

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

LAPLACIANO FRAZIONARIO
E
TEOREMA DI
CAFFARELLI-SILVESTRE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Dott.ssa
ELEONORA CINTI

Presentata da:
MAURIZIO CESARONI

III Sessione
Anno Accademico 2016-2017

Introduzione

Scopo di questa tesi è studiare l'operatore Laplaciano frazionario e mostrare alcune sue importanti proprietà. Il Laplaciano frazionario è un operatore non locale che negli ultimi anni ha suscitato interesse in numerosi campi di applicazione (finanza matematica, dinamica delle popolazioni, problemi di dislocazione nei cristalli).

In particolare siamo interessati allo studio di alcuni importanti risultati (quali il principio del Massimo, la disuguaglianza di Harnack, la formula di Poisson) noti per il Laplaciano classico e a mostrare come essi possano essere estesi al caso del Laplaciano frazionario. Inoltre presenteremo un risultato dimostrato da L. Caffarelli e L. Silvestre in [4] che permette di vedere il Laplaciano frazionario come un operatore "Dirichlet-to-Neumann" per un opportuno problema in forma di divergenza.

La tesi è strutturata come segue:

- Il Capitolo 1 è dedicato allo studio di alcuni risultati classici per problemi ellittici che coinvolgono il Laplaciano. Più precisamente richiameremo la soluzione fondamentale e la funzione di Green, e dimostreremo alcune importanti proprietà delle funzioni armoniche (formula della media, principio del Massimo, disuguaglianza di Harnack).
- Nel Capitolo 2 mostreremo alcune motivazioni dell'origine del Laplaciano frazionario attraverso considerazioni di tipo probabilistico. In particolare descriveremo un processo probabilistico che conduce all'equazione del calore frazionaria.

- Nel Capitolo 3 introdurremo in modo rigoroso il Laplaciano frazionario e ne mostreremo alcune proprietà. Più precisamente discuteremo la validità di risultati analoghi a quelli discussi nel Capitolo 1 (principio del Massimo, disuguaglianza di Harnack) osservando come il carattere non locale del Laplaciano frazionario giochi un ruolo fondamentale. Infine introdurremo gli spazi di Sobolev frazionari e daremo una formulazione variazionale per un problema non locale.
- Nel Capitolo 4 andremo ad enunciare e dimostrare il risultato principale di questa tesi, che permette di studiare un problema non locale che coinvolge il Laplaciano frazionario in \mathbb{R}^n , considerando un problema locale nel semispazio positivo \mathbb{R}_+^{n+1} . Tale risultato, talvolta chiamato Teorema di estensione, è stato dimostrato da Caffarelli e Silvestre in [4], ed un ingrediente fondamentale per la sua dimostrazione è il nucleo di Poisson per un problema in forma di divergenza.

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | i |
| 1 Concetti preliminari | 1 |
| 1.1 Laplaciano Classico | 1 |
| 1.2 Soluzione fondamentale | 1 |
| 1.3 Funzione di Green e nucleo di Poisson | 4 |
| 1.4 Formule di media | 7 |
| 1.5 Principio del Massimo | 9 |
| 1.6 Disuguaglianza di Harnack | 11 |
| 1.7 Formulazione variazionale | 12 |
| 2 Motivazione probabilistica del Laplaciano frazionario | 17 |
| 2.1 La camminata casuale con salti lunghi arbitrari | 18 |
| 2.2 Un modello di payoff | 21 |
| 3 Laplaciano frazionario | 23 |
| 3.1 Definizione di Laplaciano frazionario | 23 |
| 3.2 Principio del Massimo per il Laplaciano frazionario | 27 |
| 3.3 Disuguaglianza di Harnack per il Laplaciano frazionario | 28 |
| 3.4 Spazio di Sobolev frazionario | 31 |
| 3.5 Il funzionale energia e la formulazione variazionale | 33 |
| 4 Teorema di Caffarelli-Silvestre | 37 |
| Bibliografia | 41 |

Capitolo 1

Concetti preliminari

In questo capitolo introduciamo l'operatore differenziale Laplaciano, mostrando alcune delle sue proprietà, per metterle successivamente a confronto con quelle del Laplaciano frazionario.

1.1 Laplaciano Classico

L'operatore di Laplace, o Laplaciano, è un operatore differenziale del secondo ordine, dato dalla divergenza del gradiente di una funzione in uno spazio Euclideo, normalmente si denota con $\nabla \cdot \nabla$, ∇^2 o Δ .

Definizione 1.1. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, chiamiamo Laplaciano l'operatore

$$\Delta f(x) = \nabla^2 f(x) = \nabla \cdot \nabla f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Come operatore differenziale del secondo ordine, il Laplaciano manda funzioni C^k in funzioni C^{k-2} con $k \geq 2$.

1.2 Soluzione fondamentale

Sono di particolare interesse le funzioni di classe C^2 che annullano il Laplaciano, cioè che soddisfano quella che comunemente è chiamata equazione

di Laplace

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

L'equazione di Laplace interviene in numerosi contesti fisici, come elettromagnetismo, astronomia, fluidodinamica, e le sue soluzioni differenziabili fino al secondo ordine costituiscono la classe delle funzioni armoniche.

Definizione 1.2. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ che soddisfi $\Delta u = 0$ in Ω , si dice armonica in Ω .

Cerchiamo ora di derivare una soluzione esplicita dell'equazione di Laplace. Osserviamo che l'equazione è invariante per rotazioni, si cercano soluzioni di tipo radiale, dipendenti dalla variabile

$$r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Allora ponendo $u(x) = v(r)$ cerchiamo di trovare una soluzione u dell'equazione di Laplace, scegliendo v in modo che $\Delta u = 0$.

Notiamo che per $i = 1, \dots, n$, si ha:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad \forall x \neq 0.$$

Quindi:

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

Sommando ora per $i = 1, \dots, n$, si ottiene

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r). \tag{1.1}$$

Perciò, $\Delta u = 0$ se e solo se

$$v'' + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

Se $v' \neq 0$, possiamo scrivere

$$\left(\log(|v'|) \right)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r},$$

e quindi $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ per qualche costante a . Di conseguenza se $r > 0$, abbiamo

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & n \geq 3, \end{cases}$$

dove b e c sono costanti.

Adesso siamo in grado di dare la seguente definizione

Definizione 1.3. La funzione

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & (n = 2), \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3), \end{cases} \quad (1.2)$$

dove $\alpha(n)$ indica il volume della palla unitaria di \mathbb{R}^n . Definita per $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, la (1.2) è la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace.

Introduciamo ora una generalizzazione dell'equazione di Laplace, chiamata equazione di Poisson, anch'essa molto frequente in fisica, in cui nella parte destra dell'equazione compare una funzione f a valori in \mathbb{R} .

Definizione 1.4. Sia $u = u(x)$ una funzione definita sulla chiusura dell'insieme Ω di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R} . L'equazione di Poisson per u ha la forma:

$$-\Delta u = f \quad (1.3)$$

Notiamo che l'equazione di Poisson omogenea $\Delta u = 0$ è l'equazione di Laplace.

Se osserviamo la soluzione (1.2) questa rappresenta una funzione armonica per $x \neq 0$, se trasliamo l'origine in un nuovo punto y si ottiene che $\Phi(x-y)$ è ancora una funzione armonica per $x \neq y$.

Prendendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 a supporto compatto, possiamo notare che l'applicazione $x \rightarrow \Phi(x-y)f(y)$ con $x \neq y$ è armonica per $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Questo ci suggerisce che la convoluzione

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)f(y)dy & n=2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}dy & n \geq 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

risolva l'equazione di Laplace. Ma così non è in quanto scrivendo

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Phi(x-y)f(y)dy = 0, \quad (1.5)$$

notiamo che $D^2\Phi(x-y)$ presenta problemi di sommabilità vicino alla singolarità $y=x$.

Andremo ora ad enunciare un teorema che mostra una formula per la soluzione dell'equazione di Poisson.

Teorema 1.2.1. *Sia $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ definiamo u come in (1.4). Allora:*

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$;
2. $-\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n .

Di conseguenza (1.4) è una formula per una soluzione dell'equazione di Poisson in \mathbb{R}^n .

Per la dimostrazione del Teorema rimandiamo alla Sezione 2.2.1 in [6].

1.3 Funzione di Green e nucleo di Poisson

In questa sezione richiamiamo una formula di rappresentazione per la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{in } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.6)$$

Rispetto a quanto detto precedentemente, ora vogliamo che u risolva l'equazione di Poisson in Ω e assuma un determinato dato al bordo.

Ci limitiamo qui ad enunciare la formula di rappresentazione per la soluzione di (1.6), per la dimostrazione si veda la Sezione 2.2.4 in [6].

L'idea è quella di definire una funzione, detta funzione di Green, a partire dalla quale sia possibile "rappresentare" la soluzione u di (1.6) date f e g .

Definizione 1.5. Chiamiamo funzione di Green per il dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$, la funzione definita da:

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \varphi^x(y) \quad x, y \in \Omega \quad x \neq y, \quad (1.7)$$

dove Φ è la soluzione fondamentale vista in (1.2) e φ^x è un termine di "correzione" che soddisfa

$$\begin{cases} \Delta \varphi^x = 0 & \text{in } \Omega, \\ \varphi^x = \Phi(y - x) & \text{in } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Utilizzando la definizione di $G(x, y)$ e il teorema della divergenza (Teorema 1.4.1), si può dimostrare la seguente formula di rappresentazione.

Teorema 1.3.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto con $\partial\Omega \in C^1$, se $u \in C^2(\Omega)$ è soluzione del problema (1.6), allora*

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) + \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy, \quad (1.9)$$

dove $x \in \Omega$, $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ indica la derivata normale esterna di G rispetto alla variabile y e G è definito in (1.7).

In generale può essere molto complicato determinare esplicitamente la funzione di Green per un dato dominio Ω di \mathbb{R}^n .

Vediamo qui il caso del semispazio. Denotate le coordinate cartesiane standard di \mathbb{R}^{n+1} attraverso:

$$(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t),$$

il semispazio superiore è definito come

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t > 0\}.$$

Usando un argomento di riflessione rispetto all'iperpiano $\{t = 0\}$ si può mostrare che la funzione di Green del semispazio è data da:

$$G((x, t), (y, \tau)) = \Phi((y - x, \tau - t)) - \Phi((y - x, \tau + t)), \quad (1.10)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}((x, t), (y, \tau)) &= -\frac{\partial G}{\partial \tau}((x, t), (y, \tau)) \\ &= \frac{-2t}{(n+1)\alpha(n+1)} \frac{1}{|(x, t) - (y, \tau)|^{n+1}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Consideriamo ora il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^{n+1} \\ u = g & \text{su } \partial\mathbb{R}_+^{n+1}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Allora dalla (1.9), ci aspettiamo che la soluzione si rappresenti come

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2t}{(n+1)\alpha(n+1)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{g(y)}{|(x, t) - (y, 0)|^{n+1}} dy \\ &= \frac{2t}{(n+1)\alpha(n+1)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{g(y)}{(|x - y|^2 + |t|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La funzione:

$$P(t, x) = c_n \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}, \quad (1.14)$$

dove

$$c_n = \frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)},$$

è detta *nucleo di Poisson* per il semispazio \mathbb{R}_+^{n+1} .

Enunciamo a questo punto il seguente teorema, per la cui dimostrazione si rimanda al Teorema 14 in [6].

Teorema 1.3.2. *Supponiamo $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e definiamo u come in (1.13). Allora*

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$,
2. $\Delta u = 0$ in \mathbb{R}_+^{n+1} ,
3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x) = g(x^0)$ per ogni punto $x^0 \in \partial\mathbb{R}_+^{n+1}$.

1.4 Formule di media

Di seguito deriveremo le formule di media per le funzioni armoniche, che risultano molto importanti per le loro conseguenze, tra cui il principio del Massimo e la disuguaglianza di Harnack.

Ricordiamo, enunciando solamente, il teorema della divergenza

Teorema 1.4.1. *Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ compatto delimitato da una superficie liscia ∂V . Se F è un campo vettoriale C^1 definito in un intorno di V , si ha:*

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \int_{\partial V} F \cdot \nu dS,$$

dove dS indica l'elemento di superficie e ν indica la normale unitaria esterna a ∂V .

Da questo si deriva facilmente la seguente formula

$$\int_V \Delta u dx = \int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS, \quad (1.15)$$

dove $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ indica la derivata direzionale di u nella direzione ν .

Di seguito useremo le seguenti notazioni:

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}.$$

A volte indicheremo anche $B_r = B(0, r)$.

Per la media integrale useremo la notazione

$$\int_A u(x) dx = \frac{1}{|A|} \int_A u(x) dx,$$

dove $|A|$ denota la misura di Lebesgue di A .

Prendiamo un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, supponiamo u armonica in Ω , allora le formule di media affermano che $u(x)$ è uguale alla media di u sulla sfera $\partial B(x, r)$ e alla media di u sulla palla $B(x, r)$, purchè $B(x, r)$ sia compattamente contenuto in Ω , $B(x, r) \subset\subset \Omega$.

Teorema 1.4.2. *Se $u \in C^2(\Omega)$ è armonica, allora*

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u dS = \int_{B(x,r)} u dy, \quad (1.16)$$

per ogni palla $B(x,r) \subset\subset \Omega$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\phi(r) := \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) dS(z), \quad (1.17)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile $y = x + rz$.

Allora

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0,1)} Du(x + rz) \cdot z dS(z),$$

e quindi, usando il teorema della divergenza, troviamo

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B(x,r)} Du(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Dove ν denota la normale unitaria esterna a $\partial B(x,r)$. Quindi ϕ è costante e dunque

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) = u(x). \quad (1.18)$$

Osserviamo ora che usando le coordinate polari abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} u(y) dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u(y) dS \right) d\rho \\ &= u(x) \int_0^r n \alpha(n) s^{n-1} d\rho = \alpha(n) r^n u(x), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (1.18). Dividendo entrambi i membri per $\alpha(n)r^n$ si conclude la dimostrazione. \square

Si dimostra che vale anche il viceversa, cioè se si trova una u che soddisfa (1.16) per ogni palla $B(x,r) \subset\subset \Omega$ allora la funzione u risulterà armonica.

Teorema 1.4.3. *Se $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa*

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u dS,$$

per ogni disco $B(x,r) \subset\subset \Omega$, allora u è armonica.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo, se avessimo $\Delta u \neq 0$ esisterebbe almeno un punto x in cui $\Delta u(x) > 0$ o $\Delta u(x) < 0$. Supponiamo $\Delta u(x) > 0$, allora per continuità avremo che $\exists r > 0$ t.c $\Delta u > 0$ in $B(x,r)$. Ma allora, prendendo ϕ definita in (1.17), avremmo:

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy > 0,$$

dove $\phi'(r) = 0$ in quanto $\phi(r) = u(x)$ per ipotesi, quindi non dipende da r . Ciò porta ad un assurdo e conclude la dimostrazione. \square

1.5 Principio del Massimo

Il principio del Massimo è una importante proprietà che caratterizza le soluzioni di alcune equazioni alle derivate parziali ellittiche o paraboliche. Noi lo vedremo per funzioni armoniche.

Troviamo due suoi enunciati, il principio del massimo in forma forte afferma che se una funzione armonica raggiunge il massimo all'interno della regione allora la funzione è costante; mentre la versione in forma debole afferma che il massimo viene raggiunto sul bordo ed eventualmente anche all'interno.

Teorema 1.5.1. *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, e sia $\Delta u = 0$ in Ω , ove Ω è aperto e limitato di \mathbb{R}^n . Allora*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \quad (1.19)$$

Dimostrazione. Sia

$$v(x) = u(x) + \epsilon x_1^2,$$

con $\epsilon > 0$ arbitrario e x_1 è la prima coordinata. Se v avesse un punto di massimo \tilde{x} in Ω si avrebbe

$$\Delta v(\tilde{x}) \leq 0,$$

mentre

$$\Delta v = \Delta u + 2\epsilon \geq 2\epsilon > 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Quindi v non può assumere punti di massimo in Ω , ossia

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \epsilon\delta^2,$$

se $\delta = \max_{\partial\Omega} |x_1|$. Per $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene la tesi. \square

Sotto le stesse ipotesi del teorema precedente si ha un risultato migliore, il principio del Massimo forte.

Teorema 1.5.2. *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, e sia $\Delta u = 0$ in Ω , se inoltre Ω è connesso ed esiste un punto $x_0 \in \Omega$ tale che*

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u,$$

allora u è costante su Ω .

Dimostrazione. Supponiamo esista un punto $x_0 \in \Omega$ con

$$u(x_0) = M := \max_{\bar{\Omega}} u.$$

Allora per $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, le formule di media ci permettono di scrivere che

$$M = u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u dy \leq M.$$

Visto che l'uguaglianza vale solo se $u \equiv M$ in $B(x_0, r)$, dovrà essere $u(y) = M$ per ogni $y \in B(x_0, r)$. Allora l'insieme $\{x \in \Omega | u(x) = M\}$ è contemporaneamente aperto e relativamente chiuso in Ω , perciò è uguale ad Ω se Ω è connesso. Questo dimostra il teorema, inoltre da questa stessa affermazione ne consegue anche la formulazione debole. \square

Osservazione 1. Mettendo $-u$ al posto di u ritroviamo il risultato con *min* al posto di *max*.

Facciamo vedere una conseguenza del principio del massimo che determina l'unicità delle soluzioni di problemi al bordo per l'equazione di Poisson.

Teorema 1.5.3. *Sia $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Allora esiste al più una soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ del problema al bordo*

$$\begin{cases} (-\Delta)u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.20)$$

Dimostrazione. Se u e \tilde{u} soddisfano il problema (1.20), applicando il principio del massimo alle funzioni armoniche $v := \pm(u - \tilde{u})$ avremo necessariamente che $u = \tilde{u}$. \square

1.6 Disuguaglianza di Harnack

Di seguito troviamo un altro interessante risultato sulle funzioni armoniche che si deduce, ancora una volta, dal teorema della media.

Teorema 1.6.1. *Se Ω dominio di \mathbb{R}^n e sia u soluzione di*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1.21)$$

Allora per ogni V aperto connesso tale che $V \subset \bar{V} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con \bar{V} compatto, esiste una costante positiva C , che dipende da V, n, Ω , tale che

$$\sup_V u \leq C \inf_V u. \quad (1.22)$$

Quindi in particolare

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y),$$

per tutti i punti $x, y \in V$.

Dimostrazione. Sia $r := \frac{1}{4} \text{dist}(V, \partial\Omega)$. Prendiamo $x, y \in V$, $|x - y| \leq r$.

Allora, dal teorema della media, abbiamo

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{B(x, 2r)} u(z) dz \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(y, r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{B(y, r)} u(z) dz = \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

Perciò $2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y)$ se $x, y \in V$, $|x - y| \leq r$.

Poichè V è connesso e \bar{V} è compatto, possiamo coprire \bar{V} con una catena finita di palle $\{B_i\}_{i=1}^N$ ciascuna di raggio $\frac{r}{2}$ e tali che $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ per $i = 2, \dots, N$. Allora

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y),$$

per ogni $x, y \in V$. □

1.7 Formulazione variazionale

Introduciamo in questa sezione gli spazi di Sobolev e il funzionale energia naturalmente associato all'operatore di Laplace.

Gli spazi di Sobolev sono particolari spazi di Banach, ed in alcuni casi spazi di Hilbert, che troviamo nello studio dei problemi al bordo quando viene considerata una formulazione variazionale, in quanto rappresentano lo spazio di funzioni adatto in cui cercare le soluzioni del problema variazionale.

Con formulazione variazionale intendiamo una formulazione alternativa rispetto a quella classica che permetta di ridurre l'ordine di derivazione richiesto sulla soluzione.

Presentiamo ora alcuni strumenti per semplificare la comprensione degli spazi di Sobolev.

Definizione 1.6. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Chiamiamo spazio delle funzioni test su Ω lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni infinitamente derivabili in Ω e identicamente nulle fuori da un insieme chiuso e limitato strettamente contenuto in Ω .

Definizione 1.7. Chiamiamo $L_{loc}^1(\Omega)$ lo spazio delle funzioni localmente integrabili in Ω , cioè delle funzioni f che appartengono a $L^1(K)$ per ogni insieme chiuso e limitato K strettamente contenuto in Ω .

Adesso possiamo definire la derivata debole di una funzione:

Definizione 1.8. Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Fissato un multinidice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ con α_j interi non negativi, posto

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

diciamo che $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ è detta α -esima derivata debole di u se per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, vale che:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi.$$

Se u ammette derivata debole, essa è indicata come:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Possiamo ora introdurre gli spazi di Sobolev.

Definizione 1.9. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$. Definiamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$:

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \exists v_1, v_2, \dots, v_n \in L^p(\Omega) \text{ t.c.}$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} v_i \varphi d\Omega, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Se ci mettiamo nel caso $p = 2$ vogliamo che u abbia derivate deboli prime in $L^2(\Omega)$. In tal caso, avremo la notazione

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

Osserviamo che se $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n$ allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e le derivate parziali nel senso classico coincidono con le derivate parziali nel senso debole.

Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è munito della norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Nell'ambito delle equazioni alle derivate parziali, è di grande interesse lo studio della formulazione debole dei problemi differenziali. Risolvere un problema in forma debole significa trovare una soluzione, detta appunto debole, le cui derivate possono non esistere nel senso classico ma che è comunque soluzione dell'equazione in qualche senso ben preciso.

Presentiamo ora la formulazione variazionale del problema di (1.23). Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ assegnata, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$; cerchiamo una funzione $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (1.23)$$

Diamo ora la seguente definizione.

Definizione 1.10. Diciamo che $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ è soluzione debole del problema (1.23), se $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx. \quad (1.24)$$

Osservazione 2. Se u è soluzione classica di (1.23), allora è anche soluzione debole. Infatti, moltiplicando la (1.23) per una funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e integrando per parti si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta u \cdot \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx. \quad (1.25)$$

Mostriamo ora che una soluzione debole del problema (1.20) si può determinare come il minimo di un apposito funzionale. Definiamo il funzionale energia:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} f u dx.$$

Teorema 1.7.1. Sia $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$E(u) = \min_{v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} E(v). \quad (1.26)$$

Allora u è soluzione debole di (1.20).

Dimostrazione. Calcoliamo il

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(u + t\varphi) - E(u)}{t},$$

con $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e lo porremo uguale a 0.

$$\begin{aligned} E(u + t\varphi) - E(u) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(u + t\varphi)|^2 - |\nabla u|^2) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (-f(u + t\varphi) + fu) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u + t\nabla\varphi|^2 - |\nabla u|^2) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (-fu - tf\varphi + fu) dx. \end{aligned}$$

Dove:

$$|\nabla u + t\nabla\varphi|^2 = |\nabla u|^2 + t^2|\nabla\varphi|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle.$$

Allora abbiamo che:

$$\begin{aligned} E(u+t\varphi) - E(u) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + t^2|\nabla\varphi|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle - |\nabla u|^2) dx - \int_{\mathbb{R}^n} tf\varphi dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (t^2|\nabla\varphi|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle) dx - \int_{\mathbb{R}^n} tf\varphi dx. \end{aligned}$$

Andando ora a dividere tutto per t otteniamo:

$$\frac{E(u + t\varphi) - E(u)}{t} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} t|\nabla\varphi|^2 + 2 \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle dx - \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx,$$

facendo ora il limite per $t \rightarrow 0$, e ponendolo uguale a 0, abbiamo che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(u + t\varphi) - E(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle - f\varphi) dx = 0.$$

Dove questa è esattamente la definizione di soluzione debole. \square

Ricordiamo il seguente lemma.

Lemma 1.7.2. *Sia $f(x)$ una funzione localmente integrabile su \mathbb{R}^n . Se*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Allora $f \equiv 0$

Osservazione 3. Se $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e u è soluzione debole allora u è soluzione classica. Infatti, integrando per parti risulta:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u \varphi - f \varphi) dx = 0.$$

Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta - f) \varphi dx &= 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ &\Rightarrow -\Delta u = f, \end{aligned}$$

dove nell'ultima implicazione abbiamo usato il Lemma 1.7.2.

Capitolo 2

Motivazione probabilistica del Laplaciano frazionario

In questo capitolo daremo alcune motivazioni per l'introduzione del Laplaciano frazionario. In particolare mostreremo come l'equazione del calore frazionario si possa ottenere da un modello probabilistico nel quale siano ammessi salti. Ricordiamo l'equazione del calore classica:

Definizione 2.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u = u(x, t)$ con $u : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. L'equazione del calore ha la forma:

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (2.1)$$

dove u_t indica la derivata parziale di u rispetto al tempo e Δ rappresenta il Laplaciano rispetto alla variabile $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

Consideriamo una funzione $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ abbastanza regolare ed un parametro frazionario $s \in (0, 1)$. Allora il Laplaciano frazionario di u è dato da

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy, \quad (2.2)$$

dove $C(n, s)$ è una costante che dipende da n e s .

Osserviamo da (2.2) che $(-\Delta)^s$ è un operatore di ordine $2s$.

Ci interessiamo dell'operatore (2.2) e ne daremo una motivazione attraverso alcune considerazioni probabilistiche.

2.1 La camminata casuale con salti lunghi arbitrari

Mostreremo che l'equazione del calore frazionaria, cioè un'equazione analoga alla (2.1) ma nella quale a $-\Delta$ si sostituisce $(-\Delta)^s$, ha origine da un processo probabilistico in cui una particella si muove casualmente nello spazio, seguendo una legge che permette salti. Più precisamente salti lunghi possono avvenire ma con una probabilità più bassa (decadimento polinomiale).

Introduciamo una distribuzione di probabilità sui numeri naturali

$\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\}$ come segue. Se $I \subseteq \mathbb{N}^*$, allora la probabilità di I è definita da

$$P(I) := c_s \sum_{k \in I} \frac{1}{|k|^{1+2s}},$$

dove la costante c_s è presa in modo tale da normalizzare P , così che sia una misura di probabilità. Precisamente c_s è data da:

$$c_s := \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{|k|^{1+2s}} \right)^{-1},$$

in tal modo avremo $P(\mathbb{N}^*) = 1$.

Prendiamo in esame una particella che si muove in \mathbb{R}^n secondo il processo probabilistico, che andremo a descrivere qui di seguito. Denotiamo con τ i distinti passi temporali e con h quelli spaziali. Prendiamo come scala $\tau = h^{2s}$ e denotiamo con $u(x, t)$ la probabilità di trovare la particella nel punto x al tempo t .

La particella in \mathbb{R}^n si muove secondo la seguente legge: ad ogni istante τ , la particella seleziona casualmente

1. Una direzione $v \in \partial B_1$, secondo la distribuzione uniforme su ∂B_1 ;
2. Un numero naturale $k \in \mathbb{N}^*$, secondo la legge P .

Dopo questa scelta la particella si muove di kh nella direzione v .

Notiamo che sono ammessi spostamenti lunghi e che essi avvengono con una probabilità bassa. Allora, se la particella al tempo t è nel punto x_0 e, seguendo la legge, seleziona la direzione $v \in \partial B_1$ e un numero naturale $k \in \mathbb{N}^*$, avremo che la particella al tempo $t + \tau$ si troverà in $x_0 + khv$.

Ora la probabilità $u(x, t + \tau)$ di trovare la particella al tempo $t + \tau$ nel punto x è la somma delle probabilità di trovarla in un qualsiasi altro punto $x + khv$, per la probabilità di scegliere esattamente la direzione v e il numero k .

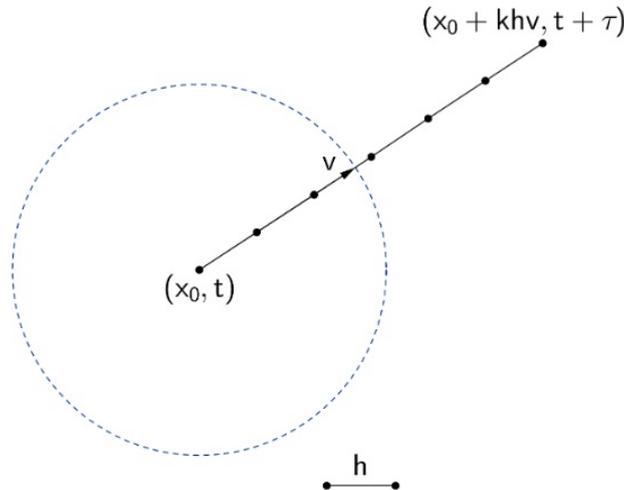


Figura 2.1: Camminata casuale con salti

Ovvero, indicando con $d\sigma$ l'elemento di superficie:

$$u(x, t + \tau) = \frac{c_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t)}{|k|^{1+2s}} d\sigma.$$

Notiamo che il fattore $c_s/|\partial B_1|$ è una costante che normalizza la probabilità, da cui sottraendo $u(x, t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} u(x, t + \tau) - u(x, t) &= \frac{c_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t)}{|k|^{1+2s}} d\sigma - u(x, t) \\ &= \frac{c_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t) - u(x, t)}{|k|^{1+2s}} d\sigma. \end{aligned}$$

Per simmetria, possiamo cambiare v con $-v$ nell'integrale sopra, e si ha che

$$u(x, t + \tau) - u(x, t) = \frac{c_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x - khv, t) - u(x, t)}{|k|^{1+2s}} d\sigma.$$

Possiamo quindi sommare queste due espressioni (e dividere per 2) e otteniamo

$$u(x, t + \tau) - u(x, t) = \frac{c_s}{2|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t) + u(x - khv, t) - 2u(x, t)}{|k|^{1+2s}} d\sigma.$$

Ora dividendo per $\tau = h^{2s}$, prendendo il limite e usando le coordinate polari, otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &\simeq \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} \\ &= \frac{c_s h}{2|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv, t) + u(x - khv, t) - 2u(x, t)}{|hk|^{1+2s}} d\sigma \\ &\simeq \frac{c_s}{2|\partial B_1|} \int_0^\infty \int_{\partial B_1} \frac{u(x + rv, t) + u(x - rv, t) - 2u(x, t)}{|r|^{1+2s}} d\sigma dr \\ &= \frac{c_s}{2|\partial B_1|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y, t) + u(x - y, t) - 2u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= -c_{n,s} (-\Delta)^s u(x, t), \end{aligned}$$

per un adeguato $c_{n,s} > 0$.

Questo mostra che, almeno formalmente, per piccoli intervalli di tempo e di spazio, il processo sopra approssima un'equazione del calore frazionaria.

2.2 Un modello di payoff

Un'altra motivazione probabilistica per il Laplaciano frazionario viene da un modello di guadagno.

Supponiamo di muoverci in un dominio Ω secondo una camminata casuale come quella discussa nella Sezione (2.1). Supponiamo che uscire dal dominio Ω saltando in un punto esterno $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, determini un guadagno di $u_0(y)$ euro. Sarebbe interessante sapere quanto ricco mi aspetto di diventare in questo modo. Se partiamo da un punto dato $x \in \Omega$, denotiamo $u(x)$ l'ammontare di euro che ci aspettiamo di guadagnare, di seguito vedremo che il guadagno previsto u è dato dall'equazione

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

Infatti: fissiamo un punto $x \in \Omega$, il valore atteso del guadagno in x è la media di tutti i guadagni nei punti \tilde{x} dai quali si può raggiungere x , ponderata dalla probabilità dei salti. Cioè, scrivendo $\tilde{x} = x + khv$, con $v \in \partial B_1$, $k \in \mathbb{N}^*$ e $h > 0$, come nella Sezione (2.1), abbiamo che la probabilità dei salti è $\frac{c_s}{|\partial B_1| |k|^{1+2s}}$. Questo conduce alla formula:

$$u(x) = \frac{c_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv)}{|k|^{1+2s}} d\sigma.$$

Cambiando v con $-v$, si ha:

$$u(x) = \frac{c_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x - khv)}{|k|^{1+2s}} d\sigma.$$

Sommando le due uguaglianze precedenti, si ottiene:

$$2u(x) = \frac{c_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv) + u(x - khv)}{|k|^{1+2s}} d\sigma.$$

Poiche la probabilità totale è 1, possiamo sottrarre $2u(x)$ da entrambi i lati, ottenendo

$$0 = \frac{c_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + khv) + u(x - khv) - 2u(x)}{|k|^{1+2s}} d\sigma.$$

Possiamo ora dividere per h^{2s} e passando al limite di $h \searrow 0$, si ha esattamente $0 = -(-\Delta)^s u(x)$, che è (2.3).

Capitolo 3

Laplaciano frazionario

Introduciamo in questo capitolo, in maniera rigorosa, l'operatore Laplaciano frazionario ed alcune sue proprietà.

3.1 Definizione di Laplaciano frazionario

Consideriamo lo spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida definito come

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_\beta f(x)| < \infty\}.$$

Definizione 3.1. Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $s \in (0, 1)$. Il Laplaciano frazionario di u è definito come

$$(-\Delta)^s u(x) := C(n, s) \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad (3.1)$$

dove $C(n, s)$ è una costante che dipende da n e s e *P.V.* indica il valore principale, ovvero

$$\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy. \quad (3.2)$$

Notiamo che l'integrale sopra è singolare quando y è in un intorno di x , e questa singolarità, generalmente, non è integrabile (nel senso di Lebesgue):

infatti osserviamo che, vicino a x , abbiamo $u(x) - u(y)$ che si comporterà al primo ordine come $\nabla u(x) \cdot (x - y)$. Quindi l'integrale sopra, al primo ordine sarà:

$$\frac{\nabla u(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^{n+2s}} \quad (3.3)$$

il cui valore assoluto dà un integrale infinito vicino a x , a meno che $\nabla u(x) = 0$ o $s < 1/2$. Quest'ultima osservazione deriva dal fatto che (3.3) è integrabile se e solo se $n + 2s - 1 < n$.

L'idea è che il valore principale risulta finito in quanto il termine (3.3) è dispari in $(x - y)$, quindi andando ad integrare in y su $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)$, avremo delle cancellazioni che fanno sì che il termine non contribuisca all'integrale.

Riprendiamo ora la scrittura del Laplaciano frazionario proposta in (2.2) e vediamo che effettivamente è equivalente alla (3.2):

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x + y) - u(x - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \frac{2u(x) - u(x + y) - u(x - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \frac{u(x) - u(x + y)}{|y|^{n+2s}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \frac{u(x) - u(x - y)}{|y|^{n+2s}} dy \right] \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(\eta)}{|x - \eta|^{n+2s}} d\eta + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(\zeta)}{|x - \zeta|^{n+2s}} d\zeta \right] \\ &= C(n, s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(\eta)}{|x - \eta|^{n+2s}} d\eta, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $\eta := x + y$ e $\zeta := x - y$.

La semplificazione sopra spiega anche la convenienza nello scrivere (2.2) con il fattore $1/2$.

Un'altra possibile definizione del Laplaciano frazionario viene dall'uso della trasformata di Fourier.

Per qualunque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denotando la variabile spaziale con $x \in \mathbb{R}^n$ e la variabile di frequenza $\xi \in \mathbb{R}^n$, la trasformata di Fourier e l'inversa della

trasformata di Fourier sono definite rispettivamente, come

$$\hat{f}(\xi) := \mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad (3.4)$$

e

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \quad (3.5)$$

Allora, per $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'operatore Laplaciano frazionario può essere espresso con le variabili di Fourier moltiplicate per $(2\pi|\xi|)^{2s}$, come vediamo nel seguente Lemma.

Lemma 3.1.1.

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}((2\pi|\xi|)^{2s}\hat{u}(\xi)). \quad (3.6)$$

Dimostrazione. Proveremo che le due formulazioni (2.2) e (3.6) sono equivalenti, applicando la trasformata di Fourier alla (2.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((-\Delta)^s u(x)) &= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{F}(2u(x) - u(x+y) - u(x-y))}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \frac{2 - e^{2\pi i \xi \cdot y} - e^{-2\pi i \xi \cdot y}}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= C(n, s) \hat{u}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando il cambio di variabile $z = |\xi|y$, abbiamo che

$$\begin{aligned} J(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi \xi}{|\xi|} \cdot z\right)}{|z|^{n+2s}} dz. \end{aligned}$$

Osserviamo che J è invariante per rotazione. Consideriamo una rotazione R che manda $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ in $\xi/|\xi|$, $Re_1 = \xi/|\xi|$ e chiamiamo R^T la sua trasposta. Adesso usando il cambio di variabili $\omega = R^T z$ abbiamo che

$$\begin{aligned} J(\xi) &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi Re_1 \cdot z)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi R^T z \cdot e_1)}{|R^T z|^{n+2s}} dz \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \omega_1)}{|\omega|^{n+2s}} d\omega. \end{aligned}$$

Cambiando nuovamente la variabile $\tilde{\omega} = 2\pi\omega$ (continueremo a scrivere ω come variabile di integrazione) otteniamo che

$$J(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos \omega_1}{|\omega|^{n+2s}} d\omega. \quad (3.8)$$

Notiamo che quest'ultimo integrale è finito. Infatti, integrando fuori dalla palla B_1 abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{|1 - \cos \omega_1|}{|\omega|^{n+2s}} d\omega \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{2}{|\omega|^{n+2s}} d\omega < \infty.$$

Mentre all'interno della palla, possiamo usare lo sviluppo di Taylor della funzione coseno e osservare che

$$\int_{B_1} \frac{|1 - \cos \omega_1|}{|\omega|^{n+2s}} d\omega \leq \int_{B_1} \frac{|\omega|^2}{|\omega|^{n+2s}} d\omega \leq \int_{B_1} \frac{d\omega}{|\omega|^{n+2s-2}} < \infty.$$

Perciò, prendendo

$$C(n, s) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos \omega_1}{|\omega|^{n+2s}} d\omega \right)^{-1}, \quad (3.9)$$

dalla (3.8) si ha che

$$J(\xi) = \frac{(2\pi|\xi|)^{2s}}{C(n, s)}.$$

Sostituendolo nella (3.7), otteniamo

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s u(x)) = C(n, s) \hat{u}(\xi) J(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2s} \hat{u}(\xi)$$

che conclude la dimostrazione. \square

In altre parole, la formula (3.6) caratterizza il Laplaciano frazionario nello spazio di Fourier, prendendo la potenza s -esima del moltiplicatore associato al Laplaciano classico. Infatti, usando l'inversa della trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta(\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}))(x) = -\Delta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi|\xi|)^2 \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}((2\pi|\xi|)^2 \hat{u}(\xi)). \end{aligned}$$

Ciò ci fa vedere come il Laplaciano classico agisca nello spazio di Fourier, come il moltiplicatore di $(2\pi|\xi|)^2$. Da questo e dal Lemma, segue che il Laplaciano classico è il caso limite del frazionario, cioè $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{s \rightarrow 1} (-\Delta)^s u = -\Delta u$$

e inoltre

$$\lim_{s \rightarrow 0} (-\Delta)^s u = u.$$

3.2 Principio del Massimo per il Laplaciano frazionario

Nel Capitolo 1 abbiamo visto come il principio del Massimo e la disuguaglianza di Harnack rappresentino importanti proprietà delle funzioni armoniche.

In questa sezione vedremo che analoghi risultati non valgono nel caso delle funzioni con $(-\Delta)^s u = 0$ se non si richiede un'informazione sul segno della funzione su tutto lo spazio. In questi tipi di risultati il carattere non locale dell'operatore gioca un ruolo fondamentale.

Cominciamo con l'enunciare il principio del Massimo.

Teorema 3.2.1. *Se $(-\Delta)^s u \geq 0$ in B_1 e $u \geq 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_1$, allora $u \geq 0$ in B_1 .*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che il punto di minimo $x_* \in B_1$ soddisfi $u(x_*) < 0$. Allora $u(x_*)$ è un minimo in \mathbb{R}^n (dato che u è positiva fuori da B_1). Sia ora $y \in B_2$, abbiamo che $2u(x_*) - u(x_* + y) - u(x_* - y) \leq 0$. Dall'altro lato, se $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_2$ allora $x_* \pm y \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$, quindi $u(x_* \pm y) \geq 0$.

Deduciamo pertanto che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x_\star) - u(x_\star + y) - u(x_\star - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_2} \frac{2u(x_\star) - u(x_\star + y) - u(x_\star - y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_2} \frac{2u(x_\star)}{|y|^{n+2s}} dy < 0. \end{aligned}$$

Questo porta ad una contraddizione e conclude la dimostrazione. \square

Più o meno allo stesso modo si può dimostrare il seguente principio del Massimo forte.

Teorema 3.2.2. *Se $(-\Delta)^s u \geq 0$ in B_1 e $u \geq 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_1$, allora o $u > 0$ in B_1 , o $u \equiv 0$.*

Dimostrazione. Sfruttando il teorema precedente sappiamo che $u \geq 0$ in tutto \mathbb{R}^n . Quindi se u non è strettamente positiva, allora esiste un $x_0 \in B_1$ tale che $u(x_0) = 0$. Questo porta a:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x_0) - u(x_0 + y) - u(x_0 - y)}{|y|^{n+2s}} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_0 + y) + u(x_0 - y)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

Dove entrambi i termini $u(x_0 + y)$ e $u(x_0 - y)$ sono non negativi, quindi l'ultimo integrale è minore o uguale a 0. Ciò implica che u deve essere identicamente nulla. \square

3.3 Disuguaglianza di Harnack per il Laplaciano frazionario

Mostriamo subito come l'analogo della disuguaglianza di Harnack per il caso frazionario presenta dei problemi, attraverso il seguente esempio

Teorema 3.3.1. *Esiste una funzione limitata u soluzione di*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = 0 & \text{in } B_1 \\ u \geq 0 & \text{in } B_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

ma tale che $\inf_{B_1} u = 0$.

Dimostrazione. Daremo solo una traccia della dimostrazione. L'idea della dimostrazione si basa sul fatto che si possa scegliere il dato di u fuori da B_1 in modo da "costringere" la u stessa ad "abbassarsi" in B_1 per poter mantenere il suo Laplaciano frazionario nullo in B_1 . Sia $M \geq 0$ e prendiamo u_M la funzione che soddisfa

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_M = 0 & \text{in } B_1, \\ u_M = 1 - M & \text{in } B_3 \setminus B_2, \\ u_M = 1 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus ((B_3 \setminus B_2) \cup B_1). \end{cases} \quad (3.11)$$

(Si veda figura (3.1))

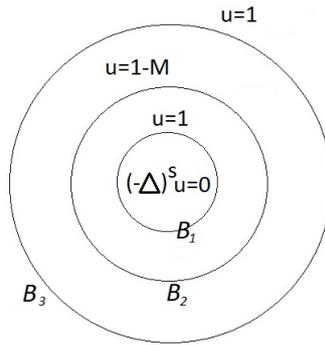


Figura 3.1:

Quando $M = 0$, la funzione u_M è identicamente 1. Quando $M > 0$, ci aspettiamo che u_M si abbassi in B_1 , dal momento che il Laplaciano frazionario è identicamente nullo in B_1 . Mostriamo che $\inf_{B_1} u_M \rightarrow -\infty$ per $M \rightarrow +\infty$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che ciò non avvenga. Allora, per ogni $M \geq 0$, avremo che

$$\inf_{B_1} u_M \geq -a, \quad (3.12)$$

per qualche $a \in \mathbb{R}$ fissata. Sia

$$v := \frac{u_M + M - 1}{M}.$$

Dal sistema (3.11), otteniamo che v soddisfa

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v = 0 & \text{in } B_1, \\ v = 0 & \text{in } B_3 \setminus B_2, \\ v = 1 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus ((B_3 \setminus B_2) \cup B_1). \end{cases}$$

Inoltre la (3.12) implica che per qualunque $x \in B_1$,

$$v(x) \geq \frac{-a + M - 1}{M} \quad \forall M > 0.$$

Prendendo il limite per $M \rightarrow \infty$, si ottiene che v soddisfa il sistema precedente e per ogni $x \in B_1$.

$$v(x) \geq 1.$$

In particolare il massimo di v è raggiunto per qualche punto $x_* \in B_1$, con $v(x_*) \geq 1$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} 0 &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v(x_*) - v(y)}{|x_* - y|^{n+2s}} dy \geq P.V. \int_{B_3 \setminus B_2} \frac{v(x_*) - v(y)}{|x_* - y|^{n+2s}} dy \\ &\geq P.V. \int_{B_3 \setminus B_2} \frac{1 - 0}{|x_* - y|^{n+2s}} dy > 0, \end{aligned}$$

che è una contraddizione. \square

L'esempio del teorema mostra, come già detto per il principio del Massimo, gli effetti che il dato all'infinito può avere sul Laplaciano frazionario. Enunciamo di seguito una versione di disuguaglianza di Harnack nel caso frazionario, nella quale si richiede un'informazione sul segno di u su tutto \mathbb{R}^n (e non solo su B_1 !).

Teorema 3.3.2. *Supponiamo che u soddisfi*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u \geq 0 & \text{in } B_1, \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.13)$$

Allora

$$\sup u \leq c \inf u, \quad (3.14)$$

per una certa $c > 0$, dipendente da n e s .

3.4 Spazio di Sobolev frazionario

In questa sezione presenteremo e daremo qualche proprietà degli Spazi di Sobolev frazionari.

Definizione 3.2. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , per ogni $s \in (0, 1)$ reale e per ogni $p \in [1, +\infty)$ definiamo lo spazio di Sobolev frazionario (o spazio di Slobodeckij) come segue

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}. \quad (3.15)$$

Possiamo vedere $W^{s,p}$ come uno spazio di Banach intermedio tra $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$ dotato della norma naturale

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.16)$$

dove il termine $[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ è chiamato seminorma di Slobodeckij ed è dato da

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.17)$$

Vale la pena notare che, come nel caso classico con $s \in \mathbb{Z}$, lo spazio $W^{s',p}(\Omega)$ è continuamente contenuto in $W^{s,p}(\Omega)$ quando $s \leq s'$ come vediamo nel seguente risultato.

Teorema 3.4.1. *Sia $p \in [1, +\infty)$ e $0 < s \leq s' < 1$. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione misurabile. Allora*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s',p}},$$

per una certa costante positiva $C = C(n, s, p) \geq 1$. In particolare

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\{|z| \geq 1\}} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz \right) |u(x)|^p dx \\ &\leq C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che il nucleo $1/|z|^{n+sp}$ è integrabile poichè $n + sp > n$.

Tenendo conto della stima di cui sopra, segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy &\leq 2^{p-1} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &\leq 2^p C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove il fattore 2^{p-1} si ottiene sfruttando la convessità della funzione $\varphi(t) = t^p$ con $p \geq 1$. D'altra parte

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dx dy. \quad (3.19)$$

Combinando (3.18) e (3.19), otteniamo che

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq 2^p C(n, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dx dy,$$

e dunque

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p &\leq (2^p C(n, s, p) + 1) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dx dy \\ &\leq C(n, s, p) \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

che ci dà la stima desiderata, con la costante $C(n, s, p)$. \square

Si dimostra che il teorema appena enunciato vale anche nel caso limite, cioè quando $s' = 1$ ma per avere ciò dobbiamo chiedere la regolarità di $\partial\Omega$.

Teorema 3.4.2. *Sia $p \in [1, +\infty)$ e $s \in (0, 1)$. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n di classe $C^{0,1}$ con frontiera limitata e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Allora*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p, \quad (3.20)$$

per una certa costante positiva $C = C(n, s, p) \geq 1$. In particolare

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Vedi Proposizione 2.2 [5]. \square

A questo punto facciamo solo notare che quando $p = 2$ si ha un importante caso dello spazio di Sobolev frazionario $W^{s,2}(\Omega)$ in cui questo diventa uno spazio di Hilbert, denotato da $H^s(\Omega)$.

Ricordiamo infine il seguente teorema di densità.

Teorema 3.4.3. *Per ogni $s > 0$, lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda il Teorema 7.38 in [1]. \square

3.5 Il funzionale energia e la formulazione variazionale

Andremo in questo capitolo a presentare il funzionale energia e la formulazione variazionale di un problema che coinvolge il Laplaciano frazionario.

Iniziamo con introdurre la nozione di soluzione debole per il problema

$$(-\Delta)^s u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (3.21)$$

Usando la definizione di Laplaciano frazionario (omettendo il simbolo *P.V.* per semplicità di notazione) e moltiplicando per una funzione test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \varphi(x) = f(x) \varphi(x),$$

integrando in x su \mathbb{R}^n , otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} \varphi(x) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx.$$

Si osservi che, per simmetria, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} \varphi(x) dy dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} (\varphi(x) - \varphi(y)) dx dy.$$

Questo ragionamento ci porta in modo naturale alla definizione di soluzione debole.

Definizione 3.3. Diciamo che $u \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ è soluzione debole di

$$(-\Delta)^s u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (3.22)$$

se $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} (\varphi(x) - \varphi(y)) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx. \quad (3.23)$$

Analogamente a quanto visto nel Capitolo 1 per il Laplaciano classico, vogliamo mostrare che una soluzione debole si può trovare come il minimo di un certo funzionale. Definiamo il seguente funzionale energia.

$$E_s(u) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} f u dx, \quad (3.24)$$

Teorema 3.5.1. Sia $u \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$E_s(u) = \min_{v \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)} E_s(v). \quad (3.25)$$

Allora u è soluzione debole di (3.22).

Dimostrazione. Procediamo come fatto per il caso classico

$$\begin{aligned} E_s(u+t\varphi) - E_s(u) &= \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{[(u+t\varphi)(x) - (u+t\varphi)(y)]^2}{|x-y|^{n+2s}} - \frac{[u(x) - u(y)]^2}{|x-y|^{n+2s}} \right) dx dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} (f(u+t\varphi) - fu) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{[u(x) + t\varphi(x) - u(y) - t\varphi(y)]^2}{|x-y|^{n+2s}} - \frac{[u(x) - u(y)]^2}{|x-y|^{n+2s}} \right) dx dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} t f \varphi dx. \end{aligned}$$

Dove andando a svolgere i quadrati ed a semplificare i termini opposti, otteniamo che:

$$\begin{aligned} E_s(u+t\varphi) - E_s(u) &= \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{2t[u(x)\varphi(x) - u(y)\varphi(y) + u(y)\varphi(y) - u(x)\varphi(x)]}{|x-y|^{n+2s}} \right) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t^2[\varphi(x) - \varphi(y)]^2}{|x-y|^{n+2s}} \right) dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} t f \varphi dx. \end{aligned}$$

Andando ora a fare il rapporto incrementale, cioè a dividere per t e facendo il $\lim_{t \rightarrow 0}$, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_{\mathbb{R}^n}(u + t\varphi) - E_{\mathbb{R}^n}(u)}{t} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} [\varphi(x) - \varphi(y)] dx dy - \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < \infty,$$

poichè $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Otteniamo dunque che se $\frac{d}{dt} E(u + t\varphi)|_{t=0} = 0$, allora u è soluzione debole di (3.22). \square

Capitolo 4

Teorema di Caffarelli-Silvestre

Scopo di questo capitolo è dimostrare il Teorema 4.0.1 che permette di trattare un problema non locale in \mathbb{R}^n , studiando un opportuno problema locale in \mathbb{R}^{n+1} .

Prendiamo il semispazio positivo

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}.$$

Sia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $0 < s < 1$. Consideriamo il seguente problema di Dirichlet in \mathbb{R}_+^{n+1} :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^{1-2s}\nabla U(x, y)) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^{n+1} \\ U(x, 0) = u(x) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.1)$$

Osservazione 4. Ponendo $a = 1 - 2s$ vediamo che

$$\operatorname{div}(y^a\nabla U) = 0 \quad (4.2)$$

se e solo se

$$\Delta_x u + \frac{a}{y}u_y + u_{yy} = 0. \quad (4.3)$$

Infatti da un rapido calcolo abbiamo che:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}(y^a\nabla u) = ay^{a-1}\partial_y u + y^a\Delta_{xy}u \\ &= ay^{a-1}\partial_y u + y^a\Delta_x u + y^a\partial_{yy}u. \end{aligned}$$

Dividendo per y^a si ottiene (4.3).

In analogia con l'espressione (1.1) che esprime il Laplaciano come funzione radiale, possiamo pensare ad u come una funzione definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{1+a}$, che abbia simmetria radiale nella variabile $z \in \mathbb{R}^{1+a}$, cioè tale che $u(x, z) = u(x, |z|) = u(x, r)$ (dove abbiamo posto $|z| = r$). L'espressione del Laplaciano per tale u sarà della forma

$$\Delta u = \Delta_x u + \frac{a}{r} u_r + u_{rr}. \quad (4.4)$$

Ovviamente se a non è un intero non possiamo parlare di spazi di dimensione $n + 1 + a$, ma l'espressione (4.4) ha comunque senso e ci aspettiamo che funzioni che soddisfano la (4.3) abbiano proprietà comuni alle funzioni armoniche. In analogia con quanto detto nel Capitolo 1, ci aspettiamo che la soluzione fondamentale di (4.1) sia della forma

$$\Gamma(x) = C_{n+1+a} \frac{1}{(|x|^2 + |y|^2)^{n-1+a}}, \quad (4.5)$$

(Si veda Sezione 2 in [4]).

Usando l'espressione della soluzione fondamentale si dimostra, in modo rigoroso, che il nucleo di Poisson del problema (4.1) è dato da:

$$P(x, y) = C_{n,a} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + |y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}. \quad (4.6)$$

Nel caso $s = \frac{1}{2}$ si ottiene proprio il nucleo di Poisson del Laplaciano per il semispazio positivo visto in (1.14).

Abbiamo dunque che la funzione definita da

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x - \xi, y) u(\xi) d\xi, \quad (4.7)$$

è soluzione di (4.1).

Possiamo ora enunciare il risultato principale di questa sezione. Esso permette di studiare un problema non locale che coinvolge il Laplaciano frazionario in \mathbb{R}^n , andando a studiare un problema locale in \mathbb{R}_+^{n+1} .

Teorema 4.0.1. Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < s < 1$, sia $a = 1 - 2s$. Supponiamo che $U : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ sia soluzione di

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^a \nabla U(x, y)) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ U(x, 0) = u(x) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.8)$$

Allora:

$$-\lim_{y \rightarrow 0} (y^a \partial_y U(x, y)) = C_{n,s} (-\Delta)^s u(x) = c_{n,a} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(\xi)}{|\xi - x|^{n-1+a}} d\xi. \quad (4.9)$$

Osservazione 5. Nel caso particolare $s = \frac{1}{2}$, cioè $a = 0$, il problema (4.8) diventa:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^{n+1} \\ U(x, 0) = u(x) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.10)$$

Allo stesso modo la (4.9) si scrive come

$$-\lim_{y \rightarrow 0} \partial_y U(x, y) = C_{n, \frac{1}{2}} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u. \quad (4.11)$$

Dunque $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ associa al dato di Dirichlet u del problema (4.10) il dato di Neumann $-\partial_y U(x, 0)$. Per questa ragione tali operatori sono talvolta chiamati "Dirichlet-to-Neumann operators".

Passiamo ora alla dimostrazione.

Dimostrazione. Usando l'espressione (4.6) per il nucleo di Poisson, possiamo direttamente calcolare

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} (y^a U_y(x, y)) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{U(x, y) - U(x, 0)}{y^{1-a}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{1-a}} \int_{\mathbb{R}^n} [P(x - \xi, y)(u(\xi) - u(x))] d\xi \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{1-a}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{C_{n,a} y^{1-a}}{(|x - \xi|^2 + |y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} (u(\xi) - u(x)) \right] d\xi \\ &= C_{n,a} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\xi) - u(x)}{|x - \xi|^{n+1-a}} d\xi \\ &= -C_{n,a} (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} u(x), \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove $1 - a = 2s$, quindi otteniamo proprio $(-\Delta)^s u(x)$. □

Osservazione 6. Esiste una dimostrazione alternativa del teorema via trasformata di Fourier che mostra che il funzionale energia associato al problema di estensione (4.8) è equivalente al funzionale energia associato alla definizione di Laplaciano frazionario. (sez. 3, [2]).

Bibliografia

- [1] Adams R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Brezis H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext. Springer, New York, 2011. xiv+599 pp.
- [3] Bucur C.; Valdinoci E., *Nonlocal diffusion and applications*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, 20. Springer; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2016. xii+155 pp.
- [4] Caffarelli L.; Silvestre L., *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), 1245-1260.
- [5] Di Nezza E.; Palatucci G.; Valdinoci E., *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. 136 (2012), no. 5, 521-573.
- [6] Evans L. C., *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. xviii+662 pp.

