

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Metodi di Fourier
per equazioni diffusive e con salti

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Ilaria Ferrato

III Sessione
Anno Accademico 2016-2017

*A te,
mio angelo custode*

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | i |
| 1 Il metodo COS | 1 |
| 1.1 Serie di Fourier | 1 |
| 1.2 La funzione caratteristica | 7 |
| 1.3 Approssimazione della funzione densità | 8 |
| 1.4 Formula di valutazione | 10 |
| 1.5 Errori del metodo | 11 |
| 2 Modello di Heston | 17 |
| 2.1 Descrizione del modello | 17 |
| 2.1.1 Il processo del prezzo di un titolo | 20 |
| 2.1.2 Processo di volatilità | 20 |
| 2.2 Approccio neutrale al rischio | 21 |
| 2.3 Prezzo di un'opzione europea | 24 |
| 2.4 La funzione caratteristica | 25 |
| 2.4.1 AE: The Adjoint Expansion | 25 |
| 2.4.2 Densità | 31 |
| 2.5 Risultati numerici | 33 |
| 3 Modello di Merton | 37 |
| 3.1 Descrizione del modello | 37 |
| 3.2 Option pricing | 40 |
| 3.3 La funzione caratteristica | 43 |
| 3.4 Risultati numerici | 45 |
| A Le opzioni | 47 |
| A.1 I fattori principali | 47 |
| A.2 Opzioni Call, Put e Call-Put | 48 |
| A.2.1 Opzione Call | 48 |
| A.2.2 Opzioni Put | 49 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| A.2.3 | Opzione put-call parity | 49 |
| A.3 | Posizioni in, at, out of the money | 50 |
| B | Moto Browniano geometrico | 51 |
| B.1 | Processo Stocastico | 51 |
| B.2 | Passeggiata aleatoria | 51 |
| B.3 | Il processo di Wiener | 53 |
| B.4 | Formula di Ito | 54 |
| B.5 | Moto geometrico browniano | 57 |
| C | Processo di Poisson | 59 |
| C.1 | Processo composto di Poisson | 61 |
| | Bibliografia | 63 |
| | Ringraziamenti | 65 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Effetti del coefficiente di correlazione | 18 |
| 2.2 | Superficie di volatilità implicita per $\rho = 1/2$ | 18 |
| 2.3 | Superficie di volatilità implicita per $\rho = 0$ | 19 |
| 2.4 | Superficie di volatilità implicita per $\rho = -1/2$ | 19 |
| 2.5 | Effetti del parametro η | 21 |
| 2.6 | Superficie volatilità implicita | 22 |
| 2.7 | Superficie volatilità implicita | 22 |
| 2.8 | Superficie volatilità implicita | 23 |
| 2.9 | Densità al variare di T | 32 |
| 2.10 | Densità al variare di ρ | 32 |
| 2.11 | Differenza percentuale di un'opzione Call | 34 |
| 2.12 | Differenza percentuale del prezzo di un'opzione Call | 35 |
| 3.1 | Volatility smile | 38 |
| 3.2 | Densità al variare di T | 44 |
| 3.3 | Densità al variare di ρ | 44 |
| A.1 | Payoff opzione Call | 49 |
| A.2 | Payoff opzione Put | 50 |

Elenco delle tabelle

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Prezzo della Call e Put al variare di N | 33 |
| 2.2 | Prezzo della Call e Put al variare di T | 33 |
| 3.1 | Prezzo della Call e Put al variare di N | 45 |
| 3.2 | Prezzo della Call e Put al variare di T | 45 |

Introduzione

Il presente elaborato nasce dall'idea di affrontare uno degli argomenti maggiormente trattati in ambito finanziario, ovvero la determinazione del prezzo di un derivato finanziario, il cosiddetto problema di valutazione. In particolare, il problema fondamentale consiste nel ricavare la densità di probabilità, indispensabile per la formula di prezzo; infatti è una funzione sempre presente nella formula di valutazione del prezzo di un'opzione. Tra i numerosi metodi che trattano questo tema, si vuole presentare un metodo di prezzaggio basato sullo sviluppo in serie di Fourier: il metodo COS.

Quest'ultimo si basa principalmente sul legame tra la funzione caratteristica e la funzione densità; la prima infatti corrisponde alla trasformata di Fourier della seconda. Nonostante i numerosi metodi che lavorano nello spazio di Fourier calcolano la densità come antitrasformata, il metodo COS, invece determina la densità di probabilità attraverso un particolare sviluppo in serie di Fourier, definito serie coseno. Questa tesi illustra il metodo COS applicato al modello di Heston e al modello jump-diffusion di Merton, con riferimento alle opzioni europee call e put. Il metodo COS può essere applicato anche ad altri tipi di contratto, come ad esempio le opzioni americane o con barriera.

La trattazione si articola in tre capitoli:

Capitolo 1: fornisce gli strumenti matematici necessari alla comprensione del presente lavoro. In primo luogo si definisce la serie di Fourier e si enuncia il teorema di Jordan inerente la teoria sulle serie di Fourier, richiamando tutti i risultati utili alla dimostrazione; particolare importanza è data al teorema di localizzazione di Riemann e alla definizione di nucleo di Dirichlet di grado n . Successivamente, dopo aver definito la funzione caratteristica e il suo importante ruolo, si ricavano, per mezzo della serie coseno, le formule di approssimazione della funzione densità. Grazie a questi strumenti illustrati, si implementa il metodo COS e si ricava la formula di valutazione del prezzo. Infine breve analisi degli errori del metodo.

Capitolo 2: viene analizzato dettagliatamente il modello di Heston, un modello a volatilità stocastica in cui i moti Browniani sono correlati. Tale modello presuppone che la volatilità non sia costante, come nel modello Black and Scholes, ma segua un processo casuale. Viene inoltre analizzata e dimostrata la funzione caratteristica di tale metodo. In particolare viene implementata, mediante il software Matlab, la formula di valutazione ricavata nel precedente capitolo, grazie al metodo COS, e vengono illustrati i prezzi delle

opzioni europee Call e Put, calcolati con diversi parametri.

Capitolo 3: viene introdotto il modello diffusivo a salti introdotto da Merton nel 1976 per modificare il modello di Black and Scholes. Quest'ultimo infatti, uno dei modelli più conosciuti ed usati per la valutazione delle opzioni, nonostante sia abbastanza preciso, non riproduce fedelmente l'andamento del mercato, e uno dei suoi maggiori limiti è la volatilità. Dopo aver descritto il modello di Merton, primo modello in cui sono stati introdotti i salti per mezzo del processo del Poisson, e analizzato la sua funzione caratteristica, viene implementata, con lo stesso procedimento del capitolo precedente, la formula di valutazione.

L'elaborato termina con delle appendici contenenti un'analisi delle opzioni europee e nozioni matematiche relative al moto geometrico browniano e al processo di Poisson.

Capitolo 1

Il metodo COS

Nel seguente capitolo viene descritto il metodo COS, il cui scopo è quello di valutare il prezzo di un'opzione. Tale metodo risulta essere molto vantaggioso e viene presentato come un'alternativa ai classici metodi di integrazione numerica: ricava la formula di valutazione delle opzioni attraverso l'uso dello sviluppo in serie coseno di Fourier.

1.1 Serie di Fourier

Si consideri la successione costituita dalle restrizioni delle funzioni $x \rightarrow e^{ikx}$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Si verifica che tale successione è ortogonale in $L^2([- \pi, \pi] : C)$ munito del prodotto scalare canonico e che ogni funzione ha norma $\sqrt{(2\pi)}$. Essa genera dunque un sottospazio F_n di $L^2([- \pi, \pi] : C)$, costituito dalle seguenti funzioni:

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad c_k \in C$$

Gli elementi di tale sottospazio si chiamano *polinomi trigonometrici* di ordine n . Un'altra base di F_n costituita da valori reali è:

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$$

Ogni $p_n \in F_n$ è dunque esprimibile nella seguente forma:

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

Se $f \in L^2$ possiamo calcolare la sua proiezione ortogonale su F_n , essa avrà l'espressione appena vista con coefficienti:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$$

Il polinomio così ottenuto si chiama **polinomio di Fourier** di ordine n della funzione f :

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx}$$

Utilizzando la base reale il polinomio di Fourier diventa:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \forall k \geq 0 \quad (1.1)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \forall k \geq 1. \quad (1.2)$$

La successione S_n dei polinomi di Fourier di f rappresenta la serie di Fourier.

Definizione 1.1.1.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $] -\infty, \infty[$. La serie trigonometrica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (1.3)$$

si chiama **serie di Fourier** di f con a_k e b_k **coefficienti di Fourier** di f (1.1).

Si dice che f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto $t \in \mathbb{R}$ se e solo se la sua serie di Fourier converge nel punto t e ha somma uguale a $f(t)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f(t).$$

Osservazione 1.

Se $f(x)$ è una funzione pari l'espressione si semplifica, poichè $b_k = 0$ per $k = 1, 2, \dots$ e a_k è della forma seguente:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

La dimostrazione di questa uguaglianza deriva dal fatto che se f è funzione pari, implica $f(x) \cos(kx)$ pari, mentre $f(x) \sin(kx)$ dispari. Allora, poichè lo zero è punto di simmetria e l'integrando è una funzione pari, è possibile esprimere l'integrale tra $[-\pi, \pi]$ come

doppio integrale tra $[0, \pi]$.

Analogamente, se $f(x)$ è dispari, abbiamo $a_k = 0$ e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Questa uguaglianza è data dal fatto che se $f(x)$ è dispari, allora $f(x) \sin(kx)$ è pari e quindi ci troviamo di fronte a un caso del tutto analogo al precedente.

Vediamo ora un risultato classico sulla convergenza della serie di Fourier;

Teorema 1.1.2 (Teorema di Jordan).

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione 2π -periodica e a variazione limitata in $[-\pi, \pi]$, allora la sua serie di Fourier converge in ogni punto $t \in \mathbb{R}$ con somma uguale a

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

Prima di procedere alla dimostrazione di questo teorema, consideriamo i seguenti risultati.

Definizione 1.1.3.

Si chiama *nucleo di Dirichlet di grado n* , $n \in \mathbb{N}$, il polinomio trigonometrico

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

D_n è una funzione pari e 2π -periodica. Inoltre, risulta che

$$\left(\int_0^{\pi} D_n(t) dt \right) \frac{2}{\pi} = 1. \quad (1.7)$$

Sull'intervallo $]0, \pi[$ il nucleo D_n si può scrivere anche in forma chiusa nel modo seguente:

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} \quad 0 < t < \pi. \quad (1.8)$$

Per dimostrare questa formula, basta moltiplicare entrambi i membri di (1.6) per $\sin\frac{t}{2}$ e utilizzare la seguente identità:

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \sin\frac{t}{2} D_n(t) &= \frac{1}{2} \left(\sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3}{2}t - \sin\frac{t}{2} \right) \right) \\ &+ \left(\sin\frac{5}{2}t - \sin\frac{3}{2}t \right) + \dots + \left(\sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) - \sin\left(\left(n - \frac{1}{2} \right) t \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \end{aligned}$$

Teorema 1.1.4.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sommabile nell'intervallo $[-\pi, \pi[$. Allora

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds \quad (1.9)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.

Sostituendo i coefficienti a_k e b_k nella serie di Fourier (1.3), si ottiene:

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(ks)\cos(kt) + \sin(ks)\sin(kt)) \right) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(s) D_n(t-s) ds \end{aligned}$$

ponendo $s-t = \sigma$ e osservando che $D_n(-\sigma) = D_n(\sigma)$:

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma$$

Infine applicando $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\sigma) dt \forall \sigma \in \mathbb{R}$ alla funzione 2π -periodica $\sigma \rightarrow f(t+\sigma) D_n(\sigma)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^\pi \right) f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t+s) D_n(-s) + f(t+s) D_n(s) ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t-s) + f(t+s)}{2} D_n(s) ds \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.1.5.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sommabile nell'intervallo $[-\pi, \pi[$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato le affermazioni seguenti sono equivalenti

(i) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = \lambda \quad (1.10)$$

(ii) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{\sin\frac{s}{2}} ds = 0 \quad (1.11)$$

Dimostrazione.

Per (1.7) e (1.8) si ha:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2\sin\frac{s}{2}} ds = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ora, per la (1.9) e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$S_n(f(t)) - \lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2\sin\frac{s}{2}} ds$$

Segue quindi l'equivalenza delle affermazioni precedenti. \square

Per lo studio del limite (1.10), analizziamo il seguente lemma.

Lemma 1.1.6.

Per ogni funzione sommabile $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, risulta

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(s) \sin(\alpha s) ds = 0 \quad (1.12)$$

e analogamente

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(s) \cos(\alpha s) ds = 0 \quad (1.13)$$

Teorema 1.1.7. (Teorema di localizzazione di Riemann)

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sommabile nell'intervallo $[-\pi, \pi[$. Siano $t, \lambda \in \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono allora equivalenti:

(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \lambda$

(ii) esiste $c > 0$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0 \quad (1.14)$$

Dimostrazione.

Per la proposizione precedente (1.5.5) basta dimostrare che (1.11) e (1.14) sono equivalenti. Poniamo

$$m_f(t, s) := \frac{f(t+s) - f(t-s)}{2} \quad (1.15)$$

Poichè la funzione $s \rightarrow (m_f(t, s) - \lambda) \frac{1}{\sin\frac{s}{2}}$ è sommabile su $[c, \pi] \forall c \in]0, \pi[$, per il lemma precedente(1.1.6), la (1.11) è equivalente alla seguente formula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c (m_f(t, s) - \lambda) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{\sin\frac{s}{2}} ds \quad (1.16)$$

Poichè $s \rightarrow \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s}\right)$ è continua e limitata su $]0, c[$, la funzione

$$s \rightarrow (m_f(t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s}\right)$$

è sommabile sullo stesso intervallo. Allora per il lemma (1.1.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c (m_f(t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} - \frac{2}{s}\right) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) s\right) ds = 0$$

Segue che (1.16) è equivalente a (1.14) e (1.9). \square

In seguito ai risultati illustrati, possiamo ora dimostrare il Teorema di Jordan

Dimostrazione.

Fissiamo $t \in \mathbb{R}$. Per dimostrare il teorema è sufficiente ipotizzare la f monotona crescente in un opportuno intorno $[t - c, t + c]$. Definiamo

$$\varphi : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(s) = f(t + s) - f(t)$$

e

$$\psi : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(s) = f(t - s) - f(t)$$

Dimostreremo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \varphi(s) \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) s\right)}{s} ds = 0 \quad (1.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \psi(s) \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) s\right)}{s} ds = 0 \quad (1.18)$$

Per dimostrare queste due formule (1.17) e (1.18), utilizzeremo il teorema della media integrale, di seguito enunciato.

Teorema 1.1.8.

Date due funzioni $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con h monotona e g continua esiste un punto $\alpha \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b h g ds = h(a) \int_a^\alpha g ds + h(b) \int_\alpha^b g ds$$

Dimostrazione. (dimostrazione limite 1.17)

$$\int_0^\infty \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma$$

è convergente nel senso di Riemann generalizzato, per ogni $\epsilon > 0$ fissato esiste $m > 0$ tale che

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma \right| < \epsilon \quad \forall \alpha, \beta \geq m \quad (1.19)$$

Ora, ponendo $(n + \frac{1}{2})s = \sigma$ abbiamo:

$$\int_0^c \varphi(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds = \int_0^{(n+\frac{1}{2})c} \varphi\left(\frac{\sigma}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin\sigma}{\sigma} d\sigma \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^m \varphi\left(\frac{\sigma}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin\sigma}{\sigma} d\sigma + \int_m^{(n+\frac{1}{2})c} \varphi\left(\frac{\sigma}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin\sigma}{\sigma} d\sigma \\ &=: I(n) + J(n) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Poichè φ è monotona crescente e $|\frac{\sin\sigma}{\sigma}| \leq 1$ per ogni $\sigma > 0$, risulta

$$|I(n)| \leq m\varphi\left(\frac{m}{n + \frac{1}{2}}\right)$$

Quindi $I(n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ in quanto $\varphi(s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow 0+$.

Di conseguenza, esiste $\bar{n} = \bar{n}(m, \epsilon)$ tale che

$$|I(n)| < \epsilon \quad \forall n > \bar{n} \quad (1.22)$$

□

Per valutare $J(n)$ applichiamo il teorema (1.1.8), alle funzioni $h(s) = \varphi(s)$ e $g(s) = \frac{\sin s}{s}$. Allora, se $(n + \frac{1}{2})c > m$, esiste $\alpha \in]m, (n + \frac{1}{2})c[$ tale che

$$J(n) = \varphi\left(\frac{m}{n + \frac{1}{2}}\right) \int_m^\alpha \frac{\sin\sigma}{\sigma} d\sigma + \varphi(c) \int_\alpha^{(n+\frac{1}{2})c} \frac{\sin\sigma}{\sigma} d\sigma \quad (1.23)$$

e quindi per (1.19) e per la monotonia di φ ,

$$|J(n)| \leq 2\varphi(c)\epsilon \quad (1.24)$$

Da questa formula, dalla (1.22) e (1.20) segue la (1.17). La (1.18) si dimostra analogamente. □

1.2 La funzione caratteristica

La necessità di calcolare la funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria, conduce a ricercare questa quantità attraverso il suo legame con la funzione caratteristica.

Definizione 1.2.1.

Sia X una variabile aleatoria a valori reali e sia $f_X(x)$ la funzione densità di X . Si definisce **funzione caratteristica** di X la trasformata di Fourier della funzione densità:

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f_X(x) dx, \quad u \in \mathbb{R} \quad (1.25)$$

Vediamo alcune proprietà elementari della funzione caratteristica:

- (i) la funzione caratteristica $\phi_X(u)$ esiste sempre ed è finita per $u \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\phi_X(0) = 1$.
- (iii) $|\phi_X(u)| \leq 1$.
- (iv) $\phi_X(u) = \phi_X(u-)$.
- (v) se $Y = a + bX$ allora la funzione caratteristica di Y è:

$$\phi_Y(u) = e^{iua} \phi_X(bu)$$

Data la definizione di funzione caratteristica, possiamo quindi esprimere la densità come trasformata inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \phi(\omega) d\omega \quad (1.26)$$

Il metodo più utilizzato per ricavare la densità tramite la funzione caratteristica è proprio quello di calcolarla come integrale inverso della trasformata di Fourier; metodo che a livello computazionale utilizza l'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform). Ci sono però dei metodi alternativi a questo che sfruttano invece gli sviluppi polinomiali di Chebyshev o di Legendre. Verrà utilizzato lo sviluppo in serie coseno che, come mostrato, corrisponde ad uno sviluppo in serie di Chebyshev di $f(\cos^{-1}(t))$ in t .

1.3 Approssimazione della funzione densità

La parte fondamentale del metodo COS è l'approssimazione della densità mediante sviluppo in serie coseno. Lo sviluppo in serie coseno è dato dalla seguente espressione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 'a_k \cos(kx) \quad (1.27)$$

in cui i coefficienti a_k sono espressi dalla formula (1.4), mentre l'apice della sommatoria indica che il primo termine della somma è moltiplicato per 1/2. Si può facilmente osservare, che questo sviluppo in serie di Fourier corrisponde a quello di una funzione pari, caratterizzata dall'annullamento dei coefficienti b_k . Mediante un semplice cambio di variabili, è possibile considerare funzioni supportate in qualsiasi intervallo finito $[a, b] \in \mathbb{R}$:

$$\theta = \frac{x-a}{b-a}\pi; \quad x = \frac{b-a}{\pi}\theta + a$$

Sostituendo nelle precedenti espressioni, si ottiene:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$A_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\theta) \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx \quad (1.28)$$

Sfruttando la proprietà della funzione caratteristica, si può troncare opportunamente il range d'integrazione, passando ad un range di tipo $[a, b]$. La scelta di questo range non è casuale ma segue una regola ben precisa:

$$[a, b] = \left[c_1 - L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}} \quad c_1 + L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}} \right] \quad (1.29)$$

dove il parametro $L = 10$ e c_n rappresentano i cumulanti n-esimi della funzione che descrive la dinamica dei prezzi. Quindi, una volta determinato il range, la funzione caratteristica verrà approssimata nel seguente modo:

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx \approx \int_a^b e^{i\omega x} f(x) dx = \phi_1(\omega) \quad (1.30)$$

Può essere approssimato anche il coefficiente A_k (1.28), applicando le formule di Eulero:

$$A_k = \frac{2}{b-a} \Re \left\{ \int_a^b \exp\left(k\pi i \frac{x-a}{b-a}\right) f(x) dx \right\}$$

$$= \frac{2}{b-a} \Re \left\{ \int_a^b \exp\left(i \frac{k\pi}{b-a} x - i \frac{ka\pi}{b-a}\right) f(x) dx \right\}$$

Ora sostituendo nella formula $\frac{k\pi}{b-a} = \omega$, si avrà:

$$A_k = \frac{2}{b-a} \Re \left\{ \phi_1\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) \exp\left(-i \frac{ka\pi}{b-a}\right) \right\} \quad (1.31)$$

Ottenuta l'espressione di A_k , andiamo a sostituire nello sviluppo della f i coefficienti A_k con i coefficienti F_k ,

$$F_k = \frac{2}{b-a} \Re \left\{ \phi\left(\frac{k\pi}{b-a}\right) \exp\left(-i \frac{ka\pi}{b-a}\right) \right\} \quad (1.32)$$

dove si trova la parte reale della funzione caratteristica ϕ e non la sua approssimazione ϕ_1 . Si ottiene quindi una prima approssimazione della sviluppo in serie di Fourier:

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \quad (1.33)$$

L'ultima approssimazione consiste nel troncamento della sommatoria ad un numero finito di termini:

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \quad (1.34)$$

1.4 Formula di valutazione

Infine si considera la formula di valutazione neutrale al rischio, la quale equivale al punto di partenza per determinare il prezzo di un'opzione:

$$v(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^Q[v(y, T)|x] = e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} v(y, T) f(y|x) dy, \quad (1.35)$$

dove v indica il valore dell'opzione, $\Delta t = T - t_0$ rappresenta la differenza tra la scadenza T e l'istante di tempo iniziale t_0 , $\mathbb{E}^Q[\cdot]$ è il valore atteso sotto la misura neutrale al rischio Q , x e y rappresentano il prezzo del sottostante rispettivamente all'istante iniziale e alla scadenza e r è il tasso di rendimento del bene privo di rischio. Il parametro fondamentale è $f(y|x)$ che indica la densità di y subordinata a x .

Quello che verrà fatto, sarà esattamente andare a sostituire, nella formula (1.35), la funzione densità con la sua approssimazione mediante seno e coseno.

Innanzitutto, poiché la densità è una trasformata di Fourier e quindi tende a zero per $y \rightarrow \pm\infty$, si può operare sull'integrale nella formula (1.35) e troncare il range di integrazione da $]-\infty, \infty[$ a $[a, b] \subset \mathbb{R}$, senza perdere di precisione. Si ottiene quindi una prima approssimazione della (1.35);

$$v_1(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^Q[v(y, T)|x] = e^{-r\Delta t} \int_a^b v(y, T) f(y|x) dy \quad (1.36)$$

Successivamente, andando a sostituire la funzione densità con l'espansione in serie coseno di y , si ottiene:

$$f(y|x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) \quad (1.37)$$

dove

$$A_k(x) := \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y|x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy. \quad (1.38)$$

Sostituendo (1.37) nella (1.36), si ottiene:

$$v_1(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \int_a^b v(y, T) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (1.39)$$

Segue

$$v_1(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) \int_a^b v(y, T) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (1.40)$$

Moltiplicando e dividendo ora per $\frac{2}{b-a}$ il secondo membro della (1.40), otteniamo:

$$\begin{aligned} v_1(x, t_0) &= \frac{b-a}{2} e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) \frac{2}{b-a} \int_a^b v(y, T) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \\ &= \frac{b-a}{2} e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(x) V_k \end{aligned} \quad (1.41)$$

dove V_k sono i coefficienti dello sviluppo coseno della funzione payoff:

$$V_k := \frac{2}{b-a} \int_a^b v(y, T) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (1.42)$$

Un'ulteriore approssimazione della formula di valutazione neutrale al rischio (1.35) si ottiene troncando la somma ad un numero finito di elementi; questo troncamento è consentito grazie alla proprietà di decadenza a zero dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier:

$$v_2(x, t_0) = \frac{b-a}{2} e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} A_k(x) V_k \quad (1.43)$$

Infine, andando ad approssimare i coefficienti $A_k(x)$ definiti in (1.38) con $F_k(x)$ (1.32), si avrà:

$$v(x, t_0) \approx v_3(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \Re \left\{ \phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; x\right) e^{-ik\pi \frac{a}{b-a}} \right\} V_k \quad (1.44)$$

Quest'ultima espressione corrisponde alla formula di valutazione mediante il metodo COS, ed è esattamente la formula da adottare per ricavare il valore dell'opzione all'istante di tempo iniziale t_0 .

1.5 Errori del metodo

Nel paragrafo precedente è stata ricavata la formula di valutazione del prezzo, mediante l'uso della serie coseno di Fourier, effettuando alcune approssimazioni, le quali, di conseguenza, hanno generato degli errori. In particolare, facendo riferimento a [3], l'errore totale del metodo COS è dato dalla somma di tre errori, generati dai tre step analizzati precedentemente.

La seguente analisi degli errori generati dal metodo Il primo errore è dovuto al troncamento del range di integrazione effettuato nel passaggio dalla formula (1.35) alla formula (1.36):

$$\epsilon_1 := v(x, t_0) - v_1(x, t_0) = \int_{\mathbb{R}-[a,b]} v(y, T) f(y|x) dy \quad (1.45)$$

L'errore seguente deriva analogamente dal troncamento della serie di Fourier ad un numero finito di elementi

$$\epsilon_2 := v_1(x, t_0) - v_2(x, t_0) = \frac{1}{2}(b-a)e^{-r\Delta t} \sum_{k=N}^{+\infty} A_k(x) \cdot V_k \quad (1.46)$$

con A_k e V_k definiti rispettivamente in (1.38) e (1.42).

Infine, il terzo ed ultimo errore è conseguenza dell'approssimazione dei coefficienti A_k con F_k

$$\epsilon_3 := v_2(x, t_0) - v_3(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \Re \left\{ \int_{\mathbb{R}-[a,b]} e^{ik\pi \frac{y-a}{b-a}} f(y|x) dy \right\} V_k \quad (1.47)$$

I coefficienti della serie coseno sono la chiave per limitare gli errori. Questi ultimi quindi dipenderanno dal tasso di convergenza della serie coseno, il quale a sua volta dipenderà dalle sue proprietà nell'intervallo di sviluppo. Per prima cosa vediamo le definizioni dei tassi di convergenza della serie.

Definizione 1.5.1. (Indice di convergenza algebrico)

L'indice di convergenza algebrico n è il più grande numero per cui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| k^n < \infty, \quad k \gg 1$$

Una definizione alternativa è data dal fatto che se gli A_k , coefficienti della serie, decadono asintoticamente a zero come

$$A_k \sim \mathcal{O}(1/k^n), \quad k \gg 1$$

allora n è l'indice di convergenza algebrica.

Definizione 1.5.2. (Indice di convergenza esponenziale)

Se i coefficienti A_k decrescono più velocemente di $1/k^n$ per ogni n finito, allora si dice che la serie ha tasso di convergenza esponenziale. Equivalentemente se

$$A_k \sim \mathcal{O}(\exp(-\gamma k^r)), \quad k \gg 1$$

per ogni $r > 0$ allora la serie ha convergenza esponenziale con γ tasso di convergenza asintotico costante. L'esponente r è l'indice di convergenza.

Per $r < 1$, la convergenza è detta supergeometrica.

Per $r = 1$ la convergenza è ancora detta supergeometrica con

$$A_k \sim \mathcal{O}(k^{-n} \exp(-(k/j) \ln(k))) \quad \forall j > 0$$

oppure geometrica con

$$A_k \sim \mathcal{O}(k^{-n} \exp(-\gamma k)) \quad \forall j > 0$$

Proposizione 1.5.3.

Se $g(x) \in C^\infty([a, b] \subset \mathbb{R})$, allora lo sviluppo in serie di Fourier del coseno su $[a, b]$ ha convergenza geometrica. La costante γ è determinata dalla posizione nel piano complesso delle singolarità vicino all'intervallo di sviluppo. L'esponente n è determinato dal tipo di singolarità.

Se $g(x)$ o qualche sua derivata è discontinua, i coefficienti della serie coseno mostreranno convergenza algebrica. L'integrazione per parti mostra che l'indice di convergenza algebrica n è almeno grande quanto n' , con la derivata di ordine n' della g integrabile.

Proposizione 1.5.4.

Se la serie ha convergenza algebrica allora la serie degli errori di troncamento è:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \sim \frac{1}{(n-1)N^{n-1}}$$

Proposizione 1.5.5.

Se la serie ha convergenza geometrica, l'errore dovuto al troncamento dello sviluppo a $(N+1)$ termini, $E_T(N)$ sarà:

$$E_T(N) \sim P^* \exp(-N\nu)$$

La costante $\nu > 0$ è detta tasso di convergenza asintotica della serie, la quale soddisfa la seguente uguaglianza

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\log |E_T(n)|/n)$$

Lemma 1.5.6. L'errore ϵ_3 consiste negli errori dovuti al troncamento del range d'integrazione, pertanto può essere limitato da:

$$|\epsilon_3| < |\epsilon_1| + \mathcal{Q}|\epsilon_4|$$

dove \mathcal{Q} è una costante indipendente da N e

$$|\epsilon_4| := \int_{R-[a,b]} f(y|x) dy$$

Sia l'errore ϵ_3 che ϵ_2 rappresentano errori dovuti al troncamento dei range, ma il più significativo è sicuramente ϵ_2 , il quale dipende dai coefficienti della densità A_k e dai coefficienti del payoff V_k . Poichè solitamente si assume che la densità sia più regolare della funzione payoff, i coefficienti A_k decadono più velocemente dei V_k , pertanto possiamo limitare il prodotto di tali coefficienti in questo modo:

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} A_k(x) \cdot V_k \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |A_k(x)|$$

L'errore ϵ_2 è dominato dall'errore di troncamento della densità e il seguente lemma ne fornisce una caratterizzazione in base alle proprietà di questa funzione.

Lemma 1.5.7.

L'errore ϵ_2 converge esponenzialmente quando la densità $g(x) \in C^\infty([a, b])$, pertanto

$$\epsilon_2 < P \exp(-(N-1)\nu)$$

dove $\nu > 0$ è una costante mentre P è un termine che varia almeno esponenzialmente con N .

Si noti che $\beta \geq n$ perchè la densità è solitamente più regolare della funzione payoff. Inoltre la quantità a destra della disuguaglianza deriva dalla Proposizione 1.5.5.

Lemma 1.5.8.

L'errore ϵ_2 per densità con derivate discontinue può essere limitato nel seguente modo:

$$|\epsilon_2| < \frac{\bar{P}}{(N-1)^{\beta-1}}$$

dove \bar{P} è una costante mentre la quantità β nell'esponente è $\beta \geq n \geq 1$, con n indice di convergenza algebrica dei V_k .

Si noti che la parte a destra della disuguaglianza deriva dalla Proposizione 1.5.4. Poichè l'errore totale è $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$, per i risultati appena menzionati ne viene:

$$\epsilon < 2|\epsilon_1| + |\epsilon_3|$$

pertanto se la densità è $g(x) \in C^\infty([a, b])$, allora

$$\epsilon < 2|\epsilon_1| + \mathcal{Q}|\epsilon_4| + P e^{-(N-1)\nu} \quad (1.48)$$

Se invece la densità presenta derivate discontinue l'errore totale sarà limitato da

$$\epsilon < 2|\epsilon_1| + \mathcal{Q}|\epsilon_4| + \frac{\bar{P}}{(N-1)^{\beta-1}} \quad (1.49)$$

Pertanto se la densità ammette derivate discontinue, allora l'errore avrà convergenza algebrica, viceversa se la densità è di classe C^∞ sull'intervallo di sviluppo, allora la convergenza dell'errore sarà esponenziale. Dunque a seconda delle proprietà della densità nell'intervallo di sviluppo, l'errore totale del metodo può essere stimato mediante le disuguaglianze (1.48) e (1.49). Precisiamo infine, che il metodo COS per la valutazione dei derivati, è applicabile non solo a opzioni europee ma anche a opzioni americane e con barriera.

Capitolo 2

Modello di Heston

Nel 1993 Heston propose per la prima volta un modello a volatilità stocastica in cui i moti Browniani potessero essere correlati, con un coefficiente di correlazione istantanea non nullo, $\rho \neq 0$. L'idea è che l'andamento della volatilità del prezzo di un titolo non sia del tutto indipendente dall'andamento del prezzo stesso.

Un'altra motivazione che ha portato all'introduzione del modello è dovuta ad alcuni studi, i quali hanno dimostrato che la distribuzione di probabilità associata ai rendimenti logaritmici di un'attività non è gaussiana, come ipotizza il modello di Black-Scholes, ma è caratterizzata da code spesse e punte alte.

2.1 Descrizione del modello

Nel modello di Heston l'andamento del processo di prezzo di un titolo $(S_t)_{t \geq 0}$ e della sua volatilità $(v_t)_{t \geq 0}$ sono caratterizzati come segue:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t \quad (2.1)$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \eta \sqrt{v_t} dZ_t \quad (2.2)$$

con i parametri $\mu \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $\theta > 0$, $\eta > 0$ e $\rho \in (-1, 1)$ costanti ed omogenei rispetto al tempo e con $\rho \cdot dt = \langle W, Z \rangle_t$ correlazione tra i moti Browniani. Si può osservare che se il coefficiente di correlazione è negativo $\rho < 0$, la volatilità aumenta all'aumentare del prezzo o del rendimento delle attività. Si crea in questo modo una spessa coda di distribuzione sulla destra mentre si schiaccia la coda sinistra. Al contrario se $\rho > 0$, cioè la volatilità aumenta quando il prezzo o il rendimento delle attività diminuisce, si allarga la coda sinistra e si comprime quella di destra, creando una distribuzione a coda di rondine. È evidente quindi che il coefficiente di correlazione ρ influisce sull'asimmetria della distribuzione. La figura 2.1 mostra questi effetti per diversi valori di ρ .

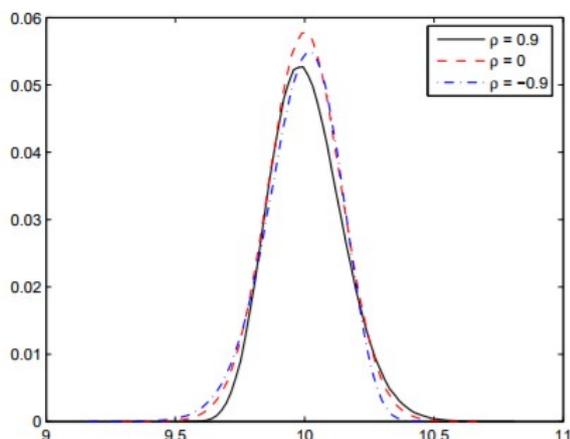


Figura 2.1: Effetti del coefficiente di correlazione sull'asimmetria della distribuzione. [4]

Il coefficiente di correlazione ha anche un impatto sulla forma della superficie della volatilità implicita: questo è mostrato dalle figure 2.2, 2.3 e 2.4.

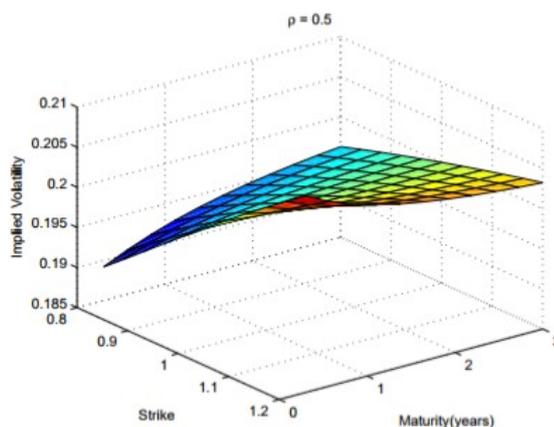


Figura 2.2: Superficie di volatilità implicita: $\rho = 1/2$, $k = 2$, $\theta = 0.04$, $\eta = 0.1$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $S_0 = 1$, $K \in (0.8 - 1.2)$, $T \in (0.5 - 3)$. [4]

Ci sono, inoltre, da considerare le condizioni iniziali del processo stocastico per $t = 0$: il prezzo del titolo sottostante $S_0 > 0$ che può essere direttamente osservato dal mercato e la volatilità iniziale $v_0 > 0$ non osservabile.

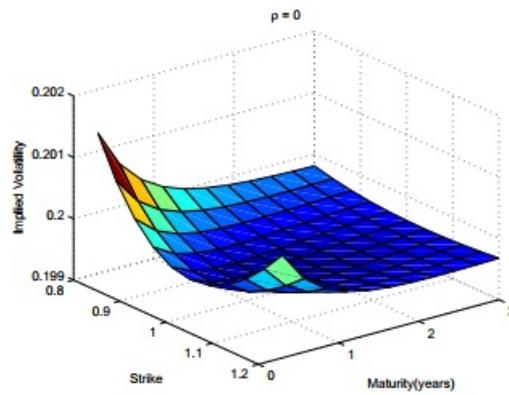


Figura 2.3: Superficie volatilità implicita: $\rho = 0$, $k = 2$, $\theta = 0.04$, $\eta = 0.1$, $V0 = 0.04$, $r = 0.01$, $S0 = 1$, $K \in (0.8 - 1.2)$, $T \in (0.5 - 3)$. [4]

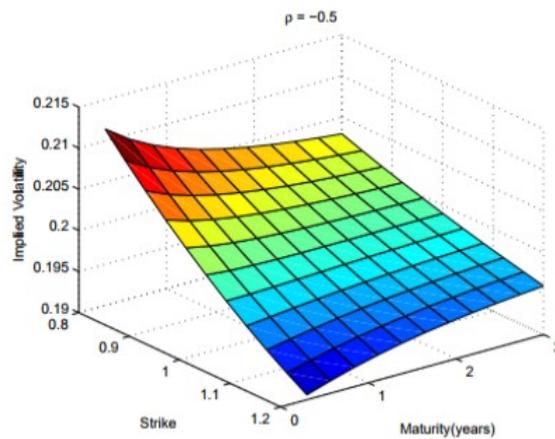


Figura 2.4: Superficie volatilità implicita: $\rho = -1/2$, $k = 2$, $\theta = 0.04$, $\eta = 0.1$, $V0 = 0.04$, $r = 0.01$, $S0 = 1$, $K \in (0.8 - 1.2)$, $T \in (0.5 - 3)$. [4]

Osservazione 2. Definiamo ora un'ulteriore vincolo fondamentale per i parametri $k > 0$, $\theta > 0$, $\eta > 0$ affinché la volatilità si mantenga strettamente positiva, **condizione di Feller**:

$$\frac{2k\theta}{\eta^2} > 1 \quad (2.3)$$

2.1.1 Il processo del prezzo di un titolo

Osservando la formula (2.1), notiamo che il termine $\mu S_t dt$ rappresenta la direzione di crescita (drift) del prezzo del titolo S_t , mentre l'elemento stocastico $\sqrt{v_t} S_t dW_t$ è simmetrico con media 0. Infatti si ha:

$$\mathbb{E}[S_t] = \mu S_t dt$$

Il parametro μ , chiamato drift, rappresenta il rendimento medio istantaneo o termine di deriva

$$\mu = \mathbb{E} \left[\frac{dS_t}{S_t dt} \right]$$

In questo modello, a differenza degli altri a volatilità stocastica, quello che cambia è la distribuzione di probabilità del rendimento, soprattutto per valori estremi, nelle code, essa è significativamente legata al processo di volatilità.

2.1.2 Processo di volatilità

La formula (2.2) che regola l'andamento del processo di volatilità è composta anch'essa rispettivamente da un termine deterministico e un termine stocastico:

$$dv_t^{DET} = k(\theta - v_t)dt \quad (2.4)$$

$$dv_t^{stoc} = \eta\sqrt{v_t}dZ_t \quad (2.5)$$

Analizzando il termine deterministico si può notare come questo porti la volatilità ad oscillare intorno al valor medio θ , il quale per questo motivo viene chiamato volatilità di lungo termine o long-term volatility. Il valore del parametro k , chiamato reversion speed, indica invece, la velocità di questa oscillazione e ne determina la frequenza; $\frac{1}{k}$ corrisponde al periodo dell'oscillazione. Per ogni prezzo, la volatilità di lungo termine, θ , rappresenta il valore asintotico della volatilità e k rappresenta la velocità con cui la volatilità si avvicina a θ .

Per quanto riguarda invece il termine stocastico, abbiamo come parametro di riferimento la cosiddetta volatility of volatility, η , la quale indica l'intensità del disturbo generato da dZ_t . Per esempio, se $\eta = 0$ la volatilità diventa deterministica, mentre all'aumentare del parametro, $\eta \gg 0$, il termine deterministico (2.4) diventa trascurabile rispetto al termine stocastico (2.5) ed inoltre si creano delle spesse code da entrambi i lati. La figura

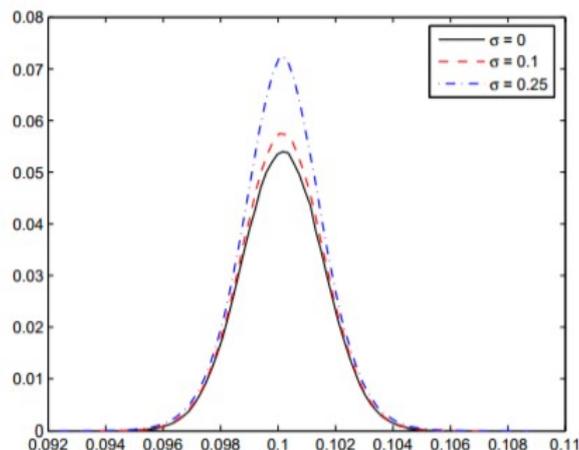


Figura 2.5: Effetti del parametro η . [4]

2.5 mostra questi effetti.

Anche in questo caso il parametro η ha un impatto sulla volatilità implicita, in particolare modifica lo smile di volatilità come mostrano le figure 2.6, 2.7 e 2.8. Si può notare che più cresce il valore di η e più diventa prominente l'inclinazione della volatilità.

2.2 Approccio neutrale al rischio

Per il modello di Heston l'andamento dei prezzi delle opzioni dipende da due sorgenti di rischio: il rischio del prezzo dovuto al processo stocastico $(S_t)_{t \geq 0}$ e il rischio di volatilità $(v_t)_{t \geq 0}$. L'equazione per il prezzo di un contratto derivato $U(S_t, v_t, t)$ è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\eta vS\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S} \\ + (k(\theta - v_t) - \lambda(S, v, t))\frac{\partial U}{\partial v} - rU + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

la funzione $\lambda(S, v, t)$ rappresenta il prezzo di mercato del rischio di volatilità. Senza perdere di generalità la sua forma funzionale può essere ridotta come segue: $\lambda(S, v, t) = \lambda v$. Il parametro $\lambda(S, v, t)$ è nella pratica impossibile da stimare, ma è possibile aggirare il problema grazie alla natura parametrica del modello e lo si può affrontare con un approccio neutrale al rischio. Il prezzo di un'opzione può essere calcolato come il valore

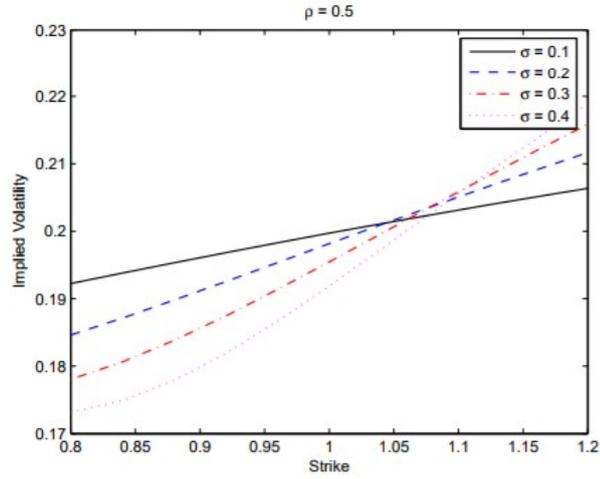


Figura 2.6: Superficie volatilità implicita: $\rho = 1/2$, $k = 2$, $\theta = 0.04$, $\eta = 0.1$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $S_0 = 1$, $K \in (0.8 - 1.2)$, $T \in (0.5 - 3)$. [4]

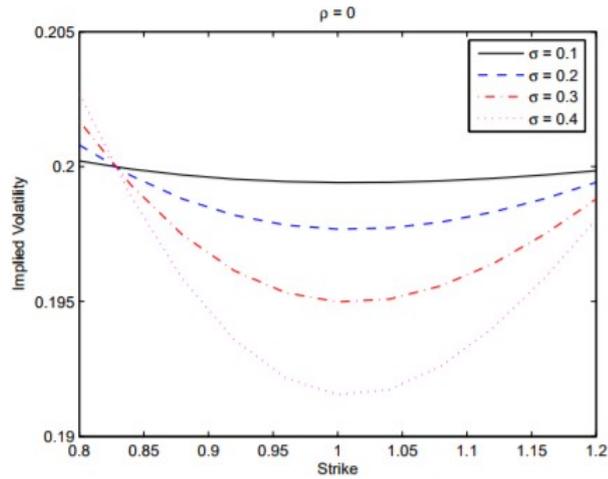


Figura 2.7: Superficie volatilità implicita: $\rho = 0$, $k = 2$, $\theta = 0.04$, $\eta = 0.1$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $S_0 = 1$, $K \in (0.8 - 1.2)$, $T \in (0.5 - 3)$. [4]

scontato del suo rendimento atteso sotto una misura di martingale equivalente \mathbb{Q}_i :

$$V_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_i} [e^{-r(T-t)} H(T)] \quad (2.7)$$

con $H(T)$ payoff a scadenza dell'opzione. Ad ogni prezzo del rischio di volatilità λ_i , corrisponde una misura di martingala equivalente \mathbb{Q}_i , per cui vale la formula sopra mostrata. Il cambio di misura rispetto alla misura di probabilità reale \mathbb{P} è funzione di $\lambda_i(S, v, t)$ e,

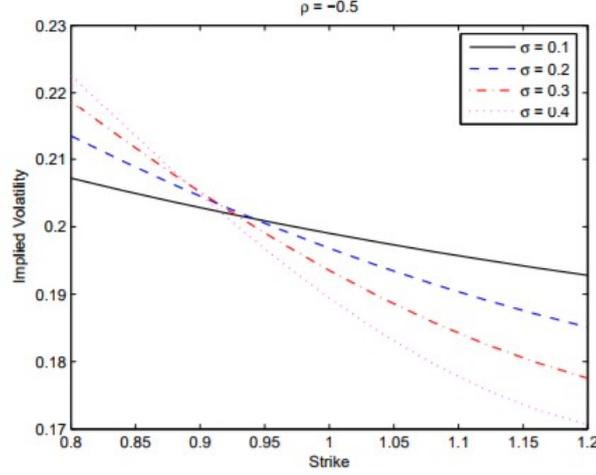


Figura 2.8: Superficie volatilità implicita: $\rho = -1/2$, $k = 2$, $\theta = 0.04$, $\eta = 0.1$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $S_0 = 1$, $K \in (0.8 - 1.2)$, $T \in (0.5 - 3)$. [4]

grazie all'applicazione del teorema di Girsanov, si ottiene:

$$\begin{aligned} dW_t^{\mathbb{Q}_i} &= dW_t^{\mathbb{P}} + (\vartheta_i)dt \\ dZ_t^{\mathbb{Q}_i} &= dZ_t^{\mathbb{P}} + \Lambda_i(S, v, t) \end{aligned}$$

$dW_t^{\mathbb{P}}$ e $dZ_t^{\mathbb{P}}$ sono i processi di Weiner presenti nelle formule (2.1) e (2.2) sotto la misura di probabilità reale \mathbb{P} , mentre $dW_t^{\mathbb{Q}_i}$ e $dZ_t^{\mathbb{Q}_i}$ sono gli stessi processi sotto la misura di martingala equivalente \mathbb{Q}_i riferita al prezzo del rischio di volatilità λ_i .

$$\frac{d\mathbb{Q}_i}{d\mathbb{P}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t ((\vartheta_i)_s^2 + \Lambda_i(S, v, t)^2) ds - \int_0^t (\vartheta_i)_s dW_s^{\mathbb{P}} - \int_0^t \Lambda_i(S, v, t) dZ_s^{\mathbb{P}} \right\}$$

$$(\vartheta_i)_t = \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}}$$

Il cambio di misura (da quella reale \mathbb{P} a quella di martingala equivalente \mathbb{Q}_i) ha effetti sui parametri k e θ . Il modello di Heston sotto la misura \mathbb{Q}_i diventa:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{\mathbb{Q}_i} \\ dv_t &= k_i(\theta_i - v_t)dt + \eta \sqrt{v_t} dZ_t^{\mathbb{Q}_i} \end{aligned}$$

con $\rho \cdot dt = \langle W^{\mathbb{Q}_i}, Z^{\mathbb{Q}_i} \rangle_t$, $k_i = k + \lambda_i$ e $\theta_i = \frac{k_i \theta}{k_i + \theta}$. Si ha quindi che per ogni prezzo del rischio di volatilità corrisponde un diverso set di parametri θ_i . Considereremo noto il set di parametri θ_i e ometteremo il pedice.

2.3 Prezzo di un'opzione europea

Si può facilmente osservare che il modello di Heston $\tilde{\mathbb{A}}$ è un modello incompleto, pertanto non è possibile ottenere un prezzo univoco soltanto con le equazioni (2.1) e (2.2). Per completare il mercato, nel modello di Heston è necessario aggiungere un'opzione di tipo europeo. Il valore di un qualsiasi contratto derivato $U(S_t, v_t, t)$ deve soddisfare l'equazione differenziale parziale (2.6).

Un'opzione call europea con strike K e scadenza al tempo T soddisfa la precedente PDE con le seguenti condizioni al bordo:

$$\begin{aligned}
 U(S, v, t) &= \max(0, S - K), \\
 U(0, v, t) &= 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) &= 1 \\
 rS \frac{\partial U}{\partial S}(S, 0, t) + k\theta \frac{\partial U}{\partial v}(S, 0, t) - rU(S, 0, t) + U_t(S, 0, t) &= 0, \\
 U(S, \infty, t) &= S
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

La soluzione dell'opzione, analogamente alla formula di Black-Scholes, ha la seguente forma:

$$C(S, v, t) = SP_1 - KP(t, T)P_2, \tag{2.9}$$

dove il primo termine è il valore attuale del sottostante e il secondo termine $\tilde{\mathbb{A}}$ il valore attuale del pagamento del prezzo d'esercizio. Entrambi i termini devono soddisfare l'originale PDE (2.6). Quest'ultima può essere scritta in termini di logaritmo del sottostante $x = \ln[S]$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \rho\eta v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} \\
 + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a_j - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{\partial P_j}{\partial t} = 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

per $j = 1, 2$ dove,

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = k\theta, b_1 = k + \lambda - \rho\sigma, b_2 = k + \lambda. \tag{2.11}$$

Per soddisfare la condizione nell'equazione (2.8), queste PDE (2.10) sono soggette alla seguente condizione:

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \mathbb{I} - \{x \leq \ln[k]\}$$

Quest'ultime sono note come *risk-neutralized probabilities*. Le probabilità P_j non sono immediatamente disponibili in forma chiusa, ma è possibile calcolarle invertendo la funzione caratteristica.

2.4 La funzione caratteristica

Il modello di Heston ha la peculiarità di presentare più formulazioni, del tutto equivalenti tra loro, della funzione caratteristica. Nella formulazione originale di Heston la funzione caratteristica era rappresentata dalla seguente formula:

$$\begin{aligned} \varphi_{X_T}(\xi) = & \exp \left(i\xi\mu T + \frac{\nu_0}{\eta^2} \left(\frac{1 - e^{-D(\xi)T}}{1 - G(\xi)e^{-D(\xi)T}} \right) (k - i\rho\eta\xi - D(\xi)) \right) \cdot \\ & \cdot \exp \left(\frac{k\theta}{\eta^2} \left(T(k - i\rho\eta\xi + D(\xi)) - 2 \log \left(\frac{1 - \frac{e^{D(\xi)T}}{G(\xi)}}{1 - \frac{1}{G(\xi)}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

dove

$$D(\xi) = \sqrt{(k - i\rho\eta\xi)^2 + (\xi^2 + i\xi)\eta^2}, \quad G(\xi) = \frac{k - i\rho\eta\xi - D(\xi)}{k - i\rho\eta\xi + D(\xi)}. \quad (2.12)$$

Un'ulteriore funzione caratteristica è stata successivamente calcolata da Bakshi, Cao e Chen:

$$\begin{aligned} \varphi_{X_T}(\xi) = & \exp \left(i\xi\mu T + \frac{\nu_0}{\eta^2} \left(\frac{1 - e^{-D(\xi)T}}{1 - G(\xi)e^{-D(\xi)T}} \right) (k - i\rho\eta\xi - D(\xi)) \right) \cdot \\ & \cdot \exp \left(\frac{k\theta}{\eta^2} \left(T(k - i\rho\eta\xi - D(\xi)) - 2 \log \left(\frac{1 - G(\xi)e^{-D(\xi)T}}{1 - G(\xi)} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

con $D(\xi)$ e $G(\xi)$ come definiti in (2.12).

Lord e Kahl hanno recentemente dimostrato che questa seconda formulazione (2.13), nonostante sia algebricamente equivalente alla precedente, non produce discontinuità quando si utilizza il principale argomento dei numeri complessi.

Vediamo ora la dimostrazione della seconda formula caratteristica (2.13), utilizzata nello svolgimento della tesi, data dal *Adjoint Expansion Method*; una tecnica generale che fornisce approssimazioni accurate delle funzioni caratteristiche di una certa classe di processi. citazione

2.4.1 AE: The Adjoint Expansion

Consideriamo il seguente processo neutrale al rischio per il logaritmo del sottostante:

$$dX_t = \left(\bar{r} - \frac{\sigma^2(t, X_t)v_t}{2} \right) dt + \sigma(t, X_t)\sqrt{v_t}dW_t^1 + dZ_t, \quad (2.14)$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t} \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2}dW_t^2 \right). \quad (2.15)$$

Prima di introdurre il metodo, fissiamo anche le notazioni.

$\Gamma = \Gamma(x, v; t, y, w)$ rappresenta la densità del processo $(X_t, v_t)_{t \geq 0}$, il quale inizia dal punto $(x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ al tempo iniziale 0. Poichè il punto iniziale è fissato, si userà la notazione $\Gamma(t, y, w)$ invece di $\Gamma(x, v; t, y, w)$. Per semplicità si assume, che il parametro volatility-of-volatility sia uguale a 1, $\eta = 1$, e che i coefficienti siano indipendenti dal tempo. Si applicano quindi i seguenti cambi di variabile:

$$v_t = \eta^2 \tilde{v}_t, \quad \sigma(x) = \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\eta}, \quad \theta = \eta^2 \tilde{\theta} \quad (2.16)$$

i quali trasformano (2.14) in:

$$dX_t = \left(\bar{r} - \frac{\tilde{\sigma}^2(X_t) \tilde{v}_t}{2} \right) dt + \tilde{\sigma}(X_t) \sqrt{\tilde{v}_t} dW_t^1 + dZ_t, \quad (2.17)$$

$$d\tilde{v}_t = k(\tilde{\theta} - \tilde{v}_t) dt + \sqrt{\tilde{v}_t} \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right). \quad (2.18)$$

con Z processo di Levy, indipendente da W :

$$dZ_t = \int_{|y| \geq 1} y J(dt, dy) + \int_{|y| < 1} y \tilde{J}(dt, dy), \quad (2.19)$$

dove J e \tilde{J} sono the jump measure and the compensated jump measure of Z rispettivamente.

Per introdurre the Adjoint expansion method, consideriamo the Kolmogorov PDE of (X_t, v_t) :

$$\begin{aligned} Lu = & \frac{v}{2} (\sigma^2(x) (\partial_{xx} - \partial_x) + 2\rho\sigma(x) \partial_{xv} + \partial_{vv}) u(t, x, v) \\ & \bar{r} \partial_x u(t, x, v) + k(\theta - v) \partial_v u(t, x, v) + \partial_t u(t, x, v) \\ & + \int_{\mathbb{R}} (u(t, x + y, v) - u(t, x, v) - \partial_x u(t, x, v) y \mathbb{I}_{|y| < 1}) \nu(dy). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Fissato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, definiamo l'n-esimo ordine di approssimazione di L :

$$\begin{aligned} L_n u(t, x, v) = & \frac{v}{2} (T_{n, \sigma^2}(x) (\partial_{xx} - \partial_x) + 2\rho T_{n, \sigma}(x) \partial_{xv} + \partial_{vv}) u(t, x, v) \\ & \bar{r} \partial_x u(t, x, v) + k(\theta - v) \partial_v u(t, x, v) + \partial_t u(t, x, v) \\ & + \int_{\mathbb{R}} (u(t, x + y, v) - u(t, x, v) - \partial_x u(t, x, v) y \mathbb{I}_{|y| < 1}) \nu(dy). \end{aligned} \quad (2.21)$$

dove $T_{n,f}$ rappresenta l' n -esimo ordine della funzione polinomiale di Taylor f attorno al punto \bar{x} . In particolare lo 0-esimo ordine di approssimazione è dato da:

$$\begin{aligned} L_0 u(t, x, v) &= \frac{v}{2} (\bar{\sigma}_0^2 (\partial_{xx} - \partial_x) + 2\rho\bar{\sigma}_0 \partial_{xv} + \partial_{vv}) u(t, x, v) \\ &\quad \bar{r} \partial_x u(t, x, v) + k(\theta - v) \partial_v u(t, x, v) + \partial_t u(t, x, v) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (u(t, x + y, v) - u(t, x, v) - \partial_x u(t, x, v) y \mathbb{I}_{|y| < 1}) \nu(dy). \end{aligned} \quad (2.22)$$

dove $\bar{\sigma}_0 = \sigma(\bar{x})$.

L' n -esimo ordine di espansione della densità Γ è dato da:

$$\Gamma_n(t, y, w) = \sum_{j=0}^n G_j(t, y, w), \quad (t, y, w) \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.23)$$

dove $G_0 \equiv \Gamma_0$ è la densità di transizione, mentre $G_j = G_j(t, y, w)$, per $j \geq 1$, è la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet

$$\tilde{L}_0 G_j = - \sum_{h=1}^j (\tilde{L}_h - \tilde{L}_{h-1}) G_{j-h}, \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.24)$$

$$G_j(0, y, w) = 0, \quad (y, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.25)$$

$$G_j(t, y, 0) = 0 \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (2.26)$$

dove \tilde{L}_n è l'operatore aggiunto di L_n . Più esplicitamente, abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 u(t, x, v) &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_0^2 (\partial_{yy} - \partial_y) + 2\rho\bar{\sigma}_0 \partial_{yw} + \partial_{ww}) (wu(t, y, w)) \\ &\quad \bar{r} \partial_y u(t, y, w) + \partial_w (k(\theta - w)u(t, y, w)) + \partial_t u(t, y, w) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (u(t, y + z, w) - u(t, y, w) - \partial_y u(t, y, w) z \mathbb{I}_{|z| < 1}) \bar{\nu}(dz). \end{aligned} \quad (2.27)$$

dove $\bar{\nu}(dz) = \nu(-dz)$ indica la misura di Levy. Inoltre

$$\begin{aligned} &(\tilde{L}_h - \tilde{L}_{h-1}) u(t, y, w) \\ &= \frac{1}{h!} \left(\frac{\bar{\sigma}_h}{2} (\partial_{yy} + \partial_y) + \rho\bar{\sigma}_h \partial_{yw} \right) (w(y - \bar{x})^h u(t, y, w)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

dove

$$\bar{\sigma}_n = \frac{d^n \sigma}{dx^n}(\bar{x}), \quad \bar{\bar{\sigma}}_n = \frac{d^n \sigma^2}{dx^n}(\bar{x}), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.29)$$

Il problema di Cauchy-Dirichlet (2.24) può essere risolto esplicitamente nello spazio di Fourier; in particolare, consideriamo la funzione caratteristica di (X_t, v_t) definita come trasformata di Fourier-Laplace di Γ :

$$\widehat{\Gamma}(t, \xi, \omega) := E [e^{i\xi X_t - \omega v_t}] = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} e^{i\xi y - \omega w} \Gamma(t, y, \omega) dy d\omega, \quad (2.30)$$

per $(t, \xi, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Applicando quindi la trasformata di Fourier-Laplace alla (2.23), otteniamo la seguente espansione della funzione caratteristica:

$$\widehat{\Gamma}(t, \xi, \omega) \approx \widehat{\Gamma}_n(t, \xi, \omega) = \sum_{j=0}^n \widehat{G}_j(t, \xi, \omega). \quad (2.31)$$

Le funzioni \widehat{G}_j sono soluzioni delle equazioni differenziali parziali del primo ordine e questo ci permette di calcolarle in maniera esplicita.

Proposizione 2.4.1.

(i) La funzione $\widehat{G}_0 = \widehat{\Gamma}_0$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} -Y\widehat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) + A(\xi, \omega)\widehat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) &= 0, \quad (t, \xi, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ \widehat{\Gamma}_0(0, \xi, \omega) &= e^{i\xi\xi - v\omega}, \quad (\xi, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove

$$A(\xi, \omega) = -k\theta\omega + i\bar{r}\xi + \varphi(\xi), \quad (2.33)$$

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (e^{iz\xi} - 1 - iz\xi\mathbb{I}_{\{|z|<1\}}) \nu(dz) \quad (2.34)$$

e Y è l'operatore differenziale del primo ordine

$$Y = \partial_t + B(\xi, \omega)\partial_\omega \quad (2.35)$$

con

$$B(\xi, \omega) = \alpha(\xi) - \beta(\xi)\omega + \frac{\omega^2}{2}, \quad (2.36)$$

$$\alpha(\xi) = -\frac{\bar{\sigma}_0^2}{2}\xi(\xi + i), \quad \beta(\xi) = i\xi\rho\bar{\sigma}_0 - k; \quad (2.37)$$

(ii) per $j = 1, 2$ la funzione \widehat{G}_j risolve il seguente problema di Cauchy

$$-Y\widehat{G}_j(t, \xi, \omega) + A(\xi, \omega)\widehat{G}_j(t, \xi, \omega) = \widehat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega)H_j(t, \xi, \omega), \quad (2.38)$$

$$\widehat{G}_j(0, \xi, \omega) = 0, \quad (2.39)$$

dove

$$H_1(t, \xi, \omega) = \bar{\sigma}_1 \xi (\bar{\sigma}_0 (\xi + i) + i \rho \omega). \quad (2.40)$$

$$\cdot (i(\partial_\xi \psi_0 \partial_\omega \psi_0) + \bar{x} \partial_\omega \psi_0)(t, \xi, \omega) \quad (2.41)$$

con

$$\psi_0(t, \xi, \omega) = \log \widehat{\Gamma}_0(0, \xi, \omega), \quad (2.42)$$

Per prima cosa è data la dimostrazione per ricavare lo 0-esimo ordine di approssimazione $\widehat{\Gamma}_0$ della funzione caratteristica di (X_t, v_t) :

Dimostrazione. Sia $U_t = e^{i\xi X_t - \omega v_t}$. Dalla formula di Ito si ottiene:

$$dU_t = (B(\xi, \omega)v_t + A(\xi, \omega))U_t dt + dM_t \quad (2.43)$$

dove

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t U_s \sqrt{v_s} \left((i\xi \bar{\sigma}_0 - \omega \rho) dW_s^1 - \omega \sqrt{1 - \rho^2} dW_s^2 \right) \\ &\quad + \int_0^t U_{s-} \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi y} - 1) \tilde{J}(ds, dy) \end{aligned}$$

è una martingala locale, M è anche martingala:

$$E \left[\int_0^t |U_s|^2 v_s ds \right] = E \left[\int_0^t e^{-2\omega v_s} v_s ds \right] \leq E \left[\int_0^t \frac{1}{2e\omega} \right] = \frac{t}{2e\omega},$$

e

$$E \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |U_s (e^{i\xi y} - 1)|^2 \nu(dy) ds \right] = \leq T \int_{\mathbb{R}} |e^{i\xi y} - 1|^2 \nu(dy) < \infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, prendendo l'espressione (2.43), si ottiene:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) &= E[U_t] = e^{ix\xi - v\omega} + E \left[\int_0^t (B(\xi, \omega)v_s + A(\xi, \omega))U_s ds \right] = \\ &= e^{ix\xi - v\omega} + \int_0^t \left(-B(\xi, \omega) \partial_\omega \widehat{\Gamma}_0(s, \xi, \omega) + A(\xi, \omega) \widehat{\Gamma}_0(s, \xi, \omega) \right) ds. \end{aligned}$$

□

Il problema (2.32) può essere anche risolto con il classico metodo delle caratteristiche: precisamente sia $\gamma^{t,\omega,\xi} = \gamma^{t,\omega,\xi}(s)$ la curva integrale di Y , soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\gamma^{t,\omega,\xi}(s) &= Y(\gamma^{t,\omega,\xi}(s)), \\ \gamma^{t,\omega,\xi}(t) &= (t, \omega), \end{aligned}$$

in maniera esplicita si ha:

$$\frac{d}{ds}\gamma_1^{t,\omega,\xi}(s) = 1, \quad \gamma_1^{t,\omega,\xi}(t) = t \quad (2.44)$$

$$\frac{d}{ds}\gamma_2^{t,\omega,\xi}(s) = B(\xi, \gamma_2^{t,\omega,\xi}(s)), \quad \gamma_2^{t,\omega,\xi}(t) = \omega \quad (2.45)$$

Inoltre, si ha:

$$\widehat{\Gamma}_0(t, \xi, \omega) = e^{\psi_0(t, \xi, \omega)} \quad (2.46)$$

dove

$$\psi_0(t, \xi, \omega) = ix\xi - v\gamma_2^{t,\omega,\xi}(0) + \int_0^t A(\xi, \gamma_2^{t,\omega,\xi}(s)) ds. \quad (2.47)$$

Nella prossima proposizione viene fornita l'espressione esplicita della curva integrale $\gamma^{t,\omega,\xi}$. Mostriamo intanto il coefficiente B in (2.36) in una forma equivalente:

$$B(\xi, \omega) = \frac{1}{2}(\omega - a(\xi))(\omega - b(\xi)) \quad (2.48)$$

dove

$$a(\xi) = \beta(\xi) + D(\xi), \quad b(\xi) = \beta(\xi) - D(\xi), \quad D(\xi) = \sqrt{\beta(\xi)^2 - 2a(\xi)} \quad (2.49)$$

Proposizione 2.4.2.

Si ha:

$$\gamma^{t,\omega,\xi}(s) = \left(s, \frac{b(\xi)g(\xi, \omega)e^{-D(\xi)(t-s)} - a(\xi)}{g(\xi, \omega)e^{D(\xi)(t-s)} - 1} \right) \quad (2.50)$$

dove

$$g(\xi, \omega) = \frac{a(\xi) - \omega}{b(\xi) - \omega} \quad (2.51)$$

Tuttavia l'espressione esplicita di ψ_0 in (2.46) è la seguente:

$$\begin{aligned} \psi_0(t, \xi, \omega) &= ix\xi - v\gamma_2^{t,\omega,\xi}(0) + t(i\xi\bar{r} + \varphi(\xi)) \\ &\quad - k\theta(a(\xi)t - 2 \log I_1(t, \xi, \omega)) \end{aligned} \quad (2.52)$$

e

$$I_1 t, \xi, \omega = \frac{g(\xi, \omega) - 1}{g(\xi, \omega)e^{-D(\xi)t} - 1} \quad (2.53)$$

Dimostrazione.

Sia $\gamma_1^{t,\omega,\xi}(s) = s$. Per valutare $\gamma_2^{t,\omega,\xi}$ consideriamo:

$$F(\xi, \gamma, \omega) = \int_{\gamma}^{\omega} \frac{d\tau}{B(\xi, \tau)} \quad (2.54)$$

esplicitamente:

$$F(\xi, \gamma, \omega) = \frac{1}{D(\xi)} \log \frac{(a(\xi) - \omega)(b(\xi) - \gamma)}{(b(\xi) - \omega)(a(\xi) - \gamma)} \quad (2.55)$$

con a , b e D definiti come in (2.49). Grazie alla separazione della variabili, la seconda ODE in (2.44) è equivalente a:

$$F\left(\xi, \gamma_2^{t,\omega,\xi}(s), \omega\right) = t - s \quad (2.56)$$

Infine, calcoliamo l'integrale (2.47), con il cambio di variabile $\tau = \gamma_2^{t,\omega,\xi}(s)$:

$$\int_0^t A\left(\xi, \gamma_2^{t,\omega,\xi}(s)\right) ds = \int_{\gamma_2^{t,\omega,\xi}(0)}^{\omega} \frac{A(\xi, \tau)}{B(\xi, \tau)} d\tau. \quad (2.57)$$

□

Per il modello di Heston, ponendo ($\nu = 0$ e σ costante), l'espressione dell'esponente caratteristico in (2.52) coincide con la formula data da Bakshi, Cao e Chen.

2.4.2 Densità

Per ricavare la densità del modello di Heston attraverso la serie coseno, abbiamo visto che si utilizza la funzione caratteristica (2.13). Illustriamo di seguito il grafico della densità a diverse scadenze T , figura 2.9 e il grafico della densità al variare del parametro ρ , figura 2.10.

Come si può osservare, la distribuzione di probabilità associata ai rendimenti logaritmici di un'attività è caratterizzata da code spesse, e quindi in termini di probabilità, da numerosi valori estremi. Tale distribuzione è definita distribuzione leptocurtica dei rendimenti. Quest'ultima, con indice di curtosi maggiore di 3, è caratterizzata dal fatto che i rendimenti relativi sono stazionari e dal fatto che assume valori prossimi alla media aritmetica, vicina a 0. In generale la media aritmetica costituisce una buona stima del valore atteso, la mediana invece è una misura di tendenza centrale con caratteristiche di maggior robustezza.

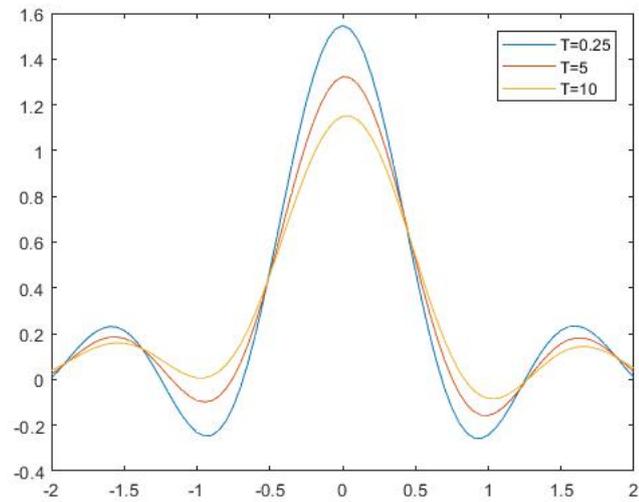


Figura 2.9: Densità diverse scadenze: $\rho = -1/2$, $k = 1.5$, $\theta = 0.02$, $\eta = 1.5$, $v_0 = 0.04$, $\mu = 0$

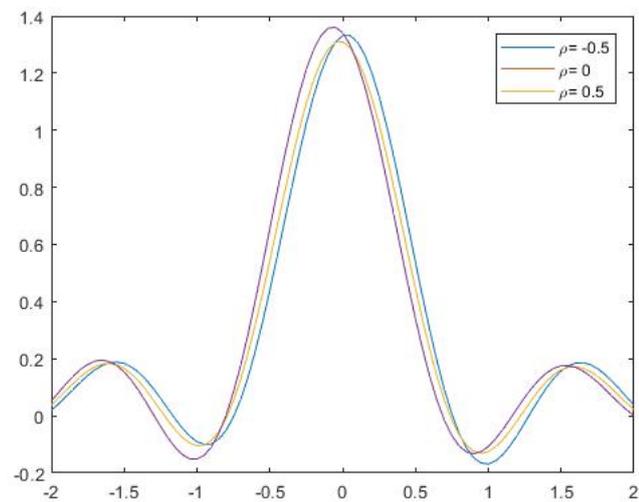


Figura 2.10: Densità al variare di ρ : $T = 5$, $k = 1.5$, $\theta = 0.02$, $\eta = 1.5$, $v_0 = 0.04$, $\mu = 0$

2.5 Risultati numerici

Nel seguente paragrafo implementiamo il prezzo delle opzioni europee Call e Put con lo sviluppo in serie coseno di Fourier. Per la realizzazione dei seguenti risultati è stato utilizzato il software Matlab.

Vediamo ora alcune tabelle che mostrano i prezzi delle opzioni nel modello di Heston. In primo luogo facciamo variare il parametro N , parametro che corrisponde al numero finito di elementi sul quale calcoliamo la serie. Gli altri parametri si fissano a:

$$K = 100, \quad S_0 = 90, \quad T = 1/52, \quad r = 0.01, \quad \mu = 0.03, \\ k = 2, \quad \eta = 0.1, \quad \theta = v_0 = 0.04, \quad \rho = 0.5$$

La seguente tabelle mostra invece il prezzo al variare della scadenza T : $T = 1/52$ (1

| | Prezzo Call | Prezzo Put |
|-------|-------------|------------|
| N=100 | 91.7108 | 9.9138e+04 |
| N=200 | 82.7429 | 1.0018e+05 |
| N=300 | 36.7819 | 1.0167e+05 |
| N=400 | 17.5753 | 1.0285e+05 |

Tabella 2.1: Prezzo della Call e Put al variare di N

settimana), $T = 1/12$ (1 mese), $T = 1/2$ (6 mesi) e $T = 1$ (1 anno), lasciando inalterati i parametri visti precedentemente.

L'espansione in serie coseno di Fourier dipende in particolar modo dalla scelta dei

| | Prezzo Call | Prezzo Put |
|--------|-------------|------------|
| T=1/52 | 91.7108 | 1.0018e+05 |
| T=1/12 | 86.7661 | 1.0012e+05 |
| T=1/2 | 82.6754 | 9.9703e+04 |
| T=1 | 112.3508 | 9.9205e+04 |

Tabella 2.2: Prezzo della Call e Put al variare di T

parametri L e N ; ciò è dimostrabile considerando la differenza percentuale, definita come segue:

$$\frac{Call_{L,N} - RV}{RV} \quad (2.58)$$

dove RV è il valore di riferimento, mentre $Call_{L,N}$ è l'approssimazione in serie coseno di Fourier del prezzo dell'opzione Call con L e N come parametri di troncamento.

In particolare, calcolando il prezzo di una opzione Call con parametri $S_0 = K = 100$ e scadenza $T = 1$, si può osservare che per $N = 1000$ e per $L = 10, 20, 30, 40$ si ottiene sempre

lo stesso prezzo, il quale corrisponde al nostro valore di riferimento $RV = 5.785155434$. Le figure 2.11 e 2.12 mostrano le differenze percentuali.

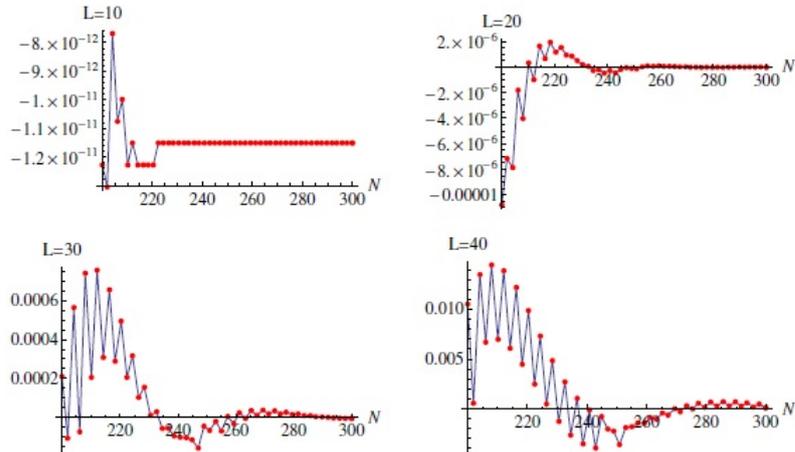


Figura 2.11: Differenza percentuale del prezzo di un'opzione Call: $S_0 = 130$, $T = 5$, $K = 100$, $L = 10, 20, 30, 40$ e $N \in [300, 400]$. Il valore $RV = 38.14326939$. [1]

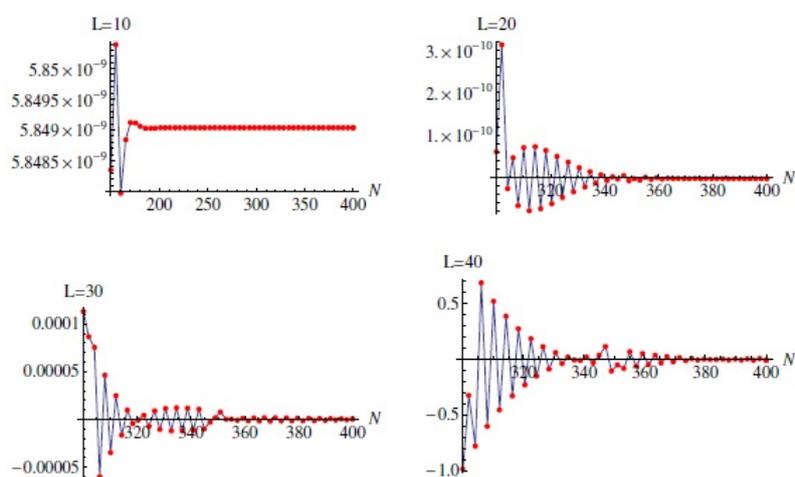


Figura 2.12: Differenza percentuale del prezzo di un'opzione Call: $S_0 = 90$, $T = 1/12$, $K = 100$, $L = 10, 20, 30, 40$ e $N \in [200, 300]$. Il valore $RV = 1.156269518 \times 10^{-3}$. [1]

Capitolo 3

Modello di Merton

Il modello Black and Scholes, uno dei modelli più utilizzati per la valutazione delle opzioni, presenta dei limiti notevoli. Il modello infatti viene assunto sotto ipotesi di mercato perfetto; ci troviamo nel caso di assenza di costi di transazione, di tasse e di rischio, ovvero ipotesi non coerenti con la realtà dei mercati finanziari. In particolare, uno dei principali limiti è dato dalla volatilità, la quale verrà calcolata in base ai dati storici dei prezzi del sottostante. La volatilità storica è una volatilità costante che non tiene conto della variabilità dei prezzi nel tempo. Oltre alla volatilità storica, quando si parla di opzioni, viene individuata un'altra tipologia di volatilità, relativa a periodi futuri, chiamata implicita. Quest'ultima non può essere direttamente osservata, ma deve essere stimata tramite i prezzi storici dell'opzione stessa ricavandone implicitamente il valore. La volatilità implicita varia sia al variare dello strike che dalla scadenza e questo conferma che la volatilità implicita è tutt'altro che piatta. I grafici usati per la rappresentazione della volatilità implicita vengono chiamati *volatility smiles* o direttamente *smiles*; dalla figura 3.1 è possibile osservare la caratteristica forma a *smile*. Si nota infatti che la volatilità diminuisce, si stabilizza e poi aumenta al crescere del prezzo d'esercizio dell'azione sottostante.

Quando si utilizza questo tipo di volatilità si presentano due ipotesi: la prima è che i rendimenti del sottostante dipendano da una sola fonte d'incertezza, mentre la seconda è che i prezzi seguano un moto browniano. Interessante è analizzare la seconda ipotesi, in modo tale da poter introdurre un nuovo modello a salti, chiamato anche *jump-diffusion*.

3.1 Descrizione del modello

I modelli diffusivi con salto sono stati introdotti da Robert Merton, nel 1976, per modificare il modello di Black and Scholes. Aggiungendo infatti i movimenti giornalieri dei prezzi e i salti aleatori a cui essi potevano andare incontro, riuscì a dare una visione più realistica del mercato e dei prezzi futuri.

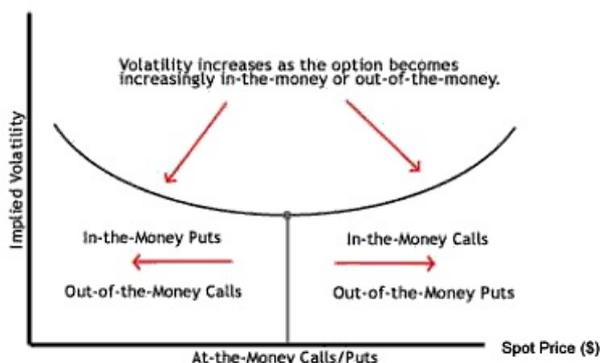


Figura 3.1: Volatility smile

Tale modello prende in considerazione l'ipotesi che l'andamento dei titoli può subire variazioni improvvise ed inoltre ammette la presenza di salti: un processo jump-diffusion è nato come estensione ai mercati del moto geometrico browniano. Il risultato è quello di non avere più traiettorie continue dell'andamento di un titolo, ma piuttosto discontinue e irregolari.

Il modello diffusivo a salti di Merton (MJD) è un modello esponenziale della forma:

$$S_t = S_0 e^{L_t} \quad \text{con } 0 \leq t \leq T$$

dove il processo stocastico L_t corrisponde alla somma di un moto browniano con drift, relativamente alla componente diffusiva del processo, e di un processo composto di Poisson, relativamente alla componente discontinua. L_t viene quindi definito dalla seguente equazione:

$$L_t = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (3.1)$$

dove $\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + \sigma W_t$ è un moto browniano con drift, mentre $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, unica differenza rispetto a Black-Scholes, è un processo composto di Poisson.

Tale modello contiene due fonti di rischio. La prima è il processo di Poisson dN_t con intensità o numero medio di salti per unità di tempo, λ , che causa salti casuali nel tempo, la cui funzione è quella di modellizzare i salti, i cosiddetti *jumps*. La seconda fonte di rischio è l'ampiezza di questi salti, poiché è anch'essa modellata casualmente: in MJD si assume che seguano una distribuzione normale, $(dx_i) \sim i.i.d. \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$:

$$f(dx_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp\left(-\frac{(dx_i - \mu)^2}{2\delta^2}\right)$$

Si assume inoltre che queste due fonti di rischio siano indipendenti.

Rispetto al modello di partenza, quello di Black and Scholes, introducendo i tre nuovi

parametri λ , μ e δ , si vuole catturare l'asimmetria negativa e l'eccesso di curtosi (altezza massima raggiunta nella curva di frequenze di una distribuzione) presenti nelle serie storiche dei log-rendimenti.

La probabilità che il prezzo del titolo salti durante un intervallo di tempo dt , può essere descritta utilizzando il processo di Poisson dN_t come segue:

- $\text{Prob}\{S \text{ salti una sola volta in } dt\} = \text{Prob}\{dN_t = 1\} \cong \lambda dt$,
- $\text{Prob}\{S \text{ salti più volte in } dt\} = \text{Prob}\{dN_t \geq 2\} \cong 0$,
- $\text{Prob}\{S \text{ non salti in } dt\} = \text{Prob}\{dN_t = 0\} \cong 1 - \lambda dt$

Dato l'intervallo di tempo dt , nel quale il prezzo del sottostante varia da S_t a $y_t S_t$, l'ampiezza relativa del salto sarà:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \frac{y_t S_t - S_t}{S_t} = y_t - 1 \quad (3.2)$$

Poichè si è assunto che $\ln(y_t) \sim i.i.d.\mathcal{N}(\mu, \delta^2)$, si ha che la media di y_t è:

$$E(y_t) = e^{\mu + \frac{\delta^2}{2}}$$

Definendo l'ampiezza media dei salti come $k = E[y_t - 1]$ e considerando y_t come variabile casuale lognormale, la dinamica del modello di Merton segue la SDE:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW_t + (y_t - 1)dN_t \quad (3.3)$$

dove $\alpha(dt)$ rappresenta il rendimento istantaneo atteso del titolo aggiustato con la componente deterministica del processo: $-\lambda k(dt)$, così da rendere la componente non diffusiva totalmente imprevedibile. Il valore atteso invece sarà:

$$\begin{aligned} E \left[\frac{dS_t}{S_t} \right] &= E[(\alpha - \lambda k)dt] + E[\sigma dW_t] + E[(y_t - 1)dN_t] \\ &= (\alpha - \lambda k)dt + 0 + \lambda k dt = \alpha dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

per cui la variazione del prezzo del sottostante atteso, appena descritta, è riferita alla componente di salto dN_t , mentre la probabilità che si verifichi un salto con una determinata ampiezza k risulta pari a

$$\lambda k dt = E[(y_t - 1)dN_t] = E[y_t - 1]E[dN_t]$$

La presenza del processo composto di Poisson $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, rende i log-rendimenti non normali. Tuttavia l'assunzione di normalità dell'ampiezza dei salti fa sì che la densità

di probabilità dei log-rendimenti, $x_t = \ln(S_t/S_0)$, possa essere ottenuta dalla seguente serie convergente:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_t \in A) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = i) \mathbb{P}(x_t \in A | N_t = i) \\ \mathbb{P}(x_t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} N(x_t; (\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)t + i\mu, \sigma^2 t + i\delta^2)\end{aligned}$$

dove $N(x_t; (\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)t + i\mu, \sigma^2 t + i\delta^2)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + i\delta^2)}} \exp \left[-\frac{\left[x_t - \left((\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)t + i\mu \right) \right]^2}{2(\sigma^2 t + i\delta^2)} \right]$$

Riprendendo le probabilità dei salti viste precedentemente, mostriamo cosa accade alla formula (3.3) nei diversi casi.

Se il prezzo del sottostante non subisce salti nell'intervallo prestabilito, il modello jump diffusion è un semplice modello browniano di questo tipo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma W_t$$

Invece, nel caso in cui il numero di salti sia pari a 1, si avrà:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma W_t + (y_t - 1)$$

dove $(y_t - 1)$ è l'ampiezza del salto avvenuto sul prezzo del sottostante.

3.2 Option pricing

Al fine di derivare la formula di valutazione delle opzioni, si può iniziare considerando un portafoglio P formato da una posizione lunga su un'opzione $V(S_t, t)$, sul sottostante S_t , e una posizione corta per la quantità, Δ , sul sottostante:

$$P_t = V(S_t, t) - \Delta S_t \tag{3.5}$$

la cui dinamica è:

$$dP_t = dV(S_t, t) - \Delta dS_t \tag{3.6}$$

Definendo la dinamica del prezzo del sottostante come:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW_t + (y_t - 1)dN_t, \\ dS_t &= (\alpha - \lambda k)S_t dt + \sigma S_t dW_t + (y_t - 1)S_t dN_t\end{aligned}\quad (3.7)$$

Questa equazione si modifica in un processo jump diffusion, applicando la formula di Itô:

$$\begin{aligned}dV(S_t, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + (\alpha - \lambda k)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dt + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t \\ &\quad + [V(y_t S_t, t) - V(S_t, t)]dN_t\end{aligned}\quad (3.8)$$

dove il termine $[V(y_t S_t, t) - V(S_t, t)]dN_t$ esprime la differenza nel prezzo dell'opzione quando il salto si verifica.

La differenza nel valore del portafoglio viene espresso sostituendo la formula (3.7) e (3.8) nella (3.5):

$$\begin{aligned}dP_t &= \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + (\alpha - \lambda k)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - \Delta(\alpha - \lambda k)S_t \right\} dt \\ &\quad + \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - \Delta \sigma S_t \right) dW_t + \{V(y_t S_t, t) - V(S_t, t) - \Delta(y_t - 1)S_t\}dN_t.\end{aligned}$$

Si può osservare che se non si verificano salti nel periodo di tempo $(0, t)$, ovvero $dN_t = 0$, il problema si riduce al caso Black and Scholes, per cui ponendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$, il portafoglio risulta privo di rischi, poichè viene eliminata la fonte di rischio ($dW_t = 0$):

$$dP_t = \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right\} dt$$

Se invece si verificano salti, $dN_t \neq 0$, ponendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$ non si elimina completamente il rischio.

Si supponga ora di voler coprire il portafoglio dall'incertezza dovuta alla componente diffusiva dW_t , ma non quella relativa ai salti, mantenendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$ si ha:

$$dP_t = \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right\} dt + \left\{ V(y_t S_t, t) - V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t} (y_t - 1)S_t \right\} dN_t. \quad (3.9)$$

Merton assume che la componente relativa ai salti, dN_t del processo S_t non sia correlata direttamente con il mercato. Quindi il rischio dovuto ai salti è diversificabile e non deve prevedere nessun premio al rischio. Ci si aspetta dunque che il portafoglio cresca al tasso privo di rischio r :

$$E[dP_t] = rP_t dt \quad (3.10)$$

Sostituendo (3.5) e (3.9) nella formula precedente, si ottiene:

$$\begin{aligned}
& E \left[\left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right\} dt + \{V(y_t S_t, t) - V(S_t, t) - \Delta(y_t - 1)S_t\} dN_t \right] \\
&= r \{V(S_t, t) - \Delta S_t\} dt \\
& \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right\} dt + E \left[V(y_t S_t, t) - V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t}(y_t - 1)S_t \right] E[dN_t] \\
&= r \{V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t\} dt \\
& \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right\} dt + E \left[V(y_t S_t, t) - V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t}(y_t - 1)S_t \right] \lambda dt \\
&= r \{V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t\} dt \\
& \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \lambda E \left[V(y_t S_t, t) - V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t}(y_t - 1)S_t \right] \\
&= r \{V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t\}
\end{aligned}$$

Quindi nel modello di Merton, la controparte alla PDE in Black and Scholes, è:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV + \lambda E [V(y_t S_t, t) - V(S_t, t)] - \lambda S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} E[y_t - 1] = 0 \quad (3.11)$$

Si può notare facilmente, che se non vi è attesa sui salti, ovvero $\lambda = 0$, l'equazione si riduce alla PDE in Black and Scholes.

L'assunzione di Merton che l'ampiezza dei salti segua una distribuzione lognormale permette di risolvere l'equazione, rispetto alle condizioni al contorno per le opzioni europee vanilla, con la seguente serie convergente:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\lambda}T} (\bar{\lambda}T)^i}{i!} V_{BS}(S, K, \bar{r}_i, \bar{\sigma}_i, T) \quad (3.12)$$

dove

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= \lambda(1 + k) \equiv \lambda e^{\mu + \frac{\delta^2}{2}} \\
\bar{\sigma}_i^2 &= \sigma^2 + \frac{i\delta^2}{T} \\
\bar{r}_i &= r - \lambda k + \frac{i \ln(1 + k)}{T} = r - \lambda(e^{\mu + \frac{\delta^2}{2}} - 1) + \frac{i(\mu + \frac{\delta^2}{2})}{T}
\end{aligned}$$

e V_{BS} , di seguito mostrata, indica la formula del prezzo di un'opzione Call del modello Black and Scholes:

$$V_{BS} = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Il prezzo delle opzioni nel modello di Merton può quindi essere interpretato come una media ponderata di prezzi Black and Scholes, dove i pesi rappresentano le probabilità che si verifichino i salti rispettivamente.

3.3 La funzione caratteristica

Per il modello di Merton, la funzione caratteristica è:

$$\phi(\omega) = e^{-T\psi(\omega)} \quad (3.13)$$

in cui $\psi(\omega)$, che è l'esponente caratteristico, ha la seguente espressione:

$$\psi(\omega) = -i\omega b + \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2 + \lambda \left(1 - e^{im\omega - \frac{\delta^2\omega^2}{2}} \right) \quad (3.14)$$

I parametri presenti in queste formule sono:

- la scadenza T ,
- la volatilità nei salti δ ,
- la misura dei salti m ,
- il tasso d'interesse privo di rischio r ,
- b è il drift del titolo nella misura martingala, cioè:

$$b = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(e^{m + \frac{\delta^2}{2}} - 1 \right)$$

Per ricavare la densità del modello di Merton attraverso la serie coseno, abbiamo visto che si utilizza la funzione caratteristica (3.13). Illustriamo di seguito il grafico della densità a diverse scadenze T (3.2) e il grafico della densità al variare del parametro ρ (3.3).

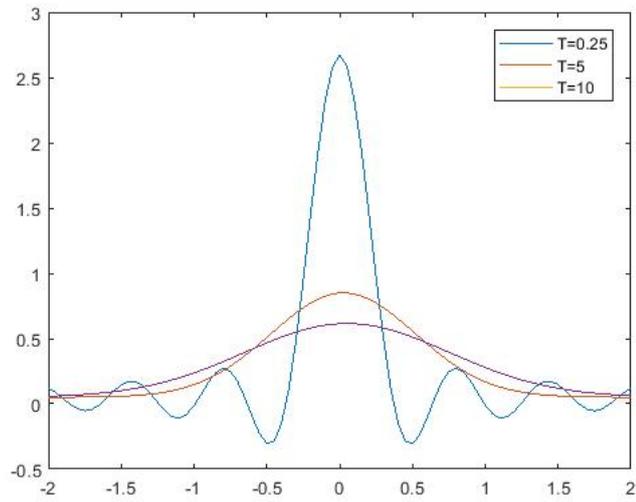


Figura 3.2: Densità diverse scadenze: $\sigma = 0.2$, $\delta = 0.1$, $r = 0.03$, $\lambda = 1$, $m = 0$

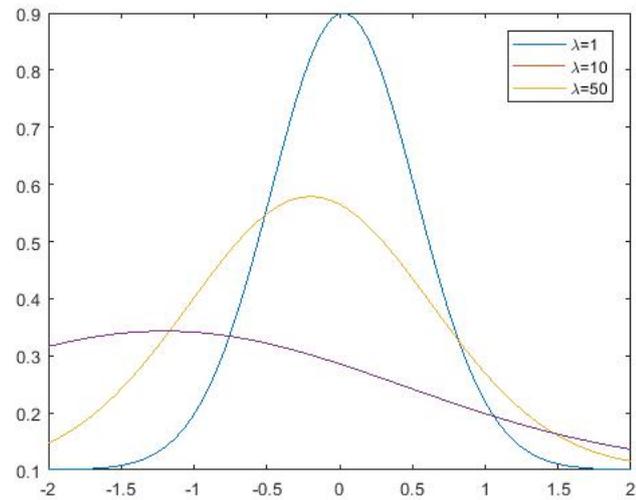


Figura 3.3: Densità al variare di λ : $T = 5$, $\sigma = 0.2$, $\delta = 0.1$, $r = 0.03$, $m = 0$

3.4 Risultati numerici

Nel seguente paragrafo implementiamo il prezzo delle opzioni europee Call e Put con lo sviluppo in serie coseno di Fourier. Per la realizzazione dei seguenti risultati è stato utilizzato, anche in questo capitolo, il software Matlab.

Vediamo ora alcune tabelle che mostrano i prezzi delle opzioni nel modello di Merton. In primo luogo facciamo variare il parametro N , parametro che corrisponde al numero finito di elementi sul quale calcoliamo la serie. Gli altri parametri si fissano a:

$$K = 90, \quad S_0 = 100, \quad T = 1/52, \quad r = 0.05, \quad m = 0.1, \\ \sigma = 0.3, \quad \eta = 0.1, \quad \lambda = 1, \quad \delta = 0.1$$

La seguente tabella mostra invece i prezzi al variare della scadenza T : $T = 1/52$ (1

| | Prezzo Call | Prezzo Put |
|-------|-------------|------------|
| N=100 | 9.8233 | 322.1687 |
| N=200 | 9.9593 | 322.4137 |
| N=300 | 9.8994 | 322.3699 |
| N=400 | 9.8803 | 322.3547 |

Tabella 3.1: Prezzo della Call e Put al variare di N

settimana), $T = 1/12$ (1 mese), $T = 1/2$ (6 mesi) e $T = 1$ (1 anno), lasciando inalterati i parametri visti precedentemente.

| | Prezzo Call | Prezzo Put |
|--------|-------------|------------|
| T=1/52 | 9.9593 | 322.4137 |
| T=1/12 | 9.5984 | 321.3520 |
| T=1/2 | 7.2979 | 314.5346 |
| T=1 | 4.6400 | 306.5428 |

Tabella 3.2: Prezzo della Call e Put al variare di T

Appendice A

Le opzioni

Un derivato finanziario è un contratto il cui valore dipende da uno più titoli o beni, detti sottostanti.

I contratti di opzione, in particolare, permettono di mettere in pratica un elevato numero di strategie d'investimento per raggiungere obiettivi differenti, quali la copertura finanziaria d'investimenti, la protezione del portafoglio da eventuali rischi per fini speculativi. Essi possono essere differenziati subito in due tipologie: opzioni call e opzioni put. Queste ultime sono gli esempi più semplici di strumenti derivati e per questo motivo sono anche chiamate *plain vanilla*.

Le opzioni *call*, sono contratti che danno il diritto e non l'obbligo di acquistare una certa attività sottostante ad un determinato prezzo di esercizio, chiamato strike, entro una certa data. Le opzioni *put*, invece, sono contratti che danno al portatore il diritto e non l'obbligo di vendere il sottostante ad un determinato prezzo ed entro una certa scadenza. Un'ulteriore distinzione viene fatta tra opzioni di tipo *europeo* ed opzioni di tipo *americano*. Le prime possono essere esercitate solo alla scadenza, mentre le opzioni americane danno al possessore la possibilità di esercizio in qualunque momento entro la data di scadenza.

A.1 I fattori principali

- IL SOTTOSTANTE S_t

L'attività sottostante per le opzioni è l'attività sulla quale viene stipulato il contratto d'opzione; tipicamente il sottostante è un titolo azionario, un tasso di interesse, un tasso di cambio di valute, la quotazione di un bene.

Con S_0 si indica il prezzo del sottostante al tempo iniziale $t = 0$, cioè alla stipula del contratto, mentre S_T indica il prezzo al momento della scadenza del contratto ed infine si parlerà di S_t quando si prende in considerazione un istante di tempo compreso tra 0 e T .

- IL PREZZO D'ESERCIZIO K

Si tratta di un prezzo di esercizio, chiamato anche prezzo base, che è indicato nel contratto ed è il prezzo al quale verrà esercitata l'opzione nel caso favorevole di possibile guadagno.

- IL PREMIO E LA SCADENZA

I contratti derivati richiedono di sostenere un costo per l'acquisto del contratto stesso, e tale costo viene chiamato *premio*. Esso, nei casi sfavorevoli, sarà la perdita massima a cui si andrà incontro. Per quanto riguarda invece la *scadenza* del contratto, T , questa indica la data di estinzione ultima, che viene esplicitata nel contratto stesso.

A.2 Opzioni Call, Put e Call-Put

A.2.1 Opzione Call

Possedere un'opzione call significa sperare che, in futuro, il prezzo dell'azione sottostante cresca in modo tale da assicurarsi un guadagno. Questo contratto a scadenza conferisce all'investitore il diritto di scelta nell'acquisto del titolo sottostante al prezzo fissato K . A scadenza, in particolare, possono verificarsi due possibili risultati. In un primo caso può accadere che il prezzo del sottostante risulta essere minore rispetto al prezzo iniziale d'esercizio; dunque non ci sarà convenienza nell'esercizio dell'opzione, pertanto il profitto previsto sarà 0. Il secondo caso invece è quello in cui il prezzo del titolo supera il prezzo dell'esercizio, facendo sì che si decida di esercitare il diritto d'opzione, in modo tale da ricavarne un guadagno. La seguente formula (A.1) rappresenta la situazione appena descritta:

$$Payoff\ Call = \begin{cases} 0, & se\ S_T \leq K \\ S_T - K, & se\ S_T > K \end{cases} \quad (A.1)$$

Nella formula non si tiene conto del caso in cui si verifica l'uguaglianza tra prezzo del sottostante e prezzo d'esercizio, $S_T = K$, dove non c'è nè un vantaggio nè svantaggio in termini di guadagno o perdita. Considerando un caso più realistico, troviamo la seguente formula nella quale è presente anche il premio:

$$Payoff\ Call = \begin{cases} P, & se\ S_T \leq K \\ (S_T - K) - P, & se\ S_T > K \end{cases} \quad (A.2)$$

Graficamente otteniamo la seguente situazione:

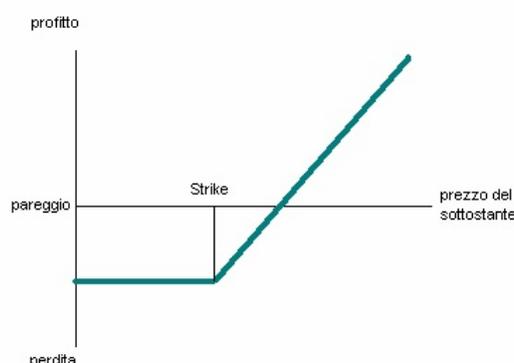


Figura A.1: Payoff opzione Call

A.2.2 Opzioni Put

Possedere un'opzione put significa sperare che il prezzo dell'azione sottostante diminuisca in futuro. Anche in questo caso si presentano le situazioni descritte precedentemente per l'opzione Call, pertanto, a scadenza, il valore dell'opzione put è dato da:

$$Payoff\ Put = \begin{cases} K - S_T, & \text{se } S_T \leq K \\ 0, & \text{se } S_T > K \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Come si può osservare dalla formula (A.3), nel caso in cui il prezzo del sottostante sia maggiore di quello d'esercizio non ci sarà convenienza nell'esercitare l'opzione, mentre nella situazione opposta, cioè quella in cui il prezzo del sottostante sia minore del prezzo d'esercizio allora si ricaverà un guadagno e ci sarà vantaggio nell'esercizio dell'opzione. In comune con l'opzione call troviamo il caso in cui il prezzo d'esercizio e quello del sottostante coincidono in quanto non ci saranno posizioni favorevoli o sfavorevoli. La seguente formula mostra il valore del payoff nel caso di una situazione realistica:

$$Payoff\ Put = \begin{cases} K - S_T - P, & \text{se } S_T \leq K \\ -P, & \text{se } S_T > K \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La figura A.2 ci mostra la rappresentazione grafica dell'opzione put con premio.

A.2.3 Opzione put-call parity

L'opzione put-call parity è una formula che lega tra loro il prezzo di un'opzione put e di una call:

$$c - p = S_0 - Ke^{-r(T-t)}$$

dove c indica il costo dell'opzione call e p il costo dell'opzione put.

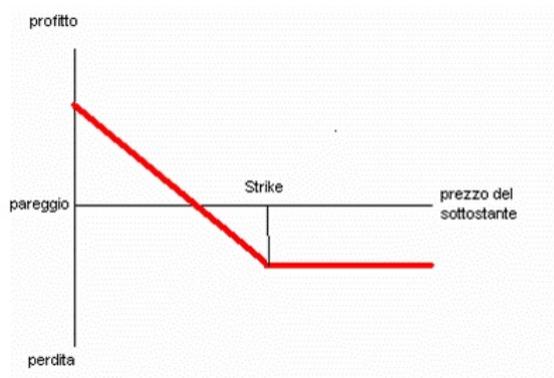


Figura A.2: Payoff opzione Put

A.3 Posizioni in, at, out of the money

A seconda che il prezzo di esercizio sia maggiore, uguale o inferiore al prezzo dell'azione sottostante, l'opzione può essere definita nei seguenti modi: *in-the-money*, *at-the-money* e *out-the-money*.

Anche in questo caso avremo la distinzione a seconda che l'opzione sia di tipo put o call. Per quanto riguarda le opzioni call, si definiscono *in-the-money* quando il prezzo di esercizio è minore del prezzo corrente del sottostante, perciò sarà possibile l'acquisto del sottostante da parte dell'investitore ad un prezzo favorevole rispetto al mercato azionario ($K < S$). Si definisce *at-the-money*, invece, quando il prezzo di esercizio e quello corrente sono molto simili tra loro, se non addirittura uguali ($S = K$). Infine, il caso *out-of-the-money* avrà il prezzo di esercizio maggiore di quello del sottostante ($K > S$). L'opzione verrà esercitata solo se è *in-the-money*.

Inverso sarà per quanto riguarda le opzioni put. L'unica posizione uguale all'opzione call è quella che riguarda il caso *at-the-money*, mentre nel caso *in-the-money* il prezzo d'esercizio risulterà maggiore di quello del titolo, in modo tale da rendere possibile l'esercizio dell'opzione, tramite la vendita del sottostante da parte dell'acquirente ad un prezzo più alto di quello presente sul mercato. Il caso *out-the-money* prevede, infine, un prezzo di esercizio minore del prezzo del titolo.

Appendice B

Moto Browniano geometrico

Per descrivere la formula della variazione del prezzo viene utilizzato il moto geometrico Browniano; si vogliono infatti descrivere i movimenti casuali che avvengono nell'andamento dei prezzi azionari.

B.1 Processo Stocastico

Definizione B.1.1.

Un processo stocastico misurabile in \mathbb{R}^N è una famiglia $(X_t)_{t \in I}$ di variabili aleatorie a valori in \mathbb{R}^N tale che l'applicazione

$$X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad X(t, \omega) = X_t(\omega)$$

è misurabile rispetto alla σ -algebra prodotto $F \otimes B(I)$. Si dice che X è sommabile se $X_t \in L^1(\Omega, P)$ per ogni $t \in I$.

I processi stocastici vengono utilizzati anche per descrivere le fluttuazioni dei prezzi dei titoli azionari; tali prezzi, infatti, sono paragonabili a una variabile il cui valore cambia nel tempo e in modo aleatorio.

I processi stocastici possono inoltre godere della proprietà markoviana, cioè in tal caso, il processo stocastico non dipende dai valori passati della variabile ma solo da quello iniziale.

B.2 Passeggiata aleatoria

Supponiamo di muoverci sull'asse reale a tempo discreto da 0 a t e che ad ogni istante di tempo $t_n = n \in N$ si sposti di $\Delta x_n = 1$ oppure $\Delta x_n = -1$ a seconda che l' n -esimo lancio di una moneta dà rispettivamente testa o croce.

Fissando come certa la posizione a $t = 0$: dato $W_0 = 0$, si ha che il primo spostamento

W_1 , definito dal primo lancio della moneta, rappresenta la posizione aleatoria al tempo $t = 1$. Si può notare che l'intero processo stocastico $W = (W_1, W_2, \dots)$ gode della proprietà markoviana: la variabile aleatoria W_1 , così come tutte le altre di W , non dipende dalla posizione della particella per $t < 0$. Consideriamo ν_n come la variabile aleatoria che conta il numero totale di passi in avanti e siano $n - \nu_n$ i passi indietro. La posizione quindi al tempo $t_n = n$ sarà:

$$W_n = \nu_n - (n - \nu_n) = 2\nu_n - n = 2(\nu_n - \langle \nu_n \rangle)$$

in quanto $\frac{n}{2}$ è il valore atteso per ν_n . Pertanto la variabile W_n ha valore atteso nullo e varianza pari a n .

Definiamo ora la variabile aleatoria (standard):

$$U_n = \frac{W_n}{\sqrt{n}}$$

che ha valore medio nullo e deviazione standard unitaria. Inoltre, per il teorema del limite centrale, si ha che per $n \rightarrow \infty$, $U_n \rightarrow U$, dove U è la variabile aleatoria normale standard.

Partendo dalla passeggiata aleatoria è possibile inoltre costruire il processo di Wiener; considerando intervalli temporali di ampiezza $\Delta t_n = \frac{t}{n}$.

Quindi, rispetto a quanto visto, avremo che la posizione al tempo t è data da:

$$W_n(t) = 2(\nu_n - \langle \nu_n \rangle) \Delta x_n$$

Ne segue che la varianza è data da:

$$Var(W_n(t)) = 4(\Delta x_n)^2 Var(\nu_n) = (\Delta x_n)^2 n$$

Definendo:

$$\Delta x_n = \sqrt{\Delta t_n} = \sqrt{\frac{t}{n}}$$

la varianza divengta pari a t . Si ottiene quindi:

$$W_n(t) = 2(\nu_n - \langle \nu_n \rangle) \sqrt{\frac{t}{n}} = U_n \sqrt{t}$$

Per quanto visto precedentemente, sappiamo che per il teorema del limite centrale, la successione delle variabili standard U_n tende alla variabile normale standard U . Quindi per $n \rightarrow \infty$ si ottiene il processo di Wiener di base.

B.3 Il processo di Wiener

Il processo di Wiener di base è un particolare tipo di processo stocastico di Markov utilizzato per descrivere il moto browniano:

$$W_t = U\sqrt{t}$$

dove W_t , nel caso del moto browniano, indica la variabile aleatoria che descrive la posizione della particella al tempo $t > 0$, mentre U è la variabile aleatoria con distribuzione di probabilità normale standard, quindi con valore atteso nullo e varianza unitaria. Ne segue che, il processo di Wiener ha valore atteso nullo:

$$\langle W_t \rangle = \sqrt{t} \langle U \rangle = 0$$

e varianza:

$$\text{Var}W_t = \langle W_t^2 \rangle = t \langle U^2 \rangle = t$$

In particolare il processo di Wiener W_t è caratterizzato dalle seguenti condizioni:

- Il processo inizia da 0, cioè $W_0 = 0$ quasi certamente
- Le traiettorie, ovvero le funzioni $t \rightarrow W_t$, sono continue quasi certamente
- Il processo ha incrementi indipendenti, infatti considerando quattro tempi $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$, si ha che $W_{t_1} - W_{s_1}$ e $W_{t_2} - W_{s_2}$ sono variabili casuali indipendenti.
- Il processo ha incrementi gaussiani, ovvero scelti due tempi $s \leq t$,

$$W_t - W_s \sim N(0, (t - s))$$

con $N(0, (t - s))$ distribuzione normale.

Poichè il processo di Wiener è un processo stocastico a tempo continuo, quindi $\Delta t \rightarrow 0$, e poichè la variazione di W_t in un intervallo temporale Δt è proporzionale a $\sqrt{\Delta t}$, si possono enunciare due proprietà del moto browniano:

- il valore atteso dello spazio percorso dalla particella è infinito con probabilità 1
- la particella passerà per l'origine infinite volte con probabilità 1

B.4 Formula di Ito

Definizione B.4.1.

Sia W_t un processo di Wiener nello spazio di probabilità (Ω, S, P) , un processo stocastico di Ito è del tipo:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, W_s) ds + \int_0^t \sigma(s, W_s) dW_s \quad (\text{B.1})$$

con X_0 è una variabile aleatoria misurabile, μ e σ funzioni continue.

Solitamente, il processo di Ito viene scritto in forma differenziale, come segue:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Intuitivamente μ imprime la direzione al processo X , mentre la seconda componente è una martingala locale che dà solo un contributo stocastico all'evoluzione di X .

Corollario B.4.2.

Se X è il processo di Ito, allora

$$\langle X \rangle = \int_0^t \sigma_s^2 ds,$$

o in termini differenziali,

$$d \langle X \rangle_t = \sigma_t^2 dt$$

Si può anche dimostrare [2] che la rappresentazione differenziale di Ito è unica, cioè i coefficienti di drift e di diffusione sono determinati univocamente.

Teorema B.4.3 (Formula di Ito).

Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ e W un moto Browniano reale. Allora $f(W)$ è un processo di Ito e vale:

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt$$

Dimostrazione.

Come prima cosa si può osservare che la presenza del termine di secondo ordine è data dal fatto che un moto Browniano ha variazione quadratica positiva:

$$d \langle W \rangle_t = dt$$

Supponiamo che f abbia le derivate prime e seconde limitate. Si deve provare che:

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds$$

Poniamo $f_k = f(W_{t_k})$ e $\Delta_{k,k-1} = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$. Data una partizione $\varsigma = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ di $[0, t]$, si ha:

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{k=1}^N (f_k - f_{k-1}) =$$

Sviluppando in serie di Taylor al secondo ordine si ottiene:

$$= \sum_{k=1}^N f'_{k-1} \Delta_{k,k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N f''_{k-1} \Delta_{k,k-1}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (f''(W_{t_k^*}) - f''_{k-1}) \Delta_{k,k-1}^2$$

Analizzando il primo termine si può osservare che, essendo f' una funzione continua e limitata per ipotesi, $f'(W)$ è un processo L^2 continuo; esiste quindi

$$\lim_{|\varsigma| \rightarrow 0^+} I_1(\varsigma) = \int_0^t f'(W_s) dW_s$$

Per quanto riguarda il secondo termine invece è sufficiente procedere utilizzando il fatto che $\langle W \rangle_s = s$ per provare che in L^2

$$\lim_{|\varsigma| \rightarrow 0^+} I_2(\varsigma) = \int_0^t f''(W_s) ds$$

Infine verifichiamo che $I_3(\varsigma) \rightarrow 0$ in $L^2(\Omega)$ per $|\varsigma| \rightarrow 0^+$. Intuitivamente ciò è dovuto al fatto che $f''(W_t)$ è un processo continuo e W ha variazione quadratica finita.

Facciamo la seguente osservazione preliminare: per ogni $\varsigma = \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \in P_{[0,t]}$, $t > 0$ vale:

$$t^2 = \left(\sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1}) \right)^2 = \underbrace{\sum_{K=1}^N (t_k - t_{k-1})^2}_{=J_1(\varsigma)} + 2 \underbrace{\sum_{h < k} (t_h - t_{h-1})(t_k - t_{k-1})}_{=J_2(\varsigma)}$$

di conseguenza

$$0 \leq J_1(\varsigma) \leq |\varsigma| \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1}) = |\varsigma| t \rightarrow_{|\varsigma| \rightarrow 0^+} 0 \quad (\text{B.2})$$

$$0 \leq J_2(\varsigma) \leq t, \quad \varsigma \in P_{[0,t]} \quad (\text{B.3})$$

Ora si ha:

$$E [(I_3(\varsigma))^2] = \underbrace{\sum_{k=1}^N E [(f''(W_{t_k^*}) - f''_{k-1})^2 \Delta_{k,k-1}]}_{=L_1(\varsigma)} + 2 \underbrace{\sum_{h < k}^N E [(f''(W_{t_h^*}) - f''_{h-1})(f''(W_{t_k^*}) - f''_{k-1}) \Delta_{h,h-1}^2 \Delta_{k,k-1}^2]}_{=L_2(\varsigma)}$$

Vale

$$\begin{aligned} L_1(\varsigma) &\leq 4 \sup |f''|^2 \sum_{k=1}^N E[\Delta_{k,k-1}^4] = \\ &= 12 \sup |f''|^2 \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1})^2 \rightarrow_{|\varsigma| \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned}$$

D'altra parte per la disuguaglianza di Hölder si ha:

$$\begin{aligned} &L_2(\varsigma) \\ &\leq \sum_{h < k}^N E [(f''(W_{t_h^*}) - f''_{h-1})^2 (f''(W_{t_k^*}) - f''_{k-1})^2]^{\frac{1}{2}} E [\Delta_{h,h-1}^4 \Delta_{k,k-1}^4] \leq \end{aligned}$$

Dato $\epsilon > 0$, se $|\varsigma|$ è sufficientemente piccolo, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, essendo f'' limitata e continua:

$$\leq \sum_{h < k}^N E [\Delta_{h,h-1}^4 \Delta_{k,k-1}^4]^{\frac{1}{2}} \leq$$

infine per l'indipendenza degli incrementi del moto Browniano:

$$\leq \epsilon \sum_{h < k}^N E [\Delta_{h,h-1}^4]^{\frac{1}{2}} E [\Delta_{k,k-1}^4]^{\frac{1}{2}} = 3\epsilon \sum_{h < k}^N (t_h - t_{h-1})(t_k - t_{k-1}) \leq 3\epsilon t$$

□

Teorema B.4.4.

Sia X il processo di Ito e $f(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Allora il processo stocastico:

$$Y_t = f(t, X_t)$$

è un processo di Ito e vale:

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t) dt + \partial_x f(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, X_t) d \langle X \rangle_t$$

Dimostrazione.

Poichè per il corollario (B.4.2) vale

$$d \langle X \rangle_t = \sigma_t^2 dt,$$

la (B.4.4) si riscrive nel modo seguente:

$$df = \left(\partial_t f + \mu_t \partial_x f + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial_{xx} f \right) dt + \sigma_t \partial_x f dW_t$$

dove $f = f(t, X_t)$. □

B.5 Moto geometrico browniano

Il processo più utilizzato per rappresentare l'andamento del prezzo di un'azione è il moto geometrico browniano. Quest'ultimo è una soluzione dell'equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dove W_t è un moto browniano standard o processo di Weiner, μ , tasso di rendimento atteso, e σ , volatilità del prezzo del titolo azionario, sono costanti reali. Quindi il moto geometrico browniano è un processo stocastico in tempo continuo tale che:

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s$$

Il processo S può essere determinato esplicitamente nella forma $S_t = f(t, W_t)$ con $f = f(t, x) \in C^{1,2}$. Infatti applicando la formula di Ito e imponendo la (B.5), otteniamo:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t f(t, W_t) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, W_t) \right) dt + \partial_x f(t, W_t) dW_t \\ & \mu f(t, W_t) dt + \sigma f(t, W_t) dW_t. \end{aligned}$$

Dall'unicità della rappresentazione di un processo di Ito, deduciamo che per $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vale

$$\begin{cases} \partial_x f(t, x) = \sigma f(t, x) \\ f(t, x) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, x) = \mu f(t, x) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Per la prima equazione, esiste una funzione $g = g(t)$ tale che

$$f(t, x) = g(t) e^{\sigma x}$$

e inserendola nella seconda equazione otteniamo:

$$g' + \frac{\sigma^2}{2} g = \mu g$$

da cui $g(t) = g(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$, in definitiva vale:

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

Applicando la formula di Ito si può facilmente verificare che S , in (B.5) è effettivamente soluzione dell'equazione (B.5).

Appendice C

Processo di Poisson

Definizione C.0.1.

Data una sequenza $\{x_i\}_{i \geq 1}$ di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro λ e densità $P[x_i \geq y] = e^{-\lambda y}$ e dato $T_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Data la distribuzione di x_i :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Definita $\chi_t \geq T_n$ come la funzione generatrice di T_n , il processo:

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \chi_t \geq T_n$$

si definisce **processo di Poisson** di parametro λ .

Il parametro λ si dice parametro di frequenza del processo, e corrisponde al valore atteso del numero di eventi che si manifestano per unità di tempo. Il numero di salti avvenuti fino all'istante t , definito con il simbolo N_t , avrà distribuzione di Poisson con parametro λt , per $t > 0$, con la seguente formula:

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tale processo è definito anche come processo di conteggio.

Dimostrazione.

Dire che $N_t > n$ significa che ci sono almeno n salti dopo l'istante t :

$$P(N_t \geq n) = P(T_n \leq t) = \int_0^t \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda s} ds$$

quindi:

$$P(N_t \geq n+1) = P(T_n \leq n+1) = - \int_0^t \frac{(\lambda s)^n}{n!} (-\lambda e^{-\lambda s}) ds$$

integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned} &= \left\| -\frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \right\|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t e^{-\lambda s} \frac{n(\lambda s)^{n-1} \lambda}{n!} ds \\ &= -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda s} ds = -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + P(N_t \geq n) \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \rightarrow P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

□

Tutti i salti di un processo di Poisson hanno dimensione 1, (vale a dire un'altezza costante di uno), mentre per avere una dimensione differente si deve considerare il processo composto di Poisson.

Come il moto browniano è alla base del modello Black e Scholes così il processo di Poisson è alla base dei modelli Jump Diffusion.

Il parametro N_t deve soddisfare le seguenti caratteristiche:

- $N(t) \geq 0$, ossia che il numero di salti t che si possono verificare è maggiore o uguale a zero
- $N(t)$ assume valori interi
- se $z < t$ allora $N(z) \leq N(t)$
- per $z < t$, $N(t) - N(z)$ è uguale al numero di eventi accaduti nell'intervallo $(z, t]$

Un processo di conteggio ha incrementi indipendenti se i numeri di eventi che accadono in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti, esso inoltre ha incrementi stazionari se la distribuzione del numero di eventi che accadono in ogni intervallo di tempo dipende solo dalla lunghezza del tempo dell'intervallo.

Uno dei processi di Poisson più importanti è definito come $\{N(t), t \geq 0\}$ con tasso λ . Se ipotizziamo che il tasso λ sia maggiore di 0, allora:

- $N(0) = 0$

- il processo avrà incrementi indipendenti
- il numero di eventi in ogni intervallo di lunghezza $(t \geq 0)$ avrà distribuzione di Poisson con media λt

Avendo definito λ come il tasso medio di arrivi del processo, il valore atteso del processo $N(t)$ risulterà pari a:

$$E(N(t)) = \lambda t$$

cioè pari alla media del numero di eventi in ogni intervallo, considerando che il processo di Poisson ha incrementi stazionari.

C.1 Processo composto di Poisson

Particolare interesse riveste anche il processo composto di Poisson, in quanto, in questo caso, i salti possibili in un certo intervallo di tempo potranno essere più di uno. In questo processo il tempo d'attesa tra i salti è di tipo esponenziale, e precisamente se N è un processo di Poisson con parametro λ e Y_i con $i \geq 1$, è una sequenza di variabili casuali indipendenti, il processo composto di Poisson sarà così descritto:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Esso ha incrementi indipendenti e stazionari, e la sua funzione caratteristica in un certo momento t , è data dalla seguente equazione:

$$E[e^{iuX_t}] = \exp(t\lambda) \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f(dx)$$

Bibliografia

- [1] A. Pascucci. PDE and Martingale Methods in Option Pricing. Springer Verlag, Bocconi University Press, Milano, Italia, 2011.
- [2] Pascucci A., Calcolo Stocastico per la finanza, Springer, 2008.
- [3] Oosterlee C.W and Fang F., A novel pricing method for european options based on Fourier-cosine series expansions SIAM SISC, 2008.
- [4] Moodley, N. The Heston Model: A Practical Approach. Faculty of Science, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 2005.
- [5] S.Pagliarini and A.Pascucci, Local stochastic volatility with jumps: analytical approximations, 2013.
- [6] MERTON. R.C., (1976), Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, Journal of Financial Economics.
- [7] Jump-diffusion models: a practitioner's guide (with E. Volchkova), Banque et Marches, No. 99, March-April 2009
- [8] Introduction to Option Pricing with Fourier Transform: Option Pricing with Exponential Levy Models, Kazuhisa Matsuda, December 2004

Ringraziamenti

Giunti alla conclusione di questo percorso di laurea magistrale, scrivere una pagina di ringraziamenti è doveroso.

Un sentito ringraziamento va innanzitutto al professore Andrea Pascucci, che con la sua disponibilità, ha saputo consigliarmi e guidarmi nella stesura di questa tesi.

Un grandissimo ringraziamento va ai miei genitori che mi hanno permesso di raggiungere anche questo traguardo, sostenendomi e incoraggiandomi sempre in ogni mia scelta. Grazie per aver sempre creduto in me.

Grazie ad Andrea che con la sua infinita pazienza, mi ha sempre sostenuto ed appoggiato. Grazie per aver sopportato in ogni mio momento di sconforto.

Un ringraziamento va anche ai miei amici; quelli di sempre, quelli incontrati nel mio percorso universitario e quelli che hanno iniziato a far parte della mia nuova vita. In particolar modo, un ringraziamento speciale va ad Elena che, nonostante la distanza, è sempre stata un punto di riferimento importantissimo: senza troppe parole un'amica vera.

Grazie a tutti quelli che hanno sempre creduto in me.