ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI**
**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

# Una proposta didattica sulla teoria della relatività ristretta: un approccio geometrico.

**Tesi di laurea in Didattica della matematica**

**Relatore:**
**Prof.ssa**
**Alessia Cattabriga**

**Presentata da:**
**Silvia Rinaldi**

**Sessione primaverile**
**Anno Accademico 2016/2017**

*Alla mia famiglia*

# *Introduzione*

L'idea di sviluppare un elaborato di tesi riguardo una proposta didattica sulla teoria della relatività ristretta nasce da un interesse personale nei confronti della didattica della matematica e della fisica ed in particolare dal fascino esercitato dalla teoria di Einstein, come esempio didattico d'interdisciplinarietà tra fisica e matematica. Questa teoria si presta a connettere le due discipline, infatti, ampliando il punto di vista fisico con quello matematico, se ne arricchisce la comprensione. Tutto ciò, da una prospettiva didattica, offre una possibilità in linea con le Indicazioni Nazionali che è spesso trascurata dai libri di testo della scuola secondaria superiore, dove usualmente si segue un approccio fisico che parte dalle trasformazioni che lasciano invariate le equazioni di Maxwell (H.A. Lorentz 1904) e passa all'analisi della simultaneità e ai due postulati della relatività ristretta di Einstein (1905), senza approfondire il punto di vista dei matematici a lui contemporanei, stravolgendo quindi ciò che accadde storicamente. Quello che cercherò di fare all'interno di questo elaborato è fornire un approccio storico-geometrico alla teoria della relatività ristretta che parta dalla struttura di gruppo delle trasformazioni tra sistemi inerziali (J.H. Poincaré 1904) per arrivare al concetto di spazio-tempo e alle trasformazioni che lasciano invariato il cono di luce (H. Minkowski 1908).

All'interno del primo capitolo andrò ad indagare i motivi che giustificano un approccio storico-geometrico, soffermandomi inizialmente sul legame epistemologico esistente tra matematica e fisica, per poi osservare come la storia possa fungere da ponte tra le due discipline e individuare infine i temi chiave dell'integrazione della storia nell'insegnamento della matematica e della fisica. Per fare ciò analizzerò l'articolo di C. Tzanakis [14], il quale fungerà anche da guida per quanto riguarda le indicazioni metodologiche nei capitoli seguenti.

Nel secondo capitolo fornirò una contestualizzazione storica. Dapprima andrò ad indagare l'epistemologia fisico-geometrica di J.H. Poincaré seguendo [12] e l'introduzione di [11]. Passerò poi ad un breve excursus delle conoscenze fisiche e matematiche prima della fisica moderna, per concludere con la nascita della teoria della relatività speciale attraverso il postulato di relatività.

Nell'ultimo capitolo, cuore della presente tesi, svilupperò la trattazione didattica vera e propria. In primo luogo parlerò dei prerequisiti necessari per questo approccio geometrico, poi dell'esperimento di Michelson-Morley per arrivare alle trasformazioni di Lorentz e al relativo gruppo di Lorentz. In seguito introdurrò la pseudodistanza e lo spaziotempo di Minkowski per rappresentare geometricamente le trasformazioni precedentemente ottenute. Infine andrò a verificare gli effetti relativistici sui diagrammi di Minkowski. Il percorso proposto prende spunto da una rivisitazione in chiave didattica dei lavori di H.A. Lorentz [4], J.H. Poincaré [7] ed H. Minkowski [5] inserendosi naturalmente in un quadro storico che fa da sfondo all'articolazione dei contenuti e che, a discrezione del docente, può essere reso più o meno esplicito durante la trattazione degli argomenti.

Concludo questo prologo con le parole di Ubaldo Sanzo dall'introduzione della sezione ottava riguardo il postulato di relatività di [11]. Egli sottolinea l'importanza rivestita dalla figura di Jules Henri Poincaré, che, a mio avviso, non può essere ignorata didatticamente, quantomeno al fine di rispettare la veridicità storica dei primi anni del 1900. Riferendosi all'articolo di J.H. Poincaré "Sulla dinamica dell'elettrone", egli commenta così:

"*Spesso e da più parti è stato osservato che, in questo scritto più che in altri, Poincaré mette a nudo i propri limiti sul tanto sbandierato postulato di relatività. In particolare, nel punto in cui Poincaré considera come semplice ipotesi la deformazione che un elettrone subisce a causa della propria altissima velocità. In altre parole, si rimprovera a Poincaré di non considerare il postulato di relatività come un risultato sperimentale ma come un puro e semplice principio teorico. Queste critiche non reggono di fronte ad un'attenta analisi storica per un duplice ordine di motivi. In primo luogo esse costituiscono il risultato del senno di poi: considerano la relatività ristretta come il prologo necessario della relatività generale. Una tale affermazione è storicamente priva di significato: basterebbe ricordare che i dieci anni che separano una teoria dall'altra sono per Einstein fra i più tormentati della sua carriera di studioso. In secondo luogo, trascurano o non conoscono affatto il percorso culturale dell'autore che criticano. Poincaré infatti giunge alla relatività attraverso un percorso tortuoso. Deve in un primo momento proporre che il principio di relatività di Galilei e il principio di reazione di Newton, nel caso dell'elettrodinamica, vengano estesi all'etere oltre che ai corpi materiali. Deve assumere, ed è questa in realtà la loro origine, le trasformazioni di Lorentz come una pura e semplice ipotesi matematica atta ad agevolare il calcolo. Per tagliare corto su queste critiche, basterebbe ricordare che per la quasi totalità dei fisici militanti la teoria della relatività ristretta è stata, almeno fino all'esaurirsi del primo conflitto mondiale, quella elettromagnetica di Lorentz-Poincaré, non l'azzardata ipotesi cosmologica di Einstein. Tant'è vero che per questa teoria Lorentz viene insignito del premio Nobel nel 1902 e che Poincaré è stato candidato al premio, pur senza conseguirlo, per almeno quattro volte e, nel 1910, sostenuto da una richiesta scritta avanzata* *all'Accademia delle Scienze di Stoccolma da una trentina dei più valenti fisici del tempo. Può ancora risultare opportuno, a proposito dei rapporti Poincaré-Einstein, chiarire che Poincaré è stato uno dei primi estimatori di Einstein, pur senza condividerne del tutto le idee. Nel novembre del 1911, il Politecnico di Zurigo, prima di affidare ad Einstein un incarico di insegnamento, chiede a Poincaré un giudizio sul giovane fisico. Poincaré risponde testualmente:*

«Il Sig. Einstein è una delle menti più originali che io abbia conosciuto; nonostante la sua giovane età, occupa già un posto di grande prestigio fra i più eminenti studiosi della nostra epoca. [...] Non essendo legato ai principi classici, quando si trova di fronte a un problema fisico ne considera immediatamente tutte le possibili soluzioni. [...] Non mi sentirei di dire che tutte le sue previsioni supereranno il controllo sperimentale, quando questo diverrà possibile [...]; ma al tempo stesso, si può ben sperare che una delle direzioni da lui indicate si dimostri fruttuosa; ed è quanto basta.» "

# Indice

# Capitolo 1

# Perché un approccio geometrico?

All'interno di questo capitolo andrò ad indagare i motivi che mi hanno spinto a scegliere di elaborare una proposta didattica basata su un approccio geometrico alla relatività ristretta di Einstein. Prima di tutto, ho ritenuto questo approccio in linea con le Indicazioni Nazionali che sottolineano l'importanza di acquisire una visione storico-critica del pensiero matematico. Altrettanto importante, ai fini di questa scelta, è stata la volontà di fornire un'alternativa all'assoluta preponderanza, nei libri di testo liceali, di un classico approccio fisico a partire dai postulati di A. Einstein. A tal fine, un approccio storico-geometrico alla teoria della relatività, è giustificato dalla necessità di uno sforzo didattico volto all'interdisciplinarietà tra matematica (in particolare geometria) e fisica, che manifesta come esse siano vicendevolmente costitutive e si arricchiscano l'una con l'altra. Inoltre la storia, in quest'ottica, oltre ad ampliare ulteriormente la visione interdisciplinare, può rappresentare un potente strumento per una salda connessione, nonché un ponte, tra le due scienze. Per fare ciò analizzerò l'articolo "Mathematics and physics: an innermost relationship. Didactical implications for their teaching and learning" di Costantinos Tzanakis [14]. Egli si sofferma sull'influenza reciproca tra matematica e fisica nel corso della loro storia e sulla profonda affinità epistemologica che le accomuna, riassunte in una morale didattica di base: *"In teaching and learning either of them, neither history should be ignored, nor the close interrelation of the two disciplines should be circumvented or bypassed."*. Vengono inoltre affrontati i temi chiave dell'integrazione della storia nell'insegnamento della matematica o della fisica ed è delineato un quadro comune basato sul lavoro svolto in passato.

## 1.1 Matematica e fisica: una relazione profonda

All'interno del suo articolo, Tzanakis, sviluppa tre tesi sulla base delle quali si sorregge il suo pensiero riguardo la relazione tra matematica e fisica e le relative implicazioni didattiche. Partendo da presupposti relativi alla presenza di una dicotomia che crea significativi problemi di apprendimento per gli studenti di entrambe le discipline, l'autore si propone di ispirare la riflessione sugli aspetti storici, filosofici e sociologici della conoscenza scientifica, sottolineando che nello sviluppo storico delle due discipline non si riscontra nessuna separazione o dicotomia, al contrario, le due scienze sono spesso intrecciate in quanto esiste una profonda affinità epistemologica che le lega. Affinità espressa in modo conciso da numerosi matematici e fisici famosi, quali Galileo (*"this grand book, the Universe, ... is written in the language of Mathematics"*), Wigner (*"unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"*) e Hilbert, nel suo sesto problema della famosa lista del 1900 (*"Mathematical treatment of the axioms of physics: To treat in the samemanner, by means of axioms, those physical sciences in which mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics"*).

Tzanakis intravede nell'integrazione della storia della matematica nella didattica della matematica, un modo promettente per insegnare ed apprendere la disciplina; l'analisi storica offre infatti l'opportunità di apprezzare la natura evolutiva della conoscenza matematica e permette di andare oltre il suo apprendimento convenzionale come insieme di prodotti intellettuali strutturati deduttivamente. Quanto appena detto vale anche per la didattica della fisica, poiché la fisica, proprio come la matematica, non è solo un corpus di conoscenze strutturate deduttivamente (sottoposto al confronto con le verifiche sperimentali) ma evolve continuamente. A sostegno di tale approccio, l'autore sviluppa tre tesi principali che permettono anche di rispondere alle seguenti domande: quale storia, con quale ruolo/i e con quale modo/i è utile scegliere nella pratica per realizzare i nostri propositi didattici?

La **tesi A**, relativa allo status ontologico della matematica e della fisica, afferma:

*"Mathematics and physics should be conceived (hence, taught and learnt) both as the result of intellectual enterprises and as the procedures leading to these results. Knowledge gained in their context has an evolutionary character; by its very nature, historicity is a deeply-rooted characteristic"*.

La **tesi B**, relativa invece allo sviluppo dell'interconnessione storica tra matematica e fisica, sostiene:

*"Throughout their historical development from antiquity to the present, mathematics and physics have been evolving in a close, continuous, uninterrupted, bidirectional, multifaceted and fruitful way".*

Tale relazione può realizzarsi in tre diversi scenari, spesso intrecciati tra di loro: uno sviluppo parallelo, in cui i problemi fisici che necessitano di soluzione e la formulazione della matematica appropriata per affrontarli evolvono contemporaneamente, situazioni in cui lo sviluppo di concetti, metodi e teorie matematiche precede la loro applicazione fisica e altre in cui, al contrario, problemi fisici, modelli fisici parzialmente intuitivi, formali o sperimentalmente indotti, motivano e/o guidano lo sviluppo di nuove strutture matematiche.

La tesi C, infine, suggerisce che la matematica è il linguaggio della fisica nel senso più profondo, spesso determinando il contenuto e il significato dei concetti e delle teorie fisiche, o addirittura istigando le rivoluzioni in fisica. Allo stesso tempo, la fisica fornisce e procura alla matematica non solo problemi ma anche idee, metodi e concetti cruciali per molte innovazioni matematiche.

**Tesi C(a):** *"Mathematics and physics have always been closely interwoven in the sense of a bidirectional process:*

1. ***From mathematics to physics:*** *Mathematics is the language of physics, not only as a tool for expressing, handling and developing logically physical concepts, methods and theories, but also as an indispensable, formative characteristic that shapes them, by deepening, sharpening, and extending their meaning, or even endowing them with meaning.*

2. ***From physics to mathematics:*** *Physics constitutes a (or maybe, the) natural framework for testing, applying and elaborating mathematical theories, methods and concepts, or even motivating, stimulating, instigating and creating all kinds of mathematical innovations."*

Un'analisi dettagliata evidenzia che entrambe le discipline utilizzano le stesse procedure, come patterns di invenzione/scoperta e di giustificazione dei risultati (parziali o generali): il ragionamento logico (per deduzione, induzione e analogia), l'utilizzo di algoritmi e le indagini sperimentali.

**Tesi C(b):** "*Mathematics and physics as embodiments of general attitudes in regard to the description, exploration, and understanding of empirically and/or mentally conceived objects, are so closely interwoven, that any distinction between them is related more to the point of view adopted while studying particular aspects of an object, than to the object itself.*"

Alla luce di questa analisi, appare didatticamente fondamentale, integrare il più possibile l'insegnamento della matematica e della fisica. Inoltre emerge come la storia sia una strumento fondamentale per raggiungere questo scopo.

A questo punto Tzanakis si chiede quale tipo di storia sia auspicabile, pertinente e rilevante a scopo didattico; in effetti, spesso si tende a semplificare e distorcere la storia al servizio della didattica[1], considerando, ad esempio, significativo nel passato solo ciò che oggi ha importanza.

L'autore sottolinea dunque, che al fine di chiarire i conflitti esistenti fra l'approccio di uno storico o di un matematico alla conoscenza matematica è utile la distinzione di Grattan-Guinness fra storia ed eredità.

[1]Nel caso di nostro interesse J.H. Poincaré generalmente non viene nemmeno nominato all'interno della trattazione della teoria della relatività ristretta dei libri di testo e a volte si lascia passare l'idea che gli esperimenti di Michelson e Morley abbiano svolto un ruolo cruciale per lo sviluppo della teoria, mentre la loro influenza su Einstein fu solo marginale, come confermato dalla citazione riportata nella sezione 2.3 di questo elaborato.

Per **storia** di un determinato argomento matematico N, si intende:

*"... the development of N during a particular period: its launch and early forms, its impact [in the following years and decades], and applications in and/or outside mathematics. It addresses the question 'What happened in the past?' by offering descriptions. Maybe some kinds of explanation will also be attempted to answer the companion question 'Why did it happen?'"... "[It] should also address the dual questions 'what did not happen in the past?' and 'why not?'; false starts, missed opportunities..., sleepers, and repeats are noted and maybe explained... differences between N and seemingly similar more modern notions are likely to be emphasized"*

Per **eredità** di un particolare argomento matematico N, ci si riferisce a:

*".... to the impact of N upon later work, both at the time and afterward, especially the forms which it may take, or be embodied, in later contexts. Some modern form of N is usually the main focus, with attention paid to the course of its development. ... the mathematical relationships will be noted, but historical ones... will hold much less interest. [It] addresses the question 'how did we get here?' ... The modern notions are inserted into N when appropriate, and thereby N is unveiled... similarities between N and its more modern notions are likely to be emphasized; the present is photocopied onto the past"*

Questa distinzione è potenzialmente di grande rilevanza in didattica contribuendo a rispondere alla domanda ricorrente "perché e quale storia è appropriato usare a scopo didattico?".

Chiarito quanto sopra, Tzanakis si interroga sul ruolo che la storia può giocare all'interno della didattica, fornendo una descrizione dei tre ruoli principali, reciprocamente complementari, che essa può assumere all'interno dell'insegnamento delle due scienze.

- ***Sostituzione*:** sostituire il sapere matematico e/o fisico, inteso come un insieme di nozioni costituite da risultati finiti, un insieme di tecniche preconfezionate per risolvere problemi o moduli scolastici finalizzati agli esami, con qualcosa di differente: non solo risultati ripuliti, ma anche processi mentali che portano ad essi. Dunque la percezione di questo sapere, non solo come una collezione di risultati ben definiti e organizzati deduttivamente, ma anche come una vivida attività intellettuale.

- ***Reorientamento*:** cambiando cos'è (o si suppone sia) familiare, in qualcosa che non lo è, ovvero modificando la percezione convenzionale delle conoscenze matematiche e fisiche(degli studenti e degli insegnanti), da qualcosa che è sempre esistito nell'attuale forma, in una consapevolezza più profonda del fatto che tale conoscenza sia un'attività intellettuale in evoluzione. Un'invenzione basata su uno scambio dialettico fra la creatività della mente umana e l'attenta e intelligente sperimentazione.

- ***Ruolo culturale*:** rendendo possibile la consapevolezza che la matematica e la fisica si sviluppano in uno specifico contesto scientifico, tecnologico o sociale, in un dato tempo e luogo; portando a considerare il sapere matematico/fisico come parte fondamentale della storia dell'intelletto umano nello sviluppo della società, percependo la matematica e/o la fisica da una prospettiva che supera i confini fissati tra le discipline.

Nell'ottica di integrare la storia nella didattica della matematica e/o della fisica, l'autore individua cinque aree principali dove questo può essere importante:

1. ***Apprendimento di specifici argomenti di matematica e fisica*:** sviluppo storico contro risultati finali puliti; storia come risorsa; storia come ponte fra differenti ambiti e discipline; il valore dell'educazione storica nello sviluppo della crescita personale e delle competenze.

2. ***Visioni e preconcetti sull'essenza e sui processi tipici della matematica e della fisica*:** riguardo i loro contenuti: guardando da differenti punti di vista e andando al cuore dei concetti, delle congetture e delle dimostrazioni; apprezzando gli "insuccessi" come parte della costruzione matematica e fisica; rendendo visibile la naturale evoluzione dei meta-concetti. Riguardo la loro forma: confrontando vecchio e nuovo; motivando l'apprendimento, privilegiando la chiarezza, la concisione e la completezza logica.

3. ***Background e competenze pedagogico-didattiche degli insegnanti*:** identificando le motivazioni, diventando consapevoli degli ostacoli e delle difficoltà; lasciandosi coinvolgere e/o diventando consapevoli del processo creativo del "fare matematica e/o fisica"; arricchendo il proprio background didattico; distinguendo e decifrando approcci idiosincratici o non convenzionali.

4. ***Atteggiamento emotivo verso la matematica e la fisica:*** vedendo la matematica e la fisica come sforzi umani, insistendo sulle idee, tentando ipotesi, facendo domande, non facendosi scoraggiare da fallimenti, errori, incertezze e malintesi.

5. ***Considerazione della matematica e delle fisica come sforzo umano e culturale*:** esse formano parte delle culture locali; evolvono sotto l'influenza di fattori intrinseci ed estrinsechi ad esse.

Dal punto di vista del modo in cui la storia è introdotta nella didattica della matematica, Tzanakis riprende la seguente distinzione:

- ***La storia come strumento***: ovvero "*... the use of history as an assisting means, or an aid, in the learning [or teaching] of mathematics [or physics]... in this sense, history may be an aid...*" "*as a motivational or affective tool, and... as a cognitive tool...*" (da [3] e [1]).

- ***La storia come obiettivo***: ovvero, la storia è "*... an aim in itself... posing and suggesting answers to questions about the evolution and development of mathematics, [or physics]... about the inner and outer driving*

> *forces of this evolution, or the cultural and societal aspects of mathematics [or physics] and its history*" (da [3]).

Prima di fornire degli esempi pratici di possibili integrazioni storiche all'interno dell'insegnamento della matematica, l'autore dà una panoramica generale di ciò che può essere realizzato nella pratica didattica. Egli individua tre strade percorribili, ognuna delle quali mette in evidenza uno scopo diverso. Esse si completano a vicenda, nel senso che ognuna, presa da sola, è insufficiente ad esaudire la molteplice influenza costruttiva che la storia può avere nell'insegnamento. Seguendo questa linea bisogna procurarsi informazioni storiche dirette, allo scopo di imparare la storia; pensare un approccio all'insegnamento ispirato dalla storia, al fine di imparare matematica e/o fisica; concentrarsi sulle due discipline scientifiche inserendole nel contesto culturale e sociale nel quale si sono evolute, con l'obiettivo di sviluppare una consapevolezza più profonda della loro natura evolutiva, della loro peculiarità epistemologica e delle relazioni che hanno con le altre discipline.

Da un punto di vista metodologico, Tzanakis si rifà in ultimo alla classificazione di [2] riguardo le possibili modalità di introdurre-utilizzare la storia all'interno del processo di insegnamento-apprendimento, distinti in tre categorie: per *illuminazione*, insegnamento e apprendimento sono integrati da informazioni storiche di varia portata ed enfasi; per *moduli*, in cui si costruiscono unità di apprendimento di tipo storico spesso dedicate a casi specifici; *storicamente-fondato*, la storia modella l'ordine ed il modo di presentazione, spesso senza apparire esplicitamente, ma venendo integrata nell'insegnamento. I diversi approcci possono variare in misura e portata, in base a specifici obiettivi didattici, a seconda dell'argomento trattato, del livello e dell'orientamento degli studenti, del tempo a disposizione e di costrizioni esterne (programmi curriculari, numero di studenti per classe, ecc.).

L'articolo si conclude con esempi di possibili pratiche di insegnamento tra le quali figura un approccio storico alla teoria della relatività speciale.

Egli osserva che la teoria della relatività speciale è un argomento standard per la fisica (ma non per la matematica) liceale. D'altra parte, gli studenti possiedono tutte le preconoscenze algebrico-geometriche necessarie ad affrontare un approccio geometrico alla relatività speciale; questo offre la possibilità di ampliare la visione sulla teoria e permette una sua comprensione più profonda. Allo stesso tempo la relatività, descritta attraverso lo spazio tempo di Minkowski e il gruppo delle trasformazioni di Lorentz, risulta essere un esempio concreto e storicamente significativo, utile alla comprensione dei concetti algebrici astratti (vettori, matrici, trasformazioni geometriche e gruppi) affrontati nel corso degli studi precedenti, spesso con gravi difficoltà relative anche ad una mancanza di esempi concreti.

Seguendo dunque la linea suggerita e giustificata da Tsanakis, all'interno del terzo capitolo mi occuperò di sviluppare una proposta didattica sulla relatività ristretta affine alle sue osservazioni. L'approccio sarà ispirato e basato sulla storia, dove quest'ultima servirà principalmente come strumento per apprendere la matematica e la fisica e per arricchire il repertorio didattico degli insegnanti. Gli step didattici non rispettano necessariamente un ordine cronologico: l'approccio è principalmente volto a considerare la storia come eredità, allo scopo di fornire una visione sullo sviluppo della matematica moderna di base e dei risultati fisici, e quindi utilizza, quando necessario, nozioni e metodi non disponibili o usati al tempo. Questo aiuta a collegare le innovazioni basilari in fisica e le loro formulazioni matematiche alle loro controparti moderne: chiarisce meglio la domanda "come siamo arrivati fino a qui?".

Sulla base di questi presupposti, prima di descrivere la proposta didattica vera e propria, fornirò, nel prossimo capitolo, una breve contestualizzazione storica del periodo contemporaneo alla formulazione della teoria della relatività descrivendo lo stato delle conoscenze fisiche e geometriche inerenti. Inoltre, richiamerò alcuni concetti fondamentali del pensiero epistemologico di Poincaré, per mettere in luce come i mutamenti in campo fisico-geometrico dell'epoca siano stati influenzati e abbiano avuto ripercussioni anche in quest'ambito.

# Capitolo 2

# Contestualizzazione storica

All'interno di questo secondo capitolo verrà presentata una contestualizzazione storica divisa in quattro sezioni. Dapprima si andrà ad indagare la definizione di epistemologia fisico-geometrica, fornendo la prospettiva di Jules Henri Poincaré come descritta da Gaspare Polizzi in [12] e da Ubaldo Sanzo nell'introduzione di [11]. Nelle ultime due sezioni si passerà ad una breve digressione relativa alle conoscenze fisiche e matematiche prima della fisica moderna, per arrivare infine alla nascita della teoria della relatività speciale attraverso il postulato di relatività di J.H. Poincaré.

## 2.1 La "filosofia scientifica" di J.H. Poincaré

Alla sua morte, Jules-Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 – Parigi, 17 luglio 1912) era più noto al largo pubblico per le sue riflessioni di filosofia della scienza che non per le ricerche, rilevantissime, in ambito matematico e fisico, malgrado avesse pubblicato il suo ultimo articolo scientifico nel marzo del 1912 (vedi [9]). La sua indagine epistemologica inizia con un articolo del 1887 (vedi [6]), anno del suo primo corso di Fisica matematica alla Sorbonne. Il primo dei suoi quattro libri dedicati alla filosofia della scienza – "La science et l'hypothèse", pubblicato nel 1902 da Flammarion nella «Bibliothèque de Philosophie Scientifique» – era diventato un best seller, raggiungendo in pochi anni le sedicimila copie vendute. Grazie al successo del libro del 1902 Poincaré pubblicò altre tre opere epistemologiche largamente diffuse e tradotte in molte lingue, tutte nate come raccolte di saggi sparsi su riviste scientifiche e filosofiche: "La valeur de la science" (1905, la più nota e importante); "Science et méthode" (1908); "Dernières pensées" (pubblicata postuma poco dopo la morte nel 1913). Le prime due opere epistemologiche ebbero un forte impatto sulla filosofia della scienza del primo Novecento e furono importanti per i promotori di quello che sarà il principale nucleo di irradiazione dell'epistemologia del Novecento: il Circolo di Vienna. Poincaré matura la propria riflessione epistemologica a partire dai problemi posti dalle nuove geometrie; si interroga sulle corrispondenze possibili tra realtà fisica e matematica e si confronta con le grandi svolte della fisica del Novecento (fisica quantistica e relativistica). L'esito dell'indagine epistemologica sarà la nascita del convenzionalismo nel quale si valorizza il primato della dimensione formale e relazionale del sapere matematico e si rintraccia nella scelta delle ipotesi il motore dello sviluppo scientifico.

Con il procedere della propria ricerca, Poincaré costruisce e sviluppa un progetto epistemologico di ampio respiro. Da una ricostruzione del suo pensiero emerge quanto la sua visione fisico-matematica abbia orientato le sue riflessioni sulla scienza. Esse configurano una riflessione epistemologica che prende alimento da tre linee di ricerca: la concezione geometrica dell'analisi, espressa nell'attitudine a risolvere i problemi analitici tramite intuizioni geometriche; l'interpretazione unitaria della fisica matematica; l'attribuzione alla geometria di un ruolo di connessione tra analisi e fisica.

Qualsiasi geometria, come afferma Klein, può essere costruita caratterizzando con degli assiomi un gruppo di trasformazioni e distinguendo quest'ultimo da tutti quelli possibili all'interno di una stessa varietà. Ne consegue che i postulati delle geometrie non hanno né origine sperimentale, né intellettiva e tanto meno razionale: essi sono, secondo l'espressione di Riemann, semplici ipotesi. Tra tutti i gruppi di postulati possibili, il matematico sceglie in funzione della comodità relativa al proprio oggetto di ricerca. I postulati geometrici hanno comunque un valore oggettivo da un punto di vista operativo: esso è dovuto alla coerenza logica di cui è fornito ciascun sistema geometrico. Una tale coerenza resta garantita dal fatto che qualsiasi geometria può essere sempre traducibile in termini di analisi. Non ha pertanto senso chiedersi se una geometria è vera e un'altra è falsa. Tutte le geometrie hanno lo stesso valore matematico.

Verso la fine degli anni Ottanta, il diffondersi delle geometrie non euclidee suscita in Francia una serie di polemiche filosofiche. I filosofi continuano a sostenere che la geometria di Euclide resta la sola applicabile alla fisica, mentre le altre geometrie sarebbero solo immaginarie. Poincaré interviene per spiegare ai filosofi che la loro discussione è priva di senso: le geometrie si differenziano tra loro perché ciascuna di esse si fonda su di un diverso modo di definire la distanza. Chiarisce, quindi, di aver usato il termine ipotesi, per definire i postulati della geometria, proprio perché ogni diverso gruppo di postulati porta ad una definizione differente di distanza. È pertanto meglio, pensa Poincaré, sostituire il termine ipotesi, con quello più esatto di *convenzioni*: i postulati della geometria non sono altro che semplici convenzioni. Con le parole di Poincaré:

"*Perciò gli assiomi geometrici non sono giudizi sintetici a priori, né fatti sperimentali. Sono delle convenzioni; la nostra scelta tra tutte le convenzioni possibili è guidata da fatti sperimentali; ma resta libera ed è limitata solo dalla necessità di evitare ogni contraddizione*" (da [10]).

L'acuirsi della polemica filosofica costringe però Poincaré a illustrare il proprio concetto di spazio fisico. Questo concetto non è un dato dell'esperienza: non siamo in grado in nessuna circostanza di sperimentare lo spazio fisico in se stesso.

Tutto ciò che di esso sappiamo si limita alla conoscenza di alcuni suoi attributi. Poincaré fa osservare che questi stessi attributi non ci vengono dall'esperienza ma sono il frutto di una semplice proiezione: noi attribuiamo allo spazio fisico le caratteristiche con le quali abbiamo costruito lo spazio astratto o geometrico. Pensiamo perciò che i corpi si muovano in uno spazio con qualità uguali a quelle dello spazio geometrico.

L'assioma della geometria (e dell'analisi) è il concetto di gruppo, così come quello dell'aritmetica è il principio di ricorrenza o induzione completa. Entrambi questi assiomi hanno la peculiarità di farci comprendere che, una volta che siamo stati capaci di compiere per un certo numero di volte e validamente una stessa operazione, il nostro intelletto è in grado di reiterarla all'infinito. Poincaré afferma allora che gli assiomi sono dimostrativi, mentre i postulati sono semplici ipotesi. I concetti di gruppo e di invariante (che uniscono geometria, algebra e analisi), e di induzione completa (legato all'aritmetica) permettono di individuare una scienza in cui convenzione e costruzione assumono un ruolo preminente, senza che venga sminuito il valore di verità delle teorie scientifiche.

L'epistemologia della fisica si costituisce in Poincaré a partire dalla "fisica dei principi". I principi sono un piccolo numero di generalizzazioni feconde delle ipotesi assunte dalle teorie, funzionali alla comprensione della massa dei risultati sperimentali. Essi non derivano da dati empirici, ma sono passibili di dimostrazione matematica e di conseguenza devono essere rigorosi, mentre i dati sperimentali possono avere un coefficiente di approssimazione. Gli studi sull'elettromagnetismo e sulla teoria di Lorentz, in particolare, rivestono grande importanza per la riflessione che Poincaré svolge sulla natura e sulla struttura delle teoria scientifiche. Confrontando, infatti, la teoria elettromagnetica ondulatoria di Maxwell-Hertz con quella ondulatoria-corpuscolare di Lorentz, Poincaré fa importanti considerazioni. Egli osserva che entrambe queste teorie consentono un'interpretazione meccanica dei fenomeni elettrodinamici e, anche se non risultano invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane, lo sono rispetto al gruppo delle trasfromazioni di Lorentz. È questa solo una conferma dell'idea che Poincaré già aveva della teoria scientifica: due teorie contradditorie dal punto di vista fisico risultano compatibili con un'unica struttura matematica valida per entrambe. Poincaré rafforza allora la propria convinzione secondo la quale un'ipotesi teorica non può essere confutata dall'esperienza. Il paradosso è solo apparente: è riconducibile al fatto che i dati sperimentali sono grossolani e imprecisi rispetto al rigore e alla perfezione della struttura matematica che deve interpretarli. Ne consegue che i dati sperimentali hanno valore solo di base rispetto alla costruzione di una determinata teoria fisica. Maxwell e Hertz, inoltre, per conciliare elettromagnetismo e meccanica hanno bisogno d'introdurre l'ipotesi dell'etere, come mezzo di trasporto delle onde elettromagnetiche. La teoria di Lorentz, al contrario, può essere passibile di un'interpretazione meccanica, solo a patto che si elimini l'ipotesi dell'etere. Questo fatto spinge Poincaré a distinguere le ipotesi di una teoria fisica in tre diversi generi. Le ipotesi *sperimentali*, che possono essere vere o false: esse, infatti, fornendo indicazioni sui rapporti fra i fatti bruti, possono essere infirmate o confermate dall'esperienza.

Le ipotesi *teoriche*, che costituiscono la base di una teoria e le forniscono i principi: queste sono sempre vere e nessuna esperienza potrà mai confutarle a causa del loro alto grado di astrazione e generalità. Infine le ipotesi *comode*, queste in fisica come in geometria, non sono né vere, né false ma solo strumenti teorici comodi per la costruzione della teoria. Queste ultime ipotesi sono rappresentazioni concrete di modelli fisici figurativi; di esse fanno parte atomi, fluidi, etere. La prospettiva nella quale l'ipotesi svolge ruoli diversi nella costruzione di una teoria fisica costituisce il punto più avanzato dell'epistemologia di Poincaré.

Verso la fine del secolo, egli prende atto che l'importanza del dato sperimentale non può essere trascurata nella costruzione di una teoria fisica. Questa considerazione determina un cambiamento di prospettiva che, pur non risultando radicale, lo porta a insistere di legare sempre più saldamente fisica matematica e fisica sperimentale. La fisica sperimentale, egli afferma, è la sorgente unica di ogni nostra conoscenza del mondo reale. Essa però non ci fa conoscere le cose ma i rapporti fra le cose. Questi rapporti costituiscono la sostanza delle teorie fisiche. Il fisico matematico riveste poi questa sostanza con la forma, cioè con un abito matematico che consente di verificare se il tipo di rapporto proposto dal fisico sperimentale sia effettivamente passibile di quel rigore richiesto dall'apparato matematico. Per Poincaré gli scienziati posseggono una creatività linguistica, costruiscono linguaggi matematicamente coerenti e comodi, ma esistono sempre degli invarianti universali, tali da consentire la traducibilità dei linguaggi teorici sia da una teoria scientifica a un'altra, sia tra i fatti scientifici e i cosiddetti fatti bruti. È sempre possibile tradurre il linguaggio scientifico nelle relazioni oggettive che regolano i fatti bruti. Esiste quindi un'oggettività della scienza, se pure non fondata sulla conoscenza del singolo fatto bruto, ma su quella del sistema di relazioni, sostanzialmente matematico, che regola i dati sperimentali. Il valore insopprimibile della scienza, che la distingue da altri linguaggi, pure creativi, consiste nella sua capacità di pervenire a un sistema di conoscenze oggettive sulle relazioni tra i fenomeni. La scienza vale di per sé, per la sua sola capacità di pensare il mondo con un linguaggio matematico creativo. Dove per creatività scientifica, Poincaré si rifà, come esposto in "Science et méthode", alla capacità di unire elementi preesistenti in combinazioni nuove che appaiano belle, nel senso dato alla bellezza dai matematici, ovvero come armonia ed eleganza.

L'epistemologia di Poincaré, attribuendo valore limitato al dato sperimentale e privilegiando il nucleo matematico della teoria scientifica, può offrire l'impressione di non essere in grado di spiegare sufficientemente l'avanzamento della scienza e il costituirsi di nuove teorie. Non è così. Poincaré si preoccupa solo di difendere la compatibilità di teorie scientifiche diverse. A questo proposito ha infatti scritto[1]:

[1] Traduzione italiana a cura di Ubaldo Sanzo nell'introduzione di [11]. La versione originale in francese si trova in [8] e recita: "Les théories sont des auxiliaires indispensables de la Science, mais ce sont des auxiliaires tyranniques contre lesquels il faut savoir se défendre; celui qui subirait leur empire sans réagir ne serait plus capable d'un examen vraiment libre;

*"Le teorie fisiche sono le ausiliarie indispensabili della scienza ma sono ausiliarie tiranniche dalle quali bisogna difendersi; colui che subirà il loro dominio senza reagire non sarà mai capace di essere veramente libero. Egli si metterà un paraocchi e non avrà più la possibilità di liberarsi dalle teorie".*

Usando le parole di J.Vuillemin, Poincarè è stato «*l'ultimo grande scienziato universale*»; ripetutamente proposto per il Premio Nobel, anche dal matematico italiano Vito Volterra, non lo ottenne forse a causa della sua morte immatura. Fu un modello insuperato di scienziato del Novecento, un esempio per tutti, ma egli fu forse insieme anche il primo epistemologo contemporaneo. Da epistemologo e da filosofo della scienza si è mostrato un attento interprete del proprio tempo, sempre aperto al nuovo che proveniva da ogni settore della fisica e della matematica, ma anche in grado di ascoltare e discutere con franchezza linguaggi e teorie provenienti dai suoi colleghi filosofi.

## 2.2 Lo stato dell'arte prima della teoria della relatività

### 2.2.1 Conoscenze fisiche

Riprendiamo prima di tutto alcuni concetti fondamentali.

Un **riferimento** è un oggetto fisico reale e rigido in cui sia possibile eseguire misure, ne sono esempi un laboratorio, un ascensore, un satellite in orbita ecc. Lo stesso riferimento può essere descritto matematicamente attraverso diverse scelte di un sistema di coordinate. Le misure compiute in un riferimento sono oggettive, perché compiute da strumenti, e relative, perché si può cambiare riferimento.

Un riferimento si dice **inerziale** se in esso vale il **principio d'inerzia**, descritto da Galileo Galilei nel "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" (1632) ed enunciato con questo nome per la prima volta da Isaac Newton nei "Philosopiae Naturalis Principia Mathematica" (1687).
In linguaggio moderno:

**Un punto materiale soggetto a una forza risultante nulla si muove di moto rettilineo uniforme oppure è in quiete.**

All' interno del Dialogo, Galileo fa anche affermare a Salviati quello che oggi chiamiamo **principio di relatività.** In linguaggio moderno:

**Tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti dal punto di vista fisico, cioè in tutti i riferimenti inerziali valgono le leggi della meccanica.**

---

il se mettrait à lui-même des œillères, et cependant, on ne saurait se passer d'elles.".

Ma quali sono i riferimenti inerziali? Sono definiti come "quei riferimenti dove vale il principio di inerzia" che a sua volta "vale per i cosiddetti riferimenti inerziali", siamo di fronte ad una tautologia. Albert Einstein[2] porrà questa ambiguità di base sul principio di inerzia come uno dei motivi del suo passaggio alla Teoria della Relatività Generale. Infatti scriverà:

*"La debolezza del principio di inerzia sta nel fatto che esso implica un circolo vizioso: una massa si muove senza accelerazione se è a sufficiente distanza da altri corpi; d'altra parte, sappiamo che essa è sufficientemente distante da altri corpi soltanto per il fatto che si muove senza accelerazione".*

Newton accettò il principio di relatività nella sua fisica, ma considerò sempre il tempo e lo spazio come assoluti e ritenne di doversi riferire sempre ad un *riferimento assoluto.* Egli parla così di uno ***spazio assoluto***:

*"... per sua natura senza relazione ad alcunchè di esterno, rimane sempre uguale e immobile."*

La fisica del 700 e dell'800 è stata costruita su questo paradigma e le leggi della meccanica newtoniana valgono sicuramente in un riferimento fermo rispetto allo spazio assoluto (in quiete assoluta) ma anche in altri riferimenti, ovvero quelli in moto relativo rettilineo uniforme rispetto allo spazio assoluto (e quindi in moto relativo uniforme uno rispetto all'altro); questi ultimi sono i riferimenti inerziali. Come già anticipato anche il ***tempo** è **assoluto*** per Newton:

*" ... in sé e per sua natura, senza relazione ad alcunchè di esterno, scorre uniformemente."*

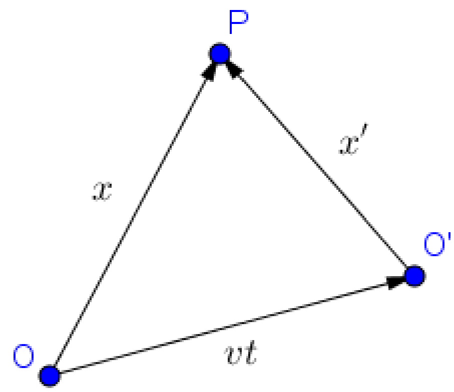
All'epoca questa affermazione appariva plausibile: il tempo sembra esserci, esistere per conto suo, indipendentemente da noi, senza legami con quanto accade. Se si vuole descrivere uno stesso fenomeno da due riferimenti inerziali diversi, come si passa da un riferimento a un altro? Alcune grandezze cambiano evidentemente, per esempio la velocità. Se ci troviamo nel caso specifico in cui i due riferimenti sono inerziali, le leggi di trasformazione di posizione, velocità e accelerazione prendono il nome di **trasformazioni di Galileo**.

Consideriamo due riferimenti inerziali $S$ e $S'$ in cui siano stati scelti due sistemi di coordinate cartesiane in modo tale che al tempo $t = t' = 0$ gli assi cartesiani di $S$ e di $S'$ coincidano e in modo che $S'$ si muova rispetto ad $S$ con una velocità $\overrightarrow{v}$ costante. Consideriamo un punto $P$ caratterizzato da posizione $\overrightarrow{x}$ e velocità $\overrightarrow{v}$ nel sistema di coordinate di $S$ e posizione $\overrightarrow{x}'$ e velocità $\overrightarrow{v}'$ nel sistema di

[2]Albert Einstein (Ulm, Germania, 14 marzo 1879 – Princeton, USA, 18 aprile 1955) studiò al Politenico Federale di Zurigo dove seguì anche corsi di Hermann Minkowski; laureatosi in Fisica nel 1902, trovò impiego presso l'Ufficio Brevetti Federale a Berna. A seguito dei suoi grandi lavori (opera di riferimento per la teoria della Relatività Ristretta è l'articolo "Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento" del 1905), acquistò fama nell'ambiente accademico e nel 1907 divenne Professore all'Università Carlo Ferdinando di Praga. Nel 1913 si trasferì a Berlino al Kaiser Wilhelm Institut e vi rimase fino al 1933 quando, con l'avvento di Hitler, fu costretto ad abbandonare la Germania sia per le sue idee pacifiste sia in quanto ebreo. Accettò allora l'invito dell'Institute of Advanced Studies di Princeton e vi rimase fino alla morte.

coordinate di $S'$. All'istante $t$ la distanza tra le origini dei due sistemi di coordinate, $O$ e $O'$, è data dal vettore $\vec{v}t = \vec{v}t'$. Si ha allora, osservando la Figura 2.2.1:

Figura 2.2.1:




$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}t \\ t = t' \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{a} = \vec{a}'$$

o, invertendo le relazioni,

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{a}' = \vec{a}$$

Le trasformazioni di Galileo scritte sopra poggiano sugli assiomi che spazio e tempo siano grandezze **assolute**, cioè **invarianti**: le lunghezze misurate nei due riferimenti e relative allo stesso oggetto sono le stesse, così come i tempi misurati nei due riferimenti e relativi allo stesso fenomeno sono gli stessi.

Per ***invariante*** intendiamo una grandezza che ***non cambia passando da un riferimento inerziale a un altro.***

Circa duecento anni dopo i Principia di Newton, James Clerk Maxwell[3] pubblica il "Treatise on Electricity and Magnetism" (1873) sintetizzando le ricerche su

[3] James Clerk Maxwell (Edimburgo, 13 giugno 1831 – Cambridge, 5 novembre 1879) è stato un matematico e fisico scozzese. Le equazioni di Maxwell dimostrano che l'elettricità, il magnetismo e la luce sono tutte manifestazioni del medesimo fenomeno: il campo elettromagnetico. Il lavoro di Maxwell è stato definito la «seconda grande unificazione della fisica», dopo quella operata da Isaac Newton. Il suo lavoro nella redazione di un modello unificato

elettricità e magnetismo dei secoli precedenti e formulando nuove ipotesi. A partire dalle sue equazioni, Maxwell prevede l'esistenza di onde elettromagnetiche che si propagano a velocità c$\approx$300000 km/s molto simile a quella della velocità della luce.[4]Maxwell propone quindi che la luce sia un'onda elettromagnetica. Fra il 1886 e il 1889 Heinrich Rudolf Hertz[5] esegue numerosi esperimenti in cui prova l'esistenza delle onde elettromagnetiche previste da Maxwell. Le equazioni di Maxwell si pongono come equazioni fondamentali della fisica, ma hanno una caratteristica peculiare: contengono una velocità.

Abbiamo appena ricordato le trasformazioni di Galileo che ci dicono come le velocità dipendano dal riferimento in cui vengono misurate: ma allora le equazioni di Maxwell in quale riferimento valgono? In quale riferimento la velocità delle onde elettromagnetiche è $c$?

Maxwell e altri propongono che le onde elettromagnetiche si propaghino nell'*etere*, un mezzo invisibile, rigido (per poter sostenere velocità di propagazione molto elevate) e poco denso (per poter consentire ai corpi celesti di muoversi nello spazio senza resistenze, abbastanza rarefatto da non rallentare il moto della Terra). L'etere costituirebbe un riferimento privilegiato in cui la velocità della luce è $c$: lo *"spazio assoluto"* di Newton. Ci si trovava nella sgradevole situazione per cui o erano "sbagliate" le trasformazioni di Galilei e cioè tutta la meccanica cosiddetta *"classica"* o *"newtoniana"* doveva essere rifondata, o erano sbagliate le equazioni di Maxwell, oppure per l'elettromagnetismo non valeva il principio di relatività (mentre per la meccanica sì).

### 2.2.2 Conoscenze geometriche

La geometria di riferimento per la fisica di Galileo e Newton è quella che si definisce *euclidea* in quanto descritta negli *"Elementi"* di Euclide[6]. Composti

---

per l'elettromagnetismo è considerato uno dei più grandi risultati della fisica del XIX secolo. Professore a Cambridge dal 1860 fino alla morte fu uno dei massimi fisici di tutti i tempi, al pari di Galileo, Newton ed Einstein.

[4]La prima misura della velocità della luce fu ottenuta da Ole Rømer nel 1676. Egli stava misurando i tempi di occultazione della luna Io di Giove da parte del pianeta e osservò che queste eclissi duravano meno quando la Terra era più vicina a Giove e duravano di più quando la Terra era più lontana da Giove. La differenza dei tempi di occultamento era circa di 16 min e Rømer attribuì questa differenza al tempo necessario perché la luce viaggi da un estremo all'altro dell'orbita terrestre. Noto il valore del diametro medio dell'orbita terrestre Rømer ottenne per la velocità della luce un valore pari a 225000 km/s, lontano dal valore oggi noto, ma stabilisce l'importante scoperta che la velocità della luce è finita.
Le misure più recenti all'epoca erano quelle di Fizeau nel 1849 (c $\approx$ 313.000 km/sec) e di Foucault nel 1862 (c $\approx$ 298000 km/s).

[5]Heinrich Rudolf Hertz (Amburgo, 22 febbraio 1857 – Bonn, 1 gennaio 1894) fu, assieme a Maxwell e Boltzmann, uno dei maggiori fisici del XIX secolo. Scoprì e spiegò come generare le onde elettromagnetiche (onde Hertziane) confermando la teoria elettromagnetica di Maxwell. L'unità di misura della frequenza è chiamata Hertz in suo onore.

[6]Euclide è stato un matematico greco antico, sicuramente il più importante matematico della storia antica, e uno dei più importanti e riconosciuti di ogni tempo e luogo. Fu attivo ad Alessandria durante il regno di Tolomeo I (323–283 a.C.) e la testimonianza più importante su cui si basa la storiografia che lo riguarda viene da Proclo, che lo colloca tra i più giovani discepoli di Platone. Noto per aver formulato la prima rappresentazione organica e completa

tra il IV e il III secolo a.C., essi rappresentano un quadro completo e definito dei principi della geometria noti al tempo e sono la più importante opera matematica giuntaci dalla cultura greca antica.

Quando ci si riferisce alla geometria dagli inizi dell'800 in poi si parla di *geometria moderna*; in quel periodo molti matematici si interrogarono sulle ipotesi alla base della geometria. Nei secoli precedenti tentarono in tanti una dimostrazione del **V postulato di Euclide** o postulato delle parallele:

***"Dati una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta r data.***[7]***"***

Il problema fondamentale su questo postulato fu, quasi dall'inizio, il tentativo di capirne la necessità e la dipendenza o meno dagli altri assiomi. Sembra, infatti, abbastanza curioso e sintomatico che lo stesso Euclide lo abbia adoperato il meno possibile. Per diverse ragioni non sembrò autoevidente, come gli altri, probabilmente perché i Greci avevano familiarità con linee, dette asintotiche, che pur non incontrandosi in alcuna regione limitata del piano, tendevano ad incontrarsi all'infinito. Non era dunque evidente che per un punto esterno ad una retta si potesse tracciare soltanto una parallela. Occorsero molto tempo e l'ingegno di molti matematici per dirimere la questione, provando l'indipendenza con la costruzione di modelli di due nuove geometrie che, dal punto di vista della logica matematica, sono equivalenti alla geometria euclidea nel senso che ciascuna di esse è consistente se e solo se lo è la geometria euclidea.

Volendo schematizzare il problema, si può procedere secondo due direttive:

1. Cancellare il V postulato e studiare tutto quello che si può dedurre dai rimanenti postulati. Si ottiene una geometria nota come geometria assoluta o neutrale.

2. Cercare di dimostrare la dipendenza del V postulato assumendo come ipotesi la sua negazione. Se si giunge ad una contraddizione questo significherà che il V postulato è in realtà deducibile dagli altri. Poiché il postulato in questione contiene due affermazioni, una di esistenza e l'altra di unicità, è possibile procedere in due modi negando solo l'unicità oppure negando l'esistenza.

Tutti i tentativi non portarono ad alcuna contraddizione; nacquero così due nuove geometrie, dette appunto *non euclidee*: la *geometria iperbolica* e la *geometria*

---

della geometria nella sua fondamentale opera: gli Elementi, divisa in 13 libri. Egli ha raccolto insieme, rielaborandolo e sistemandolo assiomaticamente, lo scibile matematico disponibile nella sua epoca. La sua opera è considerata esemplare per chiarezza e rigore espositivo, può considerarsi il testo per l'insegnamento della matematica di maggior successo della storia, ovvero il testo più letto dopo la Bibbia.

[7] Originariamente formulato da Euclide in una forma diversa ma equivalente: *"Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti"*. È sostituito nella tradizione didattica moderna dall'assioma di Playfair riportato sopra.

*ellittica*. L'indipendenza del V postulato fu definitivamente stabilita quando si costruirono modelli di tali geometrie.

La geometria iperbolica, il cui sviluppo è legato principalmente ai nomi di Gauss, Bolyai, Lobachevsky e Beltrami, nacque dalla negazione dell'unicità della parallela.

Si ottiene così il ***caso iperbolico*** sostituendo il V postulato con:

*"**Data una retta ed un punto P non appartenente ad essa, esistono diverse rette per P ad essa parallele**"*.

La geometria ellittica, il cui sviluppo è legato principalmente ai nomi di Gauss e Riemann, nacque dalla negazione dell'esistenza della parallela.

Si ottiene così il ***caso ellittico*** sostituendo il V postulato con:

*"**Data una retta ed un punto P non appartenente ad essa, non esiste alcuna retta per P ad essa parallela**"*.

La posizione di Carl Friedrich Gauss[8] (1777-1855) rispetto alle geometrie non euclidee è dicotomica. Da un lato in "Disquisitiones generales circas superficies curva*s*" (1827) studia le superfici nello spazio 3-dimensionale, definendo il concetto di *curvatura* che indicheremo con K. Dall'altro non parla mai esplicitamente di geometrie non-euclidee per non trovarsi invischiato nella controversia molto accesa all'epoca riguardante la possibilità di costruire "geometrie" differenti da quella di Euclide.

In base alla curvatura egli distingue i punti (si veda Figura 2.2.2) in:

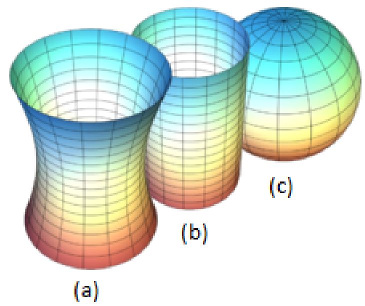
**(a) iperbolici** se $K < 0$ ;

**(b) parabolici** se $K = 0$ ;

**(c) ellittici** se $K > 0$ .

[8]Johann Friedrich Carl Gauss - (Braunschweig, 30 aprile 1777 – Gottinga, 23 febbraio 1855) è stato un matematico, astronomo e fisico tedesco, che ha dato contributi determinanti in analisi matematica, teoria dei numeri, statistica, calcolo numerico, geometria differenziale, geodesia, geofisica, magnetismo, elettrostatica, astronomia e ottica. Talvolta definito "il Principe dei matematici" (Princeps mathematicorum) o "il più grande matematico della modernità" (in opposizione ad Archimede, considerato dallo stesso Gauss come il maggiore fra i matematici dell'antichità), è annoverato fra i più importanti matematici della storia avendo contribuito in modo decisivo all'evoluzione delle scienze matematiche, fisiche e naturali.

Figura 2.2.2: Punti iperbolici, parabolici ed ellittici.




Molte proprietà geometriche locali dipendono da K, ad esempio la somma degli angoli interni di un triangolo. Egli non approfondisce la questione del postulato delle parallele.

Ricordiamo infine l'apporto di Felix Christian Klein[9] (1849-1925) che in "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti - Programma di Erlangen "(1872) diventa promotore di un nuovo modo di guardare alla geometria che ha il vantaggio di unificare geometrie euclidee e non euclidee, fondandosi sul concetto di ***gruppo di trasformazioni***:

"*Il concetto più essenziale fra quelli necessari per quanto esporremo in seguito è quello di gruppo di trasformazioni dello spazio.*"

Klein dimostra che **studiare differenti geometrie è equivalente a studiare differenti gruppi (di simmetrie) ed individuare le quantità invarianti**. Si occupa di geometrie non-euclidee, in particolare di quella *iperbolica* della quale fornisce un modello che prende il suo nome: *il modello di Klein*.

[9]Felix Christian Klein (Düsseldorf, 25 aprile 1849 – Gottinga, 22 giugno 1925) è stato un matematico tedesco. È conosciuto soprattutto per i suoi contributi alla geometria non euclidea, ai collegamenti tra geometria e teoria dei gruppi e per alcuni risultati sulla teoria delle funzioni. Aveva iniziato la sua carriera con l'intenzione di diventare un fisico, ma nel 1868 conseguì il suo dottorato con una dissertazione intitolata: "Sulla geometria e le sue applicazioni alla meccanica". Fu fortemente sostenuto da Alfred Clebsch, che lo considerava come il potenziale miglior matematico del suo tempo, così ottenne una cattedra alla giovane età di 23 anni. Egli si ricorda anche per essere stato il primo descrittore della superficie geometrica dello spazio 4-dimensionale nota come *bottiglia di Klein*.

## 2.3 La nascita della teoria della relatività

Jules-Henri Poincaré[10] (1854-1912) in "Analysis Situs" (1895-1904) pone le basi della topologia algebrica. Si occupa di geometrie non-euclidee, in particolare di quella *iperbolica* e ne fornisce un modello: *la n-palla di Poincaré*. Egli nel suo articolo "Sur la dinamique de l'électron" (1905) dimostra l'**invarianza delle equazioni di Maxwell** rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Lo fa partendo dall'ipotesi della contrazione di Lorentz e dalle sue trasformazioni dimostrando che esse formano un gruppo: il *gruppo di Lorentz*.

Poincaré è il primo a parlare di ***postulato di relatività***, arriva alla sua formulazione poco prima del fisico tedesco Albert Einstein e per questo viene considerato da alcuni il padre della teoria della relatività ristretta; tuttavia egli non esprime una posizione chiara sull'esistenza o meno dell'etere e non dà un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti. Gli studi di Einstein sulla teoria della relatività iniziano proprio con i lavori di Lorentz e Poincaré che, come detto, sviluppano un formalismo matematico senza rinunciare mai all'ipotesi dell'etere come sistema di riferimento privilegiato (anche Maxwell, pur criticando ironicamente i vari "eteri" non ne può fare a meno per il suo elettromagnetismo).

Einstein, in un'ottica di unitarietà delle leggi della fisica e credendo corrette le equazioni di Maxwell, ha il merito di reinterpretare tutto il lavoro fatto alla luce del concetto di relatività del moto. Egli riteneva che non esistesse il moto assoluto e che la dinamica di Galilei e Newton dovesse essere riconsiderata con le nuove trasformazioni di coordinate formalizzate da Lorentz e corrette successivamente da Poincaré, così facendo rese inutile l'ipotesi dell'etere.

Sebbene nel 1887, dopo l'esperimento di A. A. Michelson ed E. W. Morley[11], l'idea dell'etere sembrasse dover cadere per evidenze sperimentali, in realtà bisognerà aspettare il 1905 affinché essa venga messa in discussione davvero e abbandonata da Einstein. Tutta questa attesa si deve probabilmente alla grande difficoltà dell'epoca (e non solo) nell'accettare la possibilità di considerare una meccanica diversa da quella newtoniana, confermata da numerosi esperimenti, soprattutto dal senso comune di ogni individuo che riesce a toccare con mano i suoi effetti.

Nella nascita di questa nuova teoria fisica il ruolo dell'esperimento di Michelson e Morley è solo marginale, le motivazioni di Einstein sono da ricercarsi piuttosto in asimmetrie collegate alla teoria elettromagnetica di Maxwell. Negli scritti del 1905 il fisico tedesco parla così:

*"È noto che l'elettrodinamica di Maxwell – così come viene oggi generalmente*

[10] Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 – Parigi, 17 luglio 1912) fu uno dei piu grandi matematici di tutti i tempi, al pari di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1719), Leonhard Euler (Eulero: 1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Bernhard Riemann (1826-1866), David Hilbert (1862-1943). Fu anche un epistemologo di grandissima importanza ed influenza.

[11] Dal punto di vista sperimentale in realtà si erano già fatte diverse osservazioni prima degli esperimenti di Michelson-Morley: il fenomeno dell'aberrazione stellare (in particolare di una stella, $\gamma$ Draconis) di Bradley (1728); gli esperimenti di Fresnel (1816) e Fizeau (1851).

*intesa – conduce, quando la si applica a corpi in movimento,* ***ad asimmetrie che non sembrano inerenti ai fenomeni.*** *[...]. Esempi di questo tipo, uniti ai tentativi falliti di rilevare un qualche movimento della Terra rispetto al "mezzo luminifero", portano ad ipotizzare che anche i fenomeni elettrodinamici, come quelli meccanici, non possiedano proprietà corrispondenti al concetto di quiete assoluta."*

Il 19 dicembre 1952 (in occasione del centenario della nascita di Michelson), in una lettera inviata per un incontro speciale della società di fisica a Cleveland, ribadisce:

***"L'influenza del famoso esperimento di Michelson-Morley sulle mie riflessioni è stato piuttosto indiretto. Ne venni a conoscenza attraverso la fondamentale ricerca di H.A. Lorentz sull'elettrodinamica dei corpi in movimento di cui ero al corrente prima di esporre la teoria speciale della relatività****. L'assunto fondamentale di Lorentz di un etere in quiete non mi sembrò convincente in sè stesso precisamente perché conduceva a un'interpretazione dell'esperimento di Michelson-Morley che mi apparve artificiosa. Ciò che mi condusse direttamente alla teoria speciale della relatività fu la convinzione che la forza elettromotrice indotta in un corpo in moto in un campo magnetico non era nient'altro che un campo elettrico. Ma ero anche guidato dal risultato dell'esperimento di Fizeau e dal fenomeno dell'aberrazione.* ***Non esiste, naturalmente, nessuna via logica che conduce alla creazione di una teoria ma soltanto incerti tentativi di costruzione con un controllo attento della conoscenza fattuale****".*

In seguito Hermann Minkowski[12]fornisce una rivisitazione geometrica della relatività einsteiniana introducendo nel suo articolo "Raum und Zeit" (1908) (Spazio e tempo) un'unica struttura di *spazio non euclideo*, da allora noto come *spazio di Minkowski*, in cui il tempo e lo spazio non sono entità separate ma connesse fra loro in uno *spazio-tempo quadridimensionale* e nel quale le trasformazioni di Lorentz possono essere opportunamente rappresentate.
In una sua celebre citazione ne parla così:

***"D'ora in poi lo spazio di per se stesso e il tempo di per se stesso sono condannati a svanire in pure ombre, e solo una specie di unione tra i due concetti conserverà una realtà indipendente."***

Tale rappresentazione risultò utile e senz'altro aiutò le indagini successive di Einstein. La strada fu molto più tortuosa rispetto alla relatività speciale, ma nel 1915 il fisico tedesco arriverà a formulare la teoria della relatività generale dove il ruolo delle nuove geometrie, le *geometrie non euclidee*, diventò fondamentale nel processo creativo e costruttivo.

[12]Hermann Minkowski (Kaunas, 22 giugno 1864 – Gottinga, 12 gennaio 1909), è stato un matematico lituano naturalizzato tedesco. Formatosi a Konigsberg, assieme al suo compagno di liceo David Hilbert in seguito suo collega all'Universita di Gottinga, nel 1883 fu insignito del Premio della Matematica dell'Académie des Sciences francese per la sua teoria delle forme quadratiche. Minkowski insegnò presso le Università di Bonn, Gottinga, Königsberg e Zurigo dove fu uno degli insegnanti di Albert Einstein. È famoso anche per i suoi contributi alla geometria dei numeri e per la disuguaglianza che porta il suo nome.

# Capitolo 3

# La relatività senza Einstein

In questo capitolo si propone una trattazione didattica sulla teoria della relatività ristretta che seguirà un approccio geometrico. In primo luogo si parlerà dell'esperimento di Michelson-Morley, riportando la trattazione di R. Resnick in [13], per arrivare alle trasformazioni di H.A. Lorentz; poi si farà vedere come queste formano il gruppo di Lorentz. Nella seconda parte si introdurrà la pseudodistanza e lo spaziotempo di Minkowski per rappresentare geometricamente le trasformazioni appena ottenute ed arrivare ad osservare che, nel caso bidimensionale, le nuove curve invarianti sono le iperboli. Infine si verificheranno sui diagrammi di Minkowski gli effetti relativistici: la relatività della simultaneità, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze.
Il percorso proposto prende spunto da una rivisitazione in chiave didattica dei lavori di H.A. Lorentz [4], J.H. Poincaré [7] e H. Minkowski [7]. Si inserisce quindi naturalmente in un quadro storico che fa da sfondo all'articolazione dei contenuti e, a discrezione del docente, può essere reso più o meno esplicito durante la trattazione degli argomenti.

**ARTICOLAZIONE DEI CONTENUTI DELLA TRATTAZIONE DIDATTICA**

1. Esperimento di Michelson-Morley.

2. Spiegazione dei risultati dell'esperimento di Michelson-Morley da parte di Lorentz: fattore di contrazione di Lorentz-FitzGerald e tempo locale.

3. Dimostrazione di Poincaré del fatto che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo e che $c$ è la velocità limite.

4. Analogie tra il gruppo delle rotazioni e il gruppo di Lorentz: le curve invarianti e la metrica.

5. Effetti relativistici sul piano di Minkowski.

Come attività introduttiva alla trattazione didattica si propone la lettura preliminare di un testo dove siano presenti i concetti di riferimento, spazio, tempo,

spaziotempo, distanza e geometria.
Gli esempi possono essere molteplici, quello da me proposto è la lettura del capitolo "T con zero" da "T con zero" di Italo Calvino. La motivazione nasce sia dal gusto personale che dal ritenerlo un possibile spunto interdisciplinare per evidenziare la rilevanza della teoria della relatività, non solo nel mondo scientifico, ma anche nella letteratura e quindi nella società.
Dopo la lettura si faranno emergere da una discussione in classe (o eventualmente tramite un questionario o l'assegnazione di un saggio breve) le preconoscenze degli studenti e le diverse visioni personali sui concetti sopra elencati: riferimento, spazio, tempo, spaziotempo, distanza e geometria. Si utilizzerà la discussione per richiamare e condividere il significato (fisico) di "riferimento" e (matematico) di "sistema di coordinate", le trasformazioni di Galileo, il principio di inerzia di Newton, i concetti di spazio e tempo assoluti,[1] distanza e geometria euclidea. Si lascia aperta la definizione di "spaziotempo" che verrà chiarita nel corso dell'unità didattica.

## 3.1 Prerequisiti

Al fine di affrontare adeguatamente questo approccio geometrico alla relatività è importante negli anni precedenti aver messo in luce particolari aspetti di alcuni degli argomenti trattati.

In particolare:

- aver introdotto la rappresentazione matriciale delle trasformazioni geometriche piane, con particolare riguardo alle rotazioni;
- aver messo in evidenza come le funzioni circolari forniscano una parametrizzazione della circonferenza;
- aver accennato al concetto di curva invariante rispetto ad una trasformazione piana, ed aver osservato come le circonferenze centrate in un punto P siano invarianti per rotazioni centrate in P;
- aver messo in evidenza la rappresentazione trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi ed il significato geometrico delle operazioni tra di essi;
- aver già introdotto la definizione di gruppo che comunque verrà ripresa anche nella sottosezione 3.2.2.

Infine è importante aver preventivamente introdotto le funzioni iperboliche e il loro significato geometrico. Tale argomento può essere affrontato: nel primo biennio, in analogia con le funzioni circolari e la loro proprietà di parametrizzare la circonferenza; nel secondo biennio, agganciandolo allo studio qualitativo della funzione esponenziale; oppure l'ultimo anno, a partire da uno studio di funzione. Qui di seguito presentiamo un'introduzione pensata per un primo biennio.

[1] Se ne propone un richiamo al capitolo 2, sottosezione 2.2.1.

Richiamiamo brevemente alcune nozioni sulle funzioni circolari $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$. Esse sono caratterizzate dalle seguenti relazioni fondamentali:

$$\begin{cases} \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases} \qquad (1)$$

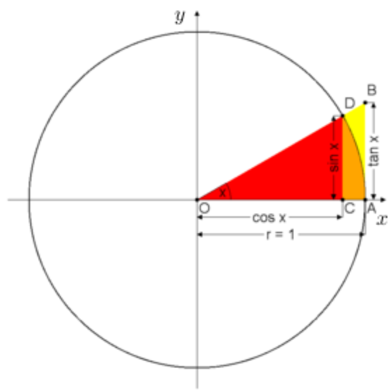



Figura 3.1.1: Rappresentazione grafica delle funzioni circolari.

La prima di tali relazioni è conseguenza del Teorema di Pitagora: infatti un generico punto $D$ sulla circonferenza goniometrica di raggio $r = 1$ è parte di un triangolo rettangolo $OCD$ che ha per cateti $OC = \cos(x)$ e $CD = \sin(x)$ (si veda Figura 3.1.1). Si noti quindi che dipende dal fatto che stiamo utilizzando la metrica euclidea.
Un modo equivalente di ottenere la medesima relazione lo possiamo dedurre osservando la Figura 3.1.2 nel modo seguente.

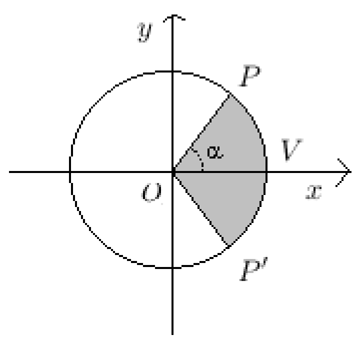



Figura 3.1.2: Parametrizzazione di angolo $\alpha$.

Notiamo che possiamo associare biunivocamente ad ogni angolo di ampiezza $\alpha$, con il vertice nell'origine $O$, un lato coincidente con la semiretta delle ascisse positive e misurato a partire da essa in senso antiorario, un punto $P = (x, y)$ della circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$. Le coordinate $x$ e $y$ sono allora funzioni parametriche di $\alpha$.
Ponendo quindi:

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha) \\ y = \sin(\alpha) \end{cases}$$

e sostituendo le espressioni parametriche $x$ e $y$ alle variabili dell'equazione della circonferenza goniometrica si ha: $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ cioè la prima relazione di (1).
Va notato che il parametro $\alpha$, oltre che come ampiezza dell'angolo $POV$, può essere geometricamente interpretato come area $A$ del settore circolare $POP'$ dove $P'$ è il punto simmetrico di $P$ rispetto all'asse delle ascisse. Vale infatti

$$A_{cerchio} : \ A_{settore\ circolare} = 2\pi : \ 2\alpha$$

da cui si ha, per $r = 1$,

$$\pi r^2 : \ A = 2\pi : \ 2\alpha \longrightarrow 2\pi A = 2\alpha\pi \longrightarrow A = \alpha.$$

In modo del tutto analogo al caso richiamato sopra, consideriamo nel piano cartesiano l'iperbole equilatera $\gamma : \ x^2 - y^2 = 1$.

Questa iperbole è costituita da due rami simmetrici rispetto all'asse delle ordinate di cui quello destro interseca l'asse delle ascisse nel punto $V = (1, 0)$, si veda Figura 3.1.3.

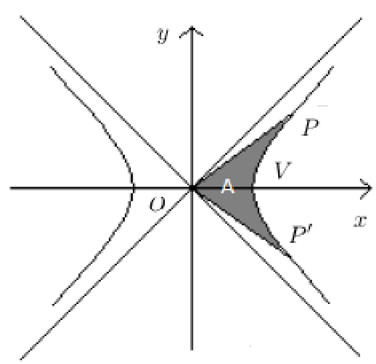



Figura 3.1.3: Parametrizzazione di area $A$.

Si considerino un punto $P = (x, y)$ del ramo destro dell'iperbole e il suo simmetrico $P'$ rispetto all'asse delle ascisse. Si traccino i segmenti $PO$ e $OP'$. Si consideri l'area $A$ della figura delimitata dai segmenti $PO$, $OP'$ e dall'arco di iperbole $PVP'$; si possono interpretare le coordinate $x$ e $y$ di $P$ come funzioni parametriche di $A$.
Come rappresentato in Figura 3.1.4 la funzione che dà l'ascissa del punto in funzione di $A$ è detta coseno iperbolico (ed è denotata con cosh), quella che dà l'ordinata è detta seno iperbolico (ed è denotata con sinh).

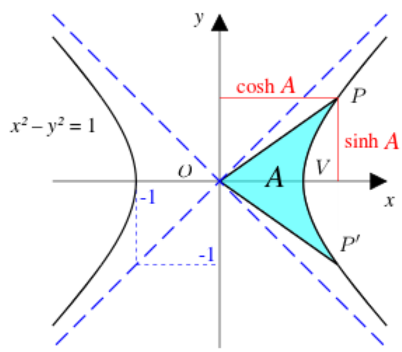



Figura 3.1.4: Rappresentazione grafica delle funzioni iperboliche.

Parametrizzando la curva analogamente al caso della circonferenza si ha:

$$\begin{cases} x = \cosh(A) \\ y = \sinh(A) \end{cases}$$

Sostituendo tali funzioni alle variabili nell'equazione dell'iperbole e denominando tangente iperbolica (denotata con tanh) il rapporto tra seno e coseno iperbolici, si ottengono le relazioni fondamentali tra le funzioni iperboliche:

$$\begin{cases} \cosh^2(A) - \sinh^2(A) = 1 \\ \tanh(A) = \frac{\sinh(A)}{\cosh(A)} \end{cases}$$

Da queste identità fondamentali si possono dedurre molte altre uguaglianze in modo del tutto analogo a quello seguito per le funzioni trigonometriche circolari, al nostro scopo sarà sufficiente limitarsi a ricavare quelle uguaglianze che esprimono seno e coseno iperbolici in funzione della tangente iperbolica.
Per $\sinh(A)$ si ha:

$$\sinh^2(A) = \frac{\sinh^2(A)}{\cosh^2(A) - \sinh^2(A)} = \frac{\tanh^2(A)\cosh^2(A)}{\cosh^2(A) - \sinh^2(A)} =$$

$$= \frac{\tanh^2(A)\cosh^2(A)}{\cosh^2(A)(1 - \frac{\sinh^2(A)}{\cosh^2(A)})} = \frac{\tanh^2(A)}{1 - \tanh^2(A)}$$

Da cui:

$$\sinh(A) = \frac{\tanh(A)}{\sqrt{1 - \tanh^2(A)}} .$$

Analogamente per il $\cosh(A)$ si ha:

$$\cosh^2(A) = \frac{\cosh^2(A)}{\cosh^2(A) - \sinh^2(A)} = \frac{\sinh^2(A)}{\tanh^2(A)(\cosh^2(A) - \sinh^2(A))} =$$

$$= \frac{\sinh^2(A)}{\tanh^2(A)(\cosh^2(A))(1 - \frac{\sinh^2(A)}{\cosh^2(A)})} = \frac{\tanh^2(A)}{\tanh^2(A)(1 - \tanh^2(A))} =$$

$$= \tfrac{1}{1-\tanh^2(A)}$$

Da cui:

$$\cosh(A) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(A)}} .$$

Nel corso del quinto anno ci si potrebbe chiedere inoltre: è possibile derivare espressioni analitiche per il seno iperbolico e il coseno iperbolico (precedentemente definiti per via geometrica) in termini di altre funzioni note semplici? Sì, è possibile.
Cominciamo con il coseno iperbolico.

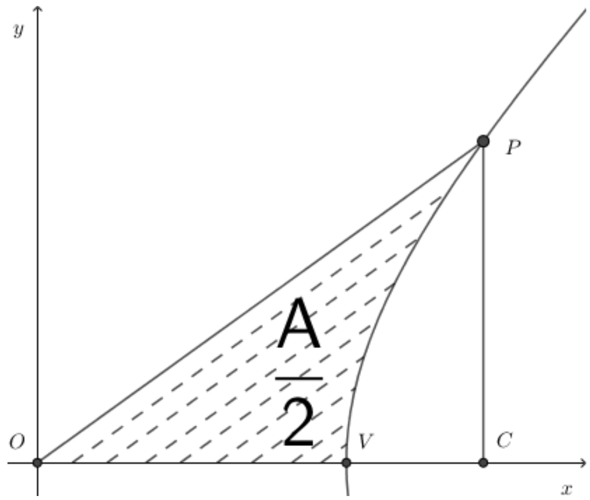



Figura 3.1.5: Dall'area $\frac{A}{2}$ al $\cosh(\frac{A}{2})$.

Sia $P = (x, y)$ un punto sull'iperbole avente entrambe le coordinate non negative. L'area $\frac{A}{2}$ del settore iperbolico $OVP$, tratteggiata in Figura 3.1.5, è pari alla differenza tra l'area del triangolo $OPC$ e l'area della regione di piano delimitata dall'arco di iperbole $VP$, dall'asse $x$ e dal segmento $PC$. Possiamo dunque scrivere, ricordando che il vertice $V$ dell'iperbole è il punto $(1, 0)$:

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt.$$

Integrando per parti $\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$ otteniamo:

$$x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \frac{t^2-1+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \left(\sqrt{t^2-1} + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)dt.$$

Osserviamo ora che la derivata di $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ è $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, e arriviamo a

$$\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt = x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$$

quindi

$$\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2}$$

e

$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2}=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Poniamo $\frac{A}{2}=t$ e ricaviamo

$$e^t=x+\sqrt{x^2-1}\longrightarrow x^2-1=\left(e^t-x\right)^2$$

$$x=\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}.$$

Potremmo seguire un analogo procedimento per il seno iperbolico, tuttavia non sarebbe più istruttivo del calcolo appena fatto: deduciamo perciò l'espressione analitica del seno iperbolico ricordando che il punto $P$ appartiene all'iperbole per cui le sue coordinate soddisfano la condizione: $x^2-y^2=1$.
Per $y\geq 0$ si ha:

$$y=\sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}=\sqrt{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}=\left|\frac{e^e-e^{-t}}{2}\right|=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\sinh t$$

poiché $e^t\geq e^{-t},\ \forall t\in\mathbb{R}$.

## 3.2 Il problema dell'invarianza delle equazioni di Maxwell

### 3.2.1 L'esperimento di Michelson-Morley e la contrazione FitzGerald-Lorentz

Alla fine dell'800 la teoria dell'elettromagnetismo di James Clerk Maxwell e le esperienze di Heinrich Hertz avevano identificato la luce come un'onda elettromagnetica. All'epoca si ipotizzava l'esistenza di una sostanza chiamata *etere* che doveva servire come mezzo per trasmettere la luce e la radiazione elettromagnetica. Quando noi oggi diciamo che la velocità del suono nell'aria secca a 0° C è di $331,3$m/s, implicitamente ci riferiamo ad un osservatore, e a un corrispondente sistema di riferimento, fisso nella massa d'aria attraverso la quale si sta muovendo il suono. La velocità del suono per osservatori in movimento rispetto a questa massa d'aria è data correttamente dalla trasformazione Galileiana delle velocità.[2] Quando, oggi, diciamo che la velocità della luce nel vuoto è circa di $3\times 10^8$m/s non è affatto chiaro quale sistema di riferimento sia in gioco. Un sistema di riferimento fisso nel mezzo di propagazione della luce presenta delle difficoltà perché, contrariamente al caso del suono, non sembra che esista per essa nessun mezzo. Tuttavia sembrava inconcepibile ai fisici del XIX secolo che la luce e le altre onde elettromagnetiche, contrariamente a tutti gli altri tipi di onde, potessero propagarsi in assenza di un mezzo. Come le

[2] Vedi capitolo 2, sottosezione 2.2.1.

onde sonore richiedono un mezzo rispetto al quale si può misurare la velocità del suono, così si pensava che le onde luminose dovessero muoversi anch'esse in qualche mezzo che ancora doveva essere scoperto e che doveva possedere insolite proprietà, come una densità nulla e una perfetta trasparenza, per rendere conto del fatto che non si riuscisse a rivelarlo. Si ipotizzò che esse si propagassero in un mezzo materiale particolare, definito anche *mezzo luminifero*, presente in tutto l'universo. Il moto della Terra e dei pianeti causava lo spostamento di questo etere, dando luogo al cosiddetto *vento d'etere*. Si ipotizzò, quindi, che le equazioni dell'elettromagnetismo fossero applicabili alle onde luminose solo nel caso di un sistema di riferimento solidale con l'etere e, non essendo invarianti per una generica trasformazione galileiana, assumessero forma diversa in sistemi di riferimento in moto rispetto all'etere. Per studiare il moto delle onde luminose era quindi necessario tener conto anche del vento d'etere causato dal moto della Terra attraverso questo mezzo. Si era arrivati alla conclusione che si potessero ideare esperienze tali da mettere in luce il movimento di un corpo rispetto all'etere mediante l'osservazione dei fenomeni elettromagnetici che si svolgono in esso, contraddicendo così il principio di relatività:

**Tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti dal punto di vista fisico, cioè in tutti i riferimenti inerziali valgono le leggi della meccanica.**

In particolare il vento d'etere poteva essere rivelato misurando la velocità della luce che, nell'ambito dell'ipotesi considerata, doveva essere diversa a seconda della direzione in cui essa si propagava. Un osservatore in movimento attraverso l'etere con velocità $v$ doveva misurare una velocità $c' = c + v$ o $c' = c - v$ rispettivamente "con vento a favore" o "contro vento". Se un etere esiste la terra si dovrebbe muovere attraverso esso durante il suo moto di rotazione e rivoluzione. Se supponiamo che $v$ sia uguale alla velocità orbitale della terra rispetto al sole, circa 30km/s, allora $\frac{v}{c} \approx 10^{-4}$. Esperimenti ottici, accurati fino al primo ordine in $\frac{v}{c}$, non furono in grado di mettere in evidenza il moto assoluto della terra attraverso l'etere.
Era opinione generale che una verifica non ambigua dell'ipotesi dell'etere richiedesse un esperimento che misurasse effetti del secondo ordine, cioè, che misurasse $\frac{v^2}{c^2}$. Il fisico americano A.A. Michelson nel 1879 ebbe occasione di leggere una nota di Maxwell nella quale si mostrava l'impossibilità sperimentale, con metodi terrestri, di fare misure della velocità della Terra rispetto all'etere poiché tali misure comportavano effetti dipendenti dal quadrato del rapporto tra la velocità della Terra $v$ e quella della luce $c$ che prevedevano una precisione di $1/10^8$. Michelson raccolse la sfida di Maxwell e si propose di costruire un interferometro ottico abbastanza sensibile da rendere misurabile il valore del rapporto $\frac{v^2}{c^2}$. Ideò una serie di esperienze tra il 1881 ed il 1891, migliorando via via l'apparato sperimentale insieme allo scienziato americano W.M. Morley[3], che lo affiancò

[3]Michelson all'epoca era professore di fisica alla Case School of Applied Science, Morley lo era di chimica alla Case Western Reserve University con sede a Cleveland; la loro collaborazione nasce in occasione di un campus a Cleveland tra le due università. La versione più precisa dell'esperienza venne portata a termine nel 1887 e nel 1907 Michelson ricevette il premio Nobel per la fisica proprio grazie alla sua invenzione dell'interferometro e a molti altri

dal 1885 in poi.
Descriviamo l'esperimento di Michelson e Morley.

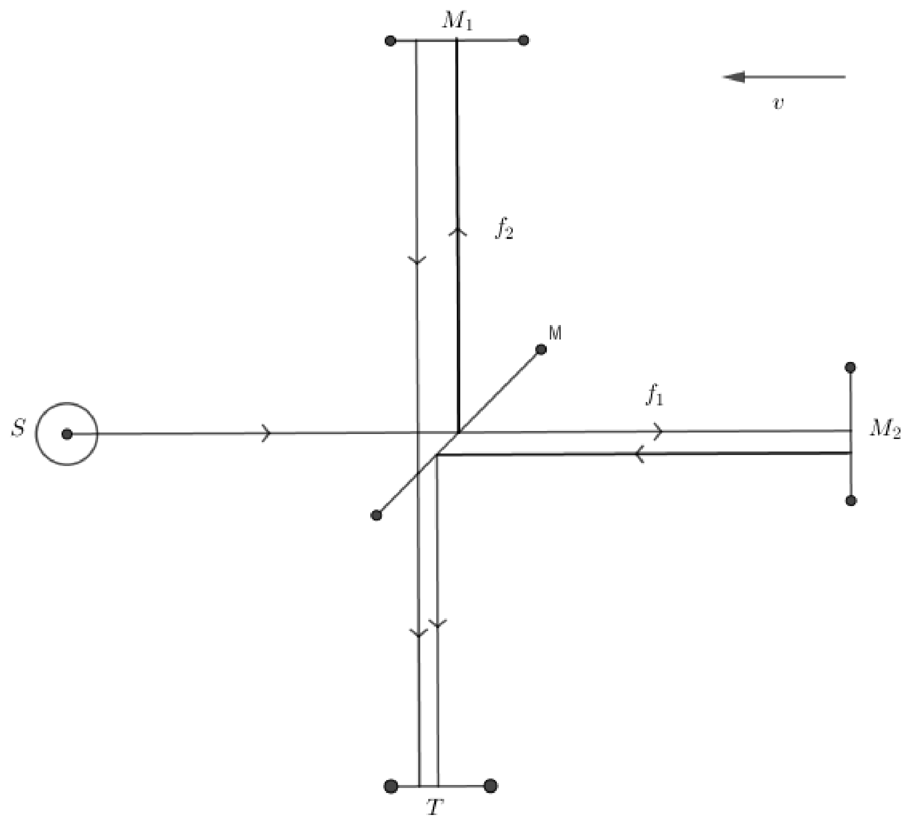



Figura 3.2.1: Rappresentazione semplificata dell'interferometro di Michelson che mostra come il fascio proveniente dalla sorgente S venga diviso in due fasci dallo specchio semiargentato M. I fasci sono riflessi dagli specchi $M_1$ e $M_2$ e ritornano allo specchio semiargentato. I fasci sono poi trasmessi al telescopio T in figura dove interferiscono, dando luogo ad un sistema di frange. In questa figura $\overrightarrow{v}$ è la velocità dell'etere rispetto all'interferometro.

esperimenti di ottica.

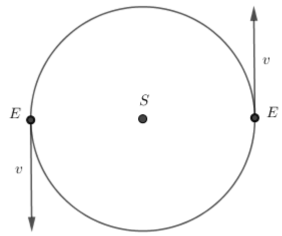



Figura 3.2.2: Rappresentazione della terra $E$ che si muove con una velocità orbitale di 30km/s lungo la sua orbita quasi circolare attorno al sole $S$, invertendo la direzione del suo moto ogni sei mesi.

L'interferometro di Michelson (Figura 3.2.1) è connesso con la terra. Se noi immaginiamo che l'etere sia fisso rispetto al sole, allora la terra (e con essa l'interferometro) si muove nell'etere alla velocità di 30km/s, in direzioni diverse nelle diverse stagioni (Figura 3.2.2). Per il momento trascuriamo il moto rotatorio della terra. Il fascio di luce (onde piane, ossia raggi paralleli) proveniente dalla sorgente S posta nel laboratorio (fisso rispetto allo strumento) è decomposto dallo specchio semiargentato M in due fasci coerenti, il fascio $f_1$ trasmesso da M e il fascio $f_2$ riflesso da M. Il fascio $f_1$ è riflesso all'indietro verso M dallo specchio $\mathrm{M}_1$ e il fascio $f_2$, analogamente, dallo specchio $\mathrm{M}_2$. In seguito il fascio riflesso $f_1$ è parzialmente riflesso, mentre quello $f_2$ è parzialmente trasmesso da M verso un telescopio T dove ha luogo l'interferenza. L'interferenza è costruttiva o distruttiva a seconda della differenza di fase dei fasci. La superficie semiargentata di M è inclinata a 45° rispetto alle direzioni dei fasci. Se $\mathrm{M}_1$ e $\mathrm{M}_2$ sono quasi ortogonali (ma non esattamente), osserveremo nel telescopio un sistema di frange (vedi Figura 3.2.3) costituito di linee approssimativamente parallele, molto simile a quelle che otteniamo da un sottile strato d'aria compreso tra due lastre di vetro.

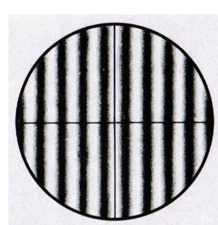


Figura 3.2.3: Rappresentazione di un tipico sistema di frange visto attraverso un telescopio $T$ quando $\mathrm{M}_1$ e $\mathrm{M}_2$ non sono esattamente ortogonali.

Calcoliamo la differenza di fase fra i fasci $f_1$ e $f_2$. Questa differenza può sorgere da due cause, i diversi cammini percorsi, $l_1$ e $l_2$, e le diverse velocità di propagazione rispetto allo strumento a causa della velocità del vento d'etere $v$. La seconda causa, per il momento, è quella cruciale. Per rendere intuitivamente il senso di queste diverse velocità possiamo riferirci all'immagine di una persona che nuoti in una corrente. Per un osservatore che si trovi sulla spiaggia si possono distinguere due tipi di velocità: una perpendicolare alla corrente (dovuta al moto ondoso) e l'altra nella direzione della corrente (nello stesso verso o in verso opposto). Nel nostro caso il tempo impiegato dal fascio 1 per fare il percorso di andata e ritorno fra M e M$_1$ è $t_1$:

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1 c}{(c-v)(c+v)} = \frac{2l_1}{c(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

in quanto la luce, la cui velocità nell'etere è $c$, ha, rispetto all'apparato, una velocità $c+v$ "nel verso della corrente" nel tratto da $M_1$ a $M$ e una velocità $c-v$ nel verso opposto ("contro corrente").

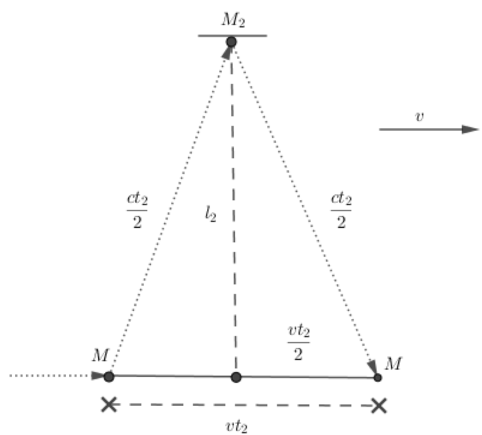



Figura 3.2.4: Rappresentazione del "cammino perpendicolare alla corrente" del fascio $f_2$. Gli specchi si muovono attraverso l'etere a velocità $v$, mentre la luce si muove attraverso l'etere a velocità $c$. La riflessione dallo specchio in movimento dà automaticamente il cammino perpendicolare alla corrente. In questa figura $\overrightarrow{v}$ è la velocità dell'interferometro rispetto all'etere.

Il percorso del fascio $f_2$, di andata e ritorno fra M e M$_2$ è un cammino attraverso l'etere perpendicolare alla "corrente", come è mostrato nella Figura 3.2.4, in quanto il fascio ritorna sullo specchio M (che sta avanzando). Il tempo di transito $t_2$ è dato da:

$$2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2} = ct_2$$

ovvero

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Il calcolo di $t_2$ è fatto nel riferimento dell'etere, quello di $t_1$ nel riferimento dell'apparato. Poichè nella fisica classica il tempo è una grandezza assoluta, ciò è classicamente perfettamente accettabile. Si noti che entrambe gli effetti sono del secondo ordine ($\frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-8}$) e nella stessa direzione (aumentano il tempo di transito rispetto al caso $v = 0$). La differenza fra i tempi di transito è:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right).$$

Supponiamo che lo strumento venga ruotato di 90°, allora $l_1$ è il cammino perpendicolare alla "corrente" e $l_2$ quello parallelo alla "corrente". Se si denotano i tempi corrispondenti con degli apici, la stessa analisi precedente dà per la differenza fra i tempi di transito:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Quindi, la rotazione cambia le differenze di:

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2 + l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2 + l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Usando lo sviluppo di Taylor e trascurando i termini di ordine superiore al secondo, troviamo:

$$\Delta t' - \Delta t \simeq \frac{2}{c}(l_1 + l_2)\left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \left(\frac{l_1 + l_2}{c}\right)\frac{v^2}{c^2}.$$

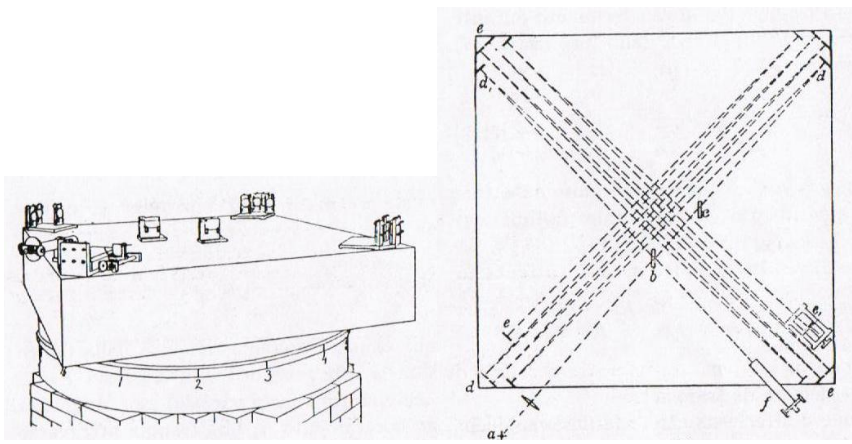
Perciò, la rotazione dovrebbe causare uno spostamento della figura di interferenza, poichè essa cambia la relazione di fase fra i fasci $f_1$ e $f_2$. Se la differenza di cammino ottico fra i fasci varia di una lunghezza d'onda, per esempio, ci sarò uno spostamento di una frangia attraverso un riferimento posto nel telescopio di osservazione. Indichiamo con $\Delta N$ il numero di frange che transitano attraverso l'origine di questo riferimento durante lo spostamento della figura. Allora, se la lunghezza della luce usata è $\lambda$ di modo che il periodo di vibrazione è $T = \frac{1}{v} = \frac{\lambda}{c}$,

$$\Delta N = \frac{\Delta t' - \Delta t}{T} \simeq \frac{l_1 + l_2}{cT}\frac{v^2}{c^2} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}.$$

Michelson e Morley furono in grado di ottenere un cammino ottico $l_1 + l_2$ di circa 22m. Nel loro esperimento i bracci erano (all'incirca) della stessa lunghezza, cioè, $l = l_1 = l_2$ , quindi $\Delta N = \frac{2l}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$.
Se prendiamo $\lambda = 5,5\times10^{-7}$m e $\frac{v}{c} = 10^{-4}$, dall'equazione precedente otteniamo:

$$\Delta N = \frac{22\cancel{m}}{5,5\times10^{-7}\cancel{m}}10^{-8} = 0,4\ .$$

Cioè uno spostamento di $\frac{4}{10}$ di frangia!



(a) Disposizione dell'apparato di Michelson e Morley.

(b) Vista piana.

Figura 3.2.5: Le linee spezzate a tratto pieno mostrano gli spostamenti di frange osservati nell'esperimento di Michelson-Morley in funzione dell'angolo di rotazione dell'interferometro. Le curve tratteggiate, che dovrebbero essere amplificate di un fattore 8 per essere portate nella scala corretta, mostrano lo spostamento di frange previsto dall'ipotesi dell'etere.

Michelson e Morley montarono l'interferometro su una massiccia lastra di pietra per ragioni di stabilità (si veda Figura 3.2.5 (a)) e fecero galleggiare il dispositivo nel mercurio in modo che esso potesse venire dolcemente ruotato attorno ad un perno centrale. Per rendere il cammino della luce più lungo possibile furono disposti sulla lastra degli specchi in modo da fare percorrere ai raggi, con successive riflessioni, otto percorsi di andata e ritorno. Le frange venivano osservate durante la rotazione continua del dispositivo e si sarebbe potuto mettere in evidenza uno spostamento di 1/100 di frangia (si veda Figura 3.2.5 (b)). Furono eseguite osservazioni durante il giorno e la notte (in quanto la terra ruota attorno al proprio asse) e durante le stagioni dell'anno (in quanto la terra gira attorno al sole), ma non fu rilevato lo spostamento di frange che ci si aspettava. La conclusione sperimentale fu, infatti, che non c'era alcun spostamento di frange. Questo risultato nullo ($\Delta N = 0$) era un tale colpo per l'ipotesi dell'etere che l'esperimento fu ripetuto da molti sperimentatori nei successivi cinquant'anni. Il risultato nullo fu ampliamente confermato e costituì un grande stimolo per la ricerca teorica e sperimentale. Osserviamo che l'esperimento dipende in modo essenziale dalla rotazione di 90° dell'interferometro, cioè, dallo scambio di ruolo di $l_1$ ed $l_2$, durante il moto del dispositivo nell'etere con velocità $v$. Nel fare previsioni sullo spostamento delle frange abbiamo preso per $\overrightarrow{v}$ la velocità della terra rispetto ad un etere fisso rispetto al sole. Tuttavia, lo stesso sistema solare potrebbe essere in moto rispetto all'ipotetico etere. Effettivamente, i risultati sperimentali stessi determinano la velocità della terra rispetto all'etere, se ne esistesse effettivamente una, e questi risultati danno $v = 0$. Ora, se ad un certo istante la velocità fosse zero in questo etere, non ci si dovrebbe aspettare, naturalmente, alcun spostamento di frange. Ma la velocità non può essere sempre zero, poichè la velocità del dispositivo cambia dal giorno alla notte (poichè la terra ruota su se stessa) e da stagione a stagione (poichè la terra ruota attorno al sole). Perciò, l'esperimento dipende non solo dalla velocità "assoluta" della terra attraverso l'etere, ma anche dalla velocità variabile della terra rispetto all'etere. Questo moto variabile della terra attraverso l'etere dovrebbe essere messo in evidenza dagli esperimenti di precisione, se esistesse un riferimento dell'etere. Il risultato negativo sembra escludere l'esistenza di un riferimento (assoluto) dell'etere. Un modo per interpretare il risultato nullo è di concludere semplicemente che in ogni sistema inerziale la velocità misurata della luce è la stessa, cioè $c$, per tutte le direzioni. In questo caso infatti si avrebbe $\triangle N = 0$ nell'esperimento (con bracci uguali), essendo la velocità "lungo la corrente" e quella "perpendicolare alla corrente" uguale a $c$ invece che a $|c + v|$, in un qualunque riferimento. Tuttavia, tale conclusione, essendo incompatibile con le trasformazioni galileiane, sembrò a quel tempo troppo drastica dal punto di vista filosofico. Se la velocità della luce non dipendesse dal moto dell'osservatore, tutti i sistemi inerziali sarebbero equivalenti per la propagazione della luce e non ci potrebbe essere alcuna evidenza sperimentale per l'esistenza di un unico sistema inerziale, cioè l'etere. Perciò, per "salvare l'etere" e spiegare tuttavia il risultato di Michelson e Morley, gli scienziati suggerirono ipotesi alternative.

Tra coloro che tentarono di trovare spiegazioni alternative ci fu George Francis FitzGerald[4]. Dopo aver letto un articolo di O. Heaviside[5] in cui si mostrava che

[4]George Francis FitzGerald (Dublino, 3 agosto 1851 – Dublino, 22 febbraio 1901) è stato un fisico irlandese che assieme a Oliver Heaviside, Heinrich Rudolf Hertz e Oliver Lodge fu una figura di spicco nel gruppo dei "Maxwelliani". FitzGerald è meglio conosciuto per la congettura, espressa in "The Ether and the Earth's Atmosphere" (1889), secondo la quale se tutti gli oggetti in movimento si contraessero nella direzione del loro moto, allora si potrebbe spiegare il risultato anomalo dell'esperimento di Michelson-Morley. Il fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz giunse ad un'idea simile nel 1892, e la sviluppò in relazione alla propria teoria degli elettroni. La cosiddetta contrazione di FitzGerald-Lorentz (o di Lorentz-FitzGerald) divenne presto (1905) un importante elemento nella Teoria della relatività speciale di Albert Einstein.

[5]Oliver Heaviside (Londra, 18 maggio 1850 – Torquay, 3 febbraio 1925) è stato un matema-

i campi elettrico e magnetico erano deformati dal moto, FitzGerald ipotizzò che similmente, quando un corpo si muove attraverso lo spazio, subisce una deformazione causata dal movimento; tale deformazione poteva spiegare il risultato ottenuto da Michelson e Morley.

FitzGerald suggerì la contrazione in una lettera del 1889 a *Science* che rimase inosservata finché Hendrik Antoon Lorentz[6], nel 1892, mostrò come un simile effetto potesse essere ottenuto basandosi sulla teoria elettromagnetica e sulla teoria elettronica della materia.

Secondo tale teoria quando un corpo si muove attraverso lo spazio, la sua dimensione parallela alla traiettoria si riduce di una quantità dipendente dalla velocità. Se la velocità del corpo è $v$ e la velocità della luce è $c$, la contrazione è nella proporzione

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ :\ 1\ .$$

Per la Terra, che si muove a circa 30km/s, la contrazione risulta essere di circa 6cm sul diametro della Terra.
Questo piccolo cambiamento forniva una spiegazione al risultato dell'esperimento di Michelson e Morley, comportando che la sorgente di luce e lo specchio fossero più vicini quando questi erano disposti lungo la direzione del moto della Terra.

L'ingegnosa teoria proponeva che, in qualche modo, la velocità di rotazione della Terra *contraesse le distanze lungo la direzione del movimento*, esattamente nella proporzione corretta per cancellare le differenze di tempo e fare in modo che i risultati di Michelson e Morley fossero coerenti con la nuova teoria.
Pertanto, un pianeta che si muovesse quasi alla velocità della luce sarebbe schiacciato nella direzione del movimento assumendo l'aspetto di un ellissoide.
Precisamente la lunghezza $l'$ lungo la direzione del movimento dovrebbe essere relazionata alla lunghezza $l$ della direzione perpendicolare al movimento tramite:

$$l' = l\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{l}{\gamma}$$

---

tico, fisico e ingegnere britannico. Adattò i numeri complessi allo studio dei circuiti elettrici, riformulò le equazioni di Maxwell in termini di forze magnetiche ed elettriche e di flusso, e coformulò indipendentemente il calcolo vettoriale. A lui si deve la funzione gradino di Heaviside (1893), usata ad esempio proprio nello studio dei circuiti.

[6]Hendrik Antoon Lorentz (Arnhem, 18 luglio 1853 – Haarlem, 4 febbraio 1928) Premio Nobel 1902, Professore all'Universita di Leida, fu il massimo studioso teorico dell'elettromagnetismo dopo Maxwell. Trovò le sue trasformazioni cercando quelle particolari trasformazioni che lasciassero invariate le equazioni di Maxwell.

dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ è detto proprio ***fattore di Lorentz-FitzGerald***.

La velocità della luce è molto elevata $c = 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$, per questo $\gamma \approx 1$ fino a che $v$ si avvicina in maniera considerevole alla velocità della luce.

La teoria della contrazione non fu mai provata con misure dirette: secondo Lorentz, non si poteva rilevare lo schiacciamento nella direzione del movimento perchè anche gli strumenti di misura collocati nella direzione del movimento si contrarrebbero.[7]

Come abbiamo osservato in precedenza, i risultati dell'esperimento di Michelson-Morley contraddicono la legge galileiana di composizione delle velocità. Le leggi della meccanica sembravano quindi incompatibili con quelle dell'elettromagnetismo e la fisica si trovava di fronte ad un bivio: o modificare le leggi della meccanica o quelle dell'elettrodinamica.
La via d'uscita, per quanto antintuitiva, sarà quella di rinunciare all'idea del tempo assoluto della meccanica classica di Galileo e Newton ed accettare l'idea di un tempo relativo al sistema di riferimento nel quale lo si misura, che trascorra cioè in maniera differente in sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro.
Uno dei primi a parlare di un *tempo locale* fu Lorentz, nel suo articolo "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light" del 1904, distinguendo con $t$ la coordinata temporale per un osservatore in quiete nell'etere, e con $t'$ la coordinata temporale per un osservatore in movimento nell'etere collegate dalla relazione $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Con l'aiuto di questo concetto Lorentz poté spiegare l'aberrazione della luce[8], l'effetto Doppler[9] e l'esperimento di Fizeau[10].
L'introduzione del tempo locale e del fattore di contrazione mise in grado Lorentz di trovare delle trasformazioni che permettessero di passare da un sistema di riferimento all'altro lasciando invariate le equazioni di Maxwell.

---

[7]Dalle conoscenze moderne sappiamo che anche una fotografia non permetterebbe di osservare la contrazione perchè una distorsione ottica compenserebbe lo schiacciamento. L'occhio umano, come anche l'obbiettivo di una fotocamera, funziona perché è capace di vedere le particelle di luce, i fotoni, che si riflettono in un oggetto. Quando un oggetto si muove vediamo nello stesso istante immagini delle sue parti più vicine e più lontane, che in realtà sono anteriori nel tempo. Le vediamo dopo a causa del ritardo del tempo della velocità della luce. In questo modo, l'oggetto sembra allargato nella direzione del movimento e questo effetto di stiramento compensa la contrazione della nostra percezione.

[8]L'aberrazione della luce (detta anche aberrazione astronomica o aberrazione stellare) è lo spostamento apparente delle stelle sulla volta celeste, dovuta al moto di rivoluzione della Terra e al fatto che la velocità della luce sia finita. Le prime osservazioni dell'aberrazione della luce stellare si devono all'astronomo inglese James Bradley, nel 1728. Poincarè, nel suo articolo *"Sur la dinamique de l'èlectron"*, parte dal commentare questo fenomeno.

[9]L'effetto Doppler è un fenomeno fisico che consiste nel cambiamento, rispetto al valore originario, della frequenza o della lunghezza d'onda percepita da un osservatore raggiunto da un'onda emessa da una che si trovi in movimento rispetto all'osservatore stesso.

[10]Nel 1951 Fizeau afferma che l'etere, se esistente, non può essere trascinato. Egli giunge a tale risultato in seguito ad un esperimento, ripetuto più volte con sempre maggiore precisione, che si basava sul fenomeno dell'interferenza della luce.

Considerando un sistema di coordinate $(x',\ t')$ in cui $x'$ esprime la coordinata lungo un moto unidimensionale e $t'$ il tempo, con l'ipotesi della contrazione delle distanze per cancellare le differenze di tempo, si ottengono le ***trasformazioni di Lorentz***:

$$\begin{cases} t' = \frac{t + \frac{-v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (t - \frac{v}{c^2}x)\gamma \\ x' = \frac{-vt+x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (-vt + x)\gamma \end{cases}$$

che in notazione vettoriale diventano$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda_v \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$dove per $\Lambda_v$ si ha:

$$\Lambda_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{\frac{-v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{-v}{c^2}\gamma \\ -v\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

*Osservazione* 1. Nei movimenti ordinariamente studiati in meccanica classica $v$ è di molti ordini di grandezza minore di $c$ e quindi il rapporto $\beta = \frac{v}{c}$ e, a maggior ragione il suo quadrato, è sperimentalmente indistinguibile da 0. È per questo che nelle applicazioni classiche le trasformazioni di Galileo approssimano correttamente le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} t' = \frac{t + \frac{-v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (t - \frac{v}{c^2}x)\gamma \\ x' = \frac{-vt+x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (-vt + x)\gamma \end{cases} \xrightarrow{\frac{v}{c} \to 0} \begin{cases} t = t' \\ x = x' - vt' \end{cases}$$

Osserviamo infatti che anche le velocità più elevate, quali ad esempio quella necessaria ad un'astronave per sfuggire all'attrazione terrestre, elevate al quadrato, sono trascurabili rispetto a quella della luce elevata al quadrato.

Tale velocità vale infatti: $v = 11,2$ km/s.

Pertanto:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{11,2^2}{3^2 \times (10^5)^2} = \frac{125,44}{9 \times 10^{10}} \approx 1,4 \times 10^{-9}.$$

Quindi l'effetto relativistico incide solo sulla nona cifra decimale.
Velocità non trascurabili rispetto a quella della luce vengono raggiunte solo dalle particelle elementari subatomiche, o nei raggi cosmici o nelle grandi macchine acceleratrici.

Una volta stabilite le trasformazioni, Lorentz dimostrò che le equazioni di Maxwell sono invarianti. Alcune espressioni che ottenne però, in particolare quelle della densità di carica e la corrente non erano corrette, fu Henri Poincaré che nel 1905 corresse gli errori nello studio di Lorentz. Poincarè notò, inoltre, che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo: lo vedremo in dettaglio nella prossima sottosezione.

### 3.2.2 Il gruppo di Lorentz

Sebbene per il fisico olandese la contrazione delle lunghezze fosse un effetto fisico reale, egli considerava la trasformazione temporale solo un'ipotesi di lavoro euristica e una clausola matematica per semplificare il calcolo da un sistema in quiete a un sistema fittizio in movimento. Contrariamente a Lorentz, Poincaré vedeva più di un trucco matematico nella definizione di tempo locale, che chiamava l'"*idea più ingegnosa di Lorentz*". Poincaré nel suo articolo del 1905 "Sur la dynamique de l'électron" ("Sulla dinamica dell'elettrone"), in seguito alle evidenze sperimentali, parla di postulato di relatività in questo modo:

***"Sembra che questa impossibilità di mettere sperimentalmente in evidenza il movimento assoluto della terra sia una legge generale della natura; io sono in realtà portato ad ammettere questa legge, che chiamerò postulato di relatività, e ad ammetterla senza restrizioni"***[11].

Egli parte dalla spiegazione proposta da Lorentz, la modifica e completa, fino ad arrivare a dimostrare che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo: *il gruppo di Lorentz*. Dimostra inoltre, analogamente a quanto fatto da Lorentz, che questo gruppo lascia invariate le equazioni di Maxwell.
Ricordando la definizione di gruppo, per verificare che le trasformazioni di Lorentz siano effettivamente un gruppo $(G, \oplus)$, dovranno valere le seguenti proprietà:

- **proprietà associativa**
  dati $a, b, c, \in G$, vale $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- l'**esistenza di un elemento neutro e**
  rispetto ad un'operazione binaria $\oplus$, cioè tale che
  $a \oplus e = e \oplus a = a$ per ogni $a \in G$ ;
- l'**esistenza dell'inverso**: ad ogni elemento $a \in G$ è associato un elemento $a'$, detto inverso di $a$, tale che $a \oplus a' = a' \oplus a = e$.

Dato che le trasformazioni di Lorentz sono un sottoinsieme di GL(2), il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili dal piano in sè, per dimostrare che formano un gruppo è sufficiente dimostrare che:

- la composizione di due trasformazioni di Lorentz è una trasformazione di Lorentz;

[11] Questo è l'analogo del primo dei due postulati di Einstein. Vedremo inoltre nel seguito che il secondo ne è una conseguenza.

- l'inverso di una trasformazione di Lorentz è una trasformazione di Lorentz.

Per farlo utilizziamo un'analogia con le rotazioni del piano euclideo. Ricordiamo che una rotazione di un angolo di ampiezza $\varphi$ può essere rappresentata, usando un sistema di riferimento avente origine nel centro di rotazione, in forma matriciale come $R_\varphi$:

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice di trasformazione $\Lambda_v$ trovata sopra:

$$\Lambda_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\frac{-v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

e operiamo il cambiamento di variabile $\frac{v}{c} = \tanh(u)$.
Ricordando le relazioni iperboliche richiamate in precedenza otteniamo:

$$\Lambda_u = \begin{pmatrix} \cosh(u) & -c\sinh(u) \\ \frac{\sinh(u)}{-c} & \cosh(u) \end{pmatrix}$$

Se al posto della coordinata $t$ usiamo la coordinata $ct$, possiamo riscrivere la matrice come

$$\Lambda_u = \begin{pmatrix} \cosh(u) & -\sinh(u) \\ -\sinh(u) & \cosh(u) \end{pmatrix}$$

e l'analogia con il caso della matrice di rotazione in cui le funzioni goniometriche sono state sostituite da quelle iperboliche diventa completa. Possiamo sfruttare tale analogia per dimostrare che le trasformazioni di Lorentz formano un sottogruppo di $GL(2)$. Nel caso euclideo la composizione di due rotazioni successive attorno all'origine di angoli $\varphi_1$ e $\varphi_2$ è una rotazione di angolo $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Inoltre è facile dimostrare, usando le formule di seno e coseno della somma, che tale rotazione corrisponde proprio alla matrice $R_\varphi = R_{\varphi_1+\varphi_2} = R_{\varphi_1}R_{\varphi_2}$.
In altre parole la funzione $\alpha \longmapsto R_\alpha$ è un omomorfismo dal gruppo $(\mathbb{R}, +)$ al gruppo $GL(2)$ avente come immagine proprio il sottogruppo delle rotazioni. In maniera analoga si ha il seguente risultato.

**Proposizione 2.** *Le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo, sottogruppo di GL(2).*

*Dimostrazione.* Come ricordato sopra, essendo le trasformazioni di Lorentz un sottoinsieme di $GL(2)$ è sufficiente dimostrare che:

1.$\Lambda_{u_1}\Lambda_{u_2} = \Lambda_{u_1+u_2}$;

2.$\Lambda_u\Lambda_{-u} = Id$.

Verifichiamo 1.
Ricordando le formule di addizione per $\sinh(u)$ e $\cosh(u)$:

$\sinh(u_1 + u_2) = \cosh(u_1)\sinh(u_2) + \sinh(u_1)\cosh(u_2)$;

$\cosh(u_1 + u_2) = \cosh(u_1)\cosh(u_2) + \sinh(u_1)\sinh(u_2)$

$\Lambda_{u_1}\Lambda_{u_2} = \begin{pmatrix} \cosh(u_1) & -\sinh(u_1) \\ -\sinh(u_1) & \cosh(u_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(u_2) & -\sinh(u_2) \\ -\sinh(u_2) & \cosh(u_2) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \cosh(u_1)\cosh(u_2) + \sinh(u_1)\sinh(u_2) & -(\cosh(u_1)\sinh(u_2) + \sinh(u_1)\cosh(u_2)) \\ -(\sinh(u_1)\cosh(u_2) + \cosh(u_1)\sinh(u_2)) & \sinh(u_1)\sinh(u_2) + \cosh(u_1)\cosh(u_2) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \cosh(u_1 + u_2) & -\sinh(u_1 + u_2) \\ -\sinh(u_1 + u_2) & \cosh(u_1 + u_2) \end{pmatrix} = \Lambda_{u_1+u_2}$.

Verifichiamo 2.
La matrice $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, elemento neutro di $GL(2)$, come trasformazione di Lorentz si ottiene nel caso in cui $u = v = 0$; infatti da $\frac{v}{c} = \tanh(u) := \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}$,

$\sinh(u) := \frac{e^u - e^{-u}}{2} \to \sinh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$,

$\cosh(u) := \frac{e^u + e^{-u}}{2} \to \cosh(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$,

$\tanh(0) = \frac{\sinh(0)}{\cosh(0)} = \frac{0}{1} = 0 = \frac{v}{c}$ per $v = 0$ e si ha:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(0) & -\sinh(0) \\ -\sinh(0) & \cosh(0) \end{pmatrix} = \Lambda_0.$$

Ricordando che $\sinh(0) = 0$, se $u_2 = -u_1,\ u_1 = u$ da 1 si avrà:

$\Lambda_u\Lambda_{-u} = \Lambda_{u-u} = \Lambda_0 = Id$.

Abbiamo così dimostrato che le trasformazioni di Lorentz sono un sottogruppo di $GL(2)$ e quindi che sono un gruppo: il gruppo di Lorentz. □

*Osservazione* 3. Dall'identità:

$\tanh(u_1 + u_2) = \frac{\tanh(u_1) + \tanh(u_2)}{1 + \tanh(u_1)\tanh(u_2)}$

ricordando che $\tanh(u) = \frac{v}{c}$ si ricava la ***legge di addizione delle velocità relativistiche*** per tre sistemi inerziali parametrizzati da $u_1,\ u_2,\ u_3 = u_1 + u_2$ che si muovono rispettivamente con velocità relative $v_1,\ v_2,\ v_3$.

Da $\frac{v_3}{c} = \frac{v_1+v_2}{c(1+\frac{v_1 v_2}{c^2})}$ si ha:

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

In particolare se $v_1 = c$, $v_2 = v$ allora $v_3 = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = \frac{c+v}{\frac{c+v}{c}} = c$.

Fisicamente questo ci dice che in ogni sistema di riferimento inerziale un segnale che viaggia alla velocità della luce $c$ non è influenzato dalla velocità $v$ del sistema di riferimento, pertanto ***la velocità della luce non può essere superata e rappresenta una velocità limite***. [12]

In quanto $v$ può variare tra $-c$ e $c$, il risultato appena ottenuto ci dice che $u = \frac{v}{c} \in [-1, 1]$ e la legge di composizione ottenuta sopra, se vista algebricamente, è una nuova addizione $\oplus$ in $[-1, 1]$. Questo intervallo con l'operazione $\oplus$ così definita:

$$u \oplus u' := \frac{u + u'}{1 + uu'}$$

è un gruppo commutativo isomorfo al gruppo di Lorentz (in 2 dimensioni) con $u \oplus 1 = \frac{u+1}{1+u} = 1$, $\forall u \in [-1, 1]$, risultato analogo a quello ottenuto precedentemente.

Nel caso in cui $v$ possa assumere una qualsiasi direzione rispetto ad un sistema di coordinate $(ct, x, y, z)$ il gruppo delle trasformazioni di Lorentz è generato dalle rotazioni spaziali e dalla matrici $4 \times 4$ del tipo:

$$\begin{pmatrix} \cosh(u) & -\sinh(u) & 0 & 0 \\ -\sinh(u) & \cosh(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_u & 0_2 \\ 0_2 & Id_2 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente, senza il cambio di variabile $\frac{v}{c} = \tanh(u)$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c^2}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0_2 \\ 0_2 & Id_2 \end{pmatrix}$$

## 3.3 Spazio-tempo e distanza di Minkowski

Nella fisica newtoniana il ***tempo*** e lo ***spazio*** sono ***invarianti***; nella fisica relativistica il tempo trascorre in modo differente a seconda del moto del sistema di riferimento ed abbiamo appena osservato che, in questo caso, ***è diventata invariante la velocità della luce c, velocità limite***. Le trasformazioni di

[12] Questo è il secondo dei due postulati da cui Einstein partirà per la sua formulazione della relatività speciale.

Lorentz, che ci permettono di passare da un sistema all'altro lasciando invariate le equazioni di Maxwell, diventano effettivamente ***spazio-temporali***.
Hermann Minkowski, nel suo articolo del 1908 "Raum und Zeit" ("Space and Time"), esordisce con questa celebre frase:

*"The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. They are radical. Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve and independent reality."*

L'idea di Minkowski è quella di introdurre un'unica struttura, chiamata appunto ***spazio-tempo***; questa struttura è descritta da un *quadrivettore*, ovvero un vettore con quattro coordinate (tre spaziali $x$, $y$, $z$ e una temporale $t$), cioè un vettore di $\mathbb{R}^4$. Rappresentare un **evento fisico,** ovvero un fenomeno ben localizzato nello spazio e nel tempo, significa individuare un **punto nello spazio-tempo**, ovvero una quaterna di numeri reali $(x,\ y,\ z,\ t)$. Citando le sue parole:

*"The objects of our perception invariably include places and times in combination. Nobody has ever noticed a place except at a time, or a time except at a place. But I still respect the dogma that both space and time have independent significance. A point of space at a point of time, that is, a system of values x, y, z, t I will call a world-point."*

Uno dei motivi che spinge Minkowski a modificare l'idea classica di spazio e tempo nasce dall'asimmetria che evidenzia nella rappresentazione classica:

*"The equations of Newton's mechanics exhibit a two-fold invariance. Their form remains unaltered, firstly, if we subject the underlying system of spatial co-ordinates to any arbitrary change of position; secondly, if we change its state of motion, namely, by imparting to it any uniform translatory motion"*

Anche nella rappresentazione quadridimesionale tale asimmetria è evidente:

*"The concepts, space and time, cause the x, y, z-manifold $t = 0$ and its two sides $t > 0$ and $t < 0$ to fall asunder. If, for simplicity, we retain the same zero point of space and time, the first-mentioned group signifies in mechanics that we may subject the axes of x, y, z at $t = 0$ to any rotation we choose about the origin, corresponding to the homogeneous linear transformations of the expression*

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

*But the second group means that we may-also without changing the expression of the laws of mechanics- replace x, y, z, t by $x - at$, $y - \beta t$, $z - \gamma t$, t with any constant values of $a$, $\beta$, $\gamma$. Hence we may give to the time axis whatever direction we choose towards the upper half of the world, $t > 0$. Now what has the requirement of orthogonality in space to do with the perfect freedom of the time axis in an upward direction?"*

Per ovviare a questa asimmetria Minkowski introduce una nuova metrica, cioè un nuovo modo di misurare distanze ed angoli, coerente con le trasformazioni di Lorentz. Vediamo come.

Conviene considerare per semplicità la stessa origine $O$ per lo spazio e per il tempo ed introdurre una coordinata temporale omogenea con quella spaziale: $w = ct$, $w' = ct'$ (nel seguito useremo in maniera indifferente $ct$ o $w$). Abbiamo così un'unità di misura che dimensionalmente è una lunghezza ma di fatto rappresenta un riscalamento del tempo. Inizialmente consideriamo fissi gli assi $y$ e $z$ e ci restringiamo a guardare cosa accade nel piano $x - ct$ effettuando una trasformazione di Lorentz. Il cambio di coordinate riguarderà allora la coordinata temporale $ct$ ed una sola coordinata spaziale $x$: $(x, ct) \to (x', ct')$. Le trasformazioni di Lorentz si possono scrivere nella forma più compatta:

$$\begin{cases} x' = (x - v\frac{w}{c})\gamma = (x - \beta w)\gamma \\ w' = (\frac{-v}{c}x + w)\gamma = (-\beta x + w)\gamma \end{cases}$$

con $\beta = \frac{v}{c}$.
L'asse spaziale $x'$, del sistema di coordinate $(x',\ w')$ in moto con velocità $v$ lungo l'asse $x$ rispetto a $(x,\ w)$, è individuato dalla condizione $w' = ct' = 0$, ovvero, nelle vecchie coordinate, dalla $w = ct = \beta x = \frac{v}{c}x$, che corrisponde ad una retta per l'origine inclinata rispetto all'asse $x$ di un angolo $\phi < \frac{\pi}{4}$, $\phi$ tale che $\frac{v}{c} = \tanh(\phi)$. Analogamente l'asse temporale $w'$ è individuato dalla condizione $x' = 0$, ovvero, nelle vecchie coordinate, dalla $x = \beta w = \frac{v}{c}ct = vt$, che corrisponde ad una retta per l'origine simmetrica della precedente rispetto alla bisettrice del primo quadrante (si veda Figura 3.3.1).

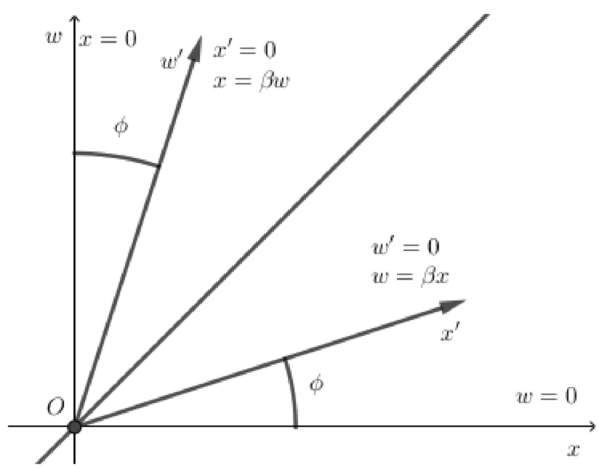



Figura 3.3.1: Rappresentazione di una trasformazione di Lorentz nel diagramma di Minkowski.

Vale la pena sottolineare che la rappresentazione visualizza in modo efficace il fatto che, gli assi del sistema di coordinate $(x', w')$ non sono tra loro ortogonali.

La caratterizzazione completa di una data trasformazione di Lorentz richiede l'individuazione, nel diagramma, dei segmenti unitari lungo gli assi $x'$, $w'$. A tale scopo si fa uso delle cosiddette iperboli di calibrazione (si veda Figura 3.3.2), iperboli equilatere di equazioni:

$$x^2 - w^2 = 1$$

$$w^2 - x^2 = 1$$

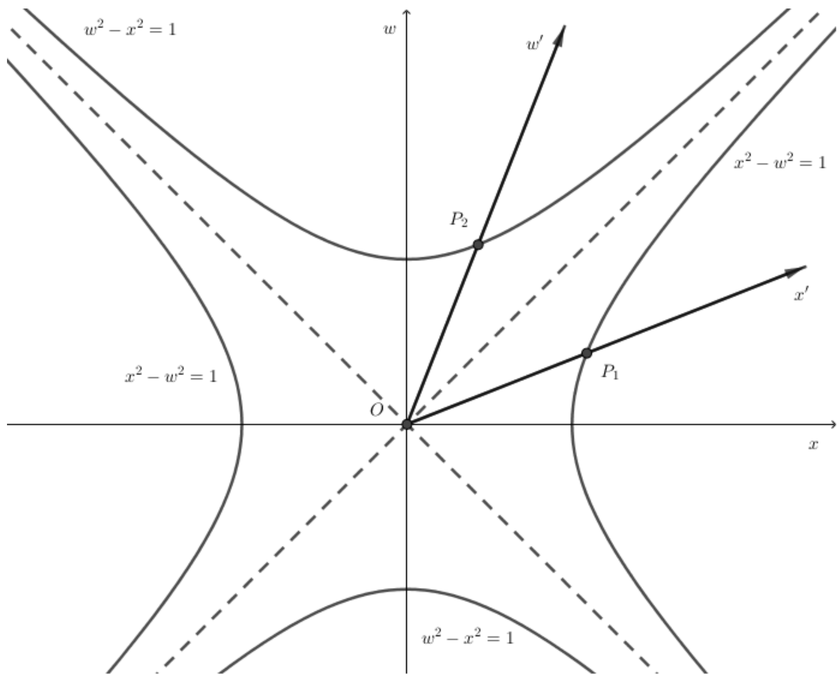



Figura 3.3.2: Iperboli di calibrazione.

Le loro intersezioni con l'asse delle $x$ e con quello delle $w$ staccano su di essi segmenti unitari da bande opposte rispetto all'origine. Vogliamo ora mostrare che le intersezioni delle due iperboli con l'asse delle $x'$ e delle $w'$, corrispondenti rispettivamente in figura ai punti $P_1$ e $P_2$, staccano analogamente segmenti unitari su di essi. A tal scopo, cominciamo col considerare il sistema formato dall'equazione della prima iperbole e dalla $w' = 0$ che individua l'asse spaziale $x'$. Nelle vecchie coordinate, l'ultima equazione si traduce nella $w = \beta x$, che, sostituita nell'equazione dell'iperbole $x^2 - w^2 = 1$, dà:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ w = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto le intersezioni della prima iperbole con l'asse delle $x'$ espresse in termini delle vecchie coordinate. Scegliamo l'intersezione con il semiasse positivo e riesprimiamola in termini delle nuove coordinate. Dalla trasformazione di Lorentz, osservando che $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, si ottiene

$$\begin{cases} x' = (x - \beta w)\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1 \\ w' = (-\beta x + w)\gamma = \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-\beta+\beta}{1-\beta^2} = 0 \end{cases}$$

che è il risultato preannunciato.
In modo analogo si mostra che la seconda iperbole stacca il segmento unitario sull'asse temporale $w'$. Le coordinate che lo stesso evento riceve nei due sistemi sono visualizzate in Figura 3.3.3.

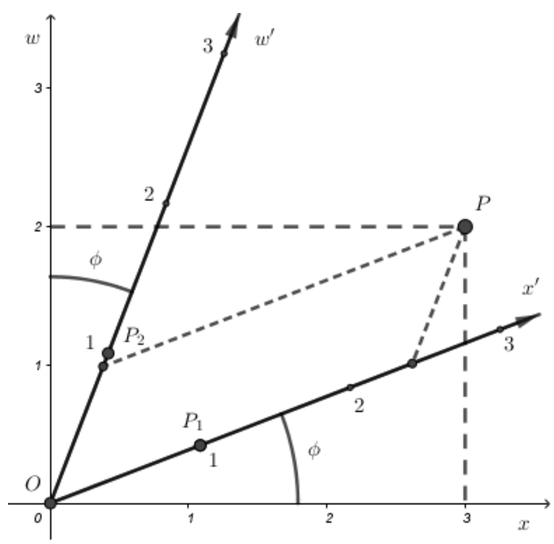



Figura 3.3.3: Localizzazione di un evento P.

La rappresentazione del moto di un punto nello spazio-tempo è una curva in esso, detta *curva* o *linea d'universo*; l'intero universo è individuato da queste linee e le leggi della fisica trovano la loro migliore espressione nella reciproca relazione tra di esse. Citando Minkowski:

*"The whole universe is seen to resolve itself into similar world-lines, and I would fain anticipate myself by saying that in my opinion physical laws might find their most perfect expression as reciprocal relations between these world-lines."*

Vediamo degli esempi.
Se il punto materiale $P$ è in quiete nel sistema di riferimento che fa uso delle coordinate $x$ e $w$, la sua linea d'universo sarà una retta parallela all'asse delle $w$. Se $P$ si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v$ lungo l'asse $x$ e si trova nel punto $x = x_0$ al tempo $t = 0$, la sua linea d'universo sarà una retta di equazione: $x = x_0 + vt$ inclinata di un angolo $\phi$ con $\tanh(\phi) = v/c$ (si veda Figura 3.3.4). Un moto arbitrario è rappresentato da una curva $x = x(w)$ e la sua inclinazione in ogni punto è data da $\phi$ tale che $\frac{dx}{dw} = \frac{dx}{dct} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v}{c} = \tanh(\phi)$; in particolare se si tratta della luce $v = c$ o $v = -c$, a seconda del verso del moto, e le linee d'universo diventano le bisettrici o rette parallele ad esse (e sono dette *rette luce*).

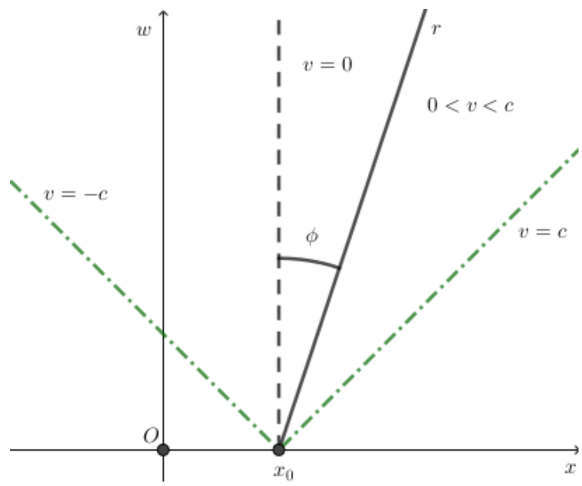



Figura 3.3.4: Esempi di linee di universo corrispondenti a moti con velocità costante.

*Osservazione.* Una linea d'universo parallela alla retta $r$ in Figura 3.3.4 rappresenta un punto che è in quiete nel sistema di coordinate avente $r$ come asse dei tempi.

Consideriamo ora due eventi $P_1 = (x_1,\ ct_1)$ e $P_2 = (x_2,\ ct_2)$.
In geometria euclidea, per calcolare la distanza fra due punti (indicata con $\triangle l$ in Figura 3.3.5) possiamo:

- misurarla direttamente con un righello graduato;
- scegliere un sistema di coordinate ortogonali e calcolarla con il teorema di Pitagora.

In sistemi di coordinate diversi, le coordinate cambiano ma la **lunghezza del segmento è invariante**:

$(\triangle l\,) = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} = \sqrt{(\triangle x')^2 + (\triangle y')^2}.$

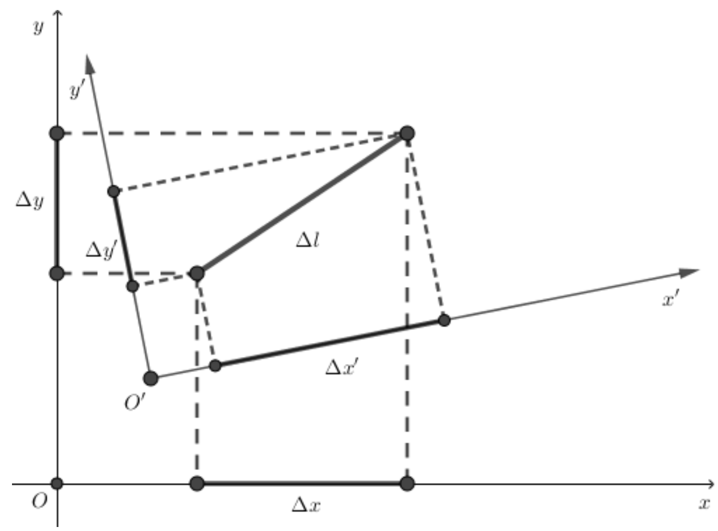



Figura 3.3.5: Distanza euclidea tra due punti.

La lunghezza di un segmento nel piano euclideo è quindi una grandezza invariante, una proprietà geometrica che dipende dalla ***metrica***, *ovvero dal modo che è stato scelto per calcolare la distanza fra due punti.* In altre parole la ***distanza euclidea è invariante per isometrie***, ovvero trasformazioni che collegano due qualsiasi sistemi di coordinate cartesiane preservando le distanze (euclidee).

Abbiamo visto che nel piano di Minkowski le trasformazioni che collegano due sistemi di coordinate non sono le isometrie, ma le trasformazioni di Lorentz: quale quantità risulta invariante?

Minkowski introduce allora una nuova metrica.

La ***metrica di Minkowski***[13] o ***distanza iperbolica*** $d_M^2$ fra due punti $P_1 = (x_1,\ ct_1)$ e $P_2 = (x_2,\ ct_2)$ è definita da:

$$d_M^2(P_1,\ P_2) := c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

**Proposizione 4.** *La metrica di Minkowski è invariante per trasformazioni di Lorentz.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la trasformazione di Lorentz $\Lambda_u$ ricavata nella sezione precedente nella forma:

[13] Se ne propone una possibile introduzione alternativa a partire dalla «distanza dei taxi» nel capitolo "Un viaggio in taxi", primo capitolo del volume di Gomez Urgelles J.V. "Quando le rette diventano curve: le geometrie non euclidee" dalla collana "Il mondo è matematico", RBA Italia, 2011.

$$\Lambda_u = \begin{pmatrix} \cosh(u) & -\sinh(u) \\ -\sinh(u) & \cosh(u) \end{pmatrix}$$

Dimostriamo che $\Lambda_u$ lascia invariata la metrica di Minkowski.

Questo equivale a dimostrare che $d_M^2(\Lambda_u P_1,\ \Lambda_u P_2) = d_M^2(P_1,\ P_2)$

$\Lambda_u P_1 = \begin{pmatrix} \cosh(u) & -\sinh(u) \\ -\sinh(u) & \cosh(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ct_1 \end{pmatrix} =$

$= (x_1 \cosh(u) - ct_1 \sinh(u),\ -x_1 \sinh(u) + ct_1 \cosh(u))$

$\Lambda_u P_2 = \begin{pmatrix} \cosh(u) & -\sinh(u) \\ -\sinh(u) & \cosh(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ ct_2 \end{pmatrix} =$

$= (x_2 \cosh(u) - ct_2 \sinh(u),\ -x_2 \sinh(u) + ct_2 \cosh(u))$

$d_M^2(\Lambda_u P_1,\ \Lambda_u P_2) = (-x_2 \sinh(u) + ct_2 \cosh(u) + x_1 \sinh(u) - ct_1 \cosh(u))^2 +$

$-(x_2 \cosh(u) - ct_2 \sinh(u) - x_1 \cosh(u) + ct_1 \sinh(u))^2 =$

$= (x_2 - x_1)^2 \sinh^2(u) + c^2(t_2 - t_1)^2 \cosh^2(u) + 2c(x_1 - x_2)(t_2 - t_1)(\sinh(u)\cosh(u)) +$

$-[(x_2 - x_1)^2 \cosh^2(u) + c^2(t_2 - t_1)^2 \sinh^2(u) + 2c(x_1 - x_2)(t_2 - t_1)(\sinh(u)\cosh(u))] =$

$(x_2 - x_1)^2(\sinh^2(u) - \cosh^2(u)) + c^2(t_2 - t_1)^2(\cosh^2(u) - \sinh^2(u)) =$

dalla relazione fondamentale $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$ segue:

$= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = d_M^2(P_1,\ P_2).$ □

Osserviamo quindi che la trasformazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associata alla matrice $\Lambda_u$ gode delle stesse proprietà delle rotazioni nel piano euclideo se al posto della distanza euclidea $d$ si considera la metrica di Minkowski $d_M$.

Pertanto l'***interpretazione geometrica*** della trasformazione associata a $\Lambda_u$ è quella di una ***"rotazione iperbolica"*** di angolo $u = \text{arctanh}(\frac{v}{c})$ nello spazio di Minkowski.

In analogia al caso euclideo, in cui ***una rotazione del piano cartesiano attorno all'origine è una trasformazione in cui ogni circonferenza corrisponde a se stessa***, nel caso iperbolico si può dimostrare il seguente risultato.

**Proposizione 5.** *Una "rotazione iperbolica", ossia una trasformazione di Lorentz, manda una qualsiasi iperbole equilatera avente vertice nell'origine in se stessa.*

*Dimostrazione.* Abbiamo appena visto che una rotazione iperbolica di angolo $u = \operatorname{arctanh}(\frac{v}{c})$ nello spazio di Minkowski è rappresentata da una matrice $\Lambda_u$ così definita:

$$\Lambda_u = \begin{pmatrix} \cosh(u) & -\sinh(u) \\ -\sinh(u) & \cosh(u) \end{pmatrix}.$$

Questo ci dice che un generico punto $P = (x, w) \in \gamma_1 : \; x^2 - w^2 = k$ viene mandato in:

$$\begin{cases} x' = x\cosh(u) - w\sinh(u) \\ w' = -x\sinh(u) + w\cosh(u) \end{cases}$$

Elevando al quadrato ambo i membri delle due equazioni e sottraendo membro a membro si ottiene:

$x'^2 - w'^2 = x^2(\cosh^2(u) - \sinh^2(u)) + w^2(\sinh^2(u) - \cosh^2(u)) = x^2 - w^2$

che completa la dimostrazione. $\square$

In altre parole la metrica di Minkowski determina nel piano di Minkowski un nuovo invariante spazio-temporale per le trasformazioni di Lorentz:

$$(\triangle\tau)^2 = (c\triangle t)^2 - (\triangle x)^2.$$

In una rappresentazione quadridimensionale prende il nome di quadrinterallo ed ha la seguente espressione:

$$(\triangle\tau)^2 = (c\triangle t)^2 - (\triangle x)^2 - (\triangle y)^2 - (\triangle z)^2$$

dove $\triangle t, \triangle x, \triangle y, \triangle z$ indicano le differenze fra le coordinate di due eventi.

La metrica di Minkowski non è una vera e propria distanza, ma una pseudodistanza in quanto non si annulla solamente nel caso di due punti coincidenti. Il "cono" a due falde in $\mathbb{R}^4$ di vertice l'origine definito dall'equazione:

$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ è detto ***cono della luce*** ed è l'insieme di punti aventi quadrintervallo nullo.

*Osservazione.* Il cono della luce è assoluto poiché la distanza di Minkowski è lasciata invariata dalle trasformazioni di Lorentz.

Il cono della luce divide lo spazio-tempo in due regioni disgiunte: l'"interno", in cui vale la disuguaglianza $c^2t^2 > x^2 + y^2 + z^2$ , e l'"esterno", in cui vale la disuguaglianza opposta $c^2t^2 < x^2 + y^2 + z^2$. Gli eventi all'interno del cono si dicono *eventi di tipo tempo*, o *temporali*, mentre quelli all'esterno si dicono *di tipo spazio*, o *spaziali.* Entro il cono della luce, gli eventi nella falda superiore rappresentano il futuro assoluto, mentre quelli della falda inferiore il passato assoluto.
Il cono della luce è invalicabile, nel senso che nessun segnale può propagarsi dall'esterno all'interno e viceversa dato che la velocità massima consentita è quella della luce.

**Proposizione 6.** *La distanza minkowskiana fra due eventi fisici relativi ad un medesimo corpo è sempre di tipo tempo.*

*Dimostrazione.* Siano $P = (ct_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1),\ Q = (ct_2,\ x_2,\ y_2,\ z_2)$ i due eventi. Se la loro distanza minkowskiana fosse di genere spazio si avrebbe:

$$d_M^2(P,\ Q) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 > c^2(t_2 - t_1)^2.$$

Quindi esisterebbe un segnale che collega $P$ con $Q$ a velocità superiore a quella della luce $c$, questo è impossibile perché la velocità della luce è una velocità limite che non può mai essere superata. $\square$

In $\mathbb{R}^2$ il cono della luce è rappresentato dagli asintoti dell'iperbole equilatera $w^2 - x^2 = 1$, ovvero dalle bisettrici degli assi cartesiani, come rappresentato in Figura 3.3.6.

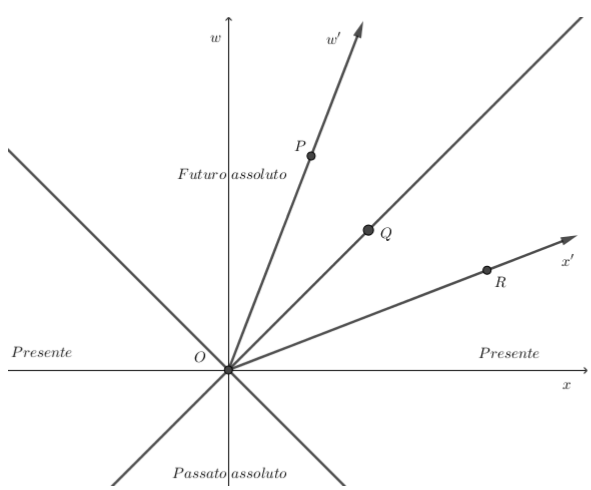



Figura 3.3.6: Il cono della luce in $\mathbb{R}^2$.

Questa figura ci permette anche di fare un'ultima osservazione: c'è una differenza tra la nozione di "evento avente coordinata temporale maggiore di $O$" ed "evento appartenente al futuro di $O$". Con la seconda denominazione indichiamo un evento che può essere influenzato *causalmente* da $O$.
L'evento $P$ in figura appartiene al futuro di $O$ in quanto può essere raggiunto da un moto (o segnale) che lascia $O$ a $t = 0$.
Un evento come l'evento $R$, pur avendo coordinata temporale maggiore di zero, non appartiene al futuro di $O$ in quanto non può essere raggiunto da nessun segnale anche se $O$ ed $R$ sono simultanei in $(x',\ ct')$.

È possibile dare un significato alle trasformazioni di Galileo all'interno di questa descrizione? Per farlo Minkowski considera nel piano $(x,\ t)$ il ramo superiore dell'iperbole di equazione $k^2t^2 - x^2 = 1$ e chiama $G_k$ il gruppo delle trasformazioni del piano che lasciano invariata tale iperbole. Chiaramente se $k = c$ otteniamo il gruppo di Lorentz. Se lasciamo crescere $k$ all'infinito, e quindi $\frac{1}{k} \to 0$, il ramo dell'iperbole tenderà all'asse $x$. Gli elementi di $G_\infty$ fisseranno allora l'asse delle $x$, mentre l'immagine dell'asse temporale potrà formare un angolo arbitrario rispetto all'asse spaziale: saremo in altre parole nel caso Newtoniano. Citando Minkowski:

*"...natural phenomena do not possess an invariance with the group $G_\infty$, but rather with a group $G_c$, c being finite and determinate, but in ordinary units of measure, extremely great. Such a premonition would have been an extraordinary triumph for pure mathematics. Well, mathematics, though it now can display only staircase-wit, as the satisfaction of being wise after the event, and is able, thanks to its happy antecedents, with its senses sharpened by an un-hampered outlook to far horizons, to grasp forthwith the far-reaching consequences of such a metamorphosis of our concept of nature. I will state at once what is the value of c with which we shall finally be dealing. It is the velocity of the propagation of light in empty space. To avoid speaking either of space or of emptiness, we may define this magnitude in another way, as the ratio of the electromagnetic to the electrostatic unit of electricity."*

Ecco quindi spiegata la frase di apertura dell'articolo di Minkowski:

*"We should then have in the world no longer space, but an infinite number of spaces analogously as there are in three-dimensional space an infinite number of planes. Three-dimensional geometry becomes a chapter in four-dimensional physics. Now you know why I said at the outset that space and time are to fade away into shadows, and only a world in itself will subsist."*

### 3.3.1 Gli effetti relativistici osservati sui diagrammi di Minkowski e come conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

Nel seguito verranno dapprima osservati gli effetti relativistici sui diagrammi di Minkowski e poi se ne darà una formalizzazione tramite le trasformazioni di Lorentz.

Tutti gli effetti relativistici sono osservabili solo quando il fattore $1-\beta^2$ è significativamente diverso da 1, cioè solo quando gli oggetti mobili hanno velocità non trascurabili rispetto a quella della luce. Come visto nell'Osservazione 1 nella sottosezione 3.2.1, simili velocità non possono essere raggiunte da oggetti macroscopici, e sono quindi fuori dalla portata delle nostre osservazioni quotidiane.

#### 3.3.1.1 Relatività della simultaneità

Consideriamo gli eventi $R_1$, $R_2$, $Q_1$, $Q_2$ nella Figura 3.3.7 seguente.

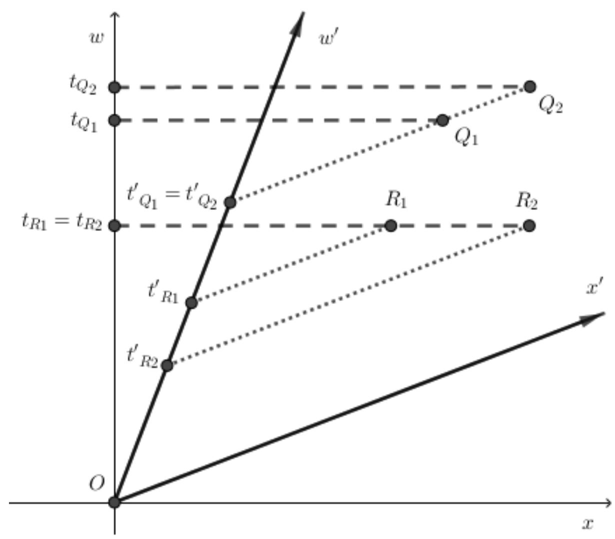



Figura 3.3.7: Relatività della simultaneità.

Si vede facilmente che i due eventi $R_1$ e $R_2$ sono simultanei nel sistema di coordinate $(x,\ w)$, infatti hanno la stessa coordinata temporale $t_{R_1}=t_{R_2}$.
Gli stessi eventi non sono simultanei in $(x',\ w')$ in quanto in quel sistema di coordinate, in moto rispetto a $(x,\ w)$, avvengono rispettivamente al tempo $t'_{R_1}$ e al tempo $t'_{R_2}$diversi tra loro.
Analogamente $Q_1$ e $Q_2$ sono simultanei nel sistema $(x',\ w')$, infatti hanno la stessa coordinata temporale $t'_{Q_1}=t'_{Q_2}$ , ma non lo sono nel sistema $(x,\ w)$ in quanto lì avvengono rispettivamente al tempo $t_{Q_1}$ e al tempo $t_{Q_2}$.
Concludiamo quindi che:

***eventi simultanei in un riferimento non sono simultanei in un altro riferimento in moto rispetto al primo.***

Questo effetto è detto ***relatività della simultaneità***.

Questo effetto si può vedere equivalentemente tramite le trasformazioni di Lorentz nel modo seguente.

Supponendo che i due eventi $R_1$ e $R_2$ in $(x,\ w)$ avvengano nello stesso istante $t_{R_1} = t_{R_2}$ e in due diverse posizioni $x_{R_1},\ x_{R_2}$.
Nel sistema $(x',\ w')$, in moto con velocità $v$ rispetto a $(x,\ w)$, si verificheranno agli istanti:

$$\begin{cases} t'_{R_1} = (\frac{-v}{c^2}x_{R_1} + t_{R_1})\gamma \\ t'_{R_2} = (\frac{-v}{c^2}x_{R_2} + t_{R_2})\gamma \end{cases},$$

ottenuti applicando la trasformazione di Lorentz che collega i due sistemi di coordinate.
I due eventi sono quindi separati da un intervallo di tempo $t'_{R_2} - t'_{R_1} = \frac{v}{c^2}(x_{R_1} - x_{R_2})\gamma$ , risultano allora non sono simultanei in $(x',\ w')$ e simultanei in $(x,\ w)$.

#### 3.3.1.2 Dilatazione dei tempi

Fissiamo l'attenzione su due coppie di eventi $(T_1, T_2)$ e $(U_1, U_2)$ che avvengono nella stessa posizione rispettivamente in $(x,\ w)$ e in $(x',\ w')$.
Cerchiamo la relazione fra i loro tempi.

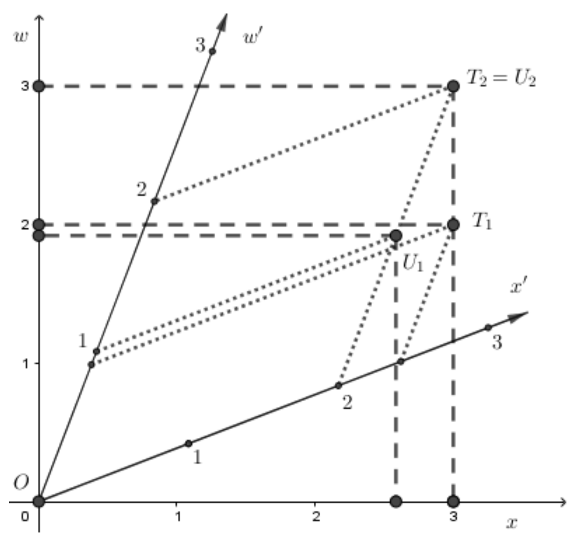



Figura 3.3.8: Dilatazione dei tempi.

Riferendoci alla Figura 3.3.8 si osserva che:

- $T_1$ e $T_2$ sono eventi che avvengono nella stessa posizione in $(x,\ w)$ e in posizioni diverse in $(x',\ w')$;

- $U_1$ e $U_2$ sono eventi che avvengono nella stessa posizione in $(x',\ w')$ e in posizioni diverse in $(x,\ w)$.

Chiameremo *tempo proprio* l'intervallo di tempo fra eventi che in un riferimento avvengono in uno stesso luogo, cioè calcolato in un sistema di coordinate in cui i due eventi hanno la stessa coordinata spaziale.
In figura il tempo proprio tra gli eventi $T_1$ e $T_2$ è quello calcolato nel sistema $(x,\ w)$, mentre il tempo proprio tra gli eventi $U_1$ e $U_2$ è quello calcolato nel sistema $(x',\ w')$.

In entrambe i casi in figura si osserva che l'intervallo di tempo proprio tra $T_1$ e $T_2$ e tra $U_1$ e $U_2$ è pari ad una unità, mentre rispettivamente in $(x',\ w')$ e $(x,\ w)$ risulta maggiore dell'unità.

Questo effetto relativistico è detto ***dilatazione dei tempi***:

***L'intervallo di tempo, misurato in un riferimento in moto rispetto ad un orologio, risulta dilatato di un fattore $\gamma$ rispetto all'intervallo di tempo proprio, misurato in un riferimento in quiete rispetto all'orologio.***

Questo effetto si può vedere equivalentemente tramite le trasfromazioni di Lorentz nel modo seguente.
Sia $T_1$ un punto fermo nel sistema $(x,\ w)$, e $\Delta t$ l'intervallo di tempo trascorso nel medesimo sistema.
Dalle leggi di trasformazione si ha che l'intervallo di tempo $\Delta t'$ trascorso nel sistema $(x',\ w')$ sarà:

$$\Delta t' = \frac{\frac{-v}{c^2}\Delta x + \Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

dove $\Delta x$ è lo spostamento compiuto dal punto $T_1$ nel sistema $(x,\ w)$ nel tempo $\Delta t$; questo spostamento è nullo poichè nel sistema di riferimento $(x,\ w)$ il punto è fermo.
Quindi:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Pertanto $\Delta t' > \Delta t$ se $v \neq 0$ poiché si ottiene da una divisione per un valore minore di 1.
L'intervallo di tempo misurato in qualunque altro sistema di riferimento, rispetto al quale il corpo è in moto, è maggiore dell'intervallo di tempo proprio. In altre parole, il tempo proprio trascorre più lentamente del tempo in qualunque

altro sistema di riferimento.

Facciamo un esempio.
Se nel sistema $S$, rispetto al quale un pendolo si trova in quiete, la misura della durata $T$ dell'oscillazione del pendolo appeso ad un punto di coordinata $x = 0$ inizia all'istante $t_1 = 0$ e termina all'istante $t_2 = T$ , allora nel sistema $S'$, in moto rispetto al pendolo, la stessa oscillazione ha durata:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} \ .$$

Se per $S$ il pendolo ha un periodo $T = 1$s, per $S'$, che si muove con velocità $v = 0,5c$ rispetto ad $S$, il periodo del pendolo è:

$$T' = \frac{1s}{\sqrt{1-\frac{0,5^2c^2}{c^2}}} = \frac{1s}{\sqrt{0,75}} \approx 1,15s.$$

Un'importante verifica sperimentale di questo fatto si ha nella misura della vita media delle particelle subatomiche che si producono in numerose reazioni nucleari. Se un osservatore $O$ misura la vita media di un pione $\pi$ fermo rispetto a se stesso trova un valore di $1,77\times10^{\cdot 8}$s, ma se il pione si muove rispetto all'osservatore $O$ con una velocità $v = 0,9c$, la sua vita media, misurata dall'osservatore, risulta $4,06 \times 10^{-8}$s.

#### 3.3.1.3 Contrazione delle lunghezze

La dilatazione del tempo riguarda l'intervallo di tempo fra eventi che in un riferimento avvengono in uno stesso luogo e in un altro riferimento avvengono in luoghi diversi. La contrazione delle lunghezze riguarda invece i punti dello spazio, fermi in un riferimento e in moto, con uguale velocità, in un altro. Ci si chiede come cambia la loro distanza spaziale, ossia la differenza di ascissa $x$ misurata in due sistemi di coordinate fissati nei due riferimenti ad un dato tempo.

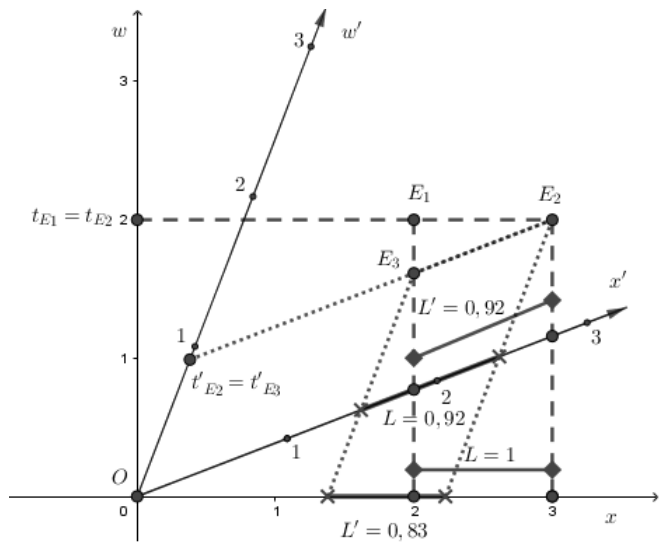



Figura 3.3.9: Contrazione delle lunghezze.

Chiameremo *lunghezza propria* quella misurata nel riferimento rispetto al quale i due punti sono in quiete.

In Figura 3.3.9 la lunghezza propria tra $E_1$ ed $E_2$, che è quella misurata in $(x,\ w)$, vale $L = 1$ mentre la sua lunghezza misurata nel sistema $(x',\ w')$ vale $L' = 0,92$.
La lunghezza propria tra $E_2$ ed $E_3$, che è quella misurata nel sistema $(x',\ w')$, vale $L = 0,92$ mentre la sua lunghezza misurata nel sistema $(x,\ w)$ vale $L' = 0,83$.
In entrambe i casi si osserva un effetto relativistico detto ***contrazione delle lunghezze***:

***La lunghezza L' di un oggetto, misurata in un riferimento in moto rispetto all'oggetto, risulta contratta di un fattore $\gamma$ rispetto alla lunghezza propria L dell'oggetto, misurata in un riferimento in quiete rispetto all'oggetto***.

Questo effetto si può vedere equivalentemente tramite le trasfromazioni di Lorentz nel modo seguente.
Se nel sistema $S$ una sbarra parallela all'asse delle $x$ ha lunghezza propria $L$, in un certo istante $t$ un'estremità di tale sbarra si trova in $x_1$ e l'altra estremità in $x_2$, con $x_2 - x_1 = L$.
Nel tempo corrispondente $t'$, l'osservatore in un sistema $S'$ che si muove con velocità $v$ la assegnerà alla stessa sbarra che avrà lunghezza $L' = x'_2 - x'_1$. Usando l'opportuna trasformazione di Lorentz abbiamo che:

$$\begin{cases} x_2 = (x'_2 - vt')\gamma \\ x_1 = (x'_1 - vt')\gamma \end{cases} \rightarrow\ x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\gamma\ \rightarrow\ L = L'\gamma\ \rightarrow L = \frac{L'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

cioè la misura della sbarra in $S'$ risulta più corta di quanto risulta in $S$.

Ad esempio, se per $S'$, che si muove con velocità $v = 0,5c$ rispetto ad $S$, la lunghezza della sbarra è $L' = 10$m, per $S$, in cui la sbarra è ferma, la sua lunghezza misurerà:

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{10m}{\sqrt{1-\frac{0,5^2c^2}{c^2}}} = \frac{10m}{\sqrt{1-0,25}} \approx 11,55m \ .$$

# Bibliografia


[1] Jankvist U.T., History of modern applied mathematics in mathematics education, For Learn. Math., **29**(1), 8-13, 2009.

[2] Jankvist U.T., A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education, Educ. Stud. Math, **71**(3), 235-261, 2009.

[3] Jankvist U.T., On empirical research in the field of using history in mathematics education, RELIME, **12**(1), 67-101, 2009.

[4] Lorentz H.A., Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light, Verh. Afd. Natuurkd., 1. Reeks, K. Ned. Akad. Wet., **6**, 809–831, 1904.

[5] Minkowski H., Space and time, Bull. Calcutta Math. Soc., **1**,135-141, 1908.

[6] Poincaré J.H., Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, Bull. Soc. Math. Fr., XV, 1886-87.

[7] Poincaré J.H., Sur la dynamique de l'électron, Rend. Circ. Mat. Palermo, **21**, 129-176, 1906.

[8] Poincaré J.H., Le libre examen en matière scientifique, Conférence faite aux fêtes jubilaires de l'Université de Bruxelles le 21 novermbre 1909, estratto dalla Rev. Univ. Brux., Imprimerie La Meuse, Liège, 1909.

[9] Poincaré J.H., Sur un théorème de géométrie, Rend. Circ. Mat. Palermo, **33**, 1912.

[10] Poincaré J.H., La science et l'hypothèse, Flammarion, Paris, 1917; trad. ita. La scienza e l'ipotesi, Dedalo, Bari, 1989.

[11] Poincaré J.H., Scritti di fisica-matematica, UTET, Torino, 1993.

[12] Polizzi G., La "filosofia scientifica" di Henri Poincaré, Ebooks Cent. Studi Enriques, Livorno, 2014.

[13] Resnick R., Introduzione alla relatività ristretta, Ambrosiana, Milano, 1979.

[14] Tzanakis C., Mathematics and physics: an innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning, preprint 2016. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349231/document

# Ringraziamenti

Questa tesi di laurea è frutto, in primis, della pazienza e dell'attenta disponibilità della mia relatrice, la Prof.ssa Alessia Cattabriga; desidero quindi ringraziarla profondamente per il tempo che mi ha dedicato.

Ringrazio di cuore gli Amici che ho sempre sentito vicini, con o senza distanza geografica; capisco ogni giorno di più che grande fortuna sia stata incontrarvi lungo il cammino. Non vi elencherò uno per uno, ma sono sicura che saprete leggere il vostro nome nella prossima riga.

Alla mia famiglia la dedico, come tutto quello che di bello la precede e la segue.