

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

Curve razionali normali e loro proiezioni

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:
Monica Idà

Presentata da:
Davide Vanzo

II Sessione
Anno Accademico 2009/2010

*A Benedetta,
in un dolce e costante
ricordo.*

Indice

Introduzione	3
1 Premesse	5
1.1 Polinomi omogenei	5
1.2 Morfismi proiettivi e ipersuperfici	8
2 Curve razionali normali	15
2.1 La cubica gobba	17
2.2 Ulteriori rappresentazioni delle curve razionali normali	21
2.3 Costruzione sintetica della conica in \mathbb{P}^2	25
3 Proiezioni	29
3.1 Proiezioni della cubica gobba	30
3.2 Proiezioni della quartica razionale normale	37
3.3 Casi generali	49
3.4 Costruzione di un tacnodo	51
Bibliografia	57

Introduzione

Questa tesi è composta da tre capitoli e tratta di argomenti di geometria proiettiva.

Il primo capitolo, suddiviso in due parti, elenca alcuni concetti fondamentali per la trattazione degli argomenti delle sezioni successive. La prima parte approfondisce le proprietà dei polinomi omogenei: essi infatti descrivono le ipersuperfici algebriche dello spazio proiettivo. Tra questi richiami, di grande importanza c'è il teorema che afferma che i polinomi omogenei in due variabili di grado d e a coefficienti in un campo algebricamente chiuso hanno esattamente d soluzioni contate con molteplicità se si pensa alle soluzioni come punti di una retta proiettiva. Ciò darà la possibilità di descrivere molto agevolmente le intersezioni tra una curva e un sottospazio proiettivo. La seconda parte dei richiami invece enuncia le prime proprietà degli spazi proiettivi, la definizione di morfismo lineare proiettivo e di ipersuperficie algebrica proiettiva. Infine si è data la definizione di molteplicità d'intersezione e si è parlato di singolarità di una curva piana e di cono tangente.

Nel secondo capitolo si sono iniziate a studiare le curve razionali normali. Un ampio paragrafo è dedicato alle proprietà della curva razionale normale dello spazio proiettivo tridimensionale, la cubica gobba. Questa curva è intersezione di tre quadriche e ha l'interessante proprietà che presi su di essa un numero qualunque di punti distinti questi sono in posizione generale. Al fine di studiare meglio le curve razionali normali si sono date varie loro rappresentazioni tra cui appunto quella cartesiana e quella determinantale. L'ultimo esempio del capitolo è la costruzione sintetica della curva razionale normale

nel piano proiettivo, esempio nel quale viene appunto costruita una conica liscia con un facile metodo geometrico.

L'ultimo capitolo invece è lo studio di alcune proiezioni piane delle curve razionali normali. Quest'ultima parte è stata sviluppata a partire da numerosi esempi. La prima parte tratta delle proiezioni della cubica gobba: come cambia l'immagine della cubica cambiando il centro di proiezione. Si è infatti visto che se il centro di proiezione è un punto appartenente alla cubica allora la curva proiettata è una conica liscia, mentre se il centro di proiezione è esterno alla cubica si possono presentare i due seguenti casi: la curva proiettata è una cuspidale perché dal centro di proiezione parte una tangente alla cubica; oppure, la curva proiettata è un nodo perché dal centro di proiezione parte una retta che interseca la cubica in due punti distinti. La seconda parte invece studia esempi di proiezioni della curva razionale normale di \mathbb{P}^4 su un piano. Si è studiato come al variare della retta scelta come centro di proiezione possa diminuire o meno il grado della curva proiettata, per esempio proiettando da una retta di \mathbb{P}^4 che incontra la quartica razionale \mathcal{C}_4 in 2 punti, oppure tangente alla \mathcal{C}_4 , oppure che non incontra la \mathcal{C}_4 . Si è sottolineato, con due esempi, come gli iperpiani contenenti il centro di proiezione abbiano un ruolo fondamentale nel grado della curva proiettata. Si è dato anche un esempio che dimostra come il grado della curva immagine si può abbassare anche se il centro di proiezione non incontra \mathcal{C}_4 ; la proiezione in questo caso rende \mathcal{C}_4 un rivestimento doppio della conica. Si sono inoltre studiate le singolarità della curva piana proiezione di \mathcal{C}_4 , e si è concluso l'elaborato descrivendo un metodo, tramite proiezioni, per ottenere una curva con un tacnodo.

Capitolo 1

Premesse

In questo capitolo iniziale si cercherà di richiamare i concetti che più verranno utilizzati nello sviluppo della tesi. Per tutti i particolari omessi e per alcune dimostrazioni si rimanda a [1]. Il campo su cui lavoriamo è il campo dei numeri complessi \mathbb{C} .

1.1 Polinomi omogenei

Di seguito vengono elencate alcune proprietà dei polinomi omogenei.

Definizione 1.1.1.

Un polinomio $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ si dice omogeneo se i monomi che lo compongono hanno tutti lo stesso grado.

Un'altra caratterizzazione dei polinomi omogenei è data dalla seguente

Proposizione 1.1.1.

Un polinomio $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ non nullo è omogeneo di grado d se e solo se in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, t]$ vale l'identità:

$$p(tx_1, \dots, tx_n) = t^d p(x_1, \dots, x_n).$$

Dimostrazione.

Sia p un polinomio omogeneo di grado d .

Allora $p(x_1, \dots, x_n) = a_{d,0,\dots,0}x_1^d + \dots + a_{i_1,\dots,i_n}x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + \dots + a_{0,\dots,0,d}x_n^d$ con $i_1 + \dots + i_n = d$.

Quindi $p(tx_1, \dots, tx_n) = a_{d,0,\dots,0}t^d x_1^d + \dots + a_{i_1,\dots,i_n}t^d x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + \dots + a_{0,\dots,0,d}t^d x_n^d$.

Raccogliendo si ottiene proprio che $p(tx_1, \dots, tx_n) = t^d p(x_1, \dots, x_n)$.

Viceversa scriviamo il polinomio in questo modo: $p = F_0 + \dots + F_r$ con F_i polinomi omogenei in x_1, \dots, x_n di grado i . Allora deve valere l'uguaglianza:

$$t^d F_0 + \dots + t^d F_r = t^0 F_0 + \dots + t^r F_r$$

Da qui segue che $F_0 = 0$ e che $\forall i \quad t^d F_i - t^i F_i = 0$ e quindi o $F_i = 0$ o $i = d$. □

Notazione 1.1.1.

Il \mathbb{C} -spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d in x_0, \dots, x_n a coefficienti in \mathbb{C} insieme al polinomio nullo è denotato con $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$.

Proposizione 1.1.2 (Relazione di Eulero).

Sia $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ omogeneo di grado d , allora vale l'identità

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df$$

Dimostrazione.

Sfruttando l'uguaglianza del teorema precedente, se si derivano ambo i membri rispetto a t si ottiene

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(tx_1, \dots, tx_n)}{\partial x_i} = dt^{d-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

Ponendo $t = 1$ si ottiene la tesi. □

Definizione 1.1.2.

Sia $f \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ di grado $d > 0$.

Si definisce polinomio omogeneizzato di f rispetto ad x_0 il polinomio

$F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ così definito:

$$F(x_0, \dots, x_n) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Osservazione 1.1.1.

Il polinomio omogeneizzato è un polinomio omogeneo di grado d .

Infatti, con le notazioni precedenti, sia $f = f_0 + \dots + f_d$ con $f_i(y_1, \dots, y_n)$ polinomio omogeneo di grado i .

Allora $F = x_0^d(f_0(x_1, \dots, x_n) + \frac{f_1}{x_0}(x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{f_d}{x_0^d}(x_1, \dots, x_n)) = x_0^d f_0(x_1, \dots, x_n) + \dots + x_0^{d-i} f_i(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, \dots, x_n)$.

Definizione 1.1.3.

Sia $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo di grado $d > 0$. Il suo deomogeneizzato rispetto a x_0 è il polinomio $F(1, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$.

Osservazione 1.1.2.

Sia $f(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ di grado $d > 0$, se considero il deomogeneizzato dell'omogeneizzato di f ottengo f .

Infatti il polinomio omogeneizzato di f è $F(x_0, \dots, x_n) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$.

Facendo $F(1, y_1, \dots, y_n)$ ottengo proprio $f(y_1, \dots, y_n)$.

Osservazione 1.1.3.

Sia $F(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo di grado $d > 0$. Allora l'omogeneizzato del deomogeneizzato di F è F se e solo se x_0 non divide F .

Infatti sia $r \geq 0$ tale che

$$F = x_0^r \underbrace{(a_0 x_0^{d-r} + \dots + a_i x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} + \dots + a_t x_n^{d-r})}_{g(x_0, \dots, x_n)}$$

con $i_0 + \dots + i_n = d - r$ e x_0 che non divide g .

Deomogeneizzando si ottiene un polinomio che omogeneizzato è proprio g .

Dunque $F = g$ se e solo se $r = 0$ e cioè se e solo se x_0 non divide F .

Proposizione 1.1.3.

Sia $F(x_0, x_1) \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ omogeneo di grado $d > 0$.

Allora F si scompone nel prodotto di d fattori lineari (eventualmente ripetuti):

$$F(x_0, x_1) = (b_1x_0 - a_1x_1) \cdots (b_dx_0 - a_dx_1) \quad a_i, b_i \in \mathbb{C}.$$

Questa fattorizzazione è unica a meno di costanti c_1, \dots, c_d che moltiplicano i fattori lineari e tali che $c_1 \cdots c_d = 1$.

Diremo che $[a_1, b_1], \dots, [a_d, b_d]$ (pensati come punti in \mathbb{P}^1) sono radici di F . E diremo che $[a_i, b_i]$ ha molteplicità m se $F(x_0, x_1) = (b_ix_0 - a_ix_1)^m G(x_0, x_1)$ con $G(a_i, b_i) \neq 0$.

Dimostrazione.

Sia $r \geq 0$ tale che $F(x_0, x_1) = x_0^r f(x_0, x_1)$ e con x_0 che non divide f . Se $d = r$ siamo a posto;

Se $d > r$ allora f è omogeneo di grado $d - r > 0$ dunque si può scrivere:

$$f = c_{d-r}x_1^{d-r} + \cdots + c_0x_0^{d-r} \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Deomogeneizzando f si ottiene il polinomio $h(y) = c_{d-r}y^{d-r} + \cdots + c_0$.

Ora, poiché siamo in un campo algebricamente chiuso, h si può fattorizzare in un prodotto di $d - r$ fattori lineari, cioè:

$$h(y) = (b_1 - a_1y) \cdots (b_{d-r} - a_{d-r}y) \quad a_j, b_j \in \mathbb{C}$$

Adesso omogeneizzando h (e quindi tornando a f per l'osservazione 1.1.3) si ottiene:

$$f(x_0, x_1) = (b_1x_0 - a_1x_1) \cdots (b_{d-r}x_0 - a_{d-r}x_1).$$

Quindi

$$F(x_0, x_1) = x_0^r (b_1x_0 - a_1x_1) \cdots (b_{d-r}x_0 - a_{d-r}x_1).$$

□

1.2 Morfismi proiettivi e ipersuperfici

Definizione 1.2.1.

Siano V e V' due spazi vettoriali finitamente generati e sia $\phi : V \mapsto V'$

un'applicazione lineare iniettiva.

Si definisce morfismo lineare proiettivo indotto da ϕ l'applicazione:

$$f : \mathbb{P}(V) \mapsto \mathbb{P}(V')$$

$$[v] \mapsto [\phi(v)]$$

L'iniettività e le proprietà di morfismo vettoriale di ϕ assicurano che la definizione sia ben posta e che f sia iniettiva. Si dimostra inoltre che ϕ è suriettiva se e solo se f è suriettiva. Quindi se ϕ è un isomorfismo vettoriale si dirà che f è un isomorfismo proiettivo.

Definizione 1.2.2.

Un isomorfismo proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ in sé è detto *proiettività* di $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 1.2.1.

Poiché si sta lavorando nello spazio proiettivo, parlare di luogo degli zeri di un polinomio ha senso solo se il polinomio è omogeneo; infatti sia $[v]$ un punto del proiettivo e p un polinomio.

Poiché $\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \lambda v \in [v]$ deve succedere che se $p(v) = 0$ allora $p(\lambda v) = 0 \forall \lambda$.

E questo accade solo quando il polinomio è omogeneo, sfruttando la proprietà descritta nella proposizione 1.1.1.

Ponendoci in questo caso possiamo allora definire:

Definizione 1.2.3.

Una ipersuperficie algebrica S di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è la classe di proporzionalità di un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ non nullo. Diciamo che $\forall \rho \in \mathbb{C}^* \rho f = 0$ è un'equazione per S e scriviamo $S : f = 0$.

Si chiama inoltre grado dell'ipersuperficie S il grado di f . Nel seguito utilizziamo, con abuso di notazione, lo stesso simbolo per l'ipersuperficie S e per il suo supporto ($\{P \in \mathbb{P}^n : f(P) = 0\}$)

In base alla dimensione dello spazio proiettivo e al grado del polinomio si usa un nome diverso per l'ipersuperficie:

Definizione 1.2.4.

Sia $S \in \mathbb{P}^n$ una ipersuperficie algebrica di grado d , allora S è detta:
 se $n = 2$ curva proiettiva piana;
 se $n = 3$ superficie proiettiva dello spazio 3-dimensionale;
 se $n = d = 2$ curva conica proiettiva;
 se $d = 2$ e $n = 3$ superficie quadrica proiettiva;
 se $n = 2$ e $d = 3, 4, \dots$ cubica, quadrica, \dots proiettiva piana;
 se $d = 2$ e $n \geq 4$ iperquadrica proiettiva.

Definizione 1.2.5.

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due ipersuperfici di \mathbb{P}^n .

Si dice che \mathcal{C} e \mathcal{D} sono proiettivamente equivalenti se $\exists \phi$ proiettività di \mathbb{P}^n tale che $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$, dove con questo si intende quanto segue:

sia $\mathcal{C} : f(x_0, \dots, x_n) = 0$ e sia $\mathcal{D} : g(x_0, \dots, x_n) = 0$.

Supponiamo che esista una proiettività ϕ tale che, identificando un polinomio con la sua funzione polinomiale, si abbia $g = f \circ \phi$; allora

$$P \in \mathcal{D} \Leftrightarrow g(P) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \phi)(P) = 0 \Leftrightarrow f(\phi(P)) = 0 \Leftrightarrow \phi(P) \in \mathcal{C}.$$

Dunque è legittimo scrivere che $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{D})$ e in questo caso diciamo che ϕ porta \mathcal{D} in \mathcal{C} .

Definizione 1.2.6.

Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva di grado d in \mathbb{P}^2 . Sia poi r una retta in \mathbb{P}^2 di equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x_0 = l_0s + m_0t \\ x_1 = l_1s + m_1t \\ x_2 = l_2s + m_2t \end{cases} \quad \text{con } rk \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & l_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = 2, \quad [s, t] \in \mathbb{P}^1.$$

Sia poi $P \in r$, $P = [s_0, t_0]$. Allora

$$r \cap \mathcal{C} : F(l_0s + m_0t, l_1s + m_1t, l_2s + m_2t) = 0. \quad (1.1)$$

F può essere il polinomio nullo, e questo accade se e solo se $r \subseteq \mathcal{C}$, oppure può essere un polinomio omogeneo in due variabili di grado d . Quindi per la proposizione 1.1.3 il polinomio 1.1 ha d radici contate con molteplicità.

Si definisce quindi molteplicità d'intersezione di \mathcal{C} e r in P :

$$i(\mathcal{C}, r, P) := \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathcal{C} \\ \infty & \text{se } r \subseteq \mathcal{C} \\ m & \text{se } [s_0, t_0] \text{ è radice di molteplicità } m \text{ per 1.1} \end{cases}$$

Si osservi che la definizione è ben posta, in quanto si può provare che non dipende dalla scelta delle equazioni parametriche di r .

Per come abbiamo definito la molteplicità d'intersezione e sfruttando la proposizione 1.1.3 risulta immediato il seguente

Teorema 1.2.1.

In \mathbb{P}^2 , sia \mathcal{C} una curva di grado d e sia r una retta non contenuta in \mathcal{C} . Allora vale:

$$\sum_{P \in r} i(\mathcal{C}, r, P) = d.$$

Dimostrazione.

Poiché F non è il polinomio nullo perché $r \not\subseteq \mathcal{C}$, F sarà un polinomio omogeneo di grado d in due variabili. Quindi ammette d radici contate con molteplicità.

□

Osservazione 1.2.2.

Sia in \mathbb{P}^n la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_0 = \varphi_0(u, v) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(u, v) \end{cases}$$

con i φ_i polinomi omogenei di grado d linearmente indipendenti in $\mathbb{C}[u, v]_d$. Allora \mathcal{C} è una curva che non sta su un iperpiano, e \mathcal{C} ha grado d . Infatti perché il generico iperpiano

$$\alpha : a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$$

contenga la curva dovrebbe accadere che

$$a_0\varphi_0(u, v) + \dots + a_n\varphi_n(u, v) = 0 \quad \forall [u, v] \in \mathbb{P}^1,$$

ma questo accade se e solo se gli a_i sono tutti nulli. Allora ci sono esattamente d radici contate con molteplicità, e queste sono le intersezioni tra iperpiano e curva.

Definizione 1.2.7.

Sia \mathcal{C} una curva algebrica di \mathbb{P}^2 . Sia P un punto qualunque.

Si definisce molteplicità di \mathcal{C} in P :

$$\mu_P(\mathcal{C}) := \min_{r \ni P} i(\mathcal{C}, r, P)$$

con r retta proiettiva che varia nel fascio di centro P .

Accade che $P \notin \mathcal{C}$ se e solo se $\mu_P(\mathcal{C}) = 0$. Altrimenti se $\mu_P(\mathcal{C}) = 1$ si dice che P è un punto semplice per \mathcal{C} ; mentre se $\mu_P(\mathcal{C}) \geq 2$ si dice che P è un punto singolare per \mathcal{C} .

Infine si definisce curva liscia o non singolare una curva che abbia tutti punti semplici, mentre diciamo che la curva è singolare nel caso contrario.

Per determinare la molteplicità di una curva proiettiva in un suo punto c'è il seguente

Teorema 1.2.2.

Sia \mathcal{C} una curva di \mathbb{P}^2 di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$.

Un punto P ha molteplicità m per la curva se e solo se in P tutte le derivate parziali di F di ordine $m - 1$ si annullano in P , mentre ne esiste una di ordine m che non si annulla in P .

Per la dimostrazione del teorema precedente si veda ad esempio [1] prop 34.6

Definizione 1.2.8.

Sia \mathcal{C} una curva di \mathbb{P}^2 e sia $P \in \mathcal{C}$ un punto semplice per \mathcal{C} . Allora la retta r tale che

$$i(\mathcal{C}, r, P) > 1$$

si dice retta tangente a \mathcal{C} in P .

Si dimostra che in queste condizioni r è unica.

Inoltre si ha la seguente

Definizione 1.2.9.

Sia P un punto semplice della curva \mathcal{C} con r retta tangente a \mathcal{C} in P . Allora P è detto punto di flesso se $i(\mathcal{C}, r, P) \geq 3$. In questo caso r è detta tangente inflessionale.

Definizione 1.2.10.

Sia \mathcal{C} una curva algebrica di \mathbb{P}^2 . Sia P un punto di \mathcal{C} . Una retta r tale che $i(\mathcal{C}, r, P) > \mu_P(\mathcal{C})$ è detta tangente principale alla curva in P .

Si dimostra inoltre (vedi [1] paragrafo 34) il seguente

Teorema 1.2.3.

Sia $P \in \mathcal{C}$ un punto multiplo per la curva e sia $m = \mu_P(\mathcal{C})$. Allora ci sono m rette contate con molteplicità aventi molteplicità d'intersezione con \mathcal{C} in $P > m$.

Quindi ci sono k tangenti principali a \mathcal{C} in P , per un opportuno k , $1 \leq k \leq m$.

Definizione 1.2.11.

Con le notazioni precedenti:

se $k = m$ si dice che P è una singolarità ordinaria.

Se $k = m = 2$ si dice che P è un nodo.

Se $m = 2$ e $k = 1$ e se r è detta r l'unica tangente principale, vale che $i(\mathcal{C}, r, P) = 3$, si dice che P è una cuspidale ordinaria.

Osservazione 1.2.3.

Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva in \mathbb{P}^2 avente in P un punto di molteplicità m . Con una proiettività è sempre possibile portare P in $O = [1, 0, 0]$; si osservi che tutte le nozioni precedenti sono invarianti per proiettività.

Supponiamo quindi che $\mu_O(\mathcal{C}) = m$ e sia $f(x, y)$ il deomogeneizzato di $F(x_0, x_1, x_2)$ rispetto a x_0 , dove $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$.

Se $F = x_0^r G(x_0, x_1, x_2)$, con $r \geq 0$ e x_0 che non divide G , allora $d - r$ il grado di f . Dunque possiamo scrivere f come somma di polinomi omogenei $f_j = f_j(x, y)$ di grado j :

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_{d-r}$$

Se $O \in \mathcal{C}$, $f_0 = 0$.

Se $m = 1$, $f_1 = 0$ è un'equazione per la tangente a \mathcal{C} in O .

Se $m \geq 2$, $f_m = 0$ è l'equazione globale per le tangenti principali alla curva \mathcal{C} in O ; cioè $f_m = 0$ è l'equazione della curva unione delle tangenti principali, dove ogni tangente compare con la sua molteplicità. Diciamo che $f_m = 0$ è il cono tangente a \mathcal{C} in O . E si ha che $m = \min\{j : f_j \neq 0\}$; quindi $O \in \mathcal{C}$ se e solo se $f_0 = 0$ e O è singolare per \mathcal{C} se e solo se $f_1 = 0$ (per le dimostrazioni si veda [1]).

Capitolo 2

Curve razionali normali

Inizieremo ora a definire le curve razionali normali e vedremo le prime loro proprietà.

Prima di farlo però è necessario introdurre la seguente funzione:

Definizione 2.0.12.

L'applicazione

$$\nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \mapsto \mathbb{P}^q$$

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto [x_0^d, \dots, x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \dots, x_n^d] = [z_0, \dots, z_q]$$

con $i_0 + \dots + i_n = d$ e $q = \binom{n+d}{d} - 1$ è detta *morfismo di Veronese*. La sua immagine è la *varietà di Veronese di dimensione n in grado d* .

A partire da questo morfismo si definisce inoltre

Definizione 2.0.13.

La curva $\mathcal{C}_d \subset \mathbb{P}^d$ immagine del morfismo di Veronese $\nu_{1,d}$ è detta *curva razionale normale standard*. Chiamiamo *curva razionale normale* una qualunque curva che sia proiettivamente equivalente alla curva razionale normale standard.

Proposizione 2.0.1.

Sia A_0, \dots, A_d una qualsiasi base per lo spazio dei polinomi omogenei di grado d su \mathbb{P}^1 ; allora la curva $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^d$ immagine del morfismo

$$[x_0, x_1] \mapsto [A_0(x_0, x_1), \dots, A_d(x_0, x_1)]$$

è proiettivamente equivalente alla curva razionale normale standard ed è quindi una curva razionale normale.

Dimostrazione.

Sia $A = \{[A_0(x_0, x_1), \dots, A_d(x_0, x_1)], [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1\}$ e sia

$$X = \{[x_0^d, \dots, x_0^i x_1^{d-i}, \dots, x_1^d], [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Poiché x_0^d, \dots, x_1^d sono una base per lo spazio dei polinomi omogenei di grado d , allora

$$\forall k \in \{0, \dots, d\} \exists m_{k,0}, \dots, m_{k,d} \in \mathbb{C} : A_k = m_{k,0}x_0^d + \dots + m_{k,d}x_1^d.$$

Sia quindi $M = (m_{k,j})$ la matrice $(d+1) \times (d+1)$ tale che $A = M X$.

Si vede che $M \in GL_{(d+1)}$ poiché M è una matrice di cambiamento di base, è dunque invertibile con inversa M^{-1} . Quindi la proiettività ϕ di matrice M manda, con le notazioni precedenti, \mathcal{C}_d in \mathcal{D} .

□

Esempio 2.0.1.

Sia \mathcal{C}_2 la curva razionale normale standard in \mathbb{P}^2 e sia

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x_0 = u^2 + v^2 \\ x_1 = uv \\ x_2 = v^2 \end{cases}$$

Sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice tale che

$$M \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2, & uv, & v^2 \end{pmatrix}$$

Quindi la proiettività ϕ di matrice M agisce così: $\phi(\mathcal{C}_2) = \mathcal{D}$, Dunque \mathcal{D} è una curva razionale normale.

2.1 La cubica gobba

La curva \mathcal{C}_3 immagine del morfismo di Veronese $\nu_{1,3}$, e ogni altra curva proiettivamente equivalente ad essa, si chiama cubica gobba.

Quindi la cubica gobba standard ha le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} z_0 = \lambda^3 \\ z_1 = \lambda^2\mu \\ z_2 = \lambda\mu^2 \\ z_3 = \mu^3 \end{cases} \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \quad (2.1)$$

Questa curva non è contenuta in un piano proiettivo.

Sia infatti un generico piano $\alpha : az_0 + bz_1 + cz_2 + dz_3 = 0$; se la cubica vi appartenesse vorrebbe dire che $\forall [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$

$$a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 = 0. \quad (2.2)$$

Ma questa è una combinazione lineare tra monomi linearmente indipendenti dunque deve essere $a = b = c = d = 0$. Dunque \mathcal{C}_3 non è contenuta in un piano, quindi l'intersezione tra \mathcal{C}_3 e α è data da tre punti contati con molteplicità, ottenuti risolvendo l'equazione 2.2 e sostituendo in 2.1.

La cubica non è intersezione di due quadriche. Infatti se fosse $\mathcal{C}_3 = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ con $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ quadriche, si avrebbe che l'intersezione tra \mathcal{C}_3 e un generico piano α sarebbe:

$$\mathcal{C}_3 \cap \alpha = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \cap \alpha = \underbrace{(\mathcal{Q}_1 \cap \alpha)}_{\Gamma_1} \cap \underbrace{(\mathcal{Q}_2 \cap \alpha)}_{\Gamma_2}$$

dove Γ_1 e Γ_2 sono due coniche; la loro intersezione è formata quindi da quattro punti contati con molteplicità in disaccordo con quanto detto sopra.

La cubica gobba è invece rappresentata dall'intersezione di queste tre quadriche:

$$\begin{cases} z_0 z_2 = z_1^2 \\ z_0 z_3 = z_1 z_2 \\ z_1 z_3 = z_2^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Basta infatti sostituire le equazioni parametriche della cubica per vedere che ogni punto di \mathcal{C} è contenuto in tutte e tre le quadriche.

Per vedere il viceversa, cioè mostrare che un punto appartenente all'intersezione delle tre quadriche si può esprimere con le equazioni 2.1, bisogna agire così: sia $P = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ appartenente all'intersezione delle tre quadriche, se $a_0 = 0$ allora necessariamente $P = [0, 0, 0, 1]$, e questo punto si ottiene dalla parametrizzazione con $\lambda = 0$ e $\mu = 1$. Altrimenti si può moltiplicare P per a_0^2 ottenendo $P = [a_0^3, a_0^2 a_1, a_0^2 a_2, a_0^2 a_3]$. Poiché il punto appartiene all'intersezione delle tre quadriche si ha che $a_0^2 a_2 = a_0 a_1^2$ e che $a_0^2 a_3 = a_0 a_1 a_2 = a_1^3$. Si ottiene quindi che $P = [a_0^3, a_0^2 a_1, a_0 a_1^2, a_1^3]$. Dunque per $\lambda = a_0$ e $\mu = a_1$ il punto appartiene alla cubica gobba.

Per studiare un'ulteriore proprietà della cubica gobba è utile scrivere la sua forma parametrica in una certa carta affine, ad esempio

$$U_0 = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{P}^3 : z_0 \neq 0\}.$$

In questo modo si può supporre $\lambda \neq 0$ e quindi fare il seguente cambio di variabili: $t = \frac{\mu}{\lambda}$. Si otterrà:

$$\mathcal{C}_3 \cap U_0 \begin{cases} z_0 = \lambda^3 \\ z_1 = \lambda^3 t \\ z_2 = \lambda^3 t^2 \\ z_3 = \lambda^3 t^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}.$$

che diventa

$$\mathcal{C}_3 \cap U_0 \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = t \\ z_2 = t^2 \\ z_3 = t^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}.$$

Utilizzando questa nuova rappresentazione si mostra facilmente che presi quattro punti distinti della cubica gobba questi sono linearmente indipen-

denti.

Infatti presi quattro punti distinti sulla cubica (e diversi dal punto $[0, 0, 0, 1]$) si deve mostrare che il rango della matrice formata dai quattro punti è massimo. Ovvero che

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

ha rango 4. Questa condizione coincide con la condizione che $\det(M) \neq 0$. Ma M è la matrice di Vandermonde e il suo determinante è (si veda [1] pagina 90)

$$\det(M) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

E poichè i quattro punti sono distinti $\det(M) \neq 0$.

Supponendo invece che uno dei quattro punti sia $[0, 0, 0, 1]$, per esempio il primo, la matrice diventa:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

e il suo determinante risulta comunque diverso da 0.

In questo modo non solo si è visto che quattro punti distinti della cubica gobba sono linearmente indipendenti (e quindi generano \mathbb{P}^3), ma anche che un qualsiasi insieme finito di punti distinti sulla cubica sono in posizione generale, perché comunque vengano presi quattro punti da questo insieme essi sono linearmente indipendenti.

Si può enunciare la seguente generalizzazione:

Teorema 2.1.1.

Si ha che n punti distinti sulla curva razionale normale di \mathbb{P}^d sono in posizione generale.

Dimostrazione.

Analoga alla dimostrazione fatta nel caso della cubica gobba: la matrice degli n punti è una matrice di Vandermonde, con determinante diverso da 0 se e solo se i punti sono distinti.

□

Le tre quadriche inoltre soddisfano un'ulteriore proprietà:

Proposizione 2.1.1.

Siano $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1$ e \mathcal{Q}_2 rispettivamente le tre quadriche $z_0z_2 = z_1^2$, $z_0z_3 = z_1z_2$ e $z_1z_3 = z_2^2$. L'intersezione di due qualunque di queste quadriche coincide con l'unione della cubica gobba e una retta, ovvero per $i \neq j$ si ha

$$\mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j = \mathcal{C}_3 \cup t_{ij}.$$

Dimostrazione.

La dimostrazione è simile per i tre casi. Qui di seguito verrà mostrato che

$$\mathcal{Q}_0 \cap \mathcal{Q}_1 = \mathcal{C}_3 \cup \underbrace{(\{z_0 = 0\} \cap \{z_1 = 0\})}_{t_{01}}.$$

Sia $P = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ un punto appartenente all'intersezione delle due quadriche.

Se $a_1 = 0$ deve succedere che, poiché $a_0a_2 = a_1^2 = 0$, o $a_0 = 0$ o $a_2 = 0$. Nel primo caso P apparterebbe a t_{01} , nel secondo caso si avrebbe che $a_3 = 0$.

Allora $P = [1, 0, 0, 0]$ e dunque appartiene alla cubica gobba.

Si supponga allora $a_1 \neq 0$: dunque $P = [a_0a_1, a_1^2, a_1a_2, a_1a_3] = [a_0a_1, a_0a_2, a_1a_2, a_1a_3]$.

E poichè vale $a_0a_1a_2a_3 = a_1^2a_2^2$, dato che $a_0a_3 = a_1a_2$, il punto $P \in \mathcal{Q}_2$ e quindi appartiene alla cubica gobba.

Si è mostrato quindi che l'intersezione delle due quadriche è contenuta nell'unione della cubica gobba e della retta. Ovviamente un punto di \mathcal{C}_3 sta nell'intersezione delle due quadriche. Quindi basta mostrare che anche t_{01} è contenuta in $\mathcal{Q}_0 \cap \mathcal{Q}_1$. Un generico punto P' appartiene alla retta se $P' = [0, 0, a, b]$. Si vede subito che un punto di questa forma appartiene alle due quadriche.

Per la dimostrazione negli altri casi si usino le rette $t_{02} : \{z_1 = 0\} \cap \{z_2 = 0\}$ e $t_{12} : \{z_2 = 0\} \cap \{z_3 = 0\}$

□

2.2 Ulteriori rappresentazioni delle curve razionali normali

Il discorso sulla cubica gobba relativo alla rappresentazione cartesiana può essere generalizzato ad una qualunque curva razionale normale. Infatti:

Osservazione 2.2.1.

Un'altra rappresentazione della curva razionale normale è come luogo di zeri dei polinomi

$$F_{i,j}(z) = z_i z_j - z_{i-1} z_{j+1} \text{ con } z = [z_0, \dots, z_d] \text{ e } 1 \leq i \leq j \leq d-1.$$

Sostituendo le equazioni parametriche della curva razionale normale standard nei polinomi si vede che ogni equazione è verificata.

Per vedere l'inclusione inversa basta prendere un punto $P = [a_0, \dots, a_d]$ appartenente all'intersezione delle quadriche $F_{i,j} = 0$ e mostrare che può essere immagine di un punto tramite il morfismo di Veronese.

Se P avesse $a_0 = 0$ allora, per le condizioni precedenti, avrebbe $a_i = 0 \forall i \leq d-1$ e quindi sarebbe il punto $[0, \dots, 0, 1]$ che appartiene alla curva. Supponendo quindi $a_0 \neq 0$ si può moltiplicare P per a_0^{d-1} ottenendo così $P = [a_0^d, a_0^{d-1}a_1, \dots, a_0^{d-1}a_d]$.

Si consideri la terza componente: grazie all'uguaglianza $F_{1,1} = 0$ si ha $a_0^{d-1}a_2 = a_0^{d-2}a_1^2$. Per la quarta componente si ha $a_0^{d-1}a_3 = a_0^{d-2}a_1a_2 = a_0^{d-3}a_1^3$. Proseguendo in modo analogo con tutte le altre componenti si ottiene che $P = [a_0^d, \dots, a_0^{d-i}a_1^i, \dots, a_1^d]$ e quindi P appartiene alla curva razionale normale.

In realtà è sufficiente prendere un sottoinsieme di queste quadriche, ovvero quelle della forma $F_{i,i}$ per $i = 1, \dots, d-1$ e $F_{1,d-1}$.

La dimostrazione è molto simile al caso precedente: notando infatti che il

punto $P = [a_0, \dots, a_d]$ può essere solamente della forma o $[1, 0, \dots, 0]$, o $[0, \dots, 0, 1]$ oppure con tutte le componenti diverse da 0, si può applicare il procedimento appena mostrato sfruttando l'invertibilità degli a_i . Ad esempio per la quarta componente $a_0^{d-1} a_3 = a_0^{d-1} \frac{a_2^2}{a_1} = a_0^{d-3} a_1^3$.

Abbiamo quindi dimostrato il:

Teorema 2.2.1.

La curva razionale normale $\mathcal{C}_d \subset \mathbb{P}^d$ è intersezione di d quadriche.

Osservazione 2.2.2.

Un'ulteriore rappresentazione della curva razionale normale è data dalla condizione che per ogni $1 \leq k \leq d - 1$ la matrice

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \cdots & z_{k-1} & z_k \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_k & z_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{d-k} & z_{d-k+1} & \cdots & z_{d-1} & z_d \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

abbia rango 1. Ciò si traduce infatti nel porre tutti i minori di ordine 2 uguali a 0.

Ponendo $k = d - 1$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \cdots & z_{d-1} \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_d \end{pmatrix}$$

I polinomi $F_{i,j}$ sono tutti rappresentabili con il minore di questa matrice ottenuto prendendo le colonne $i - 1$ e j .

Per vedere l'altra inclusione, ovvero che un qualunque minore può essere rappresentato con la famiglia di quadriche $F_{i,j} = 0$ occorre procedere per induzione: ciò che si vuole mostrare è che combinazioni lineari di polinomi $F_{i,j}$ rappresentano, $\forall i, n, t$ accettabili per le dimensioni della matrice, $\det \begin{pmatrix} z_i & z_{i+n} \\ z_{i+t} & z_{i+t+n} \end{pmatrix}$.

L'induzione verrà utilizzata sulla distanza tra le colonne della matrice. Prima di tutto occorre mostrare che prese due colonne vicine la tesi è valida. In

questo caso $\forall i, t$ il minore diventa: $\det \begin{pmatrix} z_i & z_{i+1} \\ z_{i+t} & z_{i+t+1} \end{pmatrix}$.

Dunque si ottiene che $z_i z_{i+t+1} - z_{i+1} z_{i+t} = 0$. Ma questa è esattamente la quadrica $F_{i+t+1, i} = 0$.

Quindi nel caso $n = 1$ la tesi è verificata. Supponendola valida per una distanza tra le colonne $\leq n$ si deve mostrare che $\det \begin{pmatrix} z_i & z_{i+n+1} \\ z_{i+t} & z_{i+t+n+1} \end{pmatrix} = 0$, ovvero $z_i z_{i+t+n+1} - z_{i+n+1} z_{i+t} = 0$, è rappresentabile come combinazione lineare delle quadriche $F_{i, j} = 0$.

Utilizzando le quadriche $F_{i+1, i+t+n} = 0$ e $F_{i+t+1, i+n} = 0$ si ottiene, sostituendo, $z_{i+1} z_{i+t+n} - z_{i+t+1} z_{i+n} = 0$. Ma quest'ultima espressione può essere vista come il determinante della matrice $\begin{pmatrix} z_{i+1} & z_{i+n} \\ z_{i+t+1} & z_{i+t+n} \end{pmatrix}$.

Questo è un minore che ha le colonne distanti $n - 1$ e quindi per ipotesi induttiva è rappresentabile come combinazione lineare di quadriche. Dunque è verificata la tesi per un qualunque minore della matrice in 2.4

Abbiamo così dimostrato il

Teorema 2.2.2.

La curva razionale normale $\mathcal{C}_d \subset \mathbb{P}^d$ è una varietà determinantale, cioè è il luogo dei punti di \mathbb{P}^d tali che il rango della matrice 2.4 sia uguale a 1, dove k è un intero scelto a piacere tra 1 e $d - 1$.

Osservazione 2.2.3.

Esiste un'ulteriore parametrizzazione della curva razionale normale: a partire da un polinomio $F(x_0, x_1) \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ omogeneo di grado $d+1$ che abbia tutte radici distinte, ovvero tale che $F(x_0, x_1) = \prod_{i=0}^d (\lambda_i x_0 - \mu_i x_1)$ con $[\lambda_i, \mu_i] \neq [\lambda_j, \mu_j]$ (intesi come punti di \mathbb{P}^1) se $i \neq j$, si possono scrivere i seguenti $d + 1$ polinomi omogenei di grado d :

$$\forall i = 0, \dots, d \quad G_i(x_0, x_1) = \frac{F(x_0, x_1)}{\lambda_i x_0 - \mu_i x_1}.$$

Questi polinomi rappresentano una base per lo spazio dei polinomi omogenei di dimensione d in due variabili. Infatti, poiché i G_i sono $d+1$, basta mostrare

che una loro combinazione lineare è 0 se e solo se tutti i coefficienti sono 0.

Sia quindi

$$\sum_{i=0}^d \alpha_i G_i(x_0, x_1) = 0.$$

Questa condizione deve valere per ogni (x_0, x_1) . Prendiamo quindi una radice di F , ad esempio (λ_t, μ_t) . Valutando i polinomi in questa coppia si ottiene che se $i \neq t$ $G_i(\lambda_t, \mu_t) = 0$ mentre $G_t(\lambda_t, \mu_t) \neq 0$. La sommatoria diventa così $\alpha_t G_t(\lambda_t, \mu_t) = 0$ e quindi $\alpha_t = 0$. Agendo analogamente con le altre radici si ottiene che $\forall i \quad \alpha_i = 0$.

Dunque l'immagine del morfismo $\varphi : [x_0, x_1] \rightarrow [G_0(x_0, x_1), \dots, G_d(x_0, x_1)]$ è una curva razionale normale.

Si può inoltre notare che le radici del polinomio F vengono mandate nei punti fondamentali F_0, \dots, F_d di \mathbb{P}^d .

Inoltre se λ_i, μ_i sono diversi da 0 per ogni i , il morfismo φ manda i punti $[1, 0]$ e $[0, 1]$ rispettivamente nei punti $[\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_d}{\lambda_0}, \dots, \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_d}{\lambda_d}] = [\lambda_0^{-1}, \dots, \lambda_d^{-1}]$ e $[\frac{\mu_0 \cdots \mu_d}{\mu_0}, \dots, \frac{\mu_0 \cdots \mu_d}{\mu_d}] = [\mu_0^{-1}, \dots, \mu_d^{-1}]$.

Dati due punti P e Q non appartenenti agli iperpiani coordinati, esistono $\lambda_0, \dots, \lambda_d, \mu_0, \dots, \mu_d$ costanti non nulle tali che $P = [\lambda_0^{-1}, \dots, \lambda_d^{-1}]$ e $Q = [\mu_0^{-1}, \dots, \mu_d^{-1}]$.

Scegliere P e Q equivale quindi a scegliere F e quindi i G_i . Quindi esiste una curva razionale normale \mathcal{C} passante per F_0, \dots, F_d, P, Q . Non solo; se \mathcal{D} è una curva razionale normale passante per F_0, \dots, F_d immagine del morfismo $\psi : [x_0, x_1] \mapsto [A_0(x_0, x_1), \dots, A_d(x_0, x_1)]$, allora esiste $[\gamma_i, \delta_i] \quad i = 0, \dots, d$ tali che $A_i(\gamma_i, \delta_i) \neq 0$ e $A_j(\gamma_i, \delta_i) = 0$ se $i \neq j$, quindi gli A_i sono del tipo dei polinomi G_i introdotti sopra; ne segue che se imponiamo anche il passaggio per P e per Q la curva \mathcal{D} coincide con la curva \mathcal{C} .

Fissati $d + 3$ punti in posizione generale in \mathbb{P}^d con una proiezione posso sempre portarli in F_0, \dots, F_d, P, Q , quindi esiste sempre una curva razionale normale passante per $d + 3$ punti qualsiasi, purché in posizione generale, di \mathbb{P}^d , e tale curva è unica.

Abbiamo quindi provato il:

Teorema 2.2.3.

Esiste ed è unica la curva razionale normale passante per $d + 3$ punti di \mathbb{P}^d in posizione generale.

2.3 Costruzione sintetica della conica in \mathbb{P}^2

Di seguito verrà illustrato un modo sintetico per costruire una curva razionale normale, cioè una conica liscia, nel piano proiettivo:

Si prendano due punti distinti $P = [a, b, c]$, $Q = [a', b', c']$ del piano proiettivo. Essi possono essere visti anche come intersezione di due rette proiettive. Si supponga ad esempio che:

$$P : \begin{cases} L(z_0, z_1, z_2) = 0 \\ M(z_0, z_1, z_2) = 0 \end{cases} \quad Q : \begin{cases} L'(z_0, z_1, z_2) = 0 \\ M'(z_0, z_1, z_2) = 0 \end{cases}$$

con L, M, L', M' polinomi lineari, L ed M e L' ed M' non proporzionali.

Ora si prenda il fascio di rette proiettive \mathfrak{F}_P passante per P : questo è dato al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ dall'equazione $\lambda L(z_0, z_1, z_2) + \mu M(z_0, z_1, z_2) = 0$.

Analogamente il fascio \mathfrak{F}_Q per Q sarà: $\alpha L'(z_0, z_1, z_2) + \beta M'(z_0, z_1, z_2) = 0$ $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$.

Ora si stabilisca una corrispondenza biunivoca tra le rette del fascio di P e le rette del fascio di Q con la sola condizione di non far corrispondere la retta $L(PQ)$ a se stessa. Anzi, in realtà vogliamo di più; diamo cioè una proiettività di \mathbb{P}^1 :

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{F}_P &\mapsto \mathfrak{F}_Q \\ [\lambda, \mu] &\mapsto [\phi_1(\lambda, \mu), \phi_2(\lambda, \mu)] \end{aligned}$$

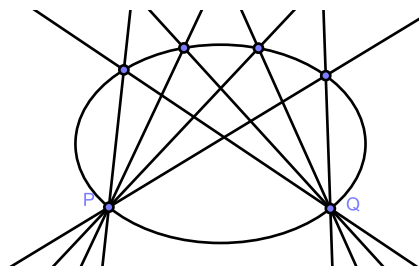
Questa proiettività deve avere la seguente proprietà:

se $[\bar{\lambda}, \bar{\mu}]$ è la coppia che individua la retta $L(P, Q)$ allora la retta individuata da $[\phi_1(\bar{\lambda}, \bar{\mu}), \phi_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu})]$ non è la retta $L(P, Q)$, cioè la matrice associata al sistema

$$\begin{cases} \bar{\lambda}L(z_0, z_1, z_2) + \bar{\mu}M(z_0, z_1, z_2) &= 0 \\ \phi_1(\bar{\lambda}, \bar{\mu})L'(z_0, z_1, z_2) + \phi_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu})M'(z_0, z_1, z_2) &= 0 \end{cases}$$

nelle incognite z_0, z_1, z_2 ha rango massimo.

Il luogo dei punti intersezione di una retta r del fascio \mathfrak{F}_P e della sua associata $\phi(r) \in \mathfrak{F}_Q$ è una conica liscia.



Per provarlo occorre prima mostrare un metodo di risoluzione di un sistema lineare di rango 2 a due equazioni e tre incognite. Sia quindi

$$\begin{cases} ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \\ a'x_0 + b'x_1 + c'x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

il nostro generico sistema e sia M la matrice associata.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice ha rango 2 possiamo supporre che il minore generato dalle prime due colonne sia diverso da 0. Le soluzioni del sistema 2.5 sono tutte proporzionali a

$$\left(\det \begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \right).$$

Utilizzando il metodo di Kramer si ottiene che

$$x_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} -cx_2 & b \\ -c'x_2 & b' \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}} \quad x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} a & -cx_2 \\ a' & -c'x_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}}$$

Ponendo $x_2 = t \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, al variare di t si ottengono tutte le soluzioni proporzionali a quella voluta. Se il minore diverso da 0 è un altro, basta cambiare opportunamente i ruoli di x_0, x_1, x_2 .

Siano quindi $P = [1, 0, 0]$ e $Q = [0, 0, 1]$ i due punti distinti del piano proiettivo. Questa scelta non è restrittiva perché presi due punti distinti esiste sempre una proiettività che manda il primo in P e il secondo in Q . Siano poi $z_1 = 0$ e $z_2 = 0$ le due rette $L = 0$ ed $M = 0$, e siano $z_0 = 0$ e $z_1 = 0$ le due rette $L' = 0$ e $M' = 0$. Quindi $\mathfrak{F}_P : \lambda z_1 + \mu z_2 = 0$ e $\mathfrak{F}_Q : \alpha z_0 + \beta z_1 = 0$. Sia inoltre $\phi : \mathfrak{F}_P \mapsto \mathfrak{F}_Q$, la proiettività di matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Perché alla retta $L(P, Q) : z_1 = 0$ non corrisponda se stessa non deve succedere che alla coppia $[1, 0]$ corrisponda la coppia $[0, 1]$. Questo corrisponde alla condizione che $a \neq 0$.

Il luogo dei punti sarà quindi così descritto:

$$\begin{cases} \lambda z_1 + \mu z_2 & = 0 \\ (a\lambda + b\mu)z_0 + (c\lambda + d\mu)z_1 & = 0 \end{cases}$$

Quindi la matrice associata al sistema è $\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ a\lambda + b\mu & c\lambda + d\mu & 0 \end{pmatrix}$. Poiché non ci sono rette unite questa matrice deve per forza avere rango 2 e quindi la soluzione si può calcolare con il metodo precedentemente visto. Allora svolgendo i calcoli la soluzione sarà

$$\begin{cases} z_0 = & c\lambda\mu + d\mu^2 \\ z_1 = & -(a\lambda\mu + b\mu^2) \\ z_2 = & a\lambda^2 + b\lambda\mu \end{cases}$$

Per mostrare che il luogo dei punti così descritti al variare di $[\lambda, \mu]$ è una curva razionale normale basta vedere che $c\lambda\mu + d\mu^2$, $-(a\lambda\mu + b\mu^2)$ e $a\lambda^2 + b\lambda\mu$ sono una base per i polinomi omogenei di grado due nelle incognite λ e μ . Sia quindi

$$\alpha(c\lambda\mu + d\mu^2) + \beta(a\lambda\mu + b\mu^2) + \gamma(a\lambda^2 + b\lambda\mu) = 0 \quad (2.6)$$

una generica combinazione lineare uguale a zero. Basta mostrare che l'equazione è vera solo se $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Raccogliendo i termini in λ^2 , $\lambda\mu$ e μ^2 la 2.6 diventa

$$a\gamma\lambda^2 + (c\alpha + a\beta + b\gamma)\lambda\mu + (d\alpha + b\beta)\mu^2 = 0$$

Questa è una combinazione lineare di monomi linearmente indipendenti e quindi perché sia uguale a zero tutti i coefficienti devono essere nulli. Quindi

$$\begin{cases} a\gamma & = 0 \\ c\alpha + a\beta + b\gamma & = 0 \\ d\alpha + b\beta & = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione, poiché $a \neq 0$, si ottiene subito che $\gamma = 0$. Il sistema quindi si riduce a

$$\begin{cases} c\alpha + a\beta & = 0 \\ d\alpha + b\beta & = 0 \end{cases}$$

e poiché la matrice ha determinante uguale all'opposto del determinante della matrice della proiettività ϕ e quindi diverso da zero, l'unica soluzione è proprio $\alpha = \beta = 0$.

Dunque questa curva è proiettivamente equivalente alla curva razionale normale standard.

Capitolo 3

Proiezioni

Nel Capitolo I si è detto come sia necessaria l'iniettività dell'applicazione lineare affinché nel proiettivo il morfismo lineare indotto abbia senso (si veda definizione 1.2.1): Infatti, se l'applicazione lineare non fosse iniettiva, qualunque punto diverso da 0 del dominio e appartenente al nucleo non avrebbe un'immagine.

Se però al dominio venisse tolto il nucleo del morfismo, la funzione sarebbe ben definita. Ovviamente però non si può più parlare di morfismo lineare proiettivo.

Si definiscono così le proiezioni:

Definizione 3.0.1.

Sia α un iperpiano di \mathbb{P}^n e sia P un punto non contenuto in α . L'applicazione

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}^n \setminus \{P\} &\mapsto \alpha \\ Q &\mapsto L(P, Q) \cap \alpha \end{aligned}$$

cioè l'applicazione che ad ogni punto Q associa l'intersezione tra la retta proiettiva passante per P e per Q e l'iperpiano α , è definita proiezione di centro P sull'iperpiano α .

Osservazione 3.0.1.

Nella definizione precedente, avendo eliminato il punto P dal dominio, ad ogni punto Q è associata univocamente la retta $L(P, Q)$. Inoltre si può

osservare che, per motivi di dimensione, una retta ed un iperpiano nello spazio proiettivo non hanno mai intersezione vuota. E poiché non è possibile che la retta sia tutta contenuta nell'iperpiano, la proiezione associa ad ogni punto del dominio un solo punto dell'iperpiano. Per questi motivi l'applicazione è ben definita.

Per le definizioni di spazio tangente e di cono tangente ad una varietà di \mathbb{P}^n , e in particolare quindi alla definizione di tangente ad una curva in un suo punto, si fa riferimento a [5] (p.73, p.78 e p.79)

3.1 Proiezioni della cubica gobba

Esempio 3.1.1 (Proiezione della cubica da un suo punto).

Sia $H_3 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 : x_3 = 0\}$ e sia $F_3 = [0, 0, 0, 1]$. Si vuole studiare la proiezione di centro F_3 sull'iperpiano H_3 , e in particolare l'immagine della cubica gobba \mathcal{C}_3 data dalle 2.1 sul piano H_3 . Si noti che F_3 appartiene alla cubica gobba quindi il risultato sarà una proiezione piana della cubica gobba da un suo punto.

Si noti ulteriormente che la cubica gobba senza il punto F_3 può essere vista come $\mathcal{C}_3 \cap U_0$ e quindi può essere parametrizzata come si era visto precedentemente. Sia quindi P un generico punto della cubica diverso da F_3 : allora $P = [1, t, t^2, t^3]$. La retta passante per P e per F_3 sarà quindi parametrizzata così:

$$\begin{cases} x_0 = & a \\ x_1 = & at \\ x_2 = & at^2 \\ x_3 = & at^3 + b \end{cases} \quad [a, b] \in \mathbb{P}^1.$$

L'intersezione di questa retta con il piano H_3 , e quindi $\pi(P)$, è della forma: $[a, at, at^2, 0] = [1, t, t^2, 0]$. Grazie all'isomorfismo $[\alpha, \beta, \gamma, 0] \rightarrow [\alpha, \beta, \gamma]$ si può identificare H_3 con \mathbb{P}^2 . Al variare di t in \mathbb{C} si ottiene l'immagine della cubica gobba attraverso la proiezione di centro F_3 sul piano $H_3 \cong \mathbb{P}^2$. E quest'immagine è contenuta nella curva razionale normale standard di \mathbb{P}^2 ,

ovvero nella conica $x_0x_2 = x_1^2$.

Il punto mancante è il punto $[0, 0, 1, 0]$ che può essere ottenuto prendendo la retta r tangente a \mathcal{C}_3 in F_3 :

$$r : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = l \\ x_3 = m \end{cases} \quad [l, m] \in \mathbb{P}^1.$$

E considerandone l'intersezione col piano H_3 che è proprio il punto $[0, 0, 1, 0]$. Questo esempio può essere generalizzato: si può dimostrare infatti che, variando opportunamente il centro della proiezione π e l'iperpiano su cui si proietta (in modo cioè che la proiezione sia ben definita e che il centro appartenga alla cubica gobba), l'immagine della cubica gobba attraverso π è contenuta (o uguale ampliando l'immagine della proiezione utilizzando, come sopra, la tangente alla cubica nel centro di proiezione) in una conica non degenera di \mathbb{P}^2 , e quindi proiettivamente equivalente alla curva razionale normale del piano proiettivo.

Esempio 3.1.2 (Proiezioni della cubica da un punto esterno ad essa: la cuspidale).

Sia ora π la proiezione di centro F_2 e sia H_2 il piano su cui si proietta. Il punto F_2 non sta su \mathcal{C}_3 . In questo caso la retta generata da F_2 e da un generico punto $P = [\lambda^3, \lambda^2\mu, \lambda\mu^2, \mu^3] \in \mathcal{C}$ sarà:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha\lambda^3 \\ x_1 = \alpha\lambda^2\mu \\ x_2 = \alpha\lambda\mu^2 + \beta \\ x_3 = \alpha\mu^3 \end{cases} \quad [\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Quindi l'intersezione di questa retta con il piano H_2 sarà il punto $\pi(P) = [\lambda^3, \lambda^2\mu, 0, \mu^3]$. Dunque al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ si ottiene l'immagine della cubica gobba. Questa immagine è una cubica piana. Infatti presa una

generica retta s su H_2 , questa sarà della forma

$$\begin{cases} ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

I punti d'intersezione tra l'immagine della cubica e la retta sono dati dalle radici del polinomio $a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + d\mu^3$. E questo è un polinomio omogeneo in due variabili e quindi ammette tre radici contate con molteplicità.

L'equazione cartesiana di $\pi(\mathcal{C}_3)$ sul piano $x_2 = 0$ è infatti

$$x_0^2x_3 - x_1^3 = 0. \quad (3.1)$$

Per mostrarlo occorre provare le due inclusioni:

si vede subito sostituendo che un punto della forma $[\lambda^3, \lambda^2\mu, 0, \mu^3]$ è soluzione dell'equazione precedente. Si prenda quindi un punto $P = [x_0, x_1, 0, x_3]$ che sia soluzione di 3.1. Se $x_0 = 0$ allora $P = [0, 0, 0, 1]$ che corrisponde alla parametrizzazione $\lambda = 0 \mu = 1$. Se $x_0 \neq 0$ si può moltiplicare per x_0^2 e si ottiene

$$P = [x_0^3, x_0^2x_1, 0, x_0^2x_3] = [x_0^3, x_0^2x_1, 0, x_1^3].$$

che quindi corrisponde al punto $\lambda = x_0 \mu = x_1$.

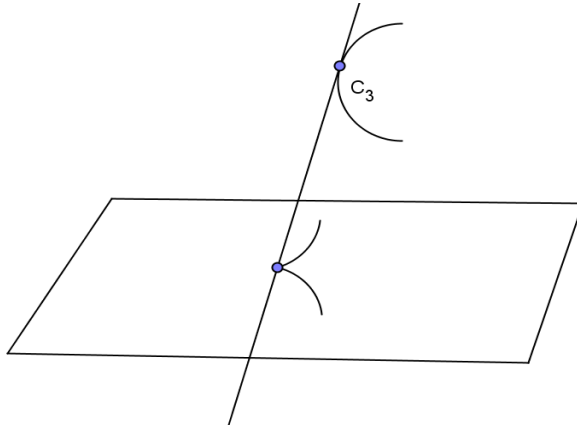
Lavoriamo sul piano $x_2 = 0$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_3 .

Le derivate parziali del polinomio $F(x_0, x_1, x_3) = x_0^2x_3 - x_1^3$ sono

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_3) = 2x_0x_3, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_3) = -3x_1^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_3) = x_0^2.$$

e sono tutte nulle se e solo se $x_0 = 0, x_1 = 0$. Quindi $[0, 0, 1]$ è un punto singolare e in tutti gli altri punti la cubica è liscia.

Studiamo il comportamento in $[0, 0, 1]$. Deomogeneizzando rispetto a x_3 si ottiene la cubica di \mathbb{A}^2 : $y^2 - z^3 = 0$ e questa presenta una cuspidale in $(0, 0)$. Ovvero $(0, 0)$ è un punto doppio con una sola tangente principale, la retta $y = 0$. Tornando a coordinate omogenee si ottiene che la retta tangente principale nel punto $[0, 0, 1]$, cuspidale per la proiezione della cubica gobba, è la retta $t: x_0 = 0$, risulta essere $i(\pi(\mathcal{C}), t, [0, 0, 1]) = 3$.



Esempio 3.1.3 (Proiezioni della cubica da un punto esterno ad essa: il nodo).

Sia ora $F = [1, 0, 0, 1]$ il centro della proiezione π e H_0 il piano su cui proiettare. Si noti preliminarmente che $F \notin C_3$ e se si costruisce la matrice con F e i due punti della cubica gobba F_0 e F_3 , ovvero

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il rango di M è 2.

Questo significa che la retta passante per F e per F_0 è la stessa che passa per F e per F_3 . Ciò comporta che nella proiezione i due punti avranno la stessa immagine.

Sviluppando i calcoli:

sia r la retta passante per F e per un generico punto della cubica gobba.

Allora la sua forma parametrica sarà:

$$r_{[u,v]} : \begin{cases} x_0 = \alpha u^3 + \beta \\ x_1 = \alpha u^2 v \\ x_2 = \alpha u v^2 \\ x_3 = \alpha v^3 + \beta \end{cases} \quad [\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Intersecando queste rette con il piano H_0 si ottiene

$$r_{[u,v]} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \alpha u^2 v \\ x_2 = \alpha u v^2 \\ x_3 = \alpha v^3 + \beta \end{cases}$$

e quindi che $\beta = -\alpha u^3$

Da qui sostituendo $x_3 = \alpha(v^3 - u^3)$ e quindi, al variare di u e v , si ottiene la parametrizzazione della curva $\mathcal{D} = \pi(\mathcal{C}_3)$:

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = u^2 v \\ x_2 = u v^2 \\ x_3 = v^3 - u^3 \end{cases}$$

Nel seguito lavoriamo nel piano $x_0 = 0$ con coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 , e pensiamo a \mathcal{D} come ad una curva piana di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = u^2 v \\ x_2 = u v^2 \\ x_3 = v^3 - u^3 \end{cases}, \quad [u, v] \in \mathbb{P}^1.$$

La sua rappresentazione cartesiana è data dagli zeri del polinomio:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1 x_2 x_3 - x_2^3.$$

Si osserva subito che \mathcal{D} è contenuta in questa cubica.

Per vedere il viceversa occorre prima osservare che se o x_1 o x_2 sono uguali a 0 si ottiene il punto $F_2 = [0, 0, 1]$ che si ottiene come punto di \mathcal{D} per $u = 0$ e $v = 1$ e anche per $u = 1$ e $v = 0$. Siano quindi sia x_1 che x_2 diversi da 0, il generico punto sulla cubica $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ sarà del tipo $[x_1, x_2, x_3]$ con $x_1 x_2 x_3 = x_2^3 - x_1^3$. Moltiplicando per $x_1 x_2$ si ottiene:

$$[x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_1 x_2 x_3] = [x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3 - x_1^3],$$

Ponendo $x_1 = u$ e $x_2 = v$ si vede che questo è un punto di \mathcal{D} , e si ottiene l'inclusione inversa.

Con questo polinomio si possono studiare i punti singolari della curva. Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2x_3, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -3x_2^2 + x_1x_3, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2.$$

L'unico caso in cui tutte le derivate parziali di ordine 1 si annullano è il punto $F_3 = [0, 0, 0, 1]$. Quindi in questo punto la cubica avrà una singolarità.

Si noti che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

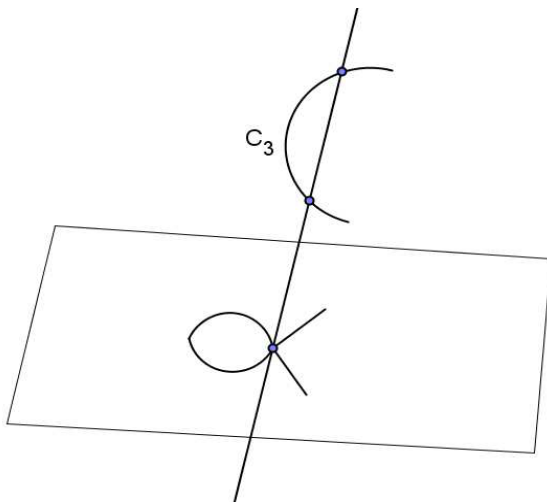
Quindi questa derivata seconda è diversa da 0 nel punto F_3 .

Allora F_3 è un punto doppio.

Per trovare il cono tangente in quel punto occorre deomogeneizzare il polinomio rispetto a x_3 e trattare la curva affine $F(x_1, x_2, 1) = 0$, ovvero

$$x_1^3 - x_1x_2 - x_2^3 = 0.$$

Da qui si vede che le due tangenti principali a \mathcal{D} in F_2 sono la retta $t_1 : x_1 = 0$ e la retta $t_2 : x_2 = 0$.



Se si interseca t_1 con \mathcal{D} si ottiene $-x_2^3 = 0$ e quindi $i(\mathcal{D}, t_1, F_3) = 3$. Analogamente per t_2 .

Si ottiene dunque che \mathcal{D} è una cubica con un nodo nel punto F_3 . Infatti

sia F_0 che F_3 hanno come immagine rispetto alla proiezione lo stesso punto, ovvero F_3 .

Ciò, geometricamente, crea per proiezione una curva che passa dallo stesso punto in due occasioni.

Osservazione 3.1.1.

Questi ultimi due esempi fatti, cioè proiezione della cubica gobba su una cubica con una cuspid e proiezione su una cubica con un nodo, sono emblematici: infatti si può dimostrare che fissato un punto P fuori dalla cubica gobba e fissato un piano H che non contenga il punto, la proiezione di centro P su H presenta sempre e solo uno dei due casi:

- Esiste ed è unica la retta che passa per P e che interseca la cubica gobba in due punti distinti. Questo è il caso in cui la proiezione della cubica gobba risulta essere una cubica piana con un nodo.
- Esiste ed è unica la retta che passa per P e che è tangente alla cubica gobba in un suo punto. Questo è il caso in cui la proiezione della cubica gobba risulta essere una cubica piana con una cuspid.

Nel seguito consideriamo proiezioni di centro un sottospazio.

Definizione 3.1.1.

Sia H un sottospazio proiettivo di dimensione t di \mathbb{P}^n , e sia F un sottospazio di \mathbb{P}^n di dimensione $n - t - 1$ e sghembo con H .

L'applicazione definita su $\mathbb{P}^n \setminus F$ che ad ogni punto P associa il punto $P' = L(F, P) \cap H$ è definita proiezione di centro F su H .

Osservazione 3.1.2.

La proiezione è una funzione ben definita. Infatti la dimensione di $L(F, P)$ è $n - t$ poiché il punto non può appartenere ad F . Quindi $L(F, P) \cap H$ è sempre non vuota. Se però l'intersezione avesse dimensione maggiore di 0 necessariamente F e H non sarebbero disgiunti. Quindi ad ogni punto corrisponde un solo punto.

Di seguito verrà approfondito il caso specifico in cui il sottospazio di arrivo sia un piano proiettivo.

3.2 Proiezioni della quartica razionale normale

Esempio 3.2.1 (Proiezione di \mathcal{C}_4 da una retta di \mathbb{P}^4 che non la interseca).

Sia in \mathbb{P}^4 la curva razionale normale, ovvero

$$\mathcal{C}_4 : \begin{cases} x_0 = u^4 \\ x_1 = u^3v \\ x_2 = u^2v^2 \\ x_3 = uv^3 \\ x_4 = v^4 \end{cases} \quad [u, v] \in \mathbb{P}^1$$

Si studierà la proiezione di \mathcal{C}_4 di centro $r = L(F_1, F_2)$ su H , dove

$$r : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \quad H : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $r \cap H = \emptyset$. Inoltre anche la curva razionale normale è disgiunta da r .

Adesso si prenda il piano contenente r e un generico punto $P = [u^4, u^3v, u^2v^2, uv^3, v^4]$ di \mathcal{C}_4 . Questo piano verrà indicato da $\alpha_{[u,v]}$. Per le sue equazioni cartesiane basta porre uguale a 3 il rango della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u^4 & u^3v & u^2v^2 & uv^3 & v^4 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ottenuta prendendo da M le prime due righe e la seconda e la terza colonna, ha determinante diversa da 0. Orlandola con la terza riga e la prima colonna si ottiene

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u^4 & u^3v & u^2v^2 \end{pmatrix} = u^4.$$

Questo determinante è diverso da 0 solo se u lo è.

Ponendosi in questo caso, orlando nuovamente si ottengono le due equazioni

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u^4 & u^3v & u^2v^2 & uv^3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u^4 & u^3v & u^2v^2 & v^4 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Che si traducono nelle equazioni cartesiane di $\alpha_{[u,v]}$ per $u = 0$

$$\alpha_{[u,v]} : \begin{cases} uv^3x_0 - u^4x_3 = 0 \\ v^4x_0 - u^4x_4 = 0 \end{cases}$$

Nel caso in cui $u = 0$ si deve avere necessariamente $v \neq 0$ e quindi M diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Operando come sopra si ottiene che

$$\alpha_{[0,1]} = \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Il passo successivo è intersecare i piani con H .

Intersecando $\alpha_{[0,1]}$ con H si ottiene

$$\alpha_{[0,1]} \cap H = \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e cioè il punto $[0, 0, 0, 0, 1]$.

Posto invece $u \neq 0$ si ottiene

$$\alpha_{[u,v]} \cap H = \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = \frac{uv^3}{u^4}x_0 \\ x_4 & = \frac{v^4}{u^4}x_0 \end{cases}$$

x_0 deve quindi essere diverso da 0, e l'immagine del generico punto P della curva razionale normale è uguale a

$$\left[x_0, 0, 0, \frac{uv^3}{u^4}x_0, \frac{v^4}{u^4}x_0 \right] = [u^4, 0, 0, uv^3, v^4].$$

Il punto ottenuto da qui per $u = 0$, e cioè $[0, 0, 0, 0, 1]$, è proprio il punto $\alpha[0, 1] \cap H$.

Quindi si ottiene la curva

$$\pi(\mathcal{C}_4) = \mathcal{C} : \begin{cases} x_0 = u^4 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = uv^3 \\ x_4 = v^4 \end{cases} \quad [u, v] \in \mathbb{P}^1$$

Questa curva è una quartica razionale piana. Una equazione cartesiana per \mathcal{C} è:

$$\underbrace{x_0x_4^3 - x_3^4}_{F(x_0, x_3, x_4)} = 0$$

Infatti i punti di \mathcal{C} soddisfano la condizione sopra. Il viceversa si vede in questo modo:

se $x_4 = 0$ allora da $F(x_0, x_3, 0) = 0$ si ha il punto $[1, 0, 0]$ che è il punto di \mathcal{C} ottenuto per $u = 1$ e $v = 0$, se invece $x_4 \neq 0$ allora il punto generico $Q = [x_0, x_3, x_4]$ della quartica $F(x_0, x_3, x_4) = 0$ può essere moltiplicato per x_4^3 . Si ottiene così

$$Q = [x_0x_4^3, x_3x_4^3, x_4^4] = [x_3^4, x_3x_4^3, x_4^4],$$

e con $u = x_3$ e $v = x_4$ si ha che $Q \in \mathcal{C}$.

Le derivate parziali del polinomio F sono:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, x_3, x_4) = x_4^3, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(x_0, x_3, x_4) = -4x_3^3, \quad \frac{\partial F}{\partial x_4}(x_0, x_3, x_4) = 3x_0x_4^2.$$

Queste sono tutte uguali a 0 solo nel punto $O = [1, 0, 0]$.

Quindi tutti gli altri punti della quartica \mathcal{C} sono non singolari. Studiando tutte le altre derivate parziali si nota che la prima non nulla in $[1, 0, 0]$ è $\frac{\partial^3 F}{\partial x_4^3}$.

Quindi O è un punto triplo per la quartica.

Volendo studiare la curva nel piano affine, basta mettersi nella carta affine $x_0 \neq 0$ e deomogeneizzare il polinomio ponendo $y = \frac{x_4}{x_0}$ e $z = \frac{x_3}{x_0}$. Si ottiene così la curva di equazione $y^3 - z^4 = 0$. Questa curva in effetti ha nel punto $(0,0)$ una singolarità. Infatti $(0,0)$ è un punto triplo non ordinario. La sua unica tangente principale è $y = 0$.

Tornando nel proiettivo la retta tangente principale diventa $x_4 = 0$, retta che incontra \mathcal{C} solo in O con molteplicità 4.

Quindi nel punto O la curva ha un punto triplo non ordinario, la cui unica tangente principale è la retta $x_4 = 0$.

Torniamo a lavorare in \mathcal{P}^4 . Il punto $O = [1, 0, 0, 0, 0]$ appartiene a \mathcal{C}_4 e si ottiene per $v = 0$. Equazioni cartesiane per il piano $\alpha_{[1,0]}$ sono

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$\alpha_{[1,0]} \cap \mathcal{C}_4 : \begin{cases} x_0 = u^4 \\ x_1 = u^3v \\ x_2 = u^2v^2 \\ x_3 = uv^3 \\ x_4 = v^4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Poiché il sistema $\begin{cases} uv^3 = 0 \\ v^4 = 0 \end{cases}$ è equivalente a $v^3 = 0$, si ha che il piano $\alpha_{[1,0]}$ interseca la \mathcal{C}_4 3 volte in O .

Vediamo ora altri esempi di proiezioni di \mathbb{P}^4 .

Esempio 3.2.2 (Proiezione di \mathcal{C}_4 da una retta di \mathbb{P}^4 che la incontra due volte in un punto).

Sia T la retta di \mathbb{P}^4 generata da F_0 e da F_1 . In forma cartesiana

$$T : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Sia $H = \{[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{P}^4 : x_0 = x_1 = 0\}$. Consideriamo la proiezione π di \mathbb{P}^4 con centro T su H , e vediamo chi è $\pi(\mathcal{C}_4)$. Si noti che la retta T interseca la curva razionale normale standard \mathcal{C}_4 solo nel punto F_0 che si ha per $v = 0$.

Quindi per costruire il piano $\alpha_{[u,v]}$ contenente la retta T e un punto generico $P \in \mathcal{C}_4$, $P = [u^4, u^3v, u^2v^2, uv^3, v^4]$, diverso da F_0 si deve porre uguale a tre il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u^4 & u^3v & u^2v^2 & uv^3 & v^4 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Si noti che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u^4 & u^3v & v^4 \end{pmatrix} = v^4$$

è quindi sempre diverso da 0. Quindi si possono scrivere le equazioni del piano $\alpha_{[u,v]}$ imponendo uguale a 0 il determinante delle matrici orlate di

quest'ultima, e cioè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u^4 & u^3v & v^4 & u^2v^2 \\ x_0 & x_1 & x_4 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u^4 & u^3v & v^4 & uv^3 \\ x_0 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Da qui si ottengono le due equazioni

$$\alpha_{[u,v]} : \begin{cases} v^4x_2 - u^2v^2x_4 = 0 \\ v^4x_3 - uv^3x_4 = 0 \end{cases} \quad v \neq 0$$

Da qui intersecando con H si ottiene il punto $[0, 0, u^2v^2, uv^3, v^4]$. Si ha quindi:

$$\tilde{\mathcal{D}} = \pi(\mathcal{C}_4 \setminus \{F_0\}) : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = u^2 \\ x_3 = uv \\ x_4 = v^2 \end{cases} \quad v \neq 0.$$

D'altra parte $\pi|_{\mathcal{C}_4 \setminus \{F_0\}}$ si può estendere a tutta \mathcal{C}_4 così

$$\begin{aligned} \pi|_{\mathcal{C}_4} : \quad \mathcal{C}_4 &\mapsto \tilde{\mathcal{D}} \cup \{F_2\} \\ [u^4, \dots, v^4] &\mapsto [0, 0, u^2, uv, v^2] \end{aligned}$$

Sia quindi $\mathcal{D} := \tilde{\mathcal{D}} \cup \{[0, 0, 1, 0, 0]\}$. Lavorando nel piano H con coordinate omogenee x_2, x_3, x_4 si ha quindi

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x_2 = u^2 \\ x_3 = uv \\ x_4 = v^2 \end{cases}$$

La curva \mathcal{D} è la conica di equazione cartesiana

$$\mathcal{D} : x_2x_4 - x_3^2 = 0.$$

Chiamiamo $F(x_2, x_3, x_4)$ il polinomio al primo membro dell'uguaglianza.

Si possono mostrare le due inclusioni: sostituendo nell'equazione i parametri

si vede che l'uguaglianza è verificata. Viceversa se il punto che appartiene alla conica ha $x_4 = 0$ deve essere per forza $[1,0,0]$ che è ottenibile parametricamente con $u = 1$ e $v = 0$. Se $x_4 \neq 0$ allora si può moltiplicare il punto per x_4 e si ottiene:

$$[x_2x_4, x_3x_4, x_4^2] = [x_3^2, x_3x_4, x_4^2].$$

ottenibile con $u = x_3$ e $v = x_4$.

Quindi l'immagine della curva razionale normale in questa proiezione è una conica liscia.

Infatti le sue derivate prime

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_2, x_3, x_4) = x_4, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(x_2, x_3, x_4) = -2x_3, \quad \frac{\partial F}{\partial x_4}(x_2, x_3, x_4) = x_2.$$

non si annullano mai in punti di H .

Non è difficile vedere che $\pi|_{\mathcal{C}_4}$ è iniettiva.

In questo caso, proiettando \mathcal{C}_4 il grado si è abbassato di 2.

Esempio 3.2.3 (Proiezione di \mathcal{C}_4 da una retta di \mathbb{P}^4 che la incontra in due punti distinti).

Cambiando centro di proiezione, ovvero

$$T' : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e piano su cui si proietta

$$H' : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

si ottiene un risultato analogo all'esempio 3.2.2.

Prima di sviluppare i conti si noti che T' in questo caso incontra la quartica razionale normale in due punti distinti, ovvero F_0 e F_4 che si hanno rispettivamente per $u = 0$ e per $v = 0$.

Dobbiamo quindi supporre $u \neq 0$ e $v \neq 0$ per poter costruire il piano $\alpha_{[u,v]} = L(T, P)$ con $P \in \mathcal{C}_4$, $P \neq F_0$ e $P \neq F_4$.

La matrice da orlare per costruire il piano può essere la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u^4 & v^4 & u^2v^2 \end{pmatrix} \quad uv \neq 0.$$

Ponendo quindi uguali a zero i due orlati si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} u^2v^2x_1 - u^3vx_2 = 0 \\ u^2v^2x_3 - uv^3x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi risolvendo ed intersecando con H'

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 = u^2 \\ x_2 = uv \\ x_3 = v^2 \end{cases} \quad uv \neq 0$$

Chiamando $\mathcal{D}' := \{[0, u^2, uv, v^2, 0] \in \mathbb{P}^4 : [u, v] \in \mathbb{P}^1\}$ si ha che equazioni cartesiane per \mathcal{D}' sono:

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1x_3 - x_2^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(la dimostrazione è analoga al caso precedente). Se $u = 0$, rispettivamente $v = 0$, si ha il punto F_3 , rispettivamente F_1 , di \mathcal{D}' .

Abbiamo così ottenuto $\pi|_{\mathcal{C}_4 \setminus \{F_0, F_4\}} : \mathcal{C}_4 \setminus \{F_0, F_4\} \mapsto \mathcal{D}' \setminus \{F_1, F_3\}$ che si estende a tutta \mathcal{C}_4 così:

$$\begin{aligned} \pi|_{\mathcal{C}_4} : \quad \mathcal{C}_4 &\mapsto \mathcal{D}' \\ [u^4, \dots, v^4] &\mapsto [0, u^2, uv, v^2, 0] \end{aligned}$$

Quindi, come anticipato, questa nuova proiezione della quartica razionale normale è una conica liscia; la proiezione è iniettiva, il grado si è abbassato di 2 e il centro di proiezione incontra \mathcal{C}_4 in due punti distinti.

Osservazione 3.2.1.

Il motivo per cui le ultime due proiezioni danno risultati analoghi va ricercato nel comportamento degli iperpiani che contengono il centro di proiezione.

Tali iperpiani infatti sono in corrispondenza biunivoca con le rette del piano su cui si proietta e quindi il loro comportamento influenza il grado della curva immagine della proiezione. Più precisamente: la corrispondenza biunivoca è data dall'applicazione che ad una qualunque retta r del piano associa il sottospazio $L(r, T)$ con T centro di proiezione. Poiché r e T sono sghembe il sottospazio generato deve avere dimensione 3 e quindi essere un iperpiano. L'iniettività di quest'applicazione è data dal fatto che se a due rette distinte corrisponde lo stesso iperpiano, vorrebbe dire che l'iperpiano contiene sia il piano che T , e quindi necessariamente dovrebbe avere dimensione 4. La suriettività invece si mostra prendendo un qualunque iperpiano α che contiene T . Detto H il piano su cui si proietta, poiché $L(\alpha, H) \supseteq L(T, H) = \mathbb{P}^4$, utilizzando il teorema di Grassmann proiettivo si ha che

$$\dim(\alpha \cap H) = \dim(H) + \dim(\alpha) - \dim(L(\alpha, H)) = 2 + 3 - 4 = 1.$$

E quindi $\alpha \cap H$ una retta.

Per via di questa corrispondenza, il grado dell'immagine della curva razionale normale si abbassa se il numero (contato con molteplicità) di intersezioni che appartengono a T degli iperpiani contenenti T con la curva razionale normale è maggiore di 0.

Ponendoci di nuovo nel caso di \mathbb{P}^4 , e mettiamoci per ora nell'ipotesi che $\pi|_{\mathcal{C}_4}$ sia genericamente iniettiva; dunque punti distinti di \mathcal{C}_4 vanno in punti distinti di $\pi(\mathcal{C}_4)$. Si noti che un qualunque iperpiano incontra la quartica razionale normale in quattro punti contati con molteplicità.

Se la proiezione della curva fosse di grado maggiore a 4 vorrebbe dire che ogni retta la interseca più di quattro volte, e questo vorrebbe dire che l'iperpiano corrispondente a quella retta dovrebbe intersecare la quartica in più di quattro punti, cosa assurda. Quindi l'immagine della quartica non può avere un grado maggiore a 4.

Se, per esempio, ogni iperpiano contenente T incontra \mathcal{C}_4 in due punti di T e

in due punti fuori da T , la curva immagine perde due gradi ed è necessariamente una conica. Infatti se fosse una cubica ogni retta la intersecherebbe tre volte. E quindi ogni iperpiano contenente T dovrebbe intersecare \mathcal{C}_4 cinque volte: tre dovute alle retroimmagini dei punti intersezione tra retta e cubica in H , e due che per ipotesi stanno su T .

Quindi, nell'ipotesi che $\pi|_{\mathcal{C}_4}$ sia genericamente iniettiva, il grado della curva immagine è uguale al grado della curva razionale normale diminuito del numero di punti di \mathcal{C}_d (contati con molteplicità) comuni a tutti gli iperpiani contenenti il centro di proiezione; Se togliamo l'ipotesi dell'iniettività possiamo solo dire che è minore o uguale.

Prendendo l'ultimo esempio si vede infatti che nel primo caso il centro di proiezione è $T = \{[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{P}^4 : x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$.

Il generico iperpiano α contenente T sarà della forma:

$$\alpha : ax_2 + bx_3 + cx_4 = 0 \quad [a, b, c] \in \mathbb{P}^2$$

L'intersezione tra α e \mathcal{C}_4 è data da

$$au^2v^2 + buv^3 + cv^4 = v^2(au^2 + buv + cv^2) = 0$$

e quindi $v = 0$, e cioè il punto $F_0 = [1, 0, 0, 0, 0]$, è radice doppia. Ogni iperpiano contenente T quindi interseca due volte la quartica razionale in $F_0 \in T$ e due volte fuori da T .

Nel secondo caso invece, con $T' = \{[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{P}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$, il generico iperpiano contenente il centro di proiezione ha equazione

$$\alpha' : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad [a, b, c] \in \mathbb{P}^2$$

e quindi l'intersezione è data da

$$au^3v + bu^2v^3 + cuv^3 = uv(au^2 + buv + cv^2) = 0 :$$

due soluzioni semplici in $F_0 = [1, 0, 0, 0, 0]$ e $F_4 = [0, 0, 0, 0, 1]$ sono punti di T , e le altre due sono punti fuori da T .

Quindi in entrambi i casi gli iperpiani intersecano sempre la quartica razionale in due punti di T e in altri due punti fuori. Per questo motivo vi è analogia nelle immagini delle proiezioni.

Dall'esempio 3.2.1 in cui la proiezione di \mathcal{C}_4 risultava una quartica con un punto triplo ci si aspetta che gli iperpiani passanti per il centro di proiezione non abbiano intersezioni fisse con la quartica razionale normale.

Infatti il generico iperpiano di quella forma è del tipo:

$$\gamma : ax_0 + bx_3 + cx_4 = 0 \quad [a, b, c] \in \mathbb{P}^2$$

e la sua intersezione con la quartica razionale normale è

$$au^4 + bu^3v + cv^4 = 0.$$

Ed effettivamente le soluzioni di quest'equazione cambiano al variare dei parametri a, b e c , e cioè al variare dell'iperpiano.

Concludiamo le proiezioni da \mathbb{P}^4 su un piano con un esempio particolare:

Esempio 3.2.4 (\mathcal{C}_4 come rivestimento doppio della conica liscia).

Sia il centro di proiezione $T = L(F_1, F_3)$ e sia $H = L(F_0, F_2, F_4)$ il piano su cui si proietta; equazioni cartesiane per T e per H sono

$$T : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad H : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Prendendo tutti gli iperpiani passanti per T essi saranno della forma

$$\alpha : ax_0 + bx_2 + cx_4 = 0.$$

Sostituendo alle incognite la loro parametrizzazione nella curva razionale normale si ottiene $\alpha \cap \mathcal{C}_4$:

$$au^4 + bu^2v^2 + cv^4 = 0. \tag{3.2}$$

Dunque tutte e quattro le radici variano al variare dell'iperpiano. Inoltre $T \cap \mathcal{C}_4 = \emptyset$.

Ci si aspetta quindi che l'immagine della proiezione sia una quartica.

Il piano generato da un punto della curva razionale normale e da T è della forma

$$\begin{cases} x_0 = \lambda u^4 \\ x_1 = \lambda u^3 v + \mu \\ x_2 = \lambda u^2 v^2 \\ x_3 = \lambda u v^3 + \gamma \\ x_4 = \lambda v^4 \end{cases} \quad [\lambda, \mu, \gamma] \in \mathbb{P}^2.$$

E l'intersezione con H si ottiene quindi ponendo $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$.

Dunque

$$\mathcal{D} = \pi(\mathcal{C}_4) : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_0 = u^4 \\ x_2 = u^2 v^2 \\ x_4 = v^4 \end{cases} \quad [u, v] \in \mathbb{P}^1$$

e la $\pi|_{\mathcal{C}_4}$ è definita su tutta \mathcal{C}_4 , precisamente

$$\begin{array}{ccc} \pi|_{\mathcal{C}_4} & \mathcal{C}_4 & \mapsto \mathcal{D} \\ & [u^4, \dots, v^4] & \mapsto [u^4, u^2 v^2, v^4] \end{array}$$

Nel piano H con coordinate x_0, x_2, x_4 l'equazione che descrive \mathcal{D} è $x_0 x_4 - x_2^2 = 0$.

Per vederlo basta porre $u^2 = l$, $v^2 = m$, ed utilizzare i risultati visti precedentemente. Quindi \mathcal{D} è una conica, apparentemente contro l'analisi fatta sull'intersezione tra ogni iperpiano contenente T e la curva razionale normale. Succede questo: il generico iperpiano α per T ha quattro intersezioni con \mathcal{C}_4 date dalle soluzioni di 3.2, che è un'equazione biquadratica. Quindi le soluzioni sono del tipo, per opportuni $\beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{C}$:

$$[u, v] = [\beta, \gamma], [u, v] = [\beta, -\gamma]$$

$$[u, v] = [\delta, \epsilon], [u, v] = [\delta, -\epsilon]$$

Le quattro soluzioni corrispondono a quattro distinti punti della \mathcal{C}_4 , $P_1 = \nu_{1,4}([\beta, \gamma])$, $P_2 = \nu_{1,4}([\beta, -\gamma])$, $P_3 = \nu_{1,4}([\delta, \epsilon])$ e $P_4 = \nu_{1,4}([\delta, -\epsilon])$; ma risulta

$$\begin{aligned}\pi(P_1) = \pi(P_2) &= [\beta^4, 0, \beta^2\gamma^2, 0, \gamma^4] \\ \pi(P_3) = \pi(P_4) &= [\delta^4, 0, \delta^2\epsilon^2, 0, \epsilon^4]\end{aligned}$$

Cioè $\pi|_{\mathcal{C}_4} : \mathcal{C}_4 \mapsto \mathcal{D}$ non è iniettiva come negli esempi precedenti, ma è un'applicazione $2 : 1$; diciamo che $\pi|_{\mathcal{C}_4}$ dà un rivestimento doppio della conica \mathcal{D} .

3.3 Casi generali

Vediamo ora alcuni esempi più generali, non limitandoci più a \mathbb{P}^4 .

Esempio 3.3.1 (Proiezione della curva razionale normale su una conica).

Sia

$$\mathcal{C}_d : \begin{cases} x_0 = & u^d \\ x_1 = & u^{d-1}v \\ & \vdots \\ x_{d-1} = & uv^{d-1} \\ x_d = & v^d \end{cases}$$

la curva razionale normale di \mathbb{P}^d .

In questo esempio verrà discusso cosa accade alla proiezione di \mathcal{C}_d quando il piano H su cui si proietta è del tipo

$$H = L(F_i, F_{i+1}, F_{i+2})$$

dove i è scelto tra 0 e $d - 2$.

Quindi $H = \{x_j = 0, \text{ con } j = 0, \dots, d \quad j \neq i, i + 1, i + 2\}$.

Sia quindi T il sottospazio proiettivo generato dai punti F_j con $j \neq i, i + 1, i + 2$, ovvero $T = \{[x_0, \dots, x_d] \in \mathbb{P}^d : x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = 0\}$.

In primo luogo si noti che un generico iperpiano contenente T è della forma

$$ax_i + bx_{i+1} + cx_{i+2} = 0.$$

La sua intersezione con \mathcal{C}_d è quindi l'equazione

$$au^{d-i}v^i + bu^{d-i-1}v^{i+1} + cu^{d-i-2}v^{i+2} = 0$$

e quindi raccogliendo

$$u^{d-i-2}v^i(au^2 + buv + cv^2) = 0.$$

Da qui si vede dunque che ogni iperpiano contenente T si interseca con la curva razionale normale in $F_0 = [1, 0, \dots, 0]$ con molteplicità i , e in $F_d = [0, \dots, 0, 1]$ con molteplicità $d-i-2$, e $F_0 \in T$ se $i \neq 0$ e $F_d \in T$ se $i \neq d-2$. Quindi in totale il numero di intersezioni fisse appartenenti a T tra \mathcal{C}_d e questi iperpiani è $d-2$.

Dunque ci si aspetta che l'immagine della curva razionale normale sia una conica (non può venire meno l'iniettività altrimenti la proiezione sarebbe una retta s e quindi \mathcal{C}_d sarebbe contenuta nell'iperpiano $L(T, s)$).

Per fissare le idee si ponga $i = d-2$, quindi $T = L(F_0, \dots, F_{d-3})$ e $H = L(F_{d-2}, F_{d-1}, F_d)$. Tutti gli altri casi possono essere trattati in modo analogo.

Sia dunque

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u^d & u^{d-1}v & \cdots & u^3v^{d-3} & u^2v^{d-2} & uv^{d-1} & v^d \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{d-3} & x_{d-2} & x_{d-1} & x_d \end{pmatrix}$$

una matrice con d righe e $d+1$ colonne. Le equazioni cartesiane del sottospazio generato da T e da un punto della curva razionale normale si hanno imponendo ad M di avere rango $d-1$. Poiché il minore di ordine $d-1$ dato

dalle prime $d - 1$ righe, e dalle prime $d - 2$ colonne e dall'ultima è diverso da 0 se e solo se $v \neq 0$, ponendoci in questo caso si hanno le condizioni

$$\begin{cases} v^d x_{d-1} - uv^{d-1} = 0 \\ v^d x_{d-2} - u^2 v^{d-2} = 0 \end{cases} \quad v \neq 0$$

e cioè intersecando con H si ottiene

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \vdots \\ x_{d-3} = 0 \\ x_{d-2} = u^2 v^{d-2} \\ x_{d-1} = uv^{d-1} \\ x_d = v^d \end{cases} \quad v \neq 0.$$

Per $v = 0$ si ha il punto F_0 sulla \mathcal{C}_d . Allora $\pi(\mathcal{C}_d \setminus \{F_0\})$ sul piano H in coordinate x_{d-2}, x_{d-1}, x_d è descritto da

$$\begin{cases} x_{d-2} = u^2 \\ x_{d-1} = uv \\ x_d = v^2 \end{cases} \quad v \neq 0;$$

$v = 0$ darebbe il punto F_{d-2} .

π si può estendere a tutta \mathcal{C}_d così:

$$\begin{aligned} \pi|_{\mathcal{C}_d} : \quad \mathcal{C}_d &\mapsto \mathcal{D} \\ [u^d, \dots, v^d] &\mapsto [0, \dots, 0, u^2, uv, v^2] \end{aligned}$$

dove \mathcal{D} è la conica liscia di H di equazione cartesiana

$$x_{d-2}x_d - x_{d-1}^2 = 0.$$

3.4 Costruzione di un tacnodo

Di seguito ci sarà un esempio che illustra come costruire un tacnodo con una composizione di proiezioni.

Esempio 3.4.1 (proiezione di \mathcal{C}_4 su una quartica piana con un tacnodo).

Sia $\mathcal{C}_4 \subset \mathbb{P}^4$ la curva razionale normale. Sia $T = [1, 0, 0, 0, 1]$ il punto centro di proiezione e sia $H_0 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{P}^4 : x_0 = 0\}$ l'iperpiano su cui si proietta. Si denoti con π_T questa proiezione.

Sviluppando i calcoli si ottiene che $\mathcal{D} = \pi_T(\mathcal{C}_4)$ è così parametrizzata:

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = u^3v \\ x_2 = u^2v^2 \\ x_3 = uv^3 \\ x_4 = v^4 - u^4 \end{cases}$$

Si noti che i due punti F_0 e F_4 , entrambi appartenenti alla quartica razionale normale, hanno la stessa immagine, ovvero F_4 .

Ora, grazie all'isomorfismo tra \mathbb{P}^3 ed H_0 , lavoriamo in H con coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4 ; il punto $[0, a, b, c, d]$ verrà scritto quindi $[a, b, c, d]$.

Chiamiamo $O = [0, 0, 0, 1]$ (che in \mathbb{P}^4 è F_4) il punto immagine dei due punti distinti di \mathcal{C}_4 , F_0 e F_4 .

Si vede immediatamente che \mathcal{D} è contenuta nelle due quadriche

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 : x_1x_3 - x_2^2 &= 0, \\ \mathcal{Q}_2 : x_3^2 - x_1^2 - x_2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

\mathcal{Q}_1 è un cono quadrico mentre \mathcal{Q}_2 è una quadrica liscia (non degenera).

Si dimostra che non solo \mathcal{D} è contenuta nell'intersezione di queste due quadriche ma che vale $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \subseteq \mathcal{D}$.

Infatti, preso un punto $P = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ appartenente all'intersezione delle due quadriche, se $a_1 = 0$ o $a_2 = 0$ si ha che $P = [0, 0, 0, 1] \in \mathcal{D}$. Altrimenti il punto P può essere moltiplicato per $a_1^2a_2$, si ottiene così $P = [a_1^3a_2, a_1^2a_2^2, a_1^2a_2a_3, a_1^2a_2a_4]$. Poiché il punto appartiene a \mathcal{Q}_1 si ha che $a_1a_3 = a_2^2$ e poiché appartiene a \mathcal{Q}_2 si ha anche che $a_2a_4 = a_3^2 - a_1^2$. Si ha quindi che $P = [a_1^3a_2, a_1^2a_2^2, a_1a_2^3, a_1^2a_3^2 - a_1^4]$.

Applicando ulteriormente $a_1a_3 = a_2^2$ si ottiene $P = [u^3v, u^2v^2, uv^3, v^4 - u^4]$

con $u = a_1$ e $v = a_2$.

Si ha quindi

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \\ x_3^2 - x_1^2 - x_2 x_4 = 0 \end{cases}$$

Avendo così le equazioni cartesiane si è in grado di determinare lo spazio tangente a \mathcal{D} in O seguendo [5], pagina 73. Poniamoci quindi nella carta affine $x_4 \neq 0$ e analizziamo il comportamento delle rette passanti per O . Sia quindi $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap U_4$ e siano x, y, z rispettivamente $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$. Allora

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} xz - y^2 = 0 \\ z^2 - x^2 - y = 0 \end{cases}$$

Sia poi r una generica retta passante per O :

$$r : \begin{cases} x = a_1 t \\ y = a_2 t \\ z = a_3 t \end{cases} \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$$

r può essere vista come la retta passante per O e per $P = (a_1, a_2, a_3)$.

L'intersezione con \mathcal{D}' è data da

$$\begin{cases} a_1 a_3 t^2 - a_2^2 t^2 = 0 \\ a_3^2 t^2 - a_1^2 t^2 - a_2 t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 (a_1 a_3 - a_2^2) = 0 \\ t (t (a_3^2 - a_1^2) - a_2) = 0 \end{cases}$$

Se $P \notin \mathcal{Q}_1$, ovvero $a_1 a_3 - a_2^2 \neq 0$, la prima equazione ha come unica soluzione $t = 0$ contata due volte. Mentre se $a_2 \neq 0$ la seconda equazione ha $t = 0$ come radice semplice; $t = 0$ diventa radice doppia per la seconda equazione se $a_2 = 0$.

Genericamente quindi la molteplicità d'intersezione tra una retta passante per l'origine e \mathcal{D}' è 1 ma se $a_2 = 0$ diventa 2. Quindi tutte e sole le rette contenute in $y = 0$ e passanti per O sono tangenti a \mathcal{D}' in O , cioè lo spazio tangente a \mathcal{D}' in O è $y = 0$.

Dunque \mathcal{D}' è singolare in O , e questo concorda con il fatto che la proiezione π annoda \mathcal{C}_4 mandando due distinti punti su O .

Cerchiamo ora il cono tangente a \mathcal{D}' in O : esso si ottiene prendendo l'intersezione dei coni tangenti in O alle superfici che definiscono \mathcal{D}' , cioè considerando il sistema delle forme iniziali in O di $\mathcal{Q}_1 \cap U_4$ e di $\mathcal{Q}_2 \cap U_4$: si osservi che \mathcal{Q}_1 è un cono quadrico di vertice O e quindi coincide con il suo cono tangente in O , mentre \mathcal{Q}_2 è una quadrica liscia con piano tangente $y = 0$ in O . Ovvero

$$\mathcal{C}_0(\mathcal{D}') : \begin{cases} xz - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{C}_0(\mathcal{D}') = r' \cup s'$ con

$$r' : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad s' : \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Tornando al proiettivo, il cono tangente a \mathcal{D} in O è dato da $r \cup s$, con

$$r : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e lo spazio tangente a \mathcal{D} in O è il piano $\alpha : x_2 = 0$.

Si prenda ora $F = [1, 0, 1, 0]$ appartenente al piano α , ma $F \notin \mathcal{D}$ e $F \notin r \cup s$.

Si vuole ora fare la proiezione di \mathcal{D} da F sul piano proiettivo $H : x_1 = 0$.

La retta generata da F e da un punto generico di \mathcal{D} è così parametrizzata:

$$\begin{cases} x_1 = u^3v + \lambda \\ x_2 = u^2v^2 \\ x_3 = uv^3 + \lambda \\ x_4 = v^4 - u^4 \end{cases}$$

E quindi si ottiene che

$$\Gamma = \pi_F(\mathcal{D}) : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = u^2v^2 \\ x_3 = uv^3 - u^3v \\ x_4 = v^4 - u^4 \end{cases}$$

Inoltre $\pi_F(O) = [0, 0, 0, 1] = O$.

Nel seguito lavoriamo nel piano proiettivo H con coordinate omogenee x_2, x_3, x_4 , quindi in queste coordinate $O = [0, 0, 1]$.

Si può dimostrare che l'equazione cartesiana associata a Γ è

$$\underbrace{x_2^2 x_4^2 - 4x_2^2 x_3^2 - x_3^4}_{F(x_2, x_3, x_4)} = 0.$$

Le derivate prime di F :

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_2, x_3, x_4) = 2x_2 x_4^2 - 8x_2 x_3^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_2, x_3, x_4) = -4x_3^3 - 8x_2^2 x_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_4}(x_2, x_3, x_4) = 2x_2^2 x_4.$$

si annullano nel punto O . E si noti inoltre che invece

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_2, x_3, x_4) = 2x_4^2 - 8x_3^2,$$

è diversa da 0 in O . Dunque la curva ha un punto doppio in O .

Deomogeneizzando rispetto ad x_4 e ponendo $x = \frac{x_2}{x_4}$ e $y = \frac{x_3}{x_4}$ si può studiare la curva

$$\Gamma' = \Gamma \cap U_2 : x^2 - 4x^2 y^2 - y^4 = 0$$

nell'origine O .

Questa curva presenta un'unica tangente principale in O che compare nel cono tangente con molteplicità 2, cioè la retta $t : x = 0$; e $i(t, \Gamma', O) = 4$.

Prendiamo ora la famiglia di coniche $\Gamma_\lambda : x = \lambda y^2$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Le coniche Γ_λ hanno tutte come tangente in O la retta $x = 0$, cioè appunto la tangente principale a Γ' in O .

Vediamone ora l'intersezione con Γ' :

$$\Gamma_\lambda \cap \Gamma' : \begin{cases} x - \lambda y^2 & = 0 \\ x^2 - 4x^2 y^2 - y^4 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = \lambda y^2 \\ y^4(\lambda^2 - 1) - 4\lambda^2 y^6 & = 0 \end{cases}$$

Quindi ci sono due valori distinti di λ , $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, per cui $i(\Gamma_\lambda, \Gamma', O) = 6$ mentre genericamente (ovvero per $\lambda \neq 1, -1$) $i(\Gamma_\lambda, \Gamma', O) = 4$.

Questo significa che abbiamo trovato due coniche distinte, Γ_1 e Γ_{-1} , che hanno un'intersezione più alta con Γ' in O ; cioè, la curva ha due rami distinti uscenti da O . Questa singolarità è un tacnodo (si veda ad esempio [4] esercizio I.5.14 (d)), ovvero un nodo in cui i rami sono tangenti.

Si osservi che le derivate prime di F si annullano anche in $[1, 0, 0]$, che risulta essere un nodo con tangenti principali $x_4 - 2x_3 = 0$ e $x_4 + 2x_3 = 0$. Riassumendo:

è stata proiettata la quartica razionale normale \mathcal{C}_4 di \mathbb{P}^4 su un iperpiano con un centro scelto in modo da mandare due punti distinti di \mathcal{C}_4 , F_0 e F_4 , nella stessa immagine, ovvero nel punto O . In questo iperpiano abbiamo visto che la $\mathcal{D} = \pi_T(\mathcal{C}_4)$ ha un punto doppio in O con cono tangente formato da due rette distinte, r e s , e che genera quindi il piano tangente a \mathcal{D} in O . Proiettando ulteriormente da un punto appartenente a questo piano ma non appartenente né a \mathcal{D} né al cono tangente si ottiene che le due tangenti r ed s s'incollino diventando una sola, e che quindi l'immagine dei punti F_0 e F_4 rispetto alla composizione di queste due proiezioni sia un nodo che presenta una sola tangente, e che questa tangente abbia molteplicità d'intersezione 4 con l'immagine della curva.

Bibliografia

- [1] E. Sernesi, Geometria 1 (seconda edizione), Torino, Bollati Boringhieri, 2000.
- [2] M. Idà, Appunti del corso di geometria proiettiva, Bologna, a.a. 2009/2010.
- [3] J. Harris, Algebraic Geometry. A first course, New York, Springer, 1992.
- [4] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, New York, Springer, 1977.
- [5] I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, New York, Springer, 1977.