In realtà ci si aspettava un andamento molto migliore per quanto riguarda le classi di 5^a avendo insistito fortemente sul dominio di una funzione. Si noti che tale esercizio è ispirato a esercizi molto ricorrenti nella seconda prova di maturità. Con questo esercizio si cerca infatti di capire se gli studenti hanno chiara la proprietà che dice che:

$$\log_a b^n = n \log_a b \tag{3.1}$$

con la codizione che $b > 0$ oltre a $a > 0$ ed $a \neq 1$. Questa ultima condizione viene sempre poco ricordata dagli studenti, a conferma l'esito dell'esercizio. Vediamo ora nello specifico le risposte forniteci fagli studenti:

1. la risposta (V;V) è stata scelta da 61 studenti, indubbiamente è stata la più gettonata e la motivazione è stata proprio l'applicazione delle proprietà dei logaritmi. [Fig: 3.35]

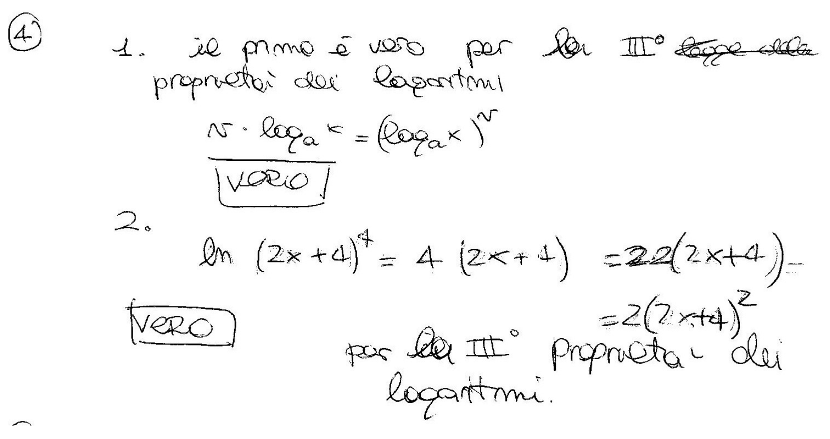


Figura 3.35: (V;V)

In un altro esempio riportato, però, lo studente considera solo il caso in cui l'argomento del logaritmo sia 0. [Fig: 3.36] Abbiamo quindi un errore concettuale dato che il logaritmo di 0 non è definito.

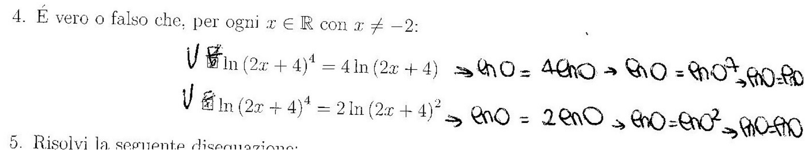


Figura 3.36: (V;V)

2. la risposta (F;F) è stata scelta da 9 studenti, in questo caso gli studenti non si accorgono o pensano di non poter utilizzare la proprietà dei logaritmi. In riferimento a questa risposta è stato intervistato uno studente. Vedremo successivamente il colloquio. [Fig: 3.37]

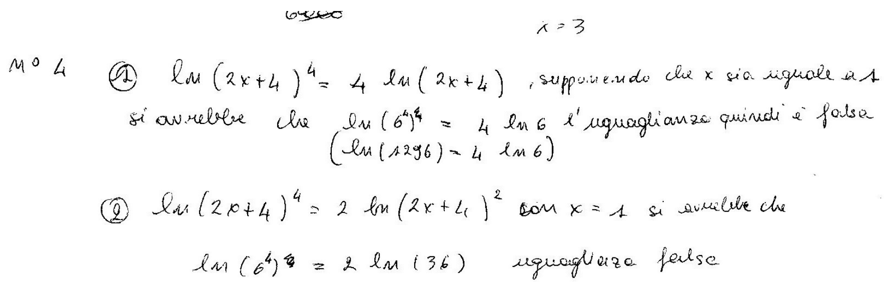


Figura 3.37: (F;F)

3. la risposta (V;F) è stata scelta da 10 studenti, in questo caso lo studente pensa che per poter utilizzare la proprietà dei logaritmi dovrebbe moltiplicare il logaritmo per esponente dell'argomento del logaritmo. [Fig: 3.38]

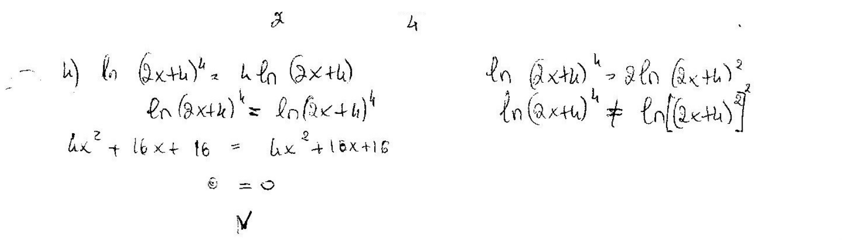
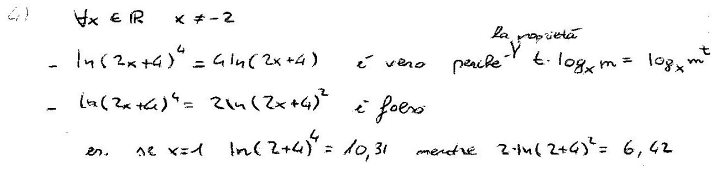


Figura 3.38: (V;F)



4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq -2$

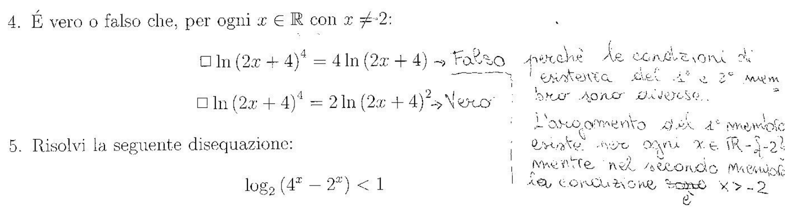
- $\ln(2x+4)^4 = 4\ln(2x+4)$ è vero perchè $\overset{\text{la proprietà}}{\vee}$ $t \cdot \log_x m = \log_x m^t$
- $\ln(2x+4)^4 = 2\ln(2x+4)^2$ è falso

es. se $x=1$ $\ln(2+4)^4 = 10,31$ mentre $2 \cdot \ln(2+4)^2 = 6,42$

Figura 3.39: (V;F)

Nel secondo esempio riportato non è chiaro il conto effettuato per ottenere un diverso risultato.[Fig: 3.39]

4. la risposta (F;V) è stata scelta da 5 studenti, Questi ragazzi forniscono una risposta corretta con la giusta motivazione. Ciò prova che agli studenti sono stati forniti gli elementi sufficienti per risolvere correttamente il quesito, ma la maggioranza di essi non ha ben compreso. [Fig: 3.40][Fig: 3.41]



4. É vero o falso che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 2$:

□ $\ln(2x+4)^4 = 4\ln(2x+4)$ → Falso

□ $\ln(2x+4)^4 = 2\ln(2x+4)^2$ → Vero

perchè le condizioni di esistenza del 1° e 2° membro sono diverse.

L'argomento del 1° membro esiste per ogni $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ mentre nel secondo membro la condizione ~~sono~~ è $x > -2$

5. Risolvi la seguente disequazione:

$$\log_2(4^x - 2^x) < 1$$

Figura 3.40: (F;V)

4) 1° FALSA ~~[illegible]~~ se il contenuto del logaritmo fosse minore di 0, nel primo membro l'elevazione a potenza lo renderebbe positivo, nel secondo membro no

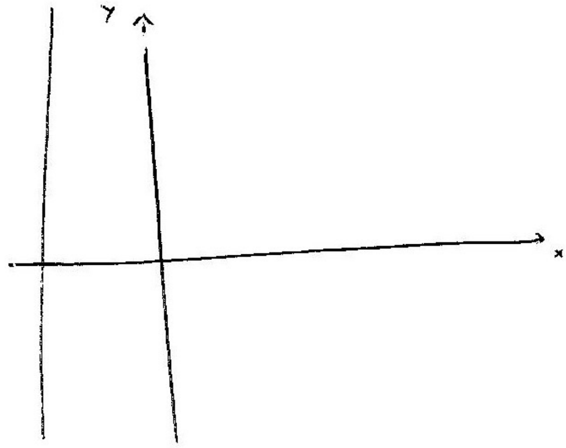
2° VERA se il contenuto del logaritmo fosse minore di 0, entrambi i membri risulterebbero positivi

Figura 3.41: (F;V)

3.13 Intervista

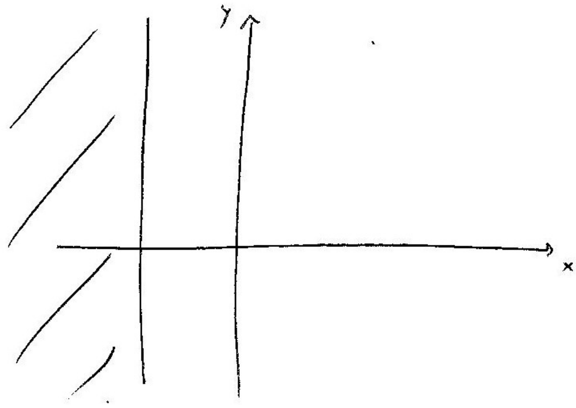
Non essendoci varie motivazioni affianco alla risposta (F;F) è stato intervistato un ragazzo che ha dato tale risposta ma senza motivare.
Intervistatrice: Come mai hai risposto che entrambe le uguaglianze sono false?
Studente: Perchè la proprietà dei logaritmi vale solo se l'argomento del logaritmo è un unico termine. Per esempio se fosse stato $\ln x$ la proprietà sarebbe stata corretta.
Intervistatrice: Ma se tu sostituissi $t = 2x + 4$ otterresti $\ln t^4 = 4 \ln t$ per la prima e per la seconda otterresti $\ln t^4 = 2 \ln t^2$. In questo caso che risposta daresti?
Studente: Direi che sono entrambe vere.
Intervistatrice: (Lo studente, essendo in 5^a, sa fare il grafico di una funzione, nello specifico sa trovare graficamente il suo dominio) Mi potresti fare lo studio di funzione di $\ln (2x + 4)^4$ e di $4 \ln 2x + 4$.
Studente:

$\ln(2x+4)^4$



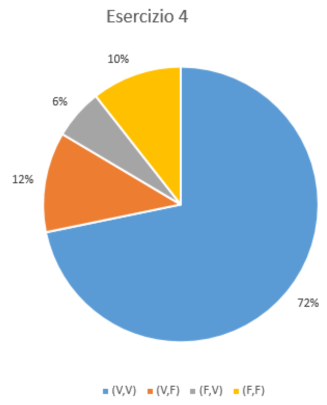
D. $(2x+4)^4 > 0 \rightarrow x \neq -2$

$4\ln(2x+4)$



D: $2x+4>0 \rightarrow x>-2$

Intervistatrice: Quindi sono uguali?
Studente: No, essendo i grafici diversi non è possibile l'uguaglianza. Mentre i domini della seconda uguaglianza sono uguali. Si può dire che la prima è falsa mentre la seconda è vera.



Dal grafico a torta riportato si nota che a quasi tutti gli studenti hanno appreso solo in maniera parziale le regole dei logaritmi. Per poterli aiutare a non commettere questo tipo di errore bisognerebbe verificare gli argomenti, non solo mediante esercizi, ma anche attraverso interrogazioni nel quale lo studente deve fornire la regola, la dimostrazione ed un controesempio, in un caso in cui la regola non è applicabile. In questo modo gli alunni sono portati ad una visione non solo operativa delle formule ma anche teorica.

3.14 Analisi degli errori nello specifico: esercizio 5

Questo esercizio testa i ragazzi sulla loro capacità di utilizzare formule matematiche ed effettuare conti (Employing). Questo esercizio è un mix tra l'esercizio 2 e 3. I ragazzi si trovano dapprima di fronte ad una disequazione logaritmica ed infine arrivano ad una disequazione esponenziale; abbiamo dunque testato la capacità del ragazzo nel utilizzare vari schemi concettuali. Gli errori che ci si aspettava maggiormente erano:

- Nel calcolo delle C.E. Il fatto che esse fossero

  $$\begin{aligned} 4^x - 2^x &> 0 \\ 4^x &> 2^x \end{aligned}$$

  Poteva portare lo studente a pensare che tale disequazione fosse sempre verificata, in quanto essi tendono a pensare che:

  $$\begin{aligned} 4 &> 2 \\ 4^x &> 2^x \end{aligned}$$

  Tale ragionamento è ovviamente errato, basterebbe per esempio sostituire $x = 0$ ottenendo così $1 > 1$ il che è falso.

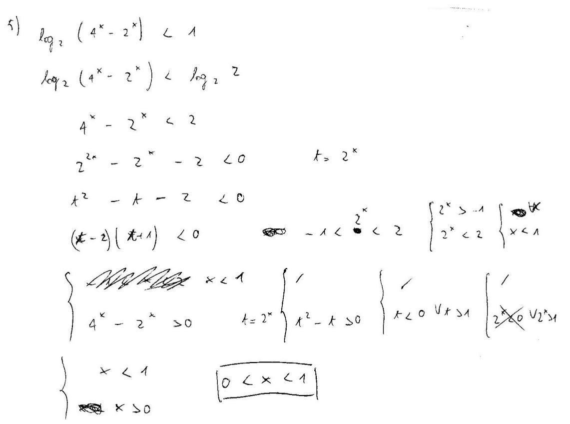
- L'altro errore che ci si aspettava riguarda il seguente passaggio, che si ottiene quando lo studente effettua il passaggio al logaritmo.

  $$\begin{aligned} 2^{2x} - 2^x - 2 &< 0 \\ 2x - x - 1 &< 0 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

  Anche in questo caso l'errore riguarda il fatto che lo studente vede una somma di esponenziali come una somma tra esponenti.

Vediamo ora l'andamento effettivo degli studenti:

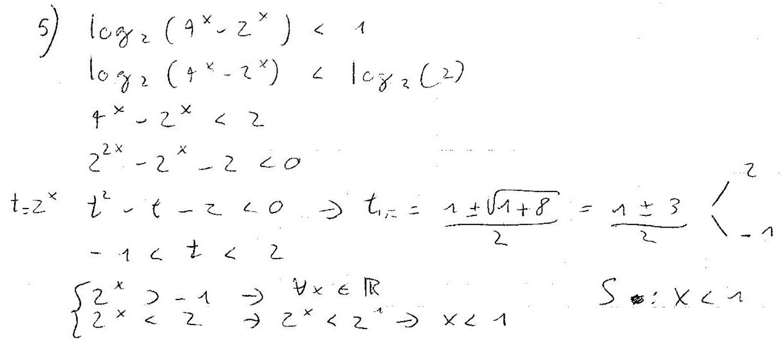
- 14 studenti hanno risposto correttamente. [Fig: 3.42] Riportando sia il campo di esistenza che i passaggi corretti. La risoluzione riportata utilizza il metodo di somma-prodotto per la scomposizione del polinomio di secondo grado.



$$5)\ \log_2(4^x - 2^x) < 1$$
$$\log_2(4^x - 2^x) < \log_2 2$$
$$4^x - 2^x < 2$$
$$2^{2x} - 2^x - 2 < 0 \qquad t = 2^x$$
$$t^2 - t - 2 < 0$$
$$(t-2)(t+1) < 0 \qquad -1 < 2^x < 2 \qquad \begin{cases} 2^x > -1 \\ 2^x < 2 \end{cases} \begin{cases} \forall x \\ x < 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < 1 \\ 4^x - 2^x > 0 \end{cases} \quad t = 2^x \begin{cases} / \\ t^2 - t > 0 \end{cases} \begin{cases} / \\ t < 0 \vee t > 1 \end{cases} \begin{cases} / \\ \cancel{2^x < 0} \vee 2^x > 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \boxed{0 < x < 1}$$

Figura 3.42: Corretto

- 22 studenti hanno tralasciato il campo di esistenza, risolvendo correttamente il resto. [Fig: 3.43]



$$5)\ \log_2(4^x - 2^x) < 1$$
$$\log_2(4^x - 2^x) < \log_2(2)$$
$$4^x - 2^x < 2$$
$$2^{2x} - 2^x - 2 < 0$$
$$t = 2^x \qquad t^2 - t - 2 < 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$
$$-1 < t < 2$$
$$\begin{cases} 2^x > -1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2^x < 2 \Rightarrow 2^x < 2^1 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \qquad S: x < 1$$

Figura 3.43: Manca C.E.

- 2 studenti non hanno svolto l'esercizio.
- 47 studenti hanno svolto l'esercizio in maniera errata. In seguito vedremo dettagliatamente gli errori da essi commessi.

3.15 Errori esercizio 5

Le categorie di errori riscontrate in questo esercizio sono varie. Iniziamo analizzando le categorie di errori da noi attese. Il primo tipo di errore, o casi riconducibili ad esso, è stato riscontrato in 24 ragazzi, tra cui solo 3 hanno svolto anche le C.E.. Vediamo ora qualche esempio:

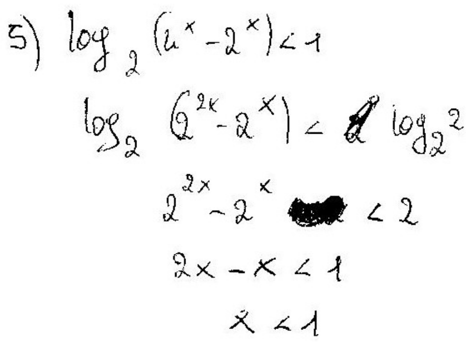


Figura 3.44: Errore atteso

In questo caso lo studente commette l'errore che ci aspettavamo. [Fig: 3.44]

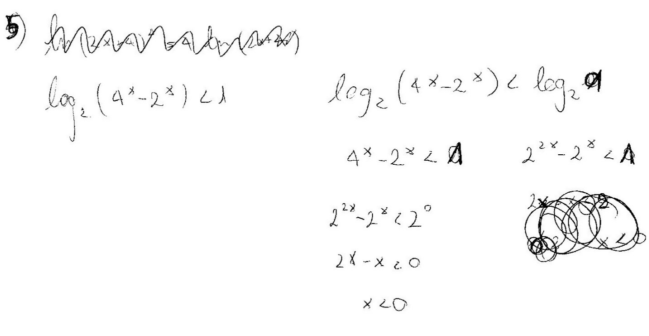


Figura 3.45: Errore atteso

Lo studente inizialmente trasforma 1 in logaritmo di 1, commettendo così un errore. Successivamente, infatti, svolge l'esercizio con l'errore atteso. Hanno svolto l'esercizio in tale modo 2 studenti. [Fig: 3.45]

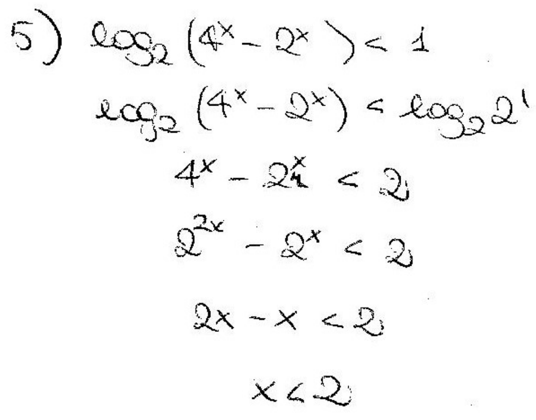


Figura 3.46: Errore atteso

Sempre riconducibile al primo tipo di errore è il caso di questo studente che non considera l'esponente del 2 a destra ma il numero stesso. [Fig: 3.46]
Per quanto riguarda il secondo tipo di errore che ci si aspettava solo 3 studenti lo hanno commesso. Tale scarsità potrebbe essere data anche dal fatto che pochi studenti hanno effettuato il C.E.

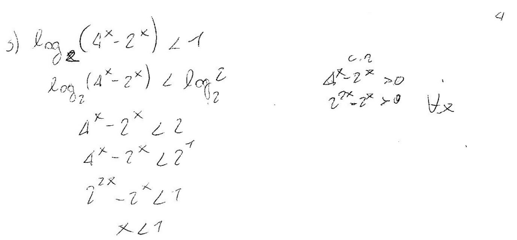


Figura 3.47: Errore atteso

In questo caso lo studente commette entrambi i tipi di errori attesi. [Fig: 3.47]

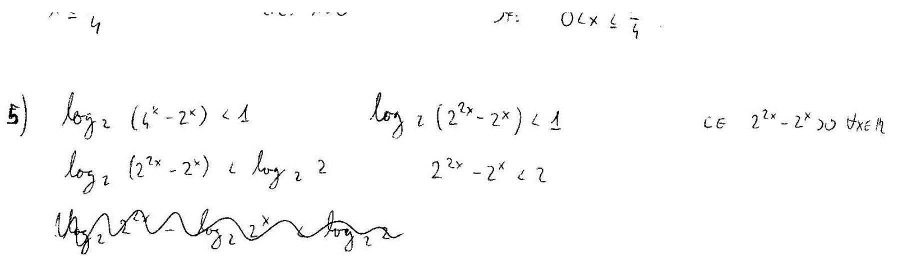


Figura 3.48: Errore atteso

Lo studente dopo aver commesso il secondo tipo di errore si blocca. Cioè sbaglia anche il campo di esistenza sostenendo che sia sempre verificato. [Fig: 3.48]
Si nota però che un ragazzo di fronte a $2^x > 0$ risponde impossibile. [Fig: 3.49] Terminando così l'esercizio.

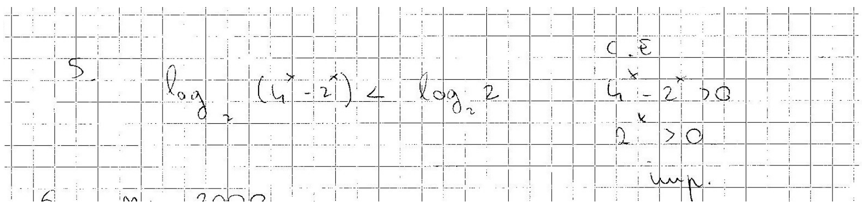


Figura 3.49: Errore atteso

In questi casi gli studenti hanno commesso gli errori da noi attesi. Sono stati riscontrati, però, altri tipi di errori. Per esempio abbiamo studenti che non riescono ad interpretare correttamente 4^x. Questo termine, infatti, viene eguagliato a $2 * 2^x$ oppure a $2^2 * 2^x$. Nell'esempio riportato in seguito, lo studente, effettua la sostituzione con t ma trasforma 4^x in maniera errata. [Fig: 3.50] Inoltre anch'esso, durante lo svolgimento, commette l'errore di secondo tipo che ci aspettavamo.

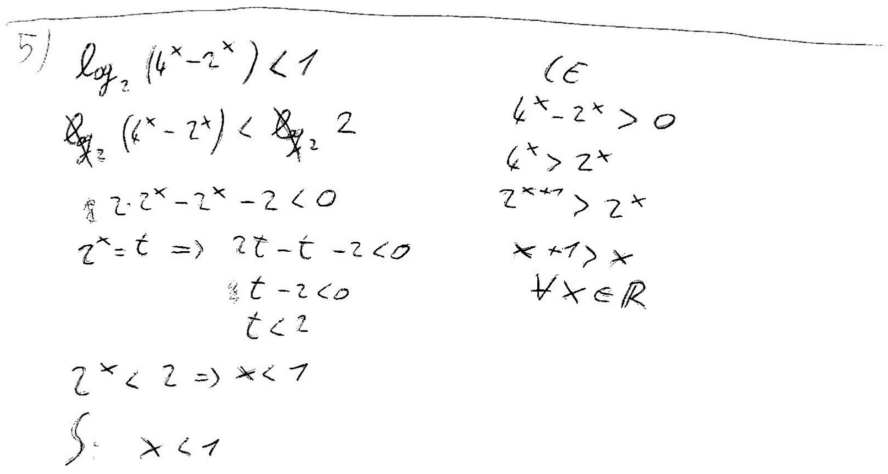


Figura 3.50: Errato

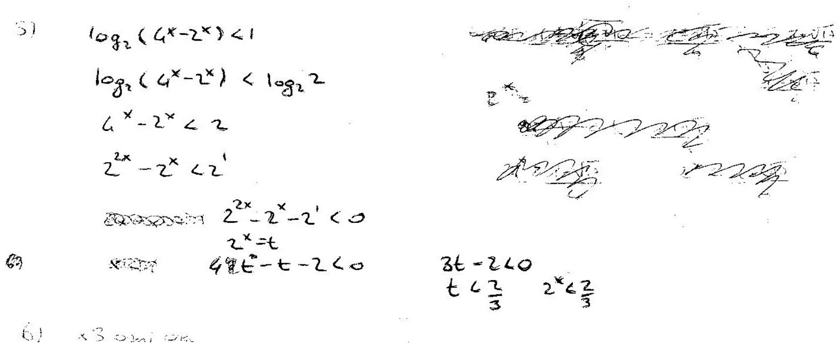


Figura 3.51: Errato

Anche in questo ultimo caso la trasformazione di 4^x risulta errata. Lo studente in questione trasforma una disequazione di secondo grado in una di primo grado. [Fig: 3.51]

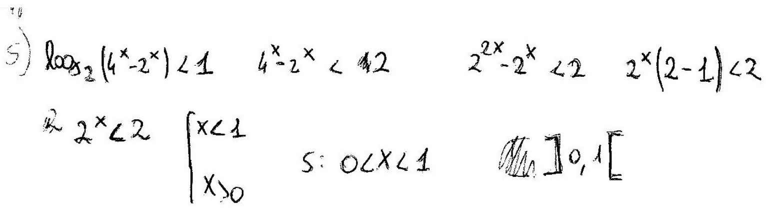


Figura 3.52: Errato

Durante l'esercizio il ragazzo raccoglie 2^x considerando, così, $4^x = 2 * 2^x$. Inoltre mette a sistema la soluzione ottenuta con il C.E. che però non ha effettuato esplicitamente.[Fig: 3.52]
Un solo studente propone la seguente risoluzione:

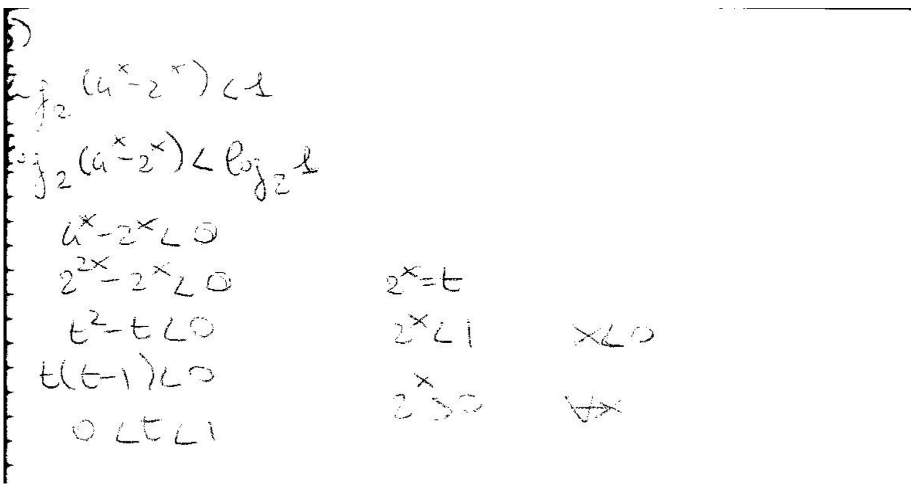


Figura 3.53: Errato

Lo studente considera $1 = \log_2 1$. [Fig: 3.53] Dopo di che passa alla disequazione dove a sinistra considera l'argomento del logaritmo e a destra l'esponente dell'argomento del logaritmo. Si nota che la sua risoluzione coinciderebbe con il calcolo del campo di esistenza.
Inoltre abbiamo 3 studenti che confondono le proprietà dei logaritmi e/o degli esponenziali. Per esempio:

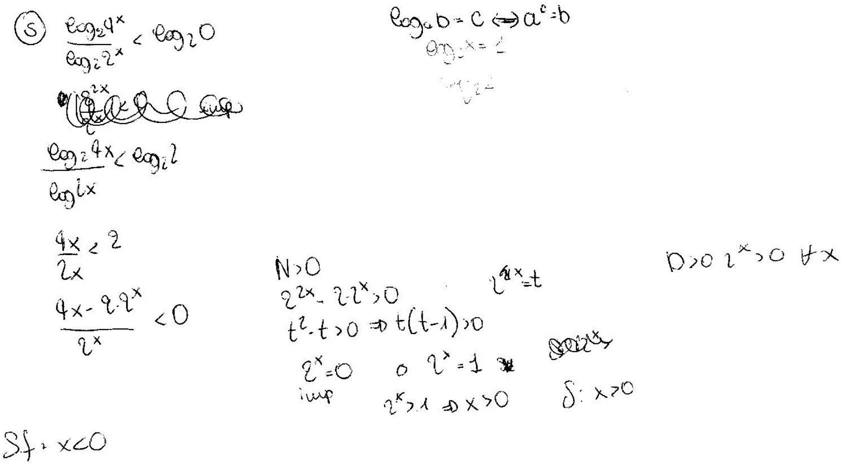


Figura 3.54: Errato

Lo studente non ha chiare le proprietà dei logaritmi. Infatti effettua una divisione interna all'argomento del logaritmo dato che vede un meno. Successivamente confonde un altra proprietà e porta l'esponente dell'argomento alla base dell'argomento. [Fig: 3.54]

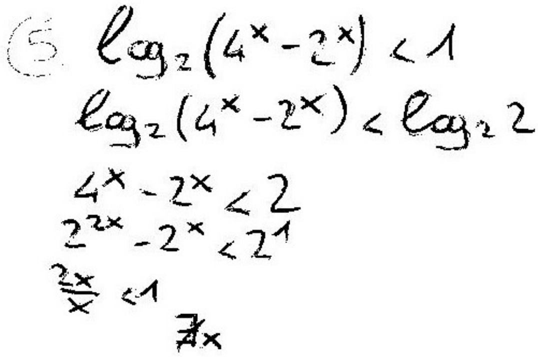


Figura 3.55: Errato

Lo studente confonde le proprietà dei logaritmi e quelle degli esponenziali. Applicando una proprietà valida solo per i logaritmi agli esponenziali. Tale errore lo hanno commesso due studenti. [Fig: 3.55]

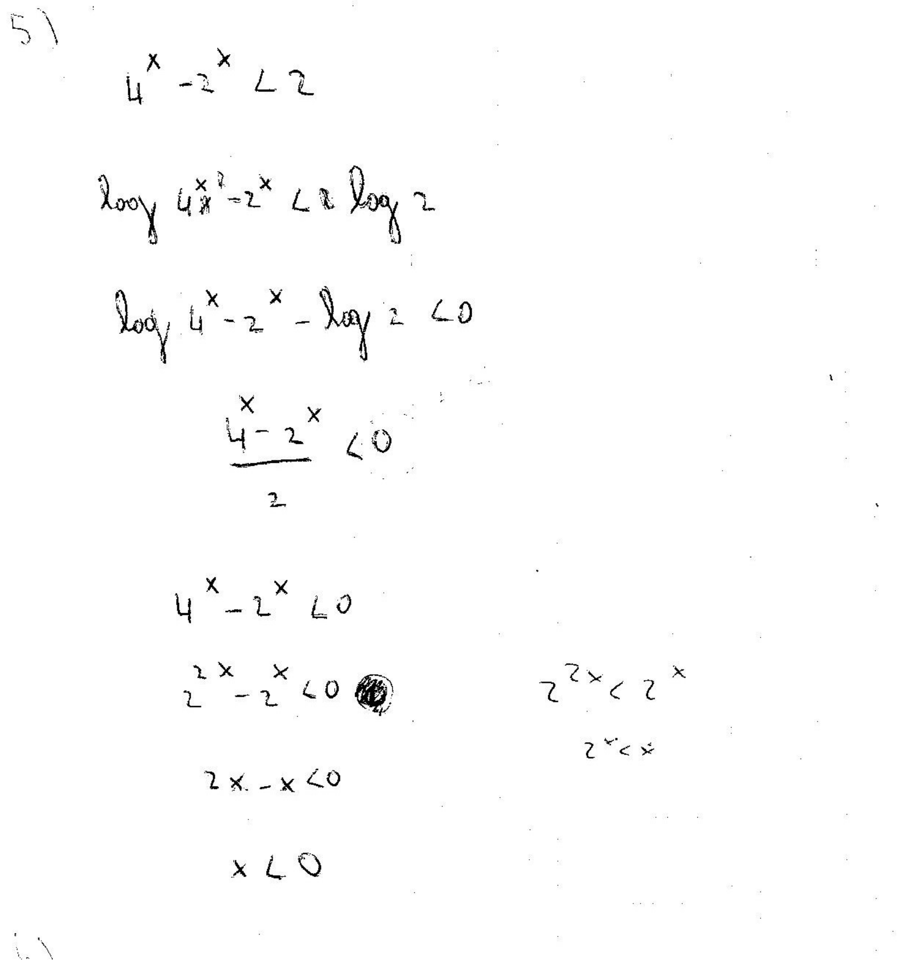


Figura 3.56: Errato

Lo studente inizialmente usa le giuste proprietà dei logaritmi ma poi non trasforma 0 prima di "togliere" il logaritmo. [Fig: 3.56] Inoltre anch'esso commette l'errore di tipo 1.

Infine abbiamo errori più marginali:

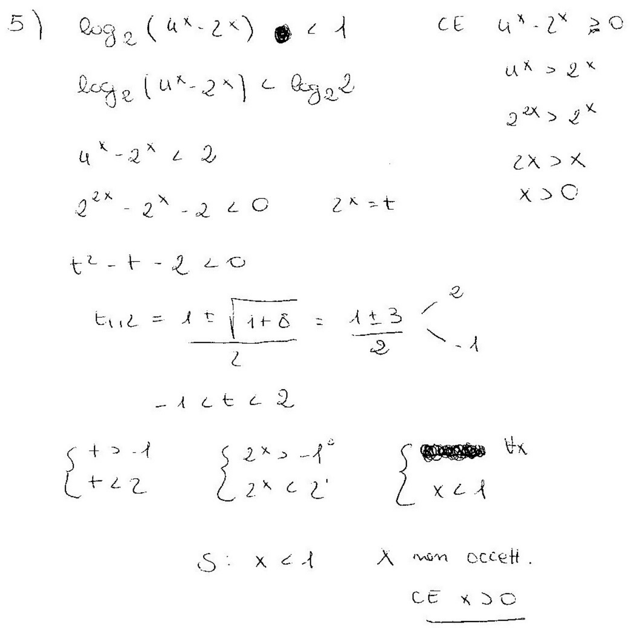


Figura 3.57: Errato

Lo studente non sa confrontare $x > 0$ e $x < 1$. [Fig: 3.57]

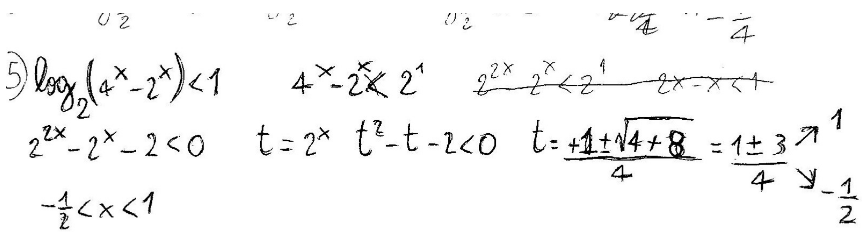
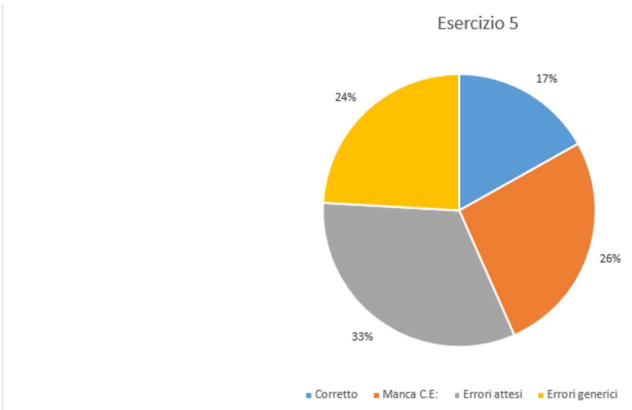


Figura 3.58: Errato

E, infine, lo studente trova il risultato ma non considera la trasformazione fatta da t in x. [Fig: 3.58]

3.16 Analisi finale

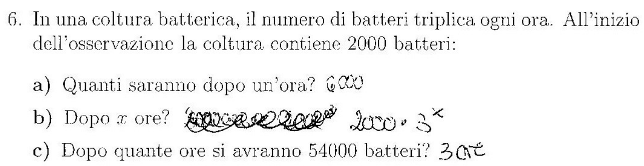
Dal grafico a torta si notano subito le difficoltà degli studenti. In questo caso non è semplice, al contrario dell'esercizio 3, interpretare i grafici per ottenere una soluzione qualitativa. Questo esercizio racchiude al suo interno sia le difficoltà del secondo che del terzo esercizio. Per affrontare questo tipo di problema lo studente dovrebbe avere una conoscenza approfondita e consolidata sia per quanto riguarda l'esponenziale sia per quanto riguarda il logaritmo. Come sostiene Skemp, riportato in studi in didattica, non si possono costruire nuovi concetti se i concetti su cui essi si basano non sono solidi, e da ciò che abbiamo visto le basi sono un pò poco chiare.



3.17 Analisi degli errori nello specifico: esercizio 6

Questo esercizio è stato pensato per valutare il ragazzo principalmente nei campi di Formulating ed Interpreting. Dalle analisi dell'OCSE-Pisa si nota che gli studenti italiani sono molto preparati nella parte di Employing ma tendono ed essere carenti nelle altre due fasce.[OCSE-Pisa 2012, Sintesi dei risultati per l'Italia, a cura di INVALSI]. L'esercizio vuole vedere se tale aspettativa è confermata o no, per quanto riguarda le classi da noi studiate.
L'esercizio è suddiviso in 3 domande.
La prima domanda è stata svolta correttamente dalla totalità degli studenti. Come ci si aspettava.
Per quanto riguarda la seconda domanda abbiamo varie risposte fornite dagli studenti, a conferma della difficoltà che essi hanno nel costruire una formula generica.
Le risposte sono state:

- 34 studenti hanno risposto correttamente. Fornendo come risposta $2000 * 3^x$. [Fig: 3.59]


6. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

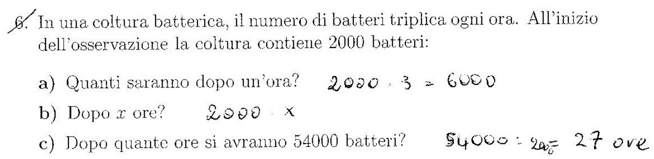
a) Quanti saranno dopo un'ora? 6000

b) Dopo x ore? $2000 \cdot 3^x$

c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? 3ore

Figura 3.59: Correta

- 20 studenti hanno risposto $2000 * x$. [Fig: 3.60]


6. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

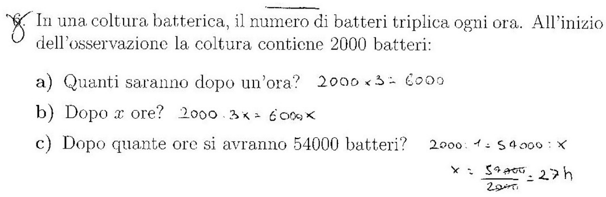
a) Quanti saranno dopo un'ora? $2000 \cdot 3 = 6000$

b) Dopo x ore? $2000 \cdot x$

c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? $54000 : 2000 =$ 27 ore

Figura 3.60: Errato

- 20 studenti hanno risposto $2000 * 3 * x$. [Fig: 3.61]



8\. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

a) Quanti saranno dopo un'ora? $2000 \times 3 = 6000$

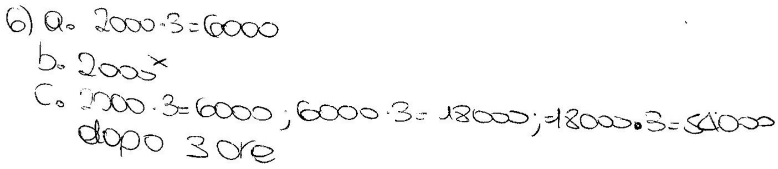
b) Dopo x ore? $2000 \cdot 3x = 6000x$

c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? $2000 : 1 = 54000 : x$

$x = \frac{54000}{2000} = 27h$

Figura 3.61: Errato

- 4 studenti hanno risposto 2000^x. [Fig: 3.62]



6) a. $2000 \cdot 3 = 6000$

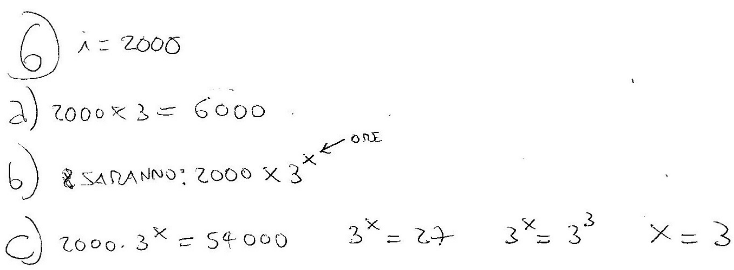
b. 2000^x

c. $2000 \cdot 3 = 6000$; $6000 \cdot 3 = 18000$; $18000 \cdot 3 = 54000$

dopo 3 ore

Figura 3.62: Errato

- 1 studente ha risposto $2000 * x * 3^x$. [Fig: 3.63]



6) $\lambda = 2000$

a) $2000 \times 3 = 6000$

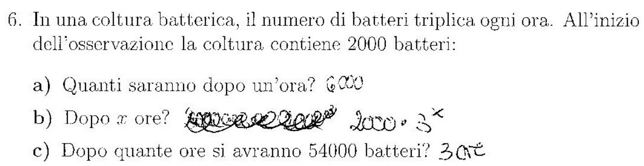
b) 8 SARANNO: 2000×3^x ← ORE

c) $2000 \cdot 3^x = 54000$ $\quad 3^x = 27 \quad 3^x = 3^3 \quad x = 3$

Figura 3.63: Errato

Infine l'ultima domanda è stata svolta correttamente per la gran parte degli studenti. La cosa interessante è stata che molti di loro non utilizzano la formula trovata nel punto b) ma calcolano l'aumento ad ogni ora per poi raggiungere ad un risultato corretto ma non conforme alla formula fornita precedentemente. In questo caso lo studente non si accorge di tale errore e quindi non sa interpretare tale risultato.

- 46 studenti hanno risposto correttamente. Fornendo come risposta 3 ore. [Fig: 3.64]



6. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

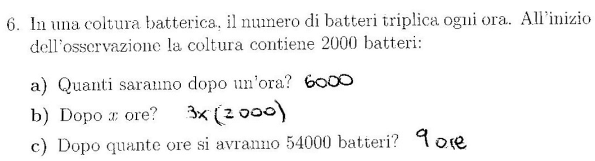
   a) Quanti saranno dopo un'ora? 6000

   b) Dopo x ore? $2000 \cdot 3^x$

   c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? 3 ore

Figura 3.64: Corretta

- 25 studenti hanno risposto 9 ore. [Fig: 3.65]



6. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

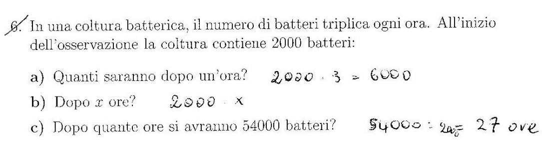
   a) Quanti saranno dopo un'ora? 6000

   b) Dopo x ore? $3x\,(2000)$

   c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? 9 ore

Figura 3.65: Errato

- 12 studenti hanno risposto 27 ore. [Fig: 3.66]



6. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

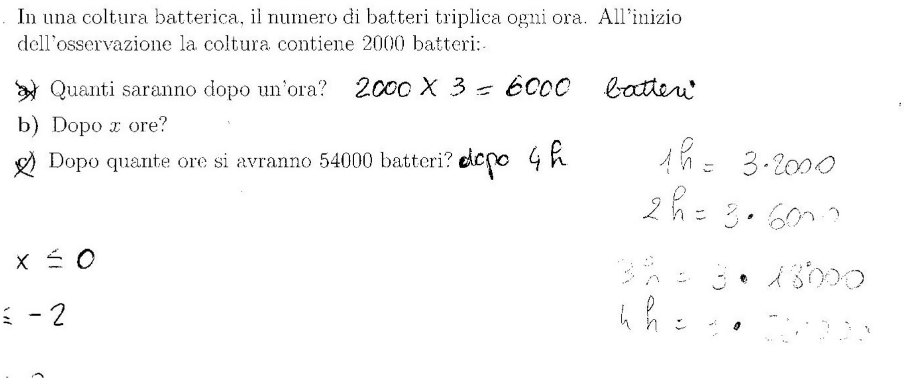
   a) Quanti saranno dopo un'ora? $2000 \cdot 3 = 6000$

   b) Dopo x ore? $2000 \cdot x$

   c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? $54000 : 2000 =$ 27 ore

Figura 3.66: Errato

- 1 studente ha risposto 4 ore. [Fig: 3.67]



In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

a) Quanti saranno dopo un'ora? $2000 \times 3 = 6000$ batteri

b) Dopo x ore?

c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? dopo 4 h

$1h = 3 \cdot 2000$

$2h = 3 \cdot 6000$

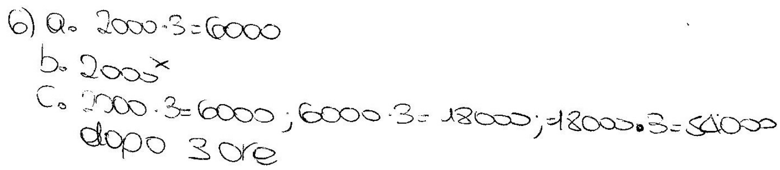
$3h = 3 \cdot 18000$

$x \leq 0$

≤ -2

Figura 3.67: Errato

Si ha che 9 studenti non sono stati coerenti tra la risposta al punto b) e la risposta al punto c). Essi infatti per giungere al risultato non usano la formula in b) ma effettuano conti per vedere quando si arriva ai batteri richiesti. In tale caso era facile, essendo il risultato in ore e non in una sua frazione. Vediamo qualche esempio di incoerenza: [Fig: 3.68][Fig: 3.69][Fig: 3.70] [Fig: 3.71]



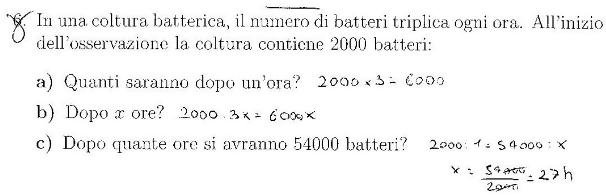
6) a. $2000 \cdot 3 = 6000$

b. 2000^x

c. $2000 \cdot 3 = 6000$; $6000 \cdot 3 = 18000$; $18000 \cdot 3 = 54000$

dopo 3 ore

Figura 3.68: Incoerenza



8 In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

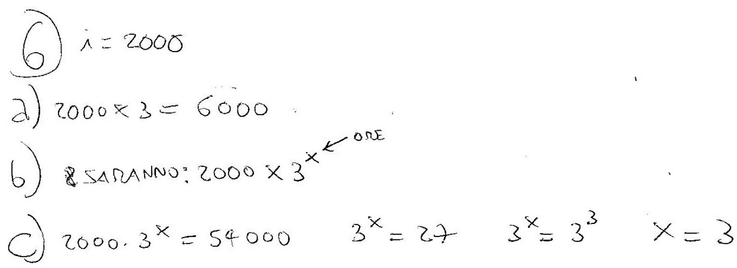
a) Quanti saranno dopo un'ora? $2000 \times 3 = 6000$

b) Dopo x ore? $2000 \cdot 3x = 6000x$

c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? $2000 : 1 = 54000 : x$

$x = \frac{54000}{2000} = 27h$

Figura 3.69: Incoerenza



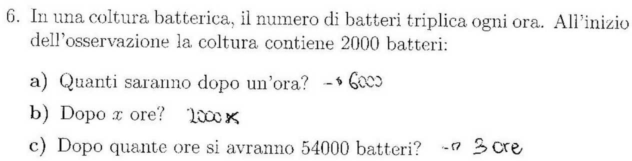
6) $\lambda = 2000$

a) $2000 \times 3 = 6000$

b) SARANNO: 2000×3^x ← ORE

c) $2000 \cdot 3^x = 54000$ $\quad 3^x = 27 \quad 3^x = 3^3 \quad x = 3$

Figura 3.70: Incoerenza



6. In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. All'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 batteri:

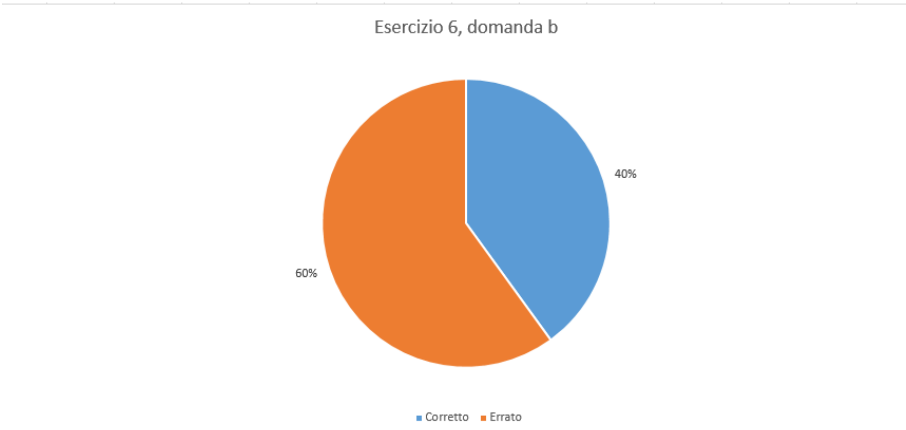
a) Quanti saranno dopo un'ora? → 6000

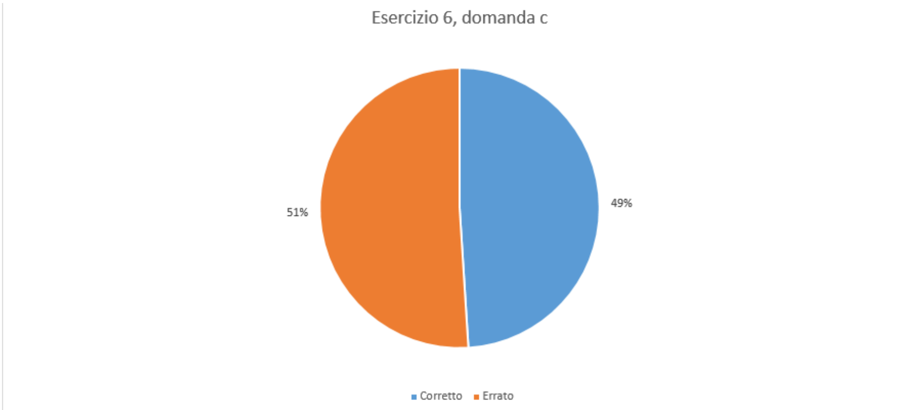
b) Dopo x ore? $2000x$

c) Dopo quante ore si avranno 54000 batteri? → 3 ore

Figura 3.71: Incoerenza

Questi casi evidenziano il fatto che lo studente non riesce a interpretare il risultato in relazione a ciò che ha detto precedentemente. È convinto del fatto che entrambe le risposte forniteci risultino corrette.





Dai grafici a torta si nota che gli studenti faticano a scrivere una formula generale per la risoluzione dell'esercizio. Per superare questa difficoltà sistematica, può essere utile sottoporre agli studenti alcuni problemi cosiddetti "contestualizzati", in cui si deve rappresentare matematicamente un fenomeno concreto. Problemi di questo tipo sono da qualche anno presenti nelle prove scritte dell'Esame di Stato per i licei. La pratica di questi problemi, purchè opportunatamente scelti, potrebbe essere proficua per una conoscenza e un'applicazione più profonda e consapevole delle regole.

Capitolo 4

Conclusioni

Attraverso i risultati ottenuti nella realizzazione di questo elaborato si può concludere dicendo che molti studenti non hanno chiare le proprietà dei logaritmi e degli esponenziali. Essi tendono ad impararle in maniera superficiale e meccanica, portandoli ad una scarsa conoscenza e padronanza dell'argomento. Tutto ciò è messo in luce dall'esercizio quattro, il quale ci mostra che gli studenti tendono ad apprendere solo la parte operativa, di calcolo, e meno la teoria alla base.
Un altro fatto che si può evidenziare è la scarsa facilità di corrispondenza tra un problema concreto e la formula che può rappresentare il problema stesso. Infatti si nota che per gli studenti effettuare tale passaggio risulta, talvolta, molto complicato, inoltre si nota un'altra grande difficoltà ad interpretare il risultato nel contesto del problema. Si sono riscontrati casi in cui numerose risposte non sono coerenti all'interno dello stesso problema.
Dall'elaborato si nota che molti studenti non determinano il campo di esistenza all'interno delle disequazioni logaritmiche. Tale mancanza, forse, è data dal fatto che non è del tutto chiaro che il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale, ed essendo l'insieme delle immagini per l'esponenziale $]0;+\infty[$ si avrà che il dominio del logaritmo sarà necessariamente $]0;+\infty[$. Bisognerebbe insistere maggiormente su questo punto.
Per cercare di ridurre tali tipi di errori sono stati proposti delle possibili attività didattiche al fine di cercare di migliorare l'apprendimento. Gli errori maggiormente riscontrati ci portano a pensare che lo studente abbia bisogno di una conoscenza di tipo teorico e non solo operativa, probabilmente sarebbe più produttivo testarli sulla loro conoscenza delle formule piuttosto che proporgli solo esercizi di tipo algebrico.
Infine si è visto che, durante le interviste, gli studenti riconoscono di aver commesso un errore, ma faticano a vedere, nello specifico, quale esso sia. Il fatto è che non hanno una buona padronanza di questo argomento, infatti

faticano a vedere l'aspetto non lineare di queste funzioni.
Concludiamo dicendo che le funzioni esponenziali e logaritmiche sono fondamentali in tantissimi campi della matematica e che bisognerebbe indurre gli studenti ad apprendere tali concetti profondamente e non solo come insieme di regole.

Bibliografia

□ [I] Carl B. Boyer *Storia della Matematica*, ISEDI, Milano, 1976

□ [II] G. Polya , *How to Solve it: A new aspect of mathematical method*, Prince University Press, New Jersey, 1973

□ [III] R: Skemp. *Relational Understanding and Instrumental Understanding*, Mathematics Teaching, 77, 20-26, 1976

□ [IV] K. Webber, *Student's Understanding of Exponential and Logarithmic Function*, Murray State University , USA, 2002

□ [V] J. Confrey, *The Concept of Exponential Function: A Student's perspective*, Springer-Verlag, New York, 1991

□ [VI] J. Confrey,E. Smith *Splitting, covariation, and their role in the development of exponential function* , Kluwer, 1995

□ [VII] Tall, D., Dubinsky, *Mathematical thinking and the computer*,Kluwer, 1991

□ [VIII] Dodero, Baroncini, *Corso di Algebra; per licei scientifici*, Ghisetti e Corvi editori, Milano, 1986

Ringraziamenti

Un primo sentito ringraziamento va al professore Paolo Negrini che mi ha aiutata nella stesura di tale tesi, un grazie per la sua professionalità e pazienza.
Devo ringraziare i miei genitori, che mi hanno sempre sostenuto e appoggiato in ogni scelta e decisione. Senza i loro sacrifici non sarei qua a festeggiare questo giorno così importante.
Non meno importante è il mio ragazzo Sergio, il mio braccio destro, colui che mi ha ascoltata ed aiutata quando ne avevo più bisogno.
Durante questo cammino mi sono state accanto tante persone meravigliose, dai miei amici più cari ai genitori del mio ragazzo, fino ad arrivare ai miei nonni, sui quali ho sempre contato.
Inoltre vorrei ringraziare mio fratello Federico, per avermi sempre spinta e spronata, fin da quando ero piccola, a migliorarmi e a studiare.