

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

L'EFFETTO GIBBS

Tesi di Laurea in Complementi di Analisi

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Sarah Console

Anno Accademico 2016-2017

Ai miei genitori

Introduzione

Questo elaborato si propone di studiare l'effetto Gibbs da un punto di vista matematico. Quando si approssima una funzione periodica, regolare a tratti che presenta punti di discontinuità di prima specie con le serie di Fourier si verifica un fenomeno di sovraoscillazione. Le somme parziali di queste serie sono funzioni continue e si può notare che aggiungendo sempre più termini si ottiene una migliore approssimazione della funzione originale. Nonostante ciò le oscillazioni nei punti di discontinuità persistono e rimangono della stessa altezza, anche se diminuisce la distanza tra un'oscillazione e l'altra. Proprio questa presenza di oscillazioni e soprattutto la mancanza di miglioramento nelle approssimazioni rappresenta l'effetto Gibbs.

Nel 1898 due matematici americani, Albert Michelson e Samuel Stratton, costruiscono una macchina in grado di creare i grafici delle somme parziali di Fourier fino a 80 termini; tuttavia Michelson nota, nei grafici, delle oscillazioni che imputa ad un problema della macchina. Successivi calcoli a mano però confermano tali oscillazioni, quindi Michelson scrive i risultati ottenuti in una lettera a *Nature*, grazie alla quale Josiah Willard Gibbs studia e approfondisce l'argomento.

Solo nel 1906 viene portata a termine un'analisi rigorosa del fenomeno grazie a Maxime Bôcher, il quale assegna anche il nome "effetto Gibbs". Tuttavia sarebbe più corretto chiamarlo "fenomeno di Gibbs-Wilbraham", poichè il primo studio viene condotto proprio da Henry Wilbraham nel 1848.

Nonostante la spiegazione del fenomeno risalga a più di un secolo fa, il fenomeno rimane un argomento attuale poichè nei processi di approssimazione,

come il filtraggio delle immagini e la ricostruzione dei suoni, le oscillazioni vanno eliminate o almeno controllate.

Questa trattazione è suddivisa in tre capitoli. Il primo capitolo presenta la teoria legata alle serie di Fourier, in particolare si definiscono i polinomi e le serie di Fourier, la loro scrittura tramite il nucleo di Dirichlet e se ne studia la convergenza puntuale e uniforme, tramite i teoremi principali.

Nel secondo capitolo viene invece analizzato l'effetto di Gibbs partendo da una funzione particolare, la funzione onda quadra: se ne calcola la serie di Fourier associata e si mostra l'esistenza dell'effetto Gibbs per tale funzione. Si generalizza poi il risultato, dimostrando che il fenomeno di Gibbs si presenta in tutte le funzioni periodiche regolari a tratti con discontinuità di prima specie in un punto generico. Infine si mostra un altro esempio, la funzione onda a dente di sega, in cui si verifica l'effetto.

Nel terzo capitolo infine si studiano i polinomi di Fejér e la convergenza secondo Cesàro, definendola per le serie numeriche ed estendendola poi alle serie di funzioni. Infatti l'effetto Gibbs può essere risolto utilizzando questi polinomi e questa convergenza, in quanto permettono di avere convergenza puntuale e uniforme nelle serie associate. Si mostra poi la soluzione dell'effetto Gibbs nelle funzioni specifiche considerate nel secondo capitolo.

Indice

Introduzione	i
1 Analisi di Fourier	1
1.1 Polinomi e serie di Fourier	1
1.2 Convergenza puntuale e uniforme	3
2 Effetto Gibbs	9
2.1 Un primo esempio: la funzione onda quadra	9
2.1.1 Serie di Fourier della funzione onda quadra	10
2.1.2 Calcolo dei massimi e dei minimi di $S_n(f, t)$	11
2.1.3 Calcolo del salto di $S_{2n+1}(f, t)$	12
2.2 Generalizzazione a funzioni con discontinuità di prima specie in un punto generico	16
2.3 L'onda a dente di sega	19
3 Le somme di Fejér	21
3.1 Convergenza secondo Cesàro	21
3.2 Eliminazione dell'effetto Gibbs	27
Bibliografia	31

Elenco delle figure

2.1	Grafico della funzione onda quadra nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. . .	10
2.2	Effetto Gibbs per $n = 2, 4, 6, 8$	13
2.3	Particolare dell'effetto Gibbs per $n = 10, 30, 50$	13
2.4	Grafico della funzione $s(x)$	20
2.5	Effetto Gibbs per l'onda a dente di sega per $n = 10, 20, 30$. .	20
2.6	Particolare dell'effetto Gibbs per l'onda a dente di sega per $n = 10, 20, 30, 40, 50$	20
3.1	Particolare delle somme di Fejér della funzione onda quadra per $n = 50, 100, 150, 200, 250$	29
3.2	Particolare delle somme di Fejér dell'onda a dente di sega per $n = 10, 20, 30, 40, 50$	29

Capitolo 1

Analisi di Fourier

Nel 1807 Fourier dichiara che una qualsiasi funzione periodica può essere espressa come combinazione lineare di seni e coseni. Queste combinazioni, chiamate *serie di Fourier*, sono diventate strumento fondamentale per lo studio di fenomeni periodici, come vibrazioni e onde.

1.1 Polinomi e serie di Fourier

Definizione 1.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1(] - \pi, \pi[)$, 2π -periodica. Si chiama polinomio di Fourier di f di grado $n \in \mathbb{N}$ il polinomio trigonometrico

$$S_n(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

dove per $k \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$

Si può notare che gli a_k e i b_k , detti coefficienti di Fourier di f , sono ben definiti in quanto $|\cos kt| \leq 1$, $|\sin kt| \leq 1$ e f è sommabile su $] - \pi, \pi[$.

I polinomi di Fourier sono i polinomi trigonometrici maggiormente utilizzati poichè minimizzano l'errore in norma quadratica, come dimostra la seguente proposizione:

Proposizione 1.1.1. Sia $T_n = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p \text{ polinomio trigonometrico di grado minore o uguale } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^2(\cdot - \pi, \pi)$, allora

$$\|S_n(f) - f\| \leq \|f - p\|, \quad \forall p \in T_n$$

Dimostrazione. Si dimostra che T_n è uno spazio vettoriale di dimensione $2n + 1$ e che una base ortonormale di tale spazio è data da

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, k = 1, \dots, n \right\}$$

Rispetto a questa base, qualsiasi polinomio trigonometrico $p \in T_n$ può essere scritto come

$$p = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k \quad \text{con} \quad c_k = \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e_k(t) dt \quad \forall k = 0, \dots, n$$

mentre, il polinomio di Fourier viene scritto come

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle e_k$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|S_n(f) - f\|^2 = \langle S_n(f) - f, S_n(f) - f \rangle = \\ &= \|S_n(f)\|^2 - 2 \langle S_n(f), f \rangle + \|f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{2n} (\langle f, e_k \rangle)^2 \end{aligned}$$

Inoltre

$$\|p - f\|^2 = \|p\|^2 - 2 \langle p, f \rangle + \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle e_k, f \rangle + \|f\|^2$$

Perciò si ha

$$\begin{aligned} \|p - f\|^2 - \|S_n(f) - f\|^2 &= \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle e_k, f \rangle + \sum_{k=0}^{2n} (\langle f, e_k \rangle)^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \langle f, e_k \rangle)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza, poichè sono quantità positive, si ottiene la tesi. □

Si introduce ora una famiglia di funzioni, in modo da poter utilizzare una rappresentazione integrale dei polinomi di Fourier.

Definizione 1.2. $\forall t \in \mathbb{R}$, si definisce nucleo di Dirichlet la funzione

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. $D_n(t) = D_n(t + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
2. $D_n(t) = D_n(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
3. $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt = 1$
4. $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \forall t \in]0, \pi[$

Dimostrazione. Questa proprietà si dimostra utilizzando le formule di Prostaferesi.

□

È quindi possibile scrivere il polinomio di Fourier in forma integrale come mostra la seguente proposizione, la cui dimostrazione si trova in [1, p.161].

Proposizione 1.1.2. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, f sommabile in $] -\pi, \pi[$, allora*

$$S_n(f, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

1.2 Convergenza puntuale e uniforme

Definizione 1.3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$, si chiama serie di Fourier di f la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

con a_0, a_k, b_k coefficienti di Fourier di f .

Definizione 1.4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$.

Si dice che:

- la serie di Fourier di f converge in $t \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, t)$$

- f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto $t \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, t) = f(t)$$

La somma parziale n -esima della serie di Fourier è il polinomio di Fourier di grado n di f . Si può quindi osservare che modificando f nei punti di un insieme di misura nulla, in particolare nel *solo* punto t , i suoi coefficienti di Fourier, e quindi la successione dei polinomi $S_n(f)$, non cambiano. Può pertanto accadere che la successione $(S_n(f, t))_{n \in \mathbb{N}}$ converga senza che valga $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, t) = f(t)$.

Per questo motivo si ricercano dapprima delle condizioni sufficienti per la convergenza di $(S_n(f, t))_{n \in \mathbb{N}}$ che consentano anche di determinare l'eventuale valore limite λ . Si enunciano ora i criteri di convergenza delle serie di Fourier, partendo dal seguente lemma, la cui dimostrazione si trova in [1, pp.170-171].

Lemma 1.2.1 (di Riemann-Lebesgue). *Sia $g \in L^1(]a, b[)$, allora*

$$\lim_{|M| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \cos(Mt) dt = 0 \quad e \quad \lim_{|M| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(Mt) dt = 0$$

Seguono ora importanti teoremi per definire delle condizioni sulla convergenza delle serie di Fourier.

Teorema 1.2.2 (di localizzazione di Riemann). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sommabile in $] -\pi, \pi[$. Allora sono equivalenti:*

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, t) = \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

e $\exists c > 0, c \in]0, \pi[$ tale che

$$\int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Sia $m(f, t, s) = \frac{f(t+s)+f(t-s)}{2}$.

Si vuole trovare prima di tutto una condizione equivalente a (1.1):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, t) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, t) - \lambda = 0$$

per la proposizione 1.1.2

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi (m(f, t, s) - \lambda) D_n(s) ds = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_0^c (m(f, t, s) - \lambda) D_n(s) ds \\ &+ \int_c^\pi (m(f, t, s) - \lambda) D_n(s) ds \longrightarrow 0 \quad \forall c \in]0, \pi[\end{aligned}$$

Tuttavia si ha che $\forall c \in]0, \pi[$, la funzione $(m(f, t, s) - \lambda) \frac{1}{2 \sin \frac{s}{2}}$ è sommabile in $]c, \pi[$, dunque, per il lemma di Riemann-Lebesgue,

$$\int_c^\pi (m(f, t, s) - \lambda) D_n(s) \longrightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Si considera ora l'integrale nell'intervallo $]0, c[$ e si aggiunge e sottrae la quantità $\frac{\sin((n+\frac{1}{2})s)}{s}$.

Basta ora dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c (m(f, t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{2 \sin \frac{s}{2}} - \frac{1}{s} \right) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right) ds = 0 \quad (1.3)$$

Poichè $m(f, t, s)$ è sempre sommabile, si considera la funzione

$$F(s) = \frac{1}{2 \sin \frac{s}{2}} - \frac{1}{s} \longrightarrow 0 \quad \text{per } s \rightarrow 0$$

che è quindi limitata su $]0, c[$ ed è sommabile.

Di conseguenza, per il lemma di Riemann-Lebesgue, (1.3) è verificata e, dato che i passaggi fatti e le conclusioni tratte valgono $\forall c$, allora $\exists c$ per cui vale l'equivalenza.

□

Definizione 1.5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che esistono finiti i limiti destro e sinistro, cioè $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ e $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$. Si definisce

$$f^*(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Teorema 1.2.3 (di Dini). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$. Se esiste finito $f^*(t)$ e se $\exists c \in]0, \pi[$ tale che $s \mapsto (m(f, t, s) - f^*(t)) \frac{1}{s}$ sia sommabile su $]0, c[$, allora la serie di Fourier di f converge puntualmente in t a $f^*(t)$.*

Inoltre se f è continua in $t \in \mathbb{R}$, allora $f^(t) = f(t)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dal lemma di Riemann-Lebesgue applicato a

$$\int_0^c (m(f, t, s) - f^*(t)) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds$$

che è sommabile per ipotesi.

□

Teorema 1.2.4 (Criterio di Hölder). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Se $\exists M, c > 0$ tali che*

$$|f(t+s) - f(t+\sigma)| \leq M|s - \sigma|^\alpha$$

con $\alpha \in]0, 1]$, $\forall s, \sigma \in]0, c[$ e $\forall s, \sigma \in]-c, 0[$, allora esiste $f^(t)$ e la serie di Fourier di f converge puntualmente a $f^*(t)$ in t .*

Dimostrazione. Poichè, per ipotesi $|f(t+s) - f(t+\sigma)| \leq M|s - \sigma|^\alpha$, esistono finiti

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} f(t+s) \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} f(t+s)$$

Esiste quindi

$$f^*(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2}$$

e risulta

$$f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Inoltre sempre per la stessa ipotesi

$$|f(t+s) - f(t^+)| = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |f(t+s) - f(t+\sigma)| \leq \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} M|s - \sigma|^\alpha = Ms^\alpha$$

per $0 < s < c$. Analogamente,

$$|f(t-s) - f(t^-)| \leq Ms^\alpha \quad \text{per } 0 < s < c.$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{|f(t+s) + f(t-s) - 2f^*(t)|}{s} &\leq \frac{|f(t+s) - f(t^+)|}{s} + \frac{|f(t-s) - f(t^-)|}{s} \\ &\leq \frac{2M}{s^{1-\alpha}} \quad \text{per } 0 < s < c \end{aligned}$$

Poichè $\alpha > 0$, la funzione

$$s \mapsto \frac{1}{s^{1-\alpha}}$$

è sommabile in $]0, c[$. Si ha quindi la tesi, grazie al teorema 1.2.3.

□

Corollario 1.2.5. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Si suppone che per un opportuno $c > 0$ f risulti derivabile, con derivata limitata, in $]t - c, t + c[\setminus \{t\}$. Allora:*

1. esistono in \mathbb{R} $f(t^+)$ e $f(t^-)$
2. la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Dimostrazione. Per il teorema del valore medio, $\forall s, \tau \in]t, t + c[\exists \sigma \in (s, \tau)$ tale che $|f(s) - f(\tau)| = |f'(\sigma)||s - \tau|$. Inoltre, poichè f' è limitata per ipotesi, $\exists M > 0$ tale che $|f'(\sigma)| \leq M \forall \sigma \in]t - c, t + c[\setminus \{t\}$. Si ha quindi

$$|f(s) - f(\tau)| \leq M|t - \tau| \quad \forall s, \tau \in]t, t + c[.$$

Analogamente si ha

$$|f(s) - f(\tau)| \leq M|t - \tau| \quad \forall s, \tau \in]t - c, t[.$$

La tesi segue perciò dal teorema 1.2.4.

□

Definizione 1.6. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$ con $t_k \leq t_{k+1}$ e sia $v(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|$. f si dice a variazione totale limitata su $[a, b]$ se $\sup_{\sigma} v(f, \sigma) < +\infty$

Teorema 1.2.6 (di Jordan). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(] - \pi, \pi[)$ e a variazione totale limitata su $[-\pi, \pi]$. Allora $\exists f^*(t)$ e la serie di Fourier di f converge puntualmente a $f^*(t)$ in $t \in \mathbb{R}$.*

La dimostrazione di questo teorema può essere trovata in [1, pp.178-180]. Segue ora un criterio, riportato qui senza dimostrazione, per studiare la convergenza uniforme delle serie di Fourier.

Definizione 1.7. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\exists f'$ sommabile quasi dappertutto. Si dice che f è assolutamente continua se

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \quad \forall x \in [a, b]$$

Teorema 1.2.7. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, assolutamente continua con f' derivata debole che esiste quasi dappertutto, $f' \in L^2(] - \pi, \pi[)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f .*

Capitolo 2

Effetto Gibbs

In questo capitolo viene presentato il fenomeno di Gibbs per una funzione nota, la funzione onda quadra. Il risultato verrà poi generalizzato ad una qualunque funzione periodica, regolare a tratti, che presenta discontinuità di prima specie.

2.1 Un primo esempio: la funzione onda quadra

Si considera la serie di Fourier associata alla funzione onda quadra: si mostra l'esistenza del fenomeno di Gibbs grazie al calcolo dei massimi e dei minimi e dell'andamento della serie stessa.

2.1.1 Serie di Fourier della funzione onda quadra

Si definisce la funzione onda quadra nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ come segue:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = -\pi \\ -1 & \text{se } t \in]-\pi, 0[\\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t \in]0, \pi[\\ 0 & \text{se } t = \pi \end{cases}$$

Questa funzione è regolare a tratti nell'intervallo considerato ed è estendibile a \mathbb{R} .

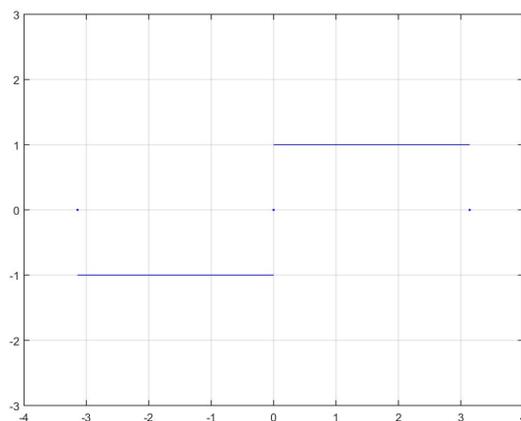


Figura 2.1: Grafico della funzione onda quadra nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

Poichè f è sommabile in $[-\pi, \pi]$, ha senso calcolare i coefficienti di Fourier associati alla funzione.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

in quanto la funzione integranda è dispari e definita in un intervallo simmetrico rispetto all'origine.

Invece per i b_k , sfruttando la parità della funzione integranda, si ha

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ktdt = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k)$$

Si ha dunque

$$S_n(f, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin kt \quad (2.1)$$

Sia $t \in [-\delta, \delta]$ con $\delta > 0$, si vuole ora confrontare il salto della funzione onda quadra con quello della serie di Fourier che sono rispettivamente $|\max_{[-\delta, \delta]} f(t) - \min_{[-\delta, \delta]} f(t)| = 2$ e $|\max_{[-\delta, \delta]} S_n(f, t) - \min_{[-\delta, \delta]} S_n(f, t)|$ il cui calcolo segue dal calcolo dei massimi e minimi di $S_n(f, t)$.

2.1.2 Calcolo dei massimi e dei minimi di $S_n(f, t)$

Calcolando la derivata dell'espressione (2.1) si ottiene

$$S'_n(f, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^k}{k} k \cos kt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{2n+1} \cos kt$$

poichè i termini pari si eliminano.

Si considera in particolare il termine $S_{2n+1}(f, t)$ nella cui sommatoria si fa il cambio di variabile $k' = 2k + 1$. Quindi

$$S'_{2n+1}(f, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \cos((2k+1)t) = \frac{2 \sin(2(n+1)t)}{\pi \sin t} \quad t \neq k\pi$$

Infatti usando le formule di Prostaferesi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos((2k+1)t) \sin t &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} (\sin((2k+2)t) + \sin(-2kt)) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} (\sin((2k+2)t) - \sin 2kt) = \\ &= \frac{1}{2} \sin(2(n+1)t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si pone $S'_{2n+1}(f, t) = 0$ per poter trovare i punti di massimo e minimo. Questa equazione è verificata se e solo se

$$\sin(2(n+1)t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t(n+1) = 0 + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{k\pi}{2(n+1)}$$

Si studia ora la concavità di $S_{2n+1}(f, t)$, calcolando la derivata seconda nei punti precedentemente trovati, in modo da poter distinguere i punti di massimo da quelli di minimo

$$S''_{2n+1}(f, t) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2(n+1) \cos(2(n+1)t) \sin t - \sin(2(n+1)t) \cos t}{\sin^2 t} \right)$$

Perciò per $t = \frac{k\pi}{2(n+1)}$ e per $h \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} S''_{2n+1} \left(f, \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) &= \frac{2}{\pi} \left(2(n+1) \cos k\pi \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}} + \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \left(\sin k\pi \cos \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}} \end{aligned}$$

Dunque se k è pari

$$S''_{2n+1} \left(f, \frac{2h\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \left(2(n+1) \sin \frac{h\pi}{n+1} \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{h\pi}{n+1}} > 0$$

mentre se k è dispari

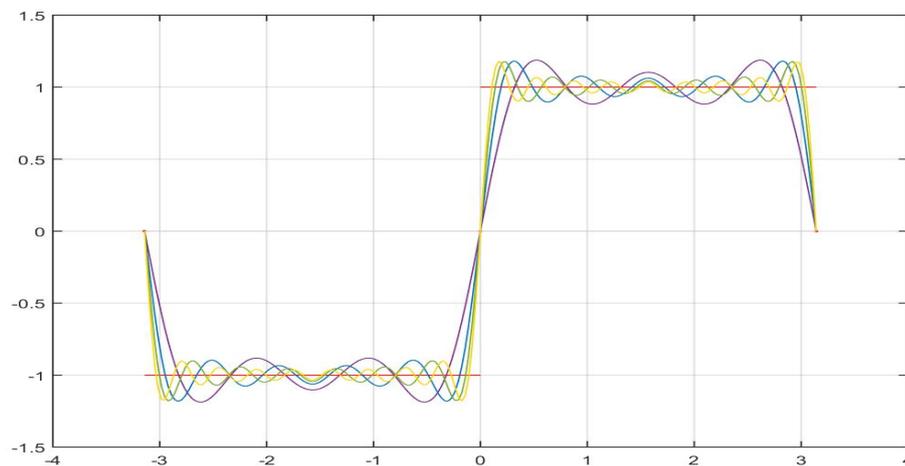
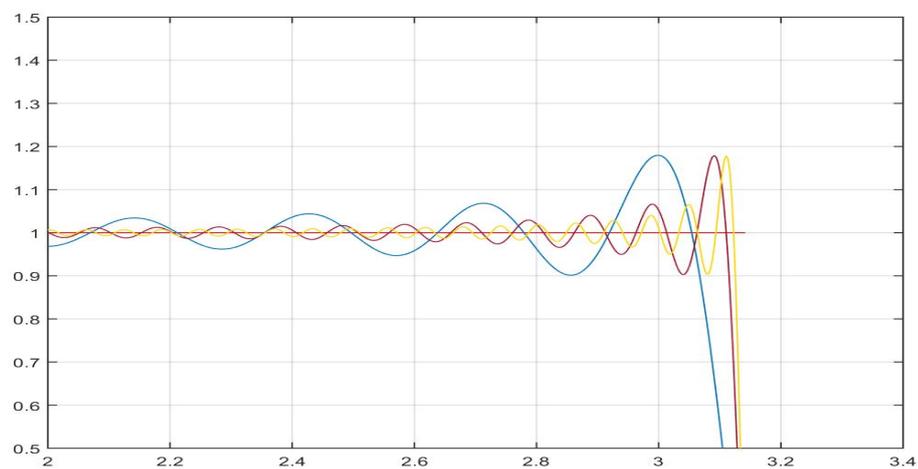
$$S''_{2n+1} \left(f, \frac{(2h+1)\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \left(-2(n+1) \sin \frac{(2h+1)\pi}{2(n+1)} \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{(2h+1)\pi}{2(n+1)}} < 0$$

Si può quindi concludere che $t = \frac{k\pi}{2(n+1)}$ è un punto di minimo per k pari ed è un punto di massimo per k dispari.

2.1.3 Calcolo del salto di $S_{2n+1}(f, t)$

Per il teorema 1.2.6 si può affermare che per $n \rightarrow +\infty$ $S_{2n+1}(f, t)$ deve convergere puntualmente alla funzione f nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Tuttavia come si osserva nella figura (2.2), il valore del primo massimo a destra dell'origine tende ad un valore costante maggiore di 1, mentre il primo minimo a sinistra dell'origine tende ad un valore minore di -1. Perciò, approssimando la funzione f con il relativo polinomio di Fourier di grado n , per quanto grande n sia, il salto della funzione risulta essere maggiore di 2.

Questo è l'effetto Gibbs ed è dovuto al fatto che nei punti di discontinuità della funzione onda quadra non c'è convergenza uniforme, ma solo puntuale.

Figura 2.2: Effetto Gibbs per $n = 2, 4, 6, 8$ Figura 2.3: Particolare dell'effetto Gibbs per $n = 10, 30, 50$

Si verifica di seguito ciò che si è notato dalle figure.

Prima di tutto si enuncia il seguente lemma, usato per scrivere $S_{2n+1}(f, x)$ con un'espressione integrale.

Lemma 2.1.1. $\forall k = 1, 2, \dots$ e $\forall x \notin \mathbb{Z}$ vale

$$\sum_{k=1}^n \cos((2k+1)t) = \frac{\sin 2nt}{2 \sin t}$$

Dimostrazione. Riprendendo i calcoli (2.2) si ottiene

$$\sum_{k=1}^n \cos((2k+1)t) = \frac{\sin 2nt}{2 \sin t}$$

□

Perciò si può scrivere

$$S_{2n+1}(f, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$$

Si osserva ora che l'ascissa del primo punto di minimo a sinistra dell'origine è $x_m^{(n)} = -\frac{\pi}{2n}$ e l'ordinata è $y_m^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{-\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$, invece l'ascissa del primo punto di massimo a destra dell'origine è $x_M^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$ e l'ordinata è $y_M^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$.

Calcolando il valore limite per $n \rightarrow +\infty$ di $y_M^{(n)}$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_M^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin 2nt \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt \right) \end{aligned}$$

dove la funzione $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ è limitata nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e continua nell'intervallo $]0, \pi]$.

Utilizzando il seguente sviluppo di Taylor della funzione seno

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

si ha

$$t \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+2}$$

Dunque, nell'intorno di 0 si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{-t^3}{3!} + o(t^3)}{t^2 + o(t^3)} = 0$$

e

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin 2nt \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left| \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right| dt \leq \frac{c}{2n} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

quindi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_M^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{t} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.18 \end{aligned}$$

avendo utilizzato nella terza uguaglianza la seguente formula, derivata sempre dallo sviluppo di Taylor della funzione seno

$$\frac{\sin t}{t} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k}$$

Analogamente, effettuando un cambio di variabile, si calcola il valore limite per $n \rightarrow +\infty$ di $y_m^{(n)}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_m^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{-\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} y_M^{(n)} = \\ &= - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx -1.18 \end{aligned}$$

In particolare, si può stimare l'errore che si commette approssimando f con la serie di Fourier: poichè nell'intorno dell'origine il salto della funzione f è 2 e quello della serie di Fourier è $2 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_M^{(n)} \approx 2.36$, si ha un errore relativo

del 18%. In altre parole, il salto della funzione viene aumentato di un fattore $\frac{2}{\pi}Si(\pi)$ dove $Si(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$ è la costante di Wilbraham-Gibbs. Oltre ad aver dimostrato che il salto della serie di Fourier nell'intorno dell'origine è maggiore del salto della funzione f nello stesso intorno, si è anche fatto vedere che all'aumentare di n , il fenomeno di sovraoscillazione non scompare, nonostante il picco iniziale si regolarizzi.

2.2 Generalizzazione a funzioni con discontinuità di prima specie in un punto generico

In questa sezione si dimostra che l'effetto Gibbs non è presente solo nelle funzioni periodiche con una discontinuità di prima specie nell'origine, ma si manifesta in tutte le funzioni periodiche, regolari a tratti che hanno discontinuità di prima specie in un punto generico.

Si enuncia innanzitutto un lemma che verrà usato per dimostrare un teorema riguardante le successioni uniformemente convergenti di funzioni continue.

Lemma 2.2.1. *Sia $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$ tale che nello stesso intervallo converga uniformemente ad una funzione g . Sia $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione nell'intervallo $[a, b]$ che converge a c . Allora la successione $(g_n(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge e vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(c_n) = g(c)$$

Dimostrazione. Per ipotesi, si ha che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > n_\epsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

Poichè vale $\forall x \in [a, b]$, si ha in particolare $|g_n(c) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dato che $c_n \rightarrow c$ e g è continua in quanto limite uniforme di funzioni continue,

allora

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\epsilon \in \mathbb{N} : |g(c_n) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > \bar{n}_\epsilon$$

Sia $\bar{n} > \max\{\bar{n}_\epsilon, n_\epsilon\}$, allora

$$|g_n(c_n) - g(c)| \leq |g_n(c_n) - g(c_n)| + |g(c_n) - g(c)| < \epsilon \quad \forall n > \bar{n}$$

□

Teorema 2.2.2. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti, $2L$ -periodica. Sia $x = x_0$ punto di discontinuità di prima specie, con un salto $\Delta f(x_0) := f(x_0^+) - f(x_0^-)$. Allora, posto $x_n = \frac{L}{2n}$, vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}(f, x_0 \pm x_n) = f^*(x_0) \pm \frac{\Delta f(x_0)}{\pi} Si(\pi)$$

Inoltre, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1}(f, x_0 + x_n) - S_{2n+1}(f, x_0 - x_n)) = \frac{2\Delta f(x_0)}{\pi} Si(\pi)$$

Dimostrazione. Ridefinendo il valore di $f(x_0)$, non è limitativo supporre $f(x_0) = f^*(x_0)$.

Sia

$$\tilde{q} := q \left(\frac{x - x_0}{L} \pi \right)$$

dove q è la funzione onda quadra definita nella sezione precedente, mentre \tilde{q} è l'onda quadra deformata e traslata in modo tale da avere discontinuità in x_0 e periodo $2L$.

Si definisce

$$\phi(x) := f(x) - f^*(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{2} \tilde{q}(x)$$

che è regolare a tratti, $2L$ -periodica e continua in x_0 :

$$\phi(x_0) = f(x_0) - f^*(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{2} \tilde{q}(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0^+} \phi(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{2f(x) - f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2} - \frac{\Delta f(x_0)}{2} \tilde{q}(x) = \\
&= \frac{\Delta f(x_0)}{2} - \frac{\Delta f(x_0)}{2} = 0 \\
\lim_{x \rightarrow x_0^-} \phi(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{2f(x) - f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2} - \frac{\Delta f(x_0)}{2} \tilde{q}(x) = \\
&= -\frac{\Delta f(x_0)}{2} - (-1) \frac{\Delta f(x_0)}{2} = 0
\end{aligned}$$

Fissato un intervallo $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ che non contiene altre discontinuità oltre a x_0 , ϕ è continua in I e si ha che $S_n(\phi)$ converge uniformemente a ϕ in I . Infatti, una condizione sufficiente affinché la serie di Fourier di una funzione 2π -periodica converga uniformemente a f è che la funzione sia continua e regolare a tratti.

Sia $x_n = \frac{L}{2n}$. Poichè vale l'uguaglianza $S_{2n+1}(\tilde{q}, x_0 \pm x_n) = S_{2n+1}(q, \frac{\pm x_n}{L}\pi)$, si può scrivere

$$S_{2n+1}(f, x_0 \pm x_n) = S_{2n+1}(\phi, x_0 \pm x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} S_{2n+1}\left(q, \frac{\pm x_n}{L}\pi\right)$$

Per il lemma 2.2.1, per $x_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e per il comportamento di $S_{2n+1}(q)$ in un intorno dell'origine, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}(f, x_0 \pm x_n) &= \phi(x_0) + f^*(x_0) \pm \frac{2\Delta f(x_0)}{2\pi} Si(\pi) = \\
&= f^*(x_0) \pm \frac{\Delta f(x_0)}{\pi} Si(\pi)
\end{aligned}$$

Si è quindi dimostrato il primo risultato, da cui segue immediatamente il secondo

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1}(f, x_0 + x_n) - S_{2n+1}(f, x_0 - x_n)) = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{\pi} Si(\pi) - f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{\pi} Si(\pi) \right) = \\
&= \Delta f(x_0) \frac{2}{\pi} Si(\pi)
\end{aligned}$$

□

Il teorema 2.2.2 dunque dimostra la presenza dell'effetto Gibbs in una qualsiasi serie di Fourier di una funzione con discontinuità di prima specie.

Dimostra inoltre che approssimando il salto della funzione con $S_{2n+1}(f)$ si commette un errore pari circa al 18% del salto.

2.3 L'onda a dente di sega

Si definisce l'onda a dente di sega che è un altro esempio in cui si presenta l'effetto Gibbs:

$$s(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in]-\pi, \pi[\\ 0 & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$$

il cui grafico è rappresentato nella figura (2.4).

Questa funzione presenta punti di discontinuità di prima specie in $x = \pm\pi$ perciò si presuppone, per quanto visto in precedenza, che si verifichi il fenomeno di sovraoscillazione in tali punti.

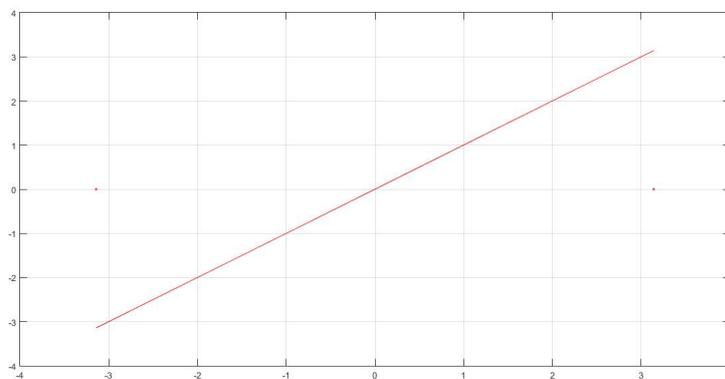
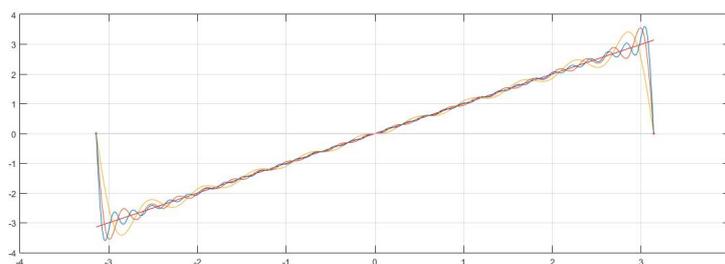
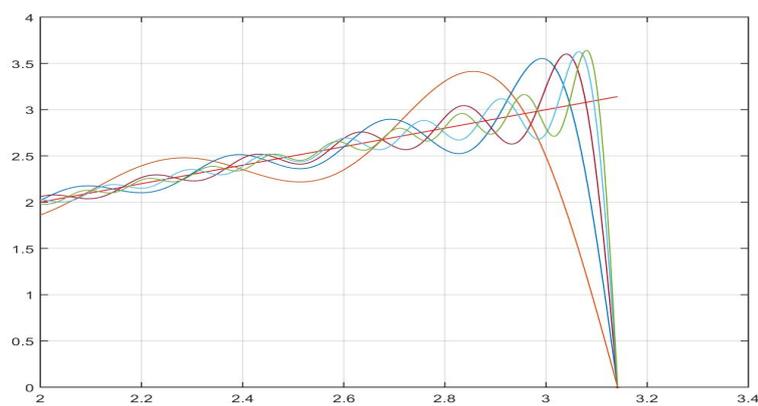
Per verificare ciò, si calcolano prima di tutto i coefficienti di Fourier di s :

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} s(t) dt = 0 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos kt dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt dt = -\frac{2 \cos k\pi}{k} = -\frac{2(-1)^k}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier associata a s è

$$S_n(s) = -2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sin kt}{k}$$

Come si può notare dalla figura (2.5), anche per questa funzione è verificato il fenomeno di Gibbs.

Figura 2.4: Grafico della funzione $s(x)$ Figura 2.5: Effetto Gibbs per l'onda a dente di sega per $n = 10, 20, 30$ Figura 2.6: Particolare dell'effetto Gibbs per l'onda a dente di sega per $n = 10, 20, 30, 40, 50$

Capitolo 3

Le somme di Fejér

Per risolvere il fenomeno di Gibbs si definisce un altro tipo di convergenza e si utilizzano i polinomi di Fejér. Si estende quindi la definizione di convergenza secondo Cesàro delle serie numeriche alle serie di funzioni e si mostra come le somme di Fejér possano risolvere il fenomeno.

3.1 Convergenza secondo Cesàro

Definizione 3.1. Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ la successione delle somme parziali e $\sigma_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n}$ la media aritmetica. Si dice che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge secondo Cesàro a $\sigma \in \mathbb{R}$ se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \sigma$.

Proposizione 3.1.1. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Se la serie converge a $s \in \mathbb{R}$ allora la serie converge secondo Cesàro allo stesso numero s .

Dimostrazione. Per definizione di convergenza secondo Cauchy si ha

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che } |S_n - s| < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon$$

quindi

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_k - s| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_\epsilon} |S_k - s| + \sum_{k=n_\epsilon+1}^n |S_k - s| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{n} (M_\epsilon n_\epsilon + (n - n_\epsilon)\epsilon) \end{aligned}$$

dove $M_\epsilon = \max\{|S_1 - s|, \dots, |S_{n_\epsilon} - s|\}$.

Scegliendo $n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{M_\epsilon n_\epsilon}{n} < \epsilon \quad \forall n > n'_\epsilon$, si ottiene la tesi. □

Non vale invece il viceversa come si può verificare con un semplice esempio:

Esempio 3.1. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ per $x \neq 1$

Si calcolano S_n e σ_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \dots + S_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{1 - x} \left(n - x \frac{1 - x^n}{1 - x} \right)$$

Per $x = -1$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è irregolare per Cauchy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \frac{1 - (-1)^n}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Estendendo la definizione di convergenza secondo Cesàro alle serie di funzioni, nel caso particolare delle serie di Fourier si ottiene

$$\sigma_n(f, t) = \frac{S_0(f, t) + \dots + S_{n-1}(f, t)}{n}$$

dove f è 2π -periodica, sommabile in $] -\pi, \pi[$ e $\sigma_n(f, t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f, t)$ è il polinomio di Fejér di f .

Come i polinomi di Fourier, anche i polinomi di Fejér hanno una rappresentazione integrale e per trovarla si definisce il nucleo di Fejér.

Definizione 3.2. Sia $s \in \mathbb{R}$ si definisce nucleo di Fejér l'espressione

$$F_n(s) = \frac{1}{n \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right)$$

Osservazione 1. Per $s \in] - \pi, \pi[$ il nucleo di Fejér può essere scritto come

$$F_n(s) = \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}}$$

Dimostrazione. L'osservazione si dimostra utilizzando le formule di Prostaferesi:

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right) \sin \frac{s}{2} = \\ &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (\cos ks - \cos((k+1)s)) = \\ &= \frac{1}{2n \sin^2 \frac{s}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \cos ks - \sum_{k=1}^n \cos ks \right) = \\ &= \frac{1}{2n \sin^2 \frac{s}{2}} (\cos 0 - \cos ns) = \\ &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \frac{\cos \left(\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2} \right) s \right) - \cos \left(\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} \right) s \right)}{2} = \\ &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \left(\sin^2 \left(\frac{ns}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.1.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, f sommabile in $] - \pi, \pi[$. Siano $S_n(f, t)$ il polinomio di Fourier di f nel punto $t \in] - \pi, \pi[$ e $\sigma_n(f, t) = \frac{S_0(f, t) + \dots + S_{n-1}(f, t)}{n}$. Allora vale

$$\sigma_n(f, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

Dimostrazione. Per la proposizione 1.1.2 si ha

$$S_n(f, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right)}{\sin \frac{s}{2}} ds$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\sigma_n(f, t) &= \frac{S_0(f, t) + \cdots + S_{n-1}(f, t)}{n} = \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2 \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) s \right) ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds\end{aligned}$$

□

La proposizione appena dimostrata garantisce la scrittura in forma integrale del polinomio di Fejér. Si elencano ora alcune proprietà del nucleo di Fejér:

1. $F_n \geq 0$

Dimostrazione. La proprietà risulta evidente se si considera la forma chiusa del nucleo di Fejér $F_n(s) = \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}}$

□

2. $\int_0^\pi F_n(s) ds = \pi$

Dimostrazione. Sia $f \equiv 1$, i coefficienti di Fourier di f sono $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0 \quad \forall k \geq 1$. Vale quindi $S(1, t) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sigma_n(1, t) = 1$. Perciò

$$\int_0^\pi F_n(s) ds = \pi \sigma_n(1, t) = \pi$$

□

3. F_n è pari

Dimostrazione.

$$F_n(-s) = \frac{\sin^2 \left(-\frac{ns}{2} \right)}{n \sin^2 \left(-\frac{s}{2} \right)} = \frac{\left(-\sin \frac{ns}{2} \right)^2}{n \left(-\sin \frac{s}{2} \right)^2} = F_n(s)$$

□

4. $\forall \delta > 0$, $F_n(f, t)$ converge uniformemente a 0 per $\delta \leq |t| \leq \pi$

Dimostrazione. Per $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $\sin y \geq \frac{2}{\pi}y$. Di conseguenza

$$0 \leq F_n(f, t) \leq \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \leq \frac{\pi^2}{n\delta^2}$$

□

I nuclei di Fejér hanno somiglianze con quelli di Dirichlet, ma ciò che permette di determinare il diverso comportamento di σ_n e S_n sono le differenze tra i due nuclei, in particolare le proprietà 1 e 4, che garantiscono anche la validità del teorema che segue.

Teorema 3.1.3 (di Fejér). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, $f \in L^1(\cdot - \pi, \pi]$. Sia $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione delle somme di Fejér. Se $\exists f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$, allora $\sigma_n(f, t)$ converge a $f^*(t)$ per $n \rightarrow +\infty$. Inoltre, se f è continua in $[-\pi, \pi]$, allora $\sigma_n(f, t)$ converge uniformemente a f per $n \rightarrow +\infty$*

Dimostrazione. Supponendo esista $f^*(t)$ e utilizzando la proprietà 2 si ricava

$$\sigma_n(f, t) - f^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) F_n(s) ds$$

Sia $f_t(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)$, tale funzione converge a 0 per $s \rightarrow 0^+$, cioè

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon, t) > 0 \quad \text{tale che } |f_t(s)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall s \in]0, \delta[\quad (3.1)$$

Per la proprietà 1 del nucleo di Fejér, vale

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f, t) - f^*(t)| &\leq \int_0^\pi |f_t(s)| F_n(s) ds = \\ &= \int_0^\delta |f_t(s)| F_n(s) ds + \int_\delta^\pi |f_t(s)| F_n(s) ds = \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Studiando separatamente I_1 e I_2 , si ha

$$I_1 \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^\pi \frac{F_n(s)}{\pi} ds = \frac{\epsilon}{2} \quad \text{per (3.1)}$$

$$I_2 \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_\delta^\pi |f_t(s)| ds \leq \frac{\int_0^\pi |f_t(s)| ds}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Sia $\bar{n} = \bar{n}(\epsilon, t)$ tale che

$$\frac{\int_0^\pi |f_t(s)| ds}{\bar{n} \pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

allora

$$|\sigma_n(f, t) - f^*(t)| \leq I_1 + I_2 \leq \epsilon \quad \forall n > \bar{n}$$

È così dimostrata la prima tesi.

Sia f continua in $[-\pi, \pi]$ che è un compatto di \mathbb{R} , quindi per il teorema di Heine-Cantor f è uniformemente continua nello stesso intervallo:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) \quad |f_t(s)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall s \in]0, \delta[\quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Analogamente a prima, si ottiene

$$|\sigma_n(f, t) - f^*(t)| \leq \int_0^\delta |f_t(s)| F_n(s) ds + \int_\delta^\pi |f_t(s)| F_n(s) ds = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^\pi \frac{F_n(s)}{\pi} ds = \frac{\epsilon}{2}$$

Poichè f continua, $\int_\delta^\pi |f_t(s)| ds \leq 2 \int_0^\pi \max |f|$; di conseguenza

$$I_2 \leq \frac{1}{n \pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} 2 \int_0^\pi \max_{[0, \pi]} |f| ds \rightarrow 0$$

Sia $\bar{n} = \bar{n}(\epsilon)$ tale che

$$\frac{\max |f|}{\bar{n} \pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Quindi $\forall n > \bar{n}$

$$\sup_{t \in [0, \pi]} |\sigma_n(f, t) - f^*(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\bar{n} \pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} 2 \pi \max_{[0, \pi]} |f| < \epsilon$$

□

3.2 Eliminazione dell'effetto Gibbs

Proposizione 3.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica e sommabile in $]-\pi, \pi[$. Se esistono $c, C \in \mathbb{R}$ tali che $c \leq f(t) \leq C$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$, allora*

$$c \leq \sigma_n(f, t) \leq C \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Dimostrazione. Sfruttando la proposizione 3.1.2 e l'ipotesi $c \leq f(t) \leq C$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$, risulta

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2c}{2} F_n(s) ds \leq \sigma_n(f, t) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2C}{2} F_n(s) ds$$

La tesi segue quindi dalla proprietà 2 del nucleo di Fejér. □

Proposizione 3.2.2. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti, $2L$ -periodica. Sia x_0 un punto di discontinuità di prima specie per f con salto $|\Delta f(x_0)|$ e sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali convergente a x_0 per $n \rightarrow +\infty$. Allora l'effetto Gibbs non si presenta e risulta*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) \leq |\Delta f(x_0)|$$

Dimostrazione. Riprendendo le notazioni del teorema 2.2.2 e sostituendo i polinomi di Fourier con i polinomi di Fejér ne segue che

$$\sigma_n(f, x_0 \pm x_n) = \sigma_n(\phi, x_0 \pm x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \sigma_n\left(q, \frac{\pm x_n}{L} \pi\right)$$

Per l'onda quadra vale $-1 \leq q(t) \leq 1$, quindi per la proposizione precedente $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha $-1 \leq \sigma_n(q, t) \leq 1$. Grazie al teorema di Fejér, ponendo $\tilde{x} = x_n - x_0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\phi, x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n\left(q, \frac{\tilde{x}}{2} \pi\right) \geq \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n\left(q, \frac{\tilde{x}}{2} \pi\right) \geq \\ &\geq \phi(x_0) + f^*(x_0) + (-1) \frac{\Delta f(x_0)}{2} = \\ &= f^*(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\phi, x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n\left(q, \frac{\tilde{x}}{2}\pi\right) \leq \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n\left(q, \frac{\tilde{x}}{2}\pi\right) \leq \\
 &\leq \phi(x_0) + f^*(x_0) + 1 \frac{\Delta f(x_0)}{2} = \\
 &= f^*(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2}
 \end{aligned}$$

Segue che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, x_n) \leq |\Delta f(x_0)|$$

□

Per concludere vengono riportati dei grafici in cui si mostra il comportamento delle somme di Fejér negli intorno dei punti di discontinuità di prima specie. Si nota in particolare che utilizzando tali somme, non si presenta il problema di sovraoscillazione dovuto all'effetto Gibbs.

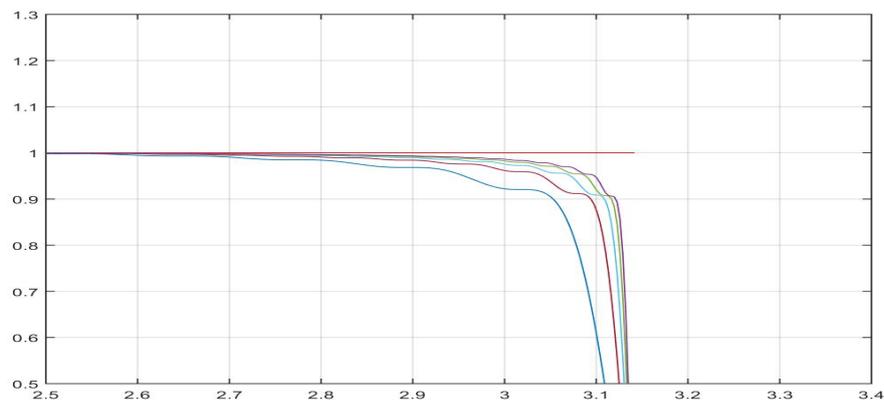


Figura 3.1: Particolare delle somme di Fejér della funzione onda quadra per $n = 50, 100, 150, 200, 250$

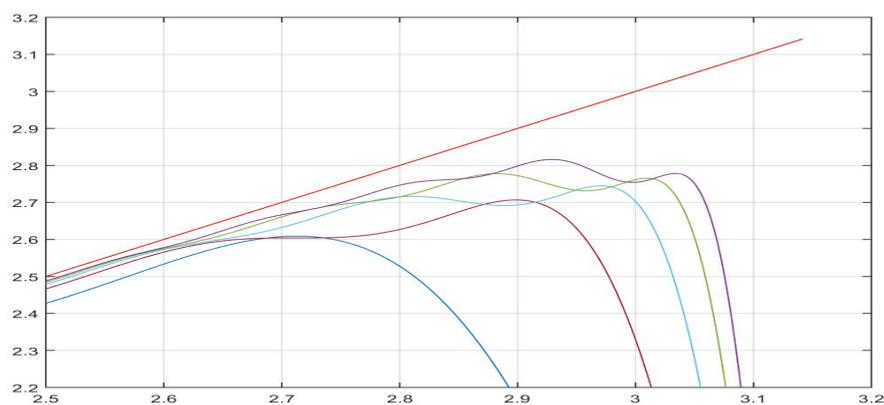


Figura 3.2: Particolare delle somme di Fejér dell'onda a dente di sega per $n = 10, 20, 30, 40, 50$

Bibliografia

- [1] Lanconelli, Ermanno, Lezioni di analisi matematica 2, vol.2, Pitagora Editrice, Bologna, 1997
- [2] Hewitt, Edwin e Hewitt, Robert E., The Gibbs-Wilbraham Phenomenon: An Episode in Fourier Analysis, archive for History of Exact Sciences, vol.21, Springer-Verlag, 1979
- [3] Apostol, Tom Mike, Mathematical analysis, Addison Wesley, Massachusetts, 1974
- [4] Barozzi, Giulio Cesare, Matematica per l'ingegneria dell'informazione, Zanichelli, Bologna, 2004
- [5] Carslaw, H.S., A trigonometrical sum and the Gibbs' phenomenon in Fourier's series, American Journal of Mathematics, vol.39, No.2, The Johns Hopkins University Press, Aprile 1917
- [6] Guidi, Chiara, Tesi di laurea triennale in Complementi di Analisi, Il fenomeno di Gibbs, I sessione a.a. 2012/2013
- [7] Pozzi, Gianni A., Cenni sulle serie di Fourier, <http://www.dimat.unipv.it/giulio/linkedmaterial/camb08/fourier-pozzi.pdf>, 2007

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto la professoressa Montanari per la disponibilità mostratami.

Un ringraziamento speciale va alla mia famiglia: grazie papà per aver sostenuto il mio progetto sin dalle medie e per aver “corretto” la tesi; grazie mamma per aver rispettato il mio silenzio senza avermelo fatto pesare; grazie Ale per i consigli dati e per essermi sempre stata vicino; grazie Davide per le chiacchierate matematiche fatte in questi anni. Grazie soprattutto per avermi spronato e sostenuto in questo percorso e per aver creduto in me.

Ringrazio inoltre “le mate” per aver trascorso questi bellissimi anni insieme e per aver affrontato con me le varie difficoltà, ma desidero ringraziare in modo particolare Francesca per aver fatto rinascere in me la voglia di scoprire e di approfondire.

Infine un grazie a tutte le persone che mi sono state vicine in questo periodo, in particolare Matteo, Maria Rosa, Miriam, Carlotta e Beatrice.