

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica curriculum Didattico

**PROOFS WITHOUT WORDS:
DAL LINGUAGGIO ILLUSTRATO AL
REGISTRO FORMALE.**

Una sperimentazione nelle classi di un liceo.

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:

Chiar.mo Prof.

PAOLO NEGRINI

Presentata da:

SERENA SANDRI

Correlatore:

Chiar.mo Prof.

GIORGIO BOLONDI

Sessione Unica

Anno Accademico 2016 - 2017

*Alla mia famiglia . . .
quella di origine
e quella in divenire.*

Indice

Introduzione	4
1 Proofs Without Words	6
2 Visualizzazione ed Argomentazione in matematica	10
2.1 Visualizzazione	10
2.2 Argomentazione	16
3 La sperimentazione	25
3.1 Presentazione ed obiettivi del progetto	25
3.2 Contesto scolastico e classi	26
3.3 Gli argomenti: la scelta delle PWWs e le animazioni	27
3.4 L'attività proposta	35
4 L'analisi critica dei risultati	38
4.1 Il riconoscimento	38
4.2 Le dimostrazioni formali degli studenti	40
4.2.1 I criteri di analisi	41
4.2.2 Analisi delle dimostrazioni: i risultati	43
4.2.3 Analisi delle dimostrazioni: i protocolli	53
4.3 Questionario sul confronto tra approccio visuale e quello formale studiato	66
4.4 Svolgimento dell'esercizio	71

5	Conclusioni	74
5.1	Una possibile prosecuzione della sperimentazione	75
A	Le PWWs animate	76
B	Schede delle attività	94
C	Esercizi proposti nelle attività	100
	Bibliografia	105

Introduzione

Questo lavoro nasce dalla voglia di realizzare un progetto che si collochi a cavallo tra la geometria e l'algebra, tra la dimensione dell'intuizione e la dimensione del rigore, tra l'aspetto visuale e illustrato e il pensiero argomentativo strutturato. Una domanda in particolare ha ispirato la sperimentazione: "stiamo perdendo la capacità di *scrivere* la matematica?" Accanto a tutto ciò la voglia di "mettere le mani in pasta", di lavorare con delle classi.

Ecco allora nascere una tesi sul campo condotta sul tema delle Proofs Without Words, realizzate con GeoGebra: ho animato alcune delle classiche dimostrazioni senza parole (di geometria, di algebra e di trigonometria, rivolte a classi diverse) proponendole agli studenti come punto di partenza per la costruzione di un percorso deduttivo da stendere poi per iscritto. Il focus finale della sperimentazione sarà registrare i comportamenti degli allievi quando cercheranno di esprimere e formalizzare discorsivamente quanto fatto: la sistemazione in linguaggio formalizzato è l'ultimo ed essenziale passo del lavoro creativo richiesto loro. Durante il lavoro di sperimentazione, quindi, ho raccolto protocolli attraverso i quali poter studiare in che modo i ragazzi organizzano un discorso argomentativo, non partendo (come avviene di solito) dal tentativo di riprodurre la dimostrazione, cioè il discorso argomentativo formalizzato, dell'insegnante, del libro di testo o di Euclide.

Nel primo capitolo introduco e presento le Proofs Without Words, la loro storia e le varie posizioni di chi le considera delle dimostrazioni a tutti gli effetti e di chi, al contrario, non le definisce tali.

Nel secondo capitolo metto le basi teoriche entro cui ho costruito la sperimentazione, e che ne guideranno la lettura e l'analisi dei risultati: la visualizzazione e l'argomentazione in matematica sono i due temi che inquadrano il lavoro condotto. Rispetto a questi due

temi si sottolinea anche che cosa chiedono le Indicazioni Nazionali.

Il terzo capitolo entra nel clou della sperimentazione. Nel primo paragrafo espongo le specifiche domande che motivano il lavoro di tesi, ovvero, come già accennato sopra, lo studio dei comportamenti dimostrativi messi in atto dagli studenti di fronte alla richiesta di stendere per iscritto una dimostrazione formalizzata a partire dall'animazione di una Proof Without Word. Ma accanto a questo nucleo primario di ricerca, il lavoro è condito da un altro spunto e direzione d'indagine, ovvero il rapporto tra il registro formale e quello visuale: ci si chiede se nel percorso di insegnamento-apprendimento il linguaggio illustrato possa essere l'unico, oppure se, pur essendo utile e fondamentale, non basti a sé stesso ma debba essere affiancato in modo adeguato da un approccio di tipo formale, altrettanto essenziale. Nel proseguo del terzo capitolo, descrivo dettagliatamente la costruzione della sperimentazione, dalla scelta delle dimostrazioni senza parole, alle varie modalità con cui le ho animate, per finire con la spiegazione delle attività proposte in classe agli studenti.

Nel quarto capitolo espongo i risultati ottenuti dalla lettura e dall'analisi dei protocolli raccolti nelle classi, focalizzando, di volta in volta, l'attenzione sulle varie sezioni in cui sono divise le attività svolte dagli studenti. In particolare, l'analisi delle dimostrazioni formalizzate stese dagli alunni viene condotta seguendo precisi criteri osservabili, alcuni riguardanti prettamente la forma delle dimostrazioni, altri specifici sul contenuto degli elaborati e altri ancora a metà tra le due tipologie precedenti. Questa distinzione dei criteri ripetto alle tre tipologie di ciò che si va ad analizzare nasce dal fatto che dover scrivere (in particolare riguardo un contenuto matematico) implica darsi, avere e rispettare un ordine logico e formale, usare un linguaggio adeguato, corretto, con lessico specifico ma anche la corretta sintassi grammaticale. Si vuole, infine, indagare quale ruolo svolge il linguaggio utilizzato nelle formalizzazioni, se espliciti un processo deduttivo o assuma un ruolo esclusivamente descrittivo.

Nell'ultimo capitolo, infine, traggo alcune conclusioni sul possibile utilizzo delle Proofs Without Words come valido ed efficace (o meno) strumento didattico in un percorso di avvio o consolidamento di un pensiero argomentativo formalizzato e strutturato.

Nelle appendici riporto gli screenshots delle animazioni delle dimostrazioni senza parole costruite per la sperimentazione.

Capitolo 1

Proofs Without Words

Le **Proofs Without Words** (qui in seguito denotate con l’acronimo “PWWs”), che in italiano potremmo tradurre con “**dimostrazioni illustrate**” o “**teoremi senza parole**”, sono disegni o diagrammi (tradizionalmente statici) che aiutano il lettore a *vedere il perché* un particolare enunciato o fatto matematico è *vero* e *vedere* anche **come** si può iniziare a *provarne la validità*.

Le PWWs non sono un’innovazione recente, ma hanno un lunga storia: probabilmente i primi esempi si possono far risalire all’antica Cina e alla Grecia classica, più tardi in Arabia nel X secolo, in India nel XII secolo e anche nell’Italia rinascimentale. Oggi le PWWs appaiono regolarmente in giornali pubblicati in tutto il mondo e sul World Wide Web. Infatti le PWWs sono diventate dei contenuti regolari in due giornali pubblicati dalla *Mathematical Association of America*: iniziarono ad apparire sul *Mathematics Magazine* dal 1975 e, circa dieci anni più tardi, sul *The College Mathematics Journal*; dapprima utilizzate come “riempitivi” degli spazi in fondo agli articoli pubblicati, ma in seguito, dato il loro gradevole modo di illustrare e presentare importanti contenuti matematici, gli editori incoraggiarono ulteriori contributi di PWWs alle riviste.

Ora, molte di queste dimostrazioni senza parole sono riportate in due raccolte di Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* del 1993 e *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking* del 2000, pubblicate dalla MAA, oltre che apparire numerose anche sul web.

Ma le PWWs sono davvero delle dimostrazioni? Alcuni sostengono che le dimostrazioni senza parole *non sono* “vere dimostrazioni”, né tantomeno sono “*senza parole*”. Infatti, in alcuni casi vengono incluse una o due equazioni al fine di condurre l’osservatore all’individuazione della tesi illustrata, oltre che a guidarlo nel processo della convinzione e della costruzione della sua veridicità. Ma l’attenzione è comunque posta nel voler *fornire indizi visivi per stimolare nell’osservatore il pensiero e il ragionamento matematico*: le equazioni presenti vogliono, infatti, stuzzicare il lettore e incoraggiarlo a pensare *come* il disegno “provi” il teorema, prima di cercarne o leggerne una dimostrazione scritta. C’è chi considera che questi argomenti visuali abbiano poco valore e che ci sia uno ed un solo modo per comunicare la matematica, e che le dimostrazioni senza parole non rientrino di certo in questo. In contrasto rispetto a questo punto di vista, Theodore Eisenberg and Tommy Dreyfus¹ nel loro articolo *On the Reluctance to Visualize in Mathematics*² sottolineano il pensiero di Solomon Lefschetz³ (editore degli *Annals*): “Egli vedeva la matematica non come logica, ma come disegni, ed affermava che per essere uno studente di matematica bisogna nascere con . . . la capacità di visualizzare”. Martin Gardner⁴, poi, fece notare: “*in molti casi una dimostrazione noiosa e monotona può essere integrata da una analogia geometrica così semplice e bella che la validità del teorema è quasi vista ad una prima occhiata*”. Egli, nel suo *Mathematical Games* del 1973, parla delle PWWs descrivendole come “look-see diagrams”, dove molto emblematico è il verbo inglese “to see”: esso, infatti, tra i suoi significati riporta anche quello di “to perceive (things) mentally, discern, understand”, ovvero, spesso viene utilizzato con

¹Theodore Eisenberg è professore emerito alla Ben Gurion University of the Negev, Israele, con interessi nel campo della didattica della matematica.

Tommy Dreyfus è professore alla Tel Aviv University; specializzato in didattica della matematica, i suoi interessi di ricerca includono il processo di astrazione in classe e vari aspetti dell’apprendimento e dell’insegnamento a proposito delle dimostrazioni. Egli ama studiare come i significati matematici abbiano origine dalla connessione di concetti e da processi di rappresentazione di oggetti matematici.

²Articolo pubblicato in *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, pubblicato nel 1991 dalla MAA, No. 19.

³Solomon Lefschetz (Mosca, 1884 - Princeton, 1972), è stato un matematico statunitense che ha dato fondamentali contributi alla topologia algebrica, alle sue applicazioni alla geometria algebrica e alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie non lineari. Fu curatore di una delle più prestigiose e importanti riviste di matematica del mondo, gli *Annals of Mathematics*, dal 1928 al 1958.

⁴Martin Gardner (Oklahoma, 1914 - 2010) è stato un matematico, illusionista e divulgatore scientifico statunitense. Per molti anni fu il curatore della rubrica *Mathematical Games* sulla rivista *Scientific American*; autore di molti libri e articoli nel campo della matematica, scienza, filosofia e letteratura.

l'accezione di "comprendere".

Non possiamo allora non riportare anche un pensiero di Yuri Ivanovich Manin⁵: *"Una buona dimostrazione è quella che ci rende più saggi."* Ed ancora, Andrew Gleason⁶ era convinto nell'affermare che: *"Le dimostrazioni non sono date per convincerci che qualcosa sia vero; esse ci sono per mostrarci perché esso è vero."*

Le PWWs riguardano molte aree della matematica: possono essere impiegate per provare teoremi in **geometria, algebra, teoria dei numeri, trigonometria, analisi, disuguaglianze note**, e così via. La prima raccolta *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* di R.B. Nelsen, divide, infatti, le dimostrazioni per argomento in sei capitoli:

1. Geometry and Algebra
2. Trigonometry, Calculus and Analytic Geometry
3. Inequalities
4. Integer Sums
5. Sequences and Series
6. Miscellaneus

Quello che indubbiamente si può affermare, a proposito delle PWWs, è che la dimostrazione che si può costruire attorno a una di queste figure è *naturale, immediata e memorabile*. A volte la comprensione che ne deriva è così diretta che il teorema stesso sembra presentarsi sotto una luce diversa e diventare più chiaro e inevitabile.

Uno scopo delle PWWs è sicuramente quello che il lettore provi curiosità, piacere e soddisfazione nello scoprire o ri-scoprire *in maniera autonoma*, e attraverso la strada della

⁵Yuri Ivanovich Manin (Ucraina, 1937) è un matematico tedesco di origine russo-sovietica, con interessi nella geometria algebrica, nella geometria diofantea, nella logica matematica e nella fisica teorica.

⁶Andrew Gleason (USA, 1921 - 2008) fu un matematico statunitense, giovane ufficiale della marina nella Seconda Guerra Mondiale, decodificò i codici militari tedeschi e giapponesi. Diede notevoli contributi a varie ambiti della matematica e fu uno dei protagonisti della riforma e innovazione dell'insegnamento della matematica a tutti i livelli.

visualizzazione, alcune *eleganti* dimostrazioni di certi teoremi e contenuti matematici.

Ecco cosa alcune riviste di matematica dicono del libro-raccolta di Nelsen:

Il libro è una gradevole collezione di risultati che sicuramente accresceranno il senso geometrico di ognuno e stimoleranno il pensiero matematico. [Cruce Mathematicorum]

Ottenendo uno stratagemma per spiegare a parole quello che già hanno compreso, gli studenti saranno meglio stimolati a ricercare le proprie spiegazioni e giustificazioni . . . il libro offre dei modelli di quel genere di pensiero visuale che spesso viene miseramente trascurato nelle classi. [Choice]

Capitolo 2

Visualizzazione ed Argomentazione in matematica

2.1 Visualizzazione

*Le rappresentazioni visuali, le immagini mentali, le impressioni e le esperienze associate al nome del concetto possono essere tradotte in forme verbali. Ma è importante ricordare che queste forme verbali non sono state le prime cose evocate nella nostra memoria quando abbiamo sentito o visto il nome del concetto... **La gente ricorda gli spetti visuali di un concetto meglio dei suoi aspetti analitici.***

(S. Vinner)

Viviamo immersi in un fiume di immagini: la tecnologia di oggi ha reso incredibilmente facile produrre una quantità inenarrabile di filmati, animazioni, disegni e fotografie, che sono utilizzati principalmente per comunicare. Ma le immagini rappresentano anche un potente *strumento del pensiero*. Chi di noi non ha mai sentito la necessità di tracciare uno schizzo su un foglio per cercare la soluzione di un problema! Produrre immagini è uno straordinario strumento di comunicazione, proverbialmente più efficace delle parole. Ma è possibile usare un'immagine per comprendere in modo più profondo un concetto complicato, oppure disegnare uno schema per seguire il filo di un'idea che, senza un segno grafico, rischierebbe altrimenti di essere persa nella parte non conscia della mente. La mente, infatti, ha bisogno di comunicare anche con sé stessa e per far ciò sa rappre-

sentare oggetti complessi mediante altri oggetti più semplici, come le immagini, la cui creazione è uno fra gli strumenti più efficaci che la mente ha a disposizione per inventare e per capire (non a caso la parola “immaginine” ha la stessa radice di “immaginare”). Le immagini possono rappresentare cose concrete, ma anche concetti astratti. Quanto più l’immagine è diversa dall’oggetto rappresentato, tanto più se ne apprezza il potere espressivo: è possibile, quindi, usare una serie di diagrammi per calcolare la soluzione di un problema, ma si può catturare in un’immagine anche un’intera dimostrazione.

La visualizzazione è un modo di rappresentare “esternamente” oggetti matematici: il ricorso all’immagine, ad esempio, offre allo studente la possibilità di accostarsi gradualmente ed efficacemente all’astrazione algebrica. Molti autori hanno approfondito le questioni connesse alla rappresentazione in matematica; in particolare Raymond Duval fa del tema delle rappresentazione semiotiche e delle articolazioni dei diversi registri linguistici della matematica uno dei due fronti principali in cui si articola la sua ricerca (accanto al tema dell’argomentazione e della dimostrazione). Duval osserva che «gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione... come sono gli oggetti comunemente detti ‘reali’ o ‘fisici’»; pertanto «le diverse rappresentazioni semiotiche di un oggetto matematico sono assolutamente necessarie». Egli evidenzia, tuttavia, che «è l’oggetto rappresentato che importa, e non le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili» e che «la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è dunque un punto strategico per la comprensione della matematica». Per Duval, la varietà dei possibili registri rappresentativi è non solo utile per l’apprendimento, ma addirittura indispensabile. Egli, infatti, afferma che:

«Il funzionamento cognitivo del pensiero umano si rivela inseparabile dall’esistenza di una diversità di registri semiotici di rappresentazione. Se chiamiamo “*sémiosis*” *l’apprendimento o la produzione di una rappresentazione semiotica* e “*noésis*” *l’apprendimento concettuale di un oggetto*, dobbiamo affermare che la *sémiosis* è inseparabile dalla *noésis*.»

Dunque, detta **semiotica** *l’acquisizione di una rappresentazione dei concetti realizzata per mezzo di un sistema di segni* e **noetica** *l’acquisizione concettuale di un oggetto, l’apprendimento dei concetti*, per Duval non c’è noetica senza semiotica.

Tra le possibili rappresentazioni di un “oggetto” matematico, la **rappresentazione grafica e visuale** è assai importante nella didattica della matematica. Lo stesso Duval sottolinea che:

«Le rappresentazioni grafiche sono delle rappresentazioni semiotiche allo stesso titolo di quanto lo siano le figure geometriche, la scrittura algebrica o la lingua. Tuttavia, l'apprendimento mediante le rappresentazioni grafiche esige un particolare lavoro e non è più possibile affidarsi per la loro utilizzazione all'interpretazione spontanea di figure e di immagini.»

Anche uno studio di E. Fischbein, dedicato alla rappresentazione visuale di oggetti matematici ed alla sua importanza nella didattica della matematica, sostiene la precedente tesi di Duval. Fischbein, illustrando la “teoria dei concetti figurali”, infatti, giunge a concludere che:

«L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale. Essa dovrebbe costituire una continua, sistematica, principale attività del docente.»

Se con il termine “*concetto figurale*” intendiamo una sorta di indispensabile “fusione tra concetto e figura”, possiamo affermare, seguendo Fischbein, che:

«il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non può essere considerato un effetto spontaneo dei tradizionali corsi di geometria».

La **visualizzazione**, in qualità di *mezzo per la rappresentazione di oggetti matematici*, assume dunque importanza primaria nella didattica della matematica. Una pratica didattica poco attenta all'utilizzo critico e rivalorizzato della visualizzazione, può comportarne una sua distorta (e a volte addirittura controproducente) utilizzazione.

Nei traguardi per lo sviluppo delle competenze e negli obiettivi specifici di apprendimento stabiliti dalla legislazione vigente nell'ambito della Matematica, si fa un esplicito riferimento all'abilità nel gestire diversi registri di rappresentazione, fin dal curriculum della scuola primaria. Infatti, nelle Indicazioni Nazionali per la scuola dell'infanzia e il primo ciclo d'istruzione si sottolinea:

- Per la scuola Primaria:
“L’alunno [...] riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici [...]”. Tra gli obiettivi al termine della classe III si legge *“classificare figure, in base a una o più proprietà, utilizzando rappresentazioni opportune, a seconda dei contesti e dei fini”*, mentre per quelli al termine della classe V *“costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione”*.
- Per la scuola secondaria di primo grado, tra gli obiettivi si legge:
“rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano; visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali”.

Inoltre, tra gli obiettivi specifici di apprendimento per il primo biennio declinati nelle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici (2010) [12] si legge:

“Al termine del percorso [...] lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati”.

Anche il Quadro di Riferimento del TIMSS Advanced 2015 ¹ per la valutazione della matematica fa esplicito riferimento all’abilità di generare e coordinare diverse rappresentazioni equivalenti di uno stesso “oggetto” matematico. Nella definizione dei tre domini cognitivi in questo quadro di riferimento, in particolare, l’abilità in questione viene riconosciuta essenziale e si ritrova nei comportamenti del:

¹Il TIMSS Advanced 2015 fa parte di una serie di indagini internazionali afferenti alla ricerca TIMSS, promossa dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), la quale ha lo scopo di fornire informazioni ai Paesi partecipanti sul profitto scolastico in matematica e in scienze per migliorare l’insegnamento e l’apprendimento di tale discipline nella scuola primaria e secondaria. In particolare l’indagine, svolta nel 2015 valuta le prestazioni degli studenti all’ultimo anno di scuola secondaria superiore in “matematica avanzata” (in Italia programma forte) e in fisica. Il quadro di riferimento del TIMSS per la valutazione della matematica è organizzato in due dimensioni: una dimensione dei *contenuti*, in cui vengono specificati i domini o gli argomenti da analizzare in matematica (*algebra, calcolo e geometria*) e una dimensione *cognitiva*, in cui vengono specificati i domini o i processi di pensiero da analizzare, ovvero gli insiemi di comportamenti che ci si aspetta dagli studenti quando lavorano con la matematica (*conoscenza, applicazione e ragionamento*).

- *RICONOSCERE* = riconoscere entità che sono matematicamente equivalenti (ad esempio, diverse rappresentazioni della stessa funzione o relazione) (comportamento incluso nel dominio *conoscenza*);
- *RAPPRESENTARE* = generare rappresentazioni alternative equivalenti di una data entità matematica, di una relazione, o di una serie di informazioni (comportamento incluso nel dominio *applicazione*).

La visualizzazione ai tempi dei software di geometria dinamica

La facilità di accesso ai mezzi multimediali, l'abitudine al linguaggio visuale dei mezzi di comunicazione e del computer, hanno notevolmente aumentato gli aspetti non verbali e visuali nell'apprendimento.

La storia della matematica contiene un vasto elenco di esempi legati alla visualizzazione: basti pensare alla Geometria Euclidea e al ruolo centrale che le immagini hanno giocato nella sua comunicazione e diffusione, sottolineato anche dal riferimento ad alcuni strumenti che costituiscono il fondamento delle costruzioni geometriche (riga e compasso, in primis). L'insegnamento, inoltre, continua a servirsi di collezioni di modelli (alcuni dinamici) e di materiali che favoriscono la visualizzazione: si pensi agli "armadi" di materiali di Emma Castelnuovo, fino ai moderni e sempre più diffusi musei interattivi dedicati alla matematica.

Il diffondersi dei computer e delle tecnologie hanno provocato un'autentica rivoluzione per quanto riguarda la visualizzazione di "oggetti" matematici. L'insegnamento, infatti, ha ricevuto un contributo notevole dalla diffusione nella pratica didattica di alcuni strumenti Software di Geometria Dinamica (DGS), come *Cabri-Géomètre* o il diffusissimo *GeoGebra* (e molti altri), grazie ai quali è possibile visualizzare, con relativa facilità, curve, superfici, . . . , che qualche decina di anni fa erano possibili solo per persone molto capaci nel disegno. Con i software di geometria dinamica cambia anche la stessa nozione di figura geometrica, che da statica diventa qualcosa di dinamico.

Le potenzialità di queste nuove tecnologie, come aiuto all'insegnamento e all'apprendimento, sono enormi, ma occorre che chi insegna le sappia "guidare" opportunamente. È infatti opinione comune di chi si occupa di didattica della matematica che tali software, se utilizzati in modo opportuno, favoriscano un tipo di *apprendimento costruttivo* rispetto a quello tradizionale, rendendolo più dinamico ed efficace, e *migliorando la moti-*

vazione degli allievi verso la geometria e in generale verso la matematica. L'uso di DGS, infatti, aiuta a visualizzare ed esplorare diverse configurazioni geometriche relative ad una data figura, permettendo allo studente di scoprirne ed analizzarne proprietà varianti ed invarianti, di individuare relazioni e vincoli tra gli oggetti, nonché la loro dipendenza o indipendenza. Questi software, grazie all'utilizzo del *trascinamento* mettono anche in evidenza la differenza tra “figura” e “costruzione” geometrica, permettendo di validare la figura geometrica costruita. Questi strumenti, inoltre, offrendo la possibilità di integrare registri di rappresentazione diversi (come quello geometrico e quello algebrico), portano lo studente a vedere i materiali costruiti come *figura e teoria legate assieme*, facendo leva sugli aspetti concettuali.

Attraverso i DGS gli studenti possono affrontare problemi di *costruzione*, di *esplorazione* e di *modellizzazione*, e costruendo un collegamento fra l'esperienza percettiva, l'esplorazione pratica e gli aspetti teorici offrono agli alunni la possibilità di sviluppare e maturare alcune fondamentali competenze ed abilità, quali intuire, congetturare, dedurre, mettere alla prova. La naturale curiosità dello studente, infatti, potrebbe spingerlo a porsi domande del tipo “perché una costruzione è stata eseguita in un certo modo”, “perché tra diversi elementi si instaurano determinate relazioni”, a voler cercare di precisare come le proprietà scoperte empiricamente possano essere dedotte dagli assiomi della teoria considerata, e a voler chiarire perché una congettura funziona (dopo essersene convinti grazie all'evidenza visiva). Le risposte a tali domande avviano gli studenti ad un pensiero formale ed argomentativo strutturato, ovvero alla dimostrazione rigorosa, in quanto creano quelle premesse necessarie per far nascere nei discenti la motivazione al dimostrare.

Qualcuno, però, teme che l'uso degli strumenti di geometria dinamica possa anche portare alla perdita di alcune delle competenze tradizionali perseguite tramite l'insegnamento della geometria, come ad esempio il disegno. È indubbia la necessità che lo studente sappia disegnare una figura senza l'aiuto di particolari software. Tuttavia l'uso dello strumento software permette quella “ricchezza di esperienze sulla figura” sopra descritte, impossibile con il solo uso della riga e del compasso. Occorre, dunque, mantenere una continua riflessione ed un costante approfondimento didattico e metodologico da parte dell'insegnante sull'uso dello strumento software integrato con altri strumenti più

tradizionali.

La capacità di rappresentare visivamente “oggetti” matematici con opportuni strumenti rientra tra gli obiettivi di apprendimento stabiliti dalla legislazione vigente nell’ambito della Matematica da perseguirsi in maniera trasversale a partire dalla Scuola Primaria fino alla Scuola Secondaria di Secondo Grado. Le Indicazioni Nazionali per il curriculum della Scuola d’Infanzia e del primo ciclo di istruzione (2012) [13] evidenziano:

- Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria:
“L’alunno [...] riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura [...]; utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) [...].”
- Obiettivi al termine della classe V primaria:
“riprodurre una figura in base ad una descrizione utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria)”;
- Obiettivi al termine della classe III secondaria di primo grado:
“riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria)”.

Anche nelle Indicazioni Nazionali per i Licei si legge:

- Linee generali e competenze:
“gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici”;
- Obiettivi specifici di apprendimento per il primo biennio:
(ambito della Geometria) *“la realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare riga e compasso, . . .), sia mediante programmi informatici di geometria”*.

2.2 Argomentazione

Un’altra importante e centrale competenza nelle attività matematiche è l’**argomentazione**, che rappresenta un obiettivo indispensabile anche della formazione intellettuale, più in generale, del cittadino, da perseguirsi in una prospettiva ad ampio respiro fin dalla scuola

primaria.

Già nelle Indicazioni Nazionali per la scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, infatti, nell'ambito della matematica si fa esplicito riferimento alle capacità argomentative:

- *“La matematica [...] contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, [...]. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti”;*
- Obiettivi di apprendimento al termine della classe III primaria:
“Argomentare sui criteri che sono stati usati per realizzare classificazioni e ordinamenti assegnati”;
- Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado:
“Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. [...] Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione). Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.”

Molti riferimenti alla *pratica dell'argomentazione* si leggono anche nelle Indicazioni Nazionali per i Licei:

- Profilo educativo, culturale e professionale dello studente liceale: *“[...]La cultura liceale consente di approfondire e sviluppare conoscenze e abilità, maturare competenze e acquisire strumenti nelle aree [...] logico-argomentativa, [...]”;*
- Risultati di apprendimento comuni a tutti i percorsi liceali: *“A conclusione dei percorsi di ogni liceo gli studenti dovranno: [...] (area logico-argomentativa) saper sostenere una propria tesi, [...] acquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico, [...]”;* (area scientifica, matematica e tecnologica) *“saper utilizzare le procedure tipiche del pensiero matematico [...]”;*

- Risultati di apprendimento del Liceo scientifico: “*Gli studenti dovranno [...] comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale [...]*”;
- Nell’ambito della Matematica: “*Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni) [...]*”;
- Obiettivi specifici di apprendimento (del primo biennio): (ambito Geometria) “*verrà chiarita l’importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione [...]*”.

Infine, anche il Quadro di Riferimento del TIMSS Advanced 2015, descrivendo il dominio cognitivo del *ragionamento*, include l’abilità di fare deduzioni logiche (basate su specifici presupposti e regole) e giustificare i risultati come necessaria nel comportamento del *GIUSTIFICARE* (= *fornire una giustificazione per la veridicità o la falsità di un’affermazione facendo riferimento a risultati o a proprietà matematiche*).

In ambito scolastico, la scarsa capacità argomentativa spesso porta gli studenti ad avere difficoltà, anche notevoli, nell’affrontare aspetti della matematica non riconducibili alla mera applicazione meccanica di formule, regole, teoremi e tecniche (e, più in generale, limita la loro preparazione culturale).

Occorre, però, trovare una definizione esaustiva ed efficace di cosa significhi “argomentazione”; serve, inoltre, individuare le conoscenze, le abilità e gli atteggiamenti necessari per argomentare. Nel linguaggio corrente, con il termine “argomentazione” si considera ogni discorso logicamente strutturato, prodotto allo scopo di giustificare un’affermazione. Questo approccio, però, presenta un punto debole, ovvero cosa si intenda per “logicamente strutturato”. Limitandosi al solo caso della matematica, infatti, interessano vari tipi di argomentazione:

- l’argomentazione *deduttiva* tipica della dimostrazione;
- le argomentazioni che si appoggiano ad *analogie, esempi, ecc.* per sostenere la plausibilità di un’affermazione;

- le argomentazioni riguardanti il *confronto tra metodi risolutivi diversi di uno stesso problema*, al fine di giustificare la superiorità di uno di essi.

Questa varietà di “tipi” di argomentazione rinvia a diversi modi di “strutturazione logica” del discorso, dunque occorre cercare una definizione sufficientemente precisa che li comprenda tutti e che, allo stesso tempo, escluda altri tipi di discorso (come la giustificazione fondata sull’appello alla fiducia in chi sostiene una determinata posizione).

Un modo semplice per caratterizzare l’argomentazione potrebbe essere quello di partire dalla definizione di *argomento* come “ragione addotta per la validità di un’affermazione” (può trattarsi di un dato, di un’esperienza, del riferimento ad una teoria condivisa, ecc.), e nel considerare poi un’*argomentazione* come “un discorso che coordina diversi argomenti al fine di giustificare un’affermazione”. Una tale definizione, però, utilizza termini come “ragione” e “coordina” che dovrebbero essere a loro volta definiti.

Tra le diverse definizioni che sono state elaborate, più sofisticate di quella precedente, prenderemo in considerazione quella proposta dal filosofo britannico del linguaggio *Stephen Toulmin*, oggi utilizzata da diversi ricercatori nell’ambito della didattica della matematica. Ne *Gli usi dell’argomentazione* (del 1958) Toulmin offre un *modello* che illustra le parti fondamentali di un discorso argomentativo e che “copre” tutti i tipi di argomentazione usualmente utilizzati in matematica, stabilendo dei collegamenti con molti tipi di argomentazione utilizzati in vari ambiti e nella vita quotidiana.

Toulmin considera una argomentazione come costituita da uno o più “*passi di ragionamento*” concatenati. Ciascun passo di ragionamento è a sua volta costituito da:

- un *dato* (“*Data*”), che in matematica chiamiamo “ipotesi”: i fatti o le evidenze usate per provare l’argomento, per fornirgli appoggio;
- una *conclusione* (“*Conclusion*”), ovvero la “tesi”: l’affermazione di cui si discute;
- da un’*inferenza* che serve come ponte per condurre dal dato alla conclusione grazie a una “*regola di garanzia*” (“*Warrant*”) (la motivazione logica generale che giustifica il passo ovvero ne registra esplicitamente la legittimità). La regola di garanzia a sua volta può essere sostenuta ed appoggiarsi ad una “*conoscenza di supporto*” (“*Backing*”), un fondamento che dà credibilità alle garanzie (che può essere, ad

esempio, un sistema di affermazioni appartenente ad una teoria accreditata, come il quadro della geometria euclidea).

Occorre notare che i dati e la conclusione sono sempre *espliciti* e hanno carattere *particolare*, cioè sono propri della situazione specifica (e in matematica sono espressi spesso da affermazioni o asserzioni fatte usando enunciati dichiarativi), mentre la garanzia è *spesso implicita* e ha carattere *generale*.

Nel modello proposto da Toulmin si considera sia il caso di una conclusione incondizionatamente valida (in base al “dato” e alla “regola di garanzia”), sia il caso che la conclusione possa essere valida entro limiti dipendenti da condizioni aggiuntive. La *concatenazione* si caratterizza attraverso il fatto che la *conclusione* di un passo di ragionamento diventa *dato* (o parte del *dato*, ad esempio nel caso di due o più linee di argomentazione che confluiscono in quel dato: “tenuto conto delle conclusioni a cui siamo pervenuti considerando ... e considerando ..., possiamo affermare che ... in quanto ...”) per il passo di ragionamento successivo. Va precisato che, nella modellizzazione di Toulmin, la suddivisione in passi e il loro ordine possono derivare da scelte non univoche, proprio come occorre nel lavoro matematico a seconda del grado di “finezza” del rigore richiesto e accettabile.

Per analizzare un argomento, dunque, si deve comprendere ed attribuire un ruolo e una funzione (Conclusione, Dati, Garanzia) a ciascun enunciato che ne faccia parte (si consideri che questi ruoli non sono tutti sempre rappresentati esplicitamente da enunciati): questo rappresenta il cruciale passaggio dall’argomentazione alla dimostrazione. La figura 2.1 propone una schematizzazione del modello di argomentazione offerto da Toulmin.

Con riferimento alla definizione di Toulmin, occorre che chi argomenta:

1. *possieda sufficienti conoscenze sull’oggetto dell’argomentazione*: esse possono essere dati di partenza, ovvero conoscenze (“warrant” e “backing”) che supportano i passi di ragionamento; in assenza di tali conoscenze l’argomentazione “gira a vuoto” o si inceppa;
2. *sappia gestire sul terreno logico e linguistico i passi di ragionamento e la loro concatenazione*: uso corretto dei connettivi linguistici che esprimono e permettono le inferenze, padronanza logica delle concatenazioni linguistiche dei passi di ragionamento, ecc.; si noti che le teorie sullo sviluppo delle competenze logico-linguistiche e sul funzionamento della mente oggi più accreditate pongono in evidenza il fatto

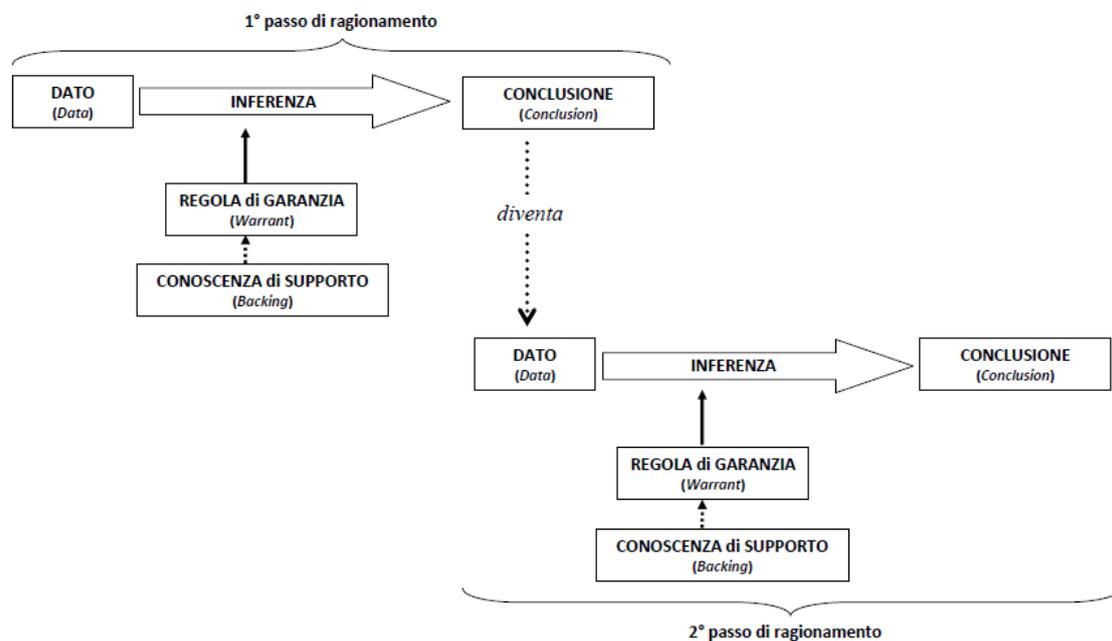


Figura 2.1: Schematizzazione del modello di argomentazione di Toulmin.

che il terreno *logico* non può essere separato dal terreno *linguistico* né in fase di sviluppo intellettuale, né in fase di esercizio di tali competenze (ovvero la prestazione logica si esercita attraverso il linguaggio);

3. *possieda modelli di argomentazione corrispondenti a diversi tipi di giustificazione deduttiva* (ad esempio, in matematica, la dimostrazione nell'ambito di una teoria) e *e ad altre forme di argomentazione* (ad esempio, sempre in matematica, l'invalidazione di enunciati mediante l'uso di contro-esempi, oppure il confronto tra diversi metodi risolutivi di uno stesso problema). Va notato che certe modalità di argomentazione possono essere valide in certi ambiti e non in altri: l'uso di esempi per giustificare un'affermazione è accettabile in molte argomentazioni di uso corrente, mentre non è accettabile in matematica come regola di garanzia ("warrant") per un enunciato (può solo servire per sostenere, debolmente, la plausibilità di una congettura);
4. *abbia interiorizzato i valori culturali insiti nell'argomentazione*, sappia e voglia, quindi, *scegliere la via dell'argomentazione come modalità privilegiata* per far valere le sue ragioni, per giustificare le sue scelte o per assicurare la conformità del suo prodotto (ad esempio, un enunciato in matematica) agli standard culturali della comunità di appartenenza.

Si noti che la prima e la terza condizione descritte rinviano al settore culturale a cui si riferisce l'argomentazione; la seconda, invece, comporta lo *sviluppo di abilità e competenza linguistiche trasversali ai diversi settori culturali*; infine, la quarta richiede una estesa pratica e una forte valorizzazione ambientale.

Il soddisfacimento della seconda e della quarta condizione appare non scontato, tantomeno facile e va curato sul piano culturale e didattico attraverso una progettazione a lungo termine e trasversale, di ampio respiro, a partire dalla scuola primaria, nella prospettiva di una "educazione all'argomentazione" che crei un abito mentale adatto per affrontare l'argomentazione in campo matematico e scientifico.

La prima condizione, inoltre, richiede a tutti i livelli scolastici un *lavoro di costruzione concettuale* (sui concetti oggetto di attività argomentative) attento alla *padronanza dei significati e del linguaggio*. Tuttavia l'avvio alle attività argomentative in campo matematico può essere svolto con contenuti matematici abbastanza semplici e consoni ad un determinato livello scolastico. Inoltre, le attività argomentative e la costruzione di dimostrazioni possono diventare un'occasione importante per rivedere la concettualizzazione di alcuni contenuti, cioè possono contribuire all'individuazione di lacune nella padronanza dei concetti e quindi aiutarne il superamento.

Data la compessità delle condizioni necessarie per l'argomentazione e le difficoltà che gli insegnanti incontrano nell'ottenere sufficienti prestazioni argomentative dalla maggior parte degli studenti ai vari livelli scolastici si possono suggerire, come riportato in [9], alcune "scelte pedagogiche e didattiche generali" che dovrebbero essere seguite per lo sviluppo in verticale (dalla primaria alla scuola secondaria di II grado) di attività sull'argomentazione:

1. Le attività sull'argomentazione (in particolare in matematica) non possono essere confinate in uno "spazio" ristretto dell'offerta formativa, in quanto non si tratta di tecniche o nozioni, ma di un insieme di atteggiamenti, valori, risorse logico-linguistiche da costruire progressivamente: l'argomentare dovrebbe diventare una prestazione che si inserisce in molte attività di ambiti disciplinari diversi.
2. Richieste del tipo "spiega perché", "motiva la tua scelta", "motiva la tua interpretazione", "confronta ... con ..."(nel caso di strategie risolutive di problemi, di ipotesi o congetture, ecc.), "stabilisci se ... e giustifica la tua risposta" dovrebbero esse-

re affiancate a compiti di natura diversa e in ambiti diversi (dalla produzione di ipotesi, alla risoluzione di problemi, alla stesura di progetti, all'analisi di fatti, ...).

3. Le attività sull'argomentazione (per essere incisive e credibili per gli allievi) hanno bisogno di un contesto educativo in cui il giustificare le proprie scelte, il confrontare alternative possibili identificando ed esplicitando i pro e i contro, ecc. sono richieste rivolte frequentemente agli studenti ma anche comportamenti praticati abitualmente dagli insegnanti.
4. L'errore viene vissuto dagli studenti come un rischio inevitabile quando si cercano strade nuove, quando si formulano ipotesi, quando si valutano situazioni. Dunque diventa essenziale e cruciale mettere in campo una "pedagogia dell'errore" in cui la riflessione sulle possibili cause dell'errore e sui suoi effetti, e la ricerca dei modi per superarlo o evitarlo sostituiscano la "sanzione" dell'errore come uno sblocco del processo valutativo dell'insegnante.
5. L'attenzione alla precisione e alla pertinenza del linguaggio verbale dovrebbe essere oggetto di impegno da parte di tutti gli insegnanti e a tutti i livelli scolastici (anche in prestazioni di natura non argomentativa, come nel caso delle narrazioni o delle descrizioni).

Didattica dell'argomentazione come Didattica Laboratoriale

Possiamo pensare alle capacità argomentative come il "prodotto" di un percorso di *didattica laboratoriale*, dove con il termine *laboratorio* si intende uno "spazio" (non necessariamente fisico) in cui la proposta didattica non è quella classica della lezione frontale nella quale si danno, *ex cathedra*, gli strumenti concettuali e teorici da applicarsi poi nelle esercitazioni, ma si propongono agli studenti problemi, lasciando loro il tempo di affrontarli, individualmente o in piccoli gruppi, con un docente che funge da tutor e che interviene solo quando richiesto dagli studenti, limitandosi spesso a precisare le questioni, a proporre altre che possano aiutare gli alunni a trovare autonomamente strategie risolutive e a controllarle. Dunque il termine *laboratorio* rimanda al lavoro, alle dimensioni dell'agire e del fare; evoca anche il concetto di "laboriosità" e quindi attenzione, coinvolgimento, partecipazione al *processo di costruzione del prodotto*. Ecco, allora, che una *didattica dell'argomentazione* ben si inserisce in una tale prospettiva, che non vuole riferirsi ad una scuola fatta di indicazioni pratiche e ricette e tanto meno ad un ambiente nel quale si discuta sul nulla, ma dipinge un luogo di insegnamento-apprendimento volto

alla costruzione di significati, che favorisce la comunicazione e l'interazione tra pari e fra studenti ed insegnante (l'esperto) e che avvia gradualmente al sapere teorico come strumento in cui situare (e dare risposte a) domande del tipo "perché è così?" e "che cosa succederebbe se ...?". La "didattica dell'argomentazione" deve essere perseguita, dunque, come una didattica di tipo laboratoriale, in cui lo studente impara ad individuare strategie risolutive ai problemi proposti, discutendole, argomentandole e giustificandole.

Capitolo 3

La sperimentazione

3.1 Presentazione ed obiettivi del progetto

La sperimentazione condotta è stata costruita attorno alle “Proofs Without Words”, tema che si dimostra perfettamente adatto per un lavoro d’indagine che vuole porsi a cavallo delle due fondamentali competenze matematiche descritte nel precedente capitolo: le dimostrazioni senza parole, infatti, racchiudono al loro interno sia l’aspetto della **visualizzazione** (in quanto illustrazioni di contenuti matematici), sia il seme dell’**argomentazione** (perché, considerate o meno vere e proprie dimostrazioni, come descritto nel primo capitolo, esse aiutano il lettore a vedere il *perché* un particolare fatto matematico è vero e *come* si può iniziare a *provarne* la validità).

Lo scopo principale che questa sperimentazione si pone è quello di rispondere alla seguente **domanda**: *“le Proofs Without Words” possono essere, per gli insegnanti e per gli studenti, uno strumento didattico valido ed efficace utilizzabile per un percorso sull’apprendimento specifico del pensiero argomentativo strutturato? Ovvero, partendo dalle animazioni di alcune Proofs Without Words e sottoponendole agli studenti, quale comportamento dimostrativo e quali capacità di argomentazione manifestano gli alunni?*

Nel tentativo di dare una risposta a questo interrogativo, ci si focalizza su alcuni aspetti e indicatori che possano aiutare a descrivere e a caratterizzare il comportamento dimostrativo degli studenti. Utilizzando alcune dimostrazioni senza parole, si vuole indagare, ad esempio, se il movimento o il protocollo di costruzione delle loro animazioni

possano avere un ruolo nel condurre gli studenti a formulare una congettura, ad individuare quali siano i dati di partenza (le ipotesi) e quale l'obiettivo finale (la tesi) della dimostrazione, e se possano guidarli o meno nella costruzione di un processo deduttivo. Ci si chiede, poi, in che modo lo studente sia riuscito a tradurre questo percorso deduttivo in una dimostrazione scritta formale strutturata, coerente e completa, analizzando quale atteggiamento linguistico abbia adottato, ovvero con quale precisione e rigore abbia utilizzato il linguaggio e se il linguaggio impiegato espliciti un pensiero ed un processo deduttivi oppure se esso assuma un ruolo puramente descrittivo.

Oltre all'obiettivo appena descritto, la sperimentazione vuole porre a *confronto il registro visuale con quello formale*: ci si chiede quali vantaggi e utilità possa avere il registro visuale, se esso possa essere l'approccio prevalente nell'insegnamento e apprendimento della matematica (in particolare nel campo del pensiero argomentativo), oppure se questo registro sia fondamentale ma non basti a sé stesso e debba essere affiancato in modo adeguato da un approccio altrettanto utile e fondamentale come quello formale.

3.2 Contesto scolastico e classi

La sperimentazione è stata realizzata presso l'Istituto di Istruzione Secondaria Superiore "Enrico Mattei" di Latisana e Lignano Sabbiadoro (in provincia di Udine). L'ISIS si è formato dall'accorpamento di tutti gli istituti superiori di Latisana a cui è seguita l'unione con l'ITT di Lignano. Per questo motivo l'ISIS presenta un'offerta formativa molto ricca che, tenendo in considerazione le molteplici esigenze del territorio, propone diversi indirizzi di studio, così suddivisi:

- *Liceo Scientifico* "Ettore Leonida Martin"
- *Liceo Linguistico* "Ettore Leonida Martin"
- *Istituto Tecnico Economico Indirizzo Turistico* "Pietro Savorgnan Di Brazzà"
- *Istituto Tecnico Economico Indirizzo Amministrazione, Finanza e Marketing* "Enrico Mattei"
- *Istituto Tecnico Tecnologico* "Lisio Plozner"

Durante la sperimentazione sono stata accolta in cinque delle classi seguite dal professor Giuseppe Lucilli e dalla professoressa Paola Pilutti, incontrando in totale 102 studenti, distribuiti nelle classi nel seguente modo:

Classe	I	IIa	IIb	III	IV
Numero studenti	26	17	20	24	15

Le classi I, IIa, IIb e IV fanno parte del Liceo Scientifico, mentre la classe III (completamente femminile) appartiene all'indirizzo del Liceo Linguistico.

Le attività della sperimentazione sono state proposte durante una mattinata scolastica di fine anno, precisamente il 17 maggio 2017, vedendo gli studenti protagonisti per un'ora a classe.

3.3 Gli argomenti:

la scelta delle PWWs e le animazioni

Come descritto nel primo capitolo della tesi, le Proofs Without Words spaziano in molte aree della matematica. Le dimostrazioni senza parole interessate dalla sperimentazione in esame coinvolgono i seguenti *ambiti matematici*:

- **Algebra**
- **Geometria**
- **Geometria Analitica**
- **Trigonometria**

Tutte le PWWs coinvolte dalla sperimentazione sono state tratte dalle seguenti fonti:

- Libro "*Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*", di Roger B. Nelsen
- *web*

La scelta delle PWWs e dei relativi contenuti matematici coinvolti è stata dettata da due fattori fondamentali:

- le **classi** a cui sono state rivolte
- il **momento dell'anno scolastico** in cui si è svolta la sperimentazione

Il contenuto di ogni attività didattica va, infatti, ovviamente tarato in base al livello scolastico della classe a cui è indirizzata e in base agli argomenti già trattati: non possiamo, ad esempio, proporre un'attività che coinvolga la Trigonometria ad una classe prima della scuola secondaria di secondo grado, perché gli studenti non posseggono ancora le conoscenze per affrontarla. Nel nostro caso, le classi coinvolte coprono un notevole arco scolastico, spaziando dalla prima alla quarta superiore. Anche il periodo in cui si svolge un'attività didattica non è secondario. In particolare, nel momento dell'anno scolastico in cui è stata proposta la sperimentazione, metà maggio, le classi avevano già affrontato gli argomenti presi in esame dalle PWWs selezionate. Questo è un dato di cui si dovrà tener debitamente conto per la lettura e l'analisi dei risultati della sperimentazione.

Per questi motivi, dopo una mia prima selezione dei materiali disponibili tra le molteplici PWWs, assieme al professor Lucilli, sono state individuate **20 dimostrazioni senza parole**, opportunamente suddivise in base alle classi di destinazione.

Successivamente ho animato ciascuna PWWs selezionata utilizzando il software di geometria dinamica *GeoGebra 5*, versione che offre la possibilità di creare delle animazioni anche tridimensionali. Tutte le dimostrazioni animate oggetto della sperimentazione sono riportate nell'*Appendice A* sottoforma di sequanza di screenshots, per dare all'osservatore un'idea del loro funzionamento e mostrare l'effettivo movimento. La tabella 3.1 seguente illustra la suddivisione delle PWWs in base alle classi a cui sono state rivolte:

Tabella 3.1: Suddivisione delle PWWs in base alle classi di destinazione.

Classe di destinazione	PWWs coinvolte	Ambito matematico
I e II	<p>Teorema di Pitagora - equiscomponibilità quadrati</p> <p>Teorema di Pitagora - dimostrazione di Euclide</p> <p>Teorema di Pitagora - equivalenza ed equiscomponibilità</p> <p>Teorema di Pitagora - Perigal</p> <p>Teorema di Pitagora - trapezio e triangolo</p> <p>Teorema di Pitagora - circonferenza e triangoli simili</p> <p><i>Solo per le classi seconde:</i></p> <p>Distanza punto - retta</p>	<p>Geometria e Algebra</p> <p>Geometria Analitica</p>
III linguistico	<p>Quadrato del binomio</p> <p>Cubo di un binomio</p> <p>Prodotto di due binomi (somma e somma)</p> <p>Prodotto di due binomi (somma e differenza)</p> <p>Completamento del quadrato del binomio</p> <p>Aree algebriche (somma)</p> <p>Aree algebriche (differenza)</p>	<p>Algebra</p> <p>Algebra</p> <p>Algebra</p> <p>Algebra</p> <p>Algebra</p> <p>Algebra</p> <p>Algebra</p>
IV	<p>Legge dei coseni I</p> <p>Legge dei coseni II</p> <p>Seno e Coseno della somma - su circonferenza goniometrica</p> <p>Seno e Coseno della somma - con triangolo rettangolo</p> <p>Formule di duplicazione del Seno e del Coseno</p> <p>Formule di bisezione della tangente</p>	<p>Trigonometria</p> <p>Trigonometria</p> <p>Trigonometria</p> <p>Trigonometria</p> <p>Trigonometria</p> <p>Trigonometria</p>

Le nostre dimostrazioni senza parole non sono state animate tutte con la stessa modalità: alcune di esse si prestavano ad essere presentate in maniera totalmente dinamica, altre richiedevano di essere mantenute più statiche. Si possono, quindi, distinguere quattro modalità di animazione delle PWWs:

- Animazioni “**dinamiche**”: sono comandate da uno *slider*; l’osservatore agisce sullo slider ed osserva gli spostamenti di parti della costruzione che producono, così, l’evoluzione dell’animazione. Sono state animate in questo modo la maggior parte delle dimostrazioni:
 - Aree algebriche (differenza)
 - Aree algebriche (somma)
 - Completamento del quadrato del binomio
 - Cubo di un binomio (animazione in 3D)
 - Prodotto di due binomi (somma e differenza)
 - Prodotto di due binomi (somma e somma)
 - Quadrato del binomio
 - Teorema di Pitagora - dimostrazione di Euclide
 - Teorema di Pitagora - equiscomponibilità quadrati
 - Teorema di Pitagora - Perigal

La sequenza di immagini in figura 3.1, ad esempio, illustra l’animazione dinamica della dimostrazione senza parole riguardante il *cubo del binomio*.

- Animazioni “**statiche**”: le dimostrazioni senza parole sono state semplicemente tradotte e costruite con GeoGebra; l’osservatore esamina semplicemente l’intera illustrazione. Solo due PWWs sono state animate in questo modo:
 - Seno e Coseno della somma - con triangolo rettangolo
 - Seno e Coseno della somma - su circonferenza goniometrica

La figura 3.2 mostra l’animazione statica riguardante il *seno e coseno della somma di due angoli - sulla circonferenza goniometrica*.

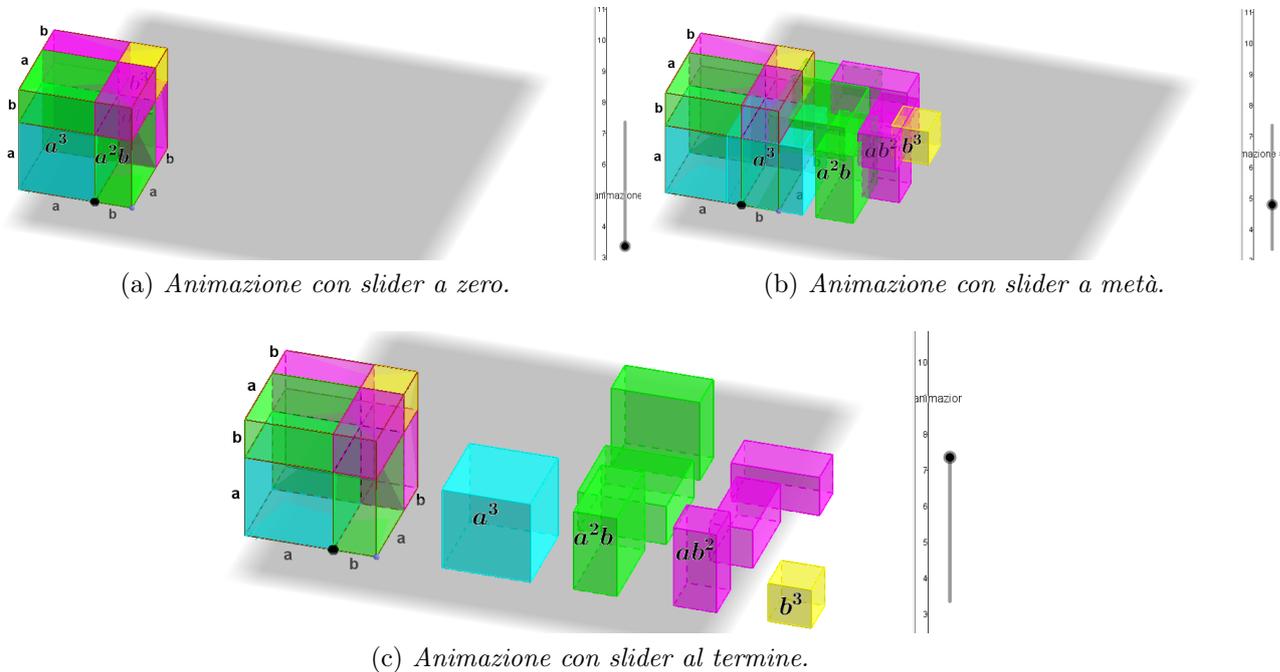


Figura 3.1: Animazione dinamica della PWW *Cubo del binomio*.

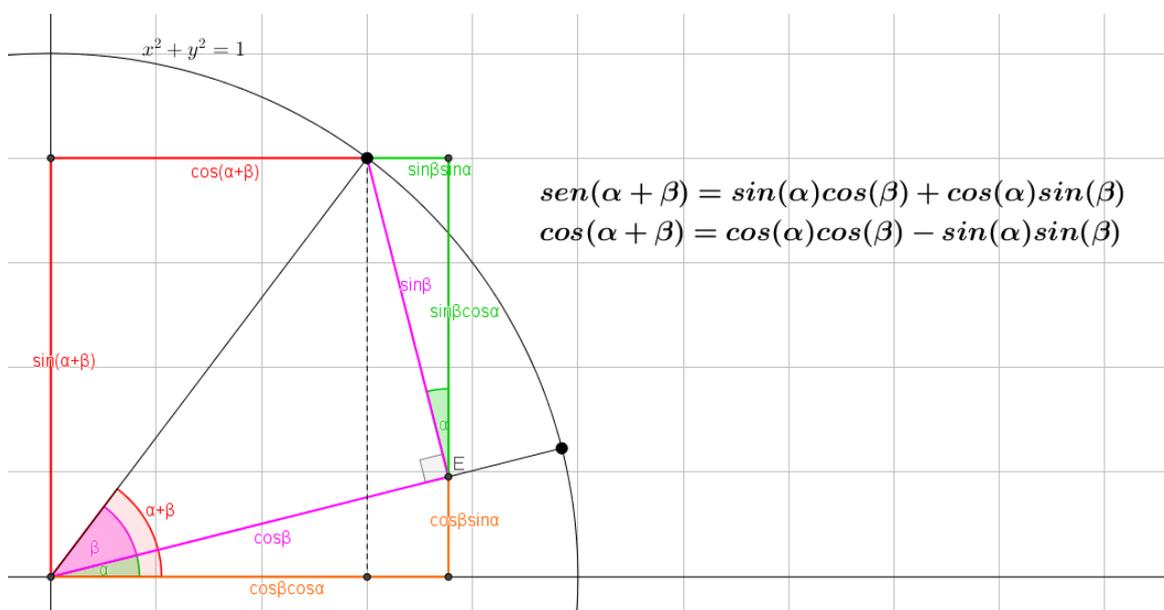


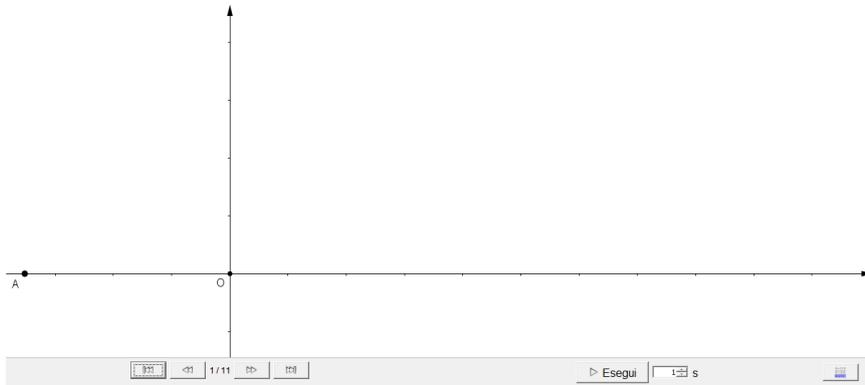
Figura 3.2: Animazione statica della PWW *Seno e Coseno della somma di due angoli - sulla circonferenza goniometrica*.

- Animazioni “**con barra di navigazione**”: la *barra di navigazione* visualizzata in basso permette di vedere la costruzione cronologica della figura, di cui vengono mostrati solo i passi di costruzione più significativi, selezionati appositamente dal protocollo di costruzione; l’osservatore può cliccare su “esegui” per avviare l’animazione automatica della costruzione della figura (eventualmente mettendo in “pausa” o rallentando il tempo di visualizzazione), oppure può decidere di cliccare personalmente sui pulsanti che permettono di avanzare o retrocedere di un singolo passo costruttivo per volta. Le seguenti PWWs sono state animate con questa modalità:
 - Distanza punto - retta
 - Formule di bisezione della tangente
 - Formule di duplicazione del Seno e del Coseno
 - Legge dei coseni II
 - Teorema di Pitagora - circonferenza e triangoli simili
 - Teorema di Pitagora - trapezio e triangolo

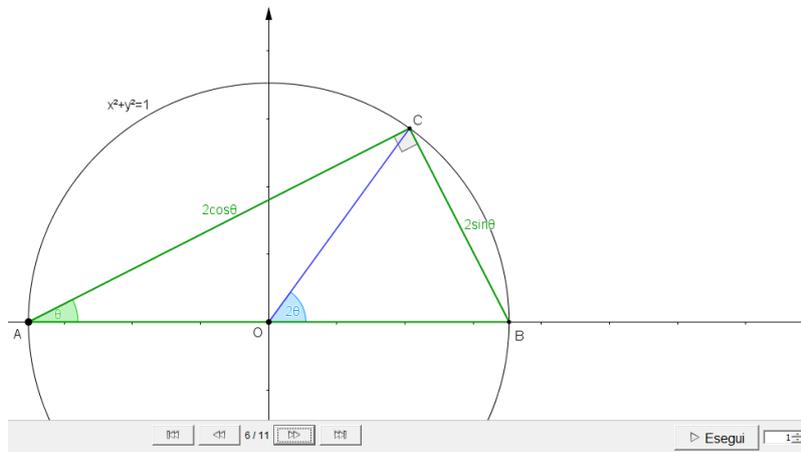
La sequenza di immagini in figura 3.3, ad esempio, illustra l’animazione con barra di navigazione della dimostrazione senza parole riguardante le *formule di duplicazione del seno e del coseno*.

- Animazioni “**dinamiche con barra di navigazione**”: presentano sia la *barra di navigazione* (che permette di visualizzare passo passo la costruzione preliminare della figura che illustra parte della dimostrazione senza parole), sia lo *slider* (il quale mostra l’evoluzione dell’animazione); l’osservatore utilizza dapprima la barra di navigazione e poi agisce sullo slider. Solo due PWWs sono state animate con questa modalità:
 - Legge dei coseni I
 - Teorema di Pitagora - equivalenza ed equiscomponibilità

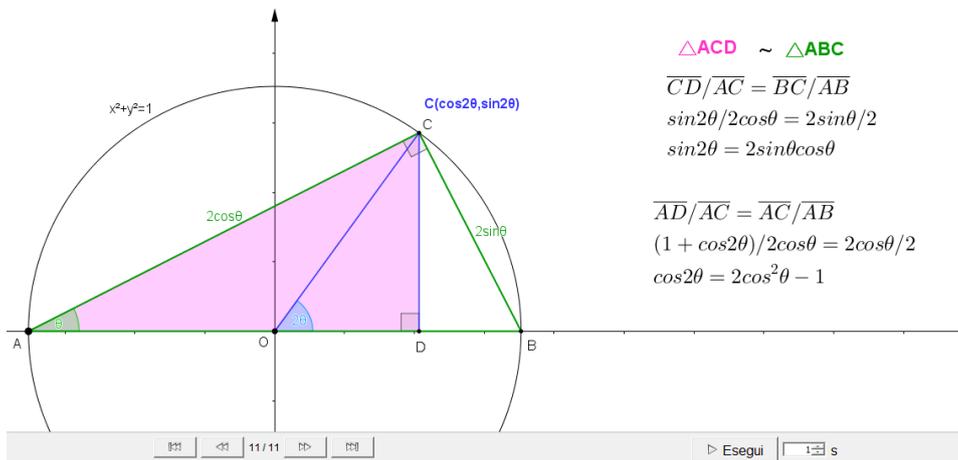
La sequenza di immagini in figura 3.4, ad esempio, illustra l’animazione con barra di navigazione e slider della dimostrazione senza parole riguardante la *legge dei coseni I*.



(a) Animazione al primo passo della costruzione.

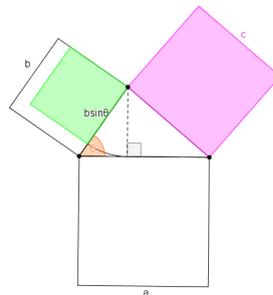
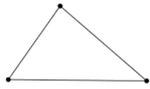


(b) Animazione a metà costruzione.



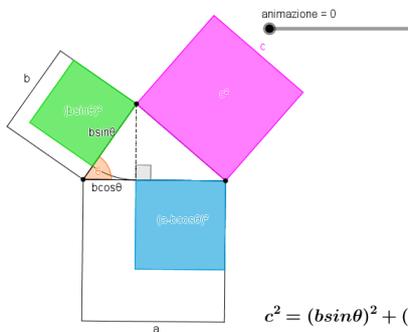
(c) Animazione al termine della costruzione.

Figura 3.3: Animazione con barra di navigazione della PWW *Formule di duplicazione del seno e del coseno.*



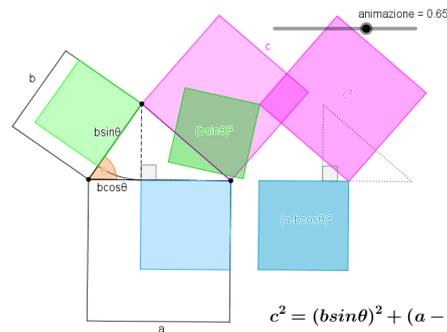
(a) Animazione al primo passo della costruzione.

(b) Animazione a metà costruzione.



$$c^2 = (bsin\theta)^2 + (a - bcos\theta)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta$$

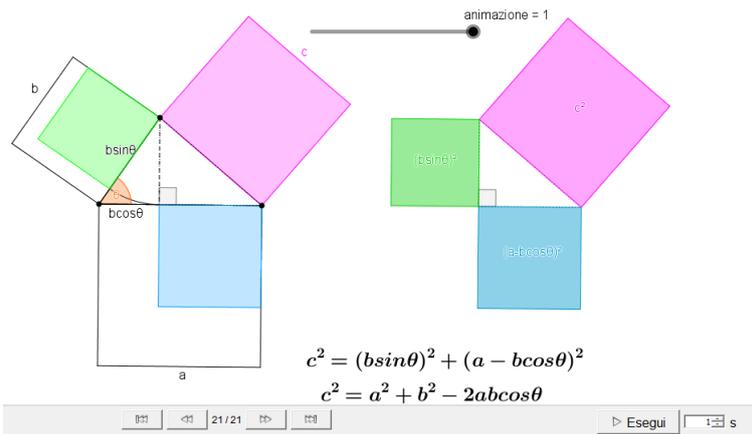


$$c^2 = (bsin\theta)^2 + (a - bcos\theta)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta$$

(c) Animazione al termine della costruzione e slider a zero.

(d) Animazione con slider a metà.



$$c^2 = (bsin\theta)^2 + (a - bcos\theta)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta$$

(e) Animazione con slider al termine.

Figura 3.4: Animazione con barra di navigazione e slider della PWW Legge dei coseni I.

3.4 L'attività proposta

Considerato il periodo impagnativo di maggio, le tempistiche dedicate alle attività proposte agli studenti hanno dovuto conciliare le necessità della sperimentazione con gli impegni scolastici delle classi. Con il professor Lucilli è stato concordato di concentrare l'intervento nelle classi in un'unica mattinata di cinque ore. Ho dunque incontrato cinque classi, impegnandole un'ora ciascuna: nell'ordine una classe I, una classe II (che nel seguito chiameremo "IIa"), ancora una classe II ("IIb"), una classe IV ed infine una classe III linguistico.

Come descritto nel precedente paragrafo, per ogni classe sono state scelte sei o sette PWWs e successivamente animate; per ciascuna di esse è stata predisposta, su supporto cartaceo, un'**attività** da proporre agli studenti, contenente diverse richieste, suddivise in quattro nuclei. Il lavoro con le classi si è svolto nel laboratorio d'informatica; in questo modo è stato possibile caricare le animazioni delle PWWs in una cartella condivisa con tutti i computer presenti in aula.

All'inizio di ciascuna attività è stata inserita un'**immagine** che illustra la dimostrazione senza parole oggetto d'esame, in modo da riprendere e riassumere l'animazione con GeoGebra della PWW coinvolta. Le consegne contenute nell'attività sono raggruppabili nei seguenti quattro nuclei d'indagine:

- **Fase del RICONOSCIMENTO.** Inizialmente si chiede allo studente se riconosce l'argomento e la relazione illustrata; in tal caso si richiede di esplicitare quale sia il Teorema o l'argomento in esame e di scrivere la relazione algebrica che indica la tesi della dimostrazione illustrata (ove tale relazione algebrica non sia già esplicitata).
- **Stesura della DIMOSTRAZIONE FORMALE.** Successivamente si chiede allo studente di analizzare attentamente come è stata costruita la figura proposta dall'animazione e, partendo dall'illustrazione e senza dare nulla per scontato, gli si richiede di *ricostruire la dimostrazione* proposta e di *esprimerla in forma chiara e sintetica, spiegando e motivando* bene sia *le indicazioni* che accompagnano la figura, sia *il ragionamento che conduce alla tesi*.

- **Questionario sul rapporto tra il REGISTRO FORMALE e quello VISUALE.** Si prosegue, poi, con una serie di domande riguardanti l'*efficacia* del *registro visuale* in relazione a quello *formale* classico, chiedendo allo studente:
 - se ha studiato e si ricorda la dimostrazione formale del Teorema illustrato, ed eventualmente di provare ad esporla;
 - quanto, per lui, è efficace l'approccio visuale utilizzato dalla dimostrazione senza parole in esame;
 - se trova questo approccio visuale alla dimostrazione in esame più o meno efficace dell'approccio formale e perché;
 - se l'approccio illustrato alla dimostrazione l'ha aiutato a comprendere meglio il Teorema in esame e perché;
 - se, secondo lui, questo tipo di dimostrazione illustrata gli sarà utile nel ricordarla più a lungo.

- **Risoluzione di un esercizio.** Infine si chiede allo studente di risolvere un esercizio chiave ed immediato sull'argomento in esame, domandandogli, poi, se la dimostrazione illustrata gli è stata utile nella risoluzione dell'esercizio e perché.

Ciascuno di questi quattro ambiti d'indagine riguarda uno specifico obiettivo della sperimentazione, di cui la parte concernente la stesura formale della dimostrazione ne costituisce il nucleo centrale.

Nell'*Appendice B*, per questioni di spazio, è riportata a titolo esemplificativo una sola scheda delle attività proposte, in quanto tutte le schede cartacee dei questionari distribuite agli studenti contengono le medesime domande e richieste, differenziandosi solamente nell'illustrazione iniziale (che riprende l'animazione della PWW oggetto di quell'attività specifica) e nell'esercizio proposto. Tutti gli esercizi presentati in ciascuna attività sono stati raccolti e riportati nell'*Appendice C*.

Gli studenti di ciascuna classe son stati suddivisi in coppie o terzetti, assegnando una PWW animata ad ogni gruppo (alcune animazioni sono state attribuite a gruppetti diversi).

Successivamente agli studenti sono state date le seguenti *consegne ed indicazioni per lo svolgimento dell'attività*:

1. Ciascun gruppo accederà alla cartella condivisa “Animazioni” e selezionerà l’animazione della dimostrazione senza parole ad esso assegnata.
2. L’animazione può essere visualizzata quante volte sarà necessario per osservare il suo funzionamento e comprenderne al meglio il contenuto.
3. Alcune animazioni sono costituite semplicemente da una costruzione geometrica statica, altre sono comandate da uno slider su cui bisogna agire per farla funzionare, in altre ancora è visualizzata in basso la barra di navigazione con la quale si possono vedere i passi fondamentali della costruzione illustrata. Ad ogni modo, per comprendere al meglio il contenuto dell’animazione si può agire su tutti gli oggetti mobili per modificarne la posizione e ragionare sulle conseguenze.
4. Alcune animazioni sono accompagnate da un’equazione o da qualche sintetica indicazione.
5. Ciascuno studente del gruppo ha ricevuto la propria copia cartacea dell’attività da svolgere.
6. Il gruppetto servirà per confrontarvi, per discutere e per riordinare assieme le idee. È chiesto, però, a ciascuno di voi di cimentarsi nello *svolgere e completare le consegne sui fogli in maniera **individuale**, impostando autonomamente il proprio testo e compilando il questionario **in modo personale***.
7. Buon lavoro!

Il tempo a disposizione non è stato sufficiente a riprendere le dimostrazioni per una discussione finale assieme alla classe, di conseguenza ho girato per i gruppi per cercare di cogliere le loro difficoltà, stimolare i ragionamenti, fare loro delle osservazioni (cercando di non influenzare in maniera decisiva il loro lavoro) e, qualora fosse stato necessario, eventualmente indicare un “metodo di lavoro”, suggerendo loro di cercare dapprima di giustificare le indicazioni presenti nell’animazione e successivamente di cercare una relazione tra alcuni elementi della figura che, scritta in forma algebrica, potesse condurre alla proprietà da dimostrare.

Capitolo 4

L'analisi critica dei risultati

Procediamo ora con l'analisi dei risultati di ciascuno dei quattro nuclei di indagine di cui si compone l'attività proposta nella sperimentazione, ovvero:

- la fase di riconoscimento dell'argomento e della relazione illustrata
- la fase della formalizzazione scritta della dimostrazione
- il questionario sul rapporto tra il registro formale e quello visuale
- la fase della risoluzione di un esercizio.

Focalizzeremo l'attenzione sui risultati prodotti dall'analisi dei protocolli delle attività raccolti nelle classi I e IV del Liceo Scientifico e della classe III del Liceo Linguistico. I dati di cui tratteremo provengono, quindi, dall'analisi e dalla tabulazione di 65 protocolli di attività.

4.1 Il riconoscimento

Dopo aver selezionato dalla cartella condivisa l'attività ad essi assegnata, averla visualizzata più volte osservandone con attenzione il contenuto ed il funzionamento, aver provato ad agire su alcuni elementi della costruzione per comprendere al meglio il contenuto della PWW illustrata, agli studenti viene chiesto se *riconoscono* il teorema o la relazione animata e, in caso di risposta affermativa, di *denominare* la relazione in-

dividuata e di *scrivere* esplicitamente *la relazione algebrica* che esprime il teorema da dimostrare. La tabella 4.1 mostra le risposte degli studenti a queste prime richieste.

Tabella 4.1: Fase del riconoscimento.

Domanda	SÌ	NO	Imprecisa	Non risp
Riconosce la relazione/teorema illustrato	62 95,4%	3 4,6%		
Denomina correttamente la relazione/teorema	54 83,1%	4 6,2%	1 1,5%	6 9,2%
Scrive correttamente la relazione algebrica (non per la cl. IV→tot.50 protocolli)	39 78% +3 discorsive (6%)	8 16%		

La quasi totalità degli studenti (62 su 65, ovvero il 95,4%) ha riconosciuto il contenuto dell'animazione della PWWs analizzata, mentre la percentuale di coloro che l'hanno anche denominata correttamente scende all'83,1% (54 studenti su 65). A primo impatto questa differenza di risultato può apparire ingiustificata: perché riconoscono un contenuto ma non lo chiamano in maniera corretta? In realtà, analizzando le risposte dei 5 studenti che ne hanno dato un'errata o incompleta denominazione, emerge che, probabilmente, i ragazzi hanno associato alla relazione il nome sbagliato per distrazione (ad esempio scrivendo "quadrato del binomio" in luogo di "completamento del quadrato del binomio"), oppure hanno definito la relazione in maniera discorsiva ma utilizzando un linguaggio impreciso e confuso (ad esempio "somma di angoli in seno e coseno e somma di angoli in coseno nell'altra figura").

I 6 studenti (il 9,2%) che, invece, non rispondono alla domanda fanno pensare ad un "disorientamento": va precisato che il contenuto dell'animazione ad essi assegnata era un'identità algebrica non tradizionalmente affrontata in classe e tanto meno identificabile con una nomenclatura del tipo "quadrato del binomio", "cubo del binomio", ecc.; dunque, si può immaginare che ciò abbia portato questi studenti a riconoscere il contenuto espresso dalla relazione illustrata, ma a non saper dare ad esso un nome.

La stessa motivazione si può avanzare anche per i 3 studenti (il 4,6%) che non hanno riconosciuto la relazione illustrata: anch'essi si sono trovati nella stessa situazione dei 6 alunni precedenti, ma in questo caso, l'incapacità di trovare una nomenclatura adatta

alla relazione, li ha portati a dare una risposta negativa al quesito. Tuttavia, tutti e tre hanno scritto correttamente la relazione algebrica oggetto di dimostrazione.

La terza domanda, ovvero la richiesta di scrivere la relazione algebrica da dimostrare, non è stata posta agli studenti di IV, in quanto nelle dimostrazioni senza parole ad essi rivolte erano già incluse una o due equazioni (come spesso accade nelle PWWs) con lo scopo di condurre l'osservatore all'individuazione della tesi illustrata. I risultati, dunque, si riferiscono solo ai protocolli raccolti nelle classi I scientifico e III linguistico. In queste classi l'84% degli studenti (42 su 50) scrivono correttamente la relazione da dimostrare, di cui però 3 la formulano in maniera discorsiva e non algebrica. I rimanenti 8 studenti (pari al 16%) commettono errori, spesso di distrazione, nella scrittura algebrica (ad esempio dimenticano gli esponenti "al quadrato" nella formulazione del teorema di Pitagora) oppure scrivono solo una parte dell'equazione da dimostrare.

4.2 Le dimostrazioni formali degli studenti

Il cuore di questa sperimentazione è lo **studio del comportamento dimostrativo** degli studenti di fronte alla richiesta della stesura per iscritto di una dimostrazione formale, a partire dall'animazione di una PWW.

La consegna precisa che viene data loro è la seguente: *“Analizza come è stata costruita la figura proposta dall'animazione. A partire dall'illustrazione, ricostruisci la dimostrazione proposta e poi esprimila, per iscritto, in forma chiara e sintetica, spiegando e motivando bene sia le indicazioni che accompagnano la figura, sia il ragionamento che conduce alla tesi. Non dare nulla per scontato!”*.

È importante sottolineare e richiamare all'attenzione un aspetto che va costantemente tenuto presente per la lettura e l'interpretazione dei risultati di analisi: agli studenti è stato esplicitamente raccomandato di provare a cimentarsi in *maniera individuale* nella scrittura formalizzata della dimostrazione. Una parte degli alunni non ha esaudito questa richiesta: gli studenti appartenenti ad alcuni gruppetti di lavoro hanno scritto la dimostrazione in maniera identica tra loro; tuttavia si ritiene che il piccolo numero di

ragazzi costituente ciascun gruppetto non abbia falsato o inciso in maniera determinante sull'interpretazione dei risultati della ricerca.

4.2.1 I criteri di analisi

Per analizzare le dimostrazioni scritte dagli studenti si sono scelti una serie di **criteri osservabili**. La scelta di tali criteri segue le considerazioni fatte sul modello di argomentazione di Toulmin (descritto nel secondo capitolo), si ispira anche all'idea di una "didattica dell'argomentazione di tipo laboratoriale" ed, inoltre, è stata orientata dalla consapevolezza del forte intreccio esistente tra la lingua naturale e il linguaggio della matematica durante la produzione di argomentazioni, dimostrazioni e spiegazioni a contenuto matematico, in quanto la prestazione logica si esercita attraverso il linguaggio naturale, dunque il terreno "logico" non può essere separato dal terreno "linguistico".

Sono, quindi, stati scelti dei criteri che analizzano le dimostrazioni prodotte dagli studenti dal punto di vista della **forma**, in quanto una corretta traduzione in linguaggio formalizzato non può prescindere dalla correttezza della produzione scritta anche sotto l'aspetto grammaticale, sintattico e della punteggiatura: scrivere correttamente un testo è vincolo essenziale per la corretta comunicazione e trasmissione dei contenuti; altri criteri esaminano esclusivamente il **contenuto** delle dimostrazioni; infine si è individuata una serie di criteri **ibridi** che si collocano a metà tra la forma e il contenuto.

I criteri che analizzano le dimostrazioni dal punto di vista della forma sono i seguenti:

1. Utilizza un *linguaggio ed una simbologia adeguati e specifici* (padronanza e pertinenza del linguaggio specifico: algebrico, geometrico, relazionale, ...).
2. Utilizza una *sintassi grammaticale corretta*.
3. Scrive correttamente, *senza errori grammaticali*.
4. Utilizza *correttamente* la *punteggiatura*.
5. Utilizza prevalentemente una *sintassi semplice* caratterizzata da frasi brevi, semplici e da coordinate.
6. Utilizza prevalentemente una *sintassi articolata* caratterizzata da frasi lunghe, complesse e da subordinate.

7. Utilizza il *gerundio*.
8. Utilizza *correttamente i connettori linguistici*.
9. Utilizza un *linguaggio "impersonale"* ("si traccia, si costruisce, ...") oppure "*personale*" ("prendo, tracciamo, ...").

I criteri che esaminano esclusivamente il contenuto delle dimostrazioni sono i seguenti:

1. *Individua correttamente le ipotesi* ("data").
2. *Esplicita le ipotesi*.
3. *Individua correttamente la tesi* ("conclusion").
4. *Esplicita la tesi*.
5. *Individua correttamente la regola di garanzia* ("warrant"), anche sottointendendola (ovvero giustifica il passaggio deduttivo).
6. *Esplicita la regola di garanzia*.

Infine, i criteri ibridi a metà tra la forma e il contenuto sono i seguenti:

1. Esprime una *corretta e chiara concatenazione dei passi di ragionamento*.
2. *Esplicita tutti i passi di ragionamento* (non salta passaggi).
3. *Esplicita tutte le regole di garanzia* (non dà nulla per scontato).
4. Il *linguaggio* utilizzato esplicita un *processo deduttivo*.
5. Il *linguaggio* utilizzato assume un ruolo *puramente descrittivo*.
6. La stesura della dimostrazione *segue la costruzione crono-logica dell'animazione*.

Inizialmente si esporranno i dati quantitativi raccolti dall'analisi dei protocolli, condotta secondo i criteri sopra descritti. Successivamente si decriveranno alcuni profili inerenti al comportamento dimostrativo assunto dagli studenti, maggiormente interessanti e significativi.

4.2.2 Analisi delle dimostrazioni: i risultati

I dati raccolti attraverso l'analisi delle dimostrazioni stese dagli studenti sono stati mantenuti divisi per classe: questa scelta permette di rilevare ed evidenziare con maggiore facilità alcuni aspetti interpretativi interessanti.

Ci concentriamo inizialmente sulla lettura e il confronto dei dati delle due classi del Liceo Scientifico, la I e la IV. Successivamente allargheremo l'analisi completandola con il raffronto anche alla classe III dell'indirizzo Linguistico.

Classi I e IV Scientifico

Recuperiamo il quadro della situazione ricordando i contenuti matematici protagonisti delle animazioni rivolte a ciascuna classe. Tutte le PWWs proposte agli studenti di I illustrano vari modi (precisamente sei) di dimostrare il Teorema di Pitagora; mentre gli alunni di IV si sono confrontati con dimostrazioni senza parole relative a leggi e formule trigonometriche (per maggior dettagli si veda tabella 3.1).

Per quanto riguarda la **forma** utilizzata dagli studenti nella scrittura delle dimostrazioni si ricavano i risultati riassunti in tabella 4.2.

Si nota, innanzitutto, che tutti gli studenti di entrambe le classi hanno mostrato padronanza nell'utilizzo pertinente di un linguaggio specifico e adeguato, e di una simbologia pressoché corretta. Un unico studente, di IV, non è stato valutabile: dal suo elaborato si evince che egli non abbia affatto compreso la richiesta (con una frase descrive in maniera incompleta, discorsiva e in modo confuso una sola delle due relazioni algebriche illustrate).

Guardando alla correttezza delle produzioni scritte "in italiano" (ovvero nel linguaggio naturale), si ricava che le due classi sostanzialmente si equivalgono sia nell'utilizzo di una sintassi corretta (circa il 73% in entrambe), che nell'attenzione a non commettere errori grammaticali (circa l'80% degli alunni sia di I che di IV). Coloro i quali commettono alcuni errori di sintassi o grammaticali sono una percentuale ridotta, minore per la classe IV, probabilmente più concentrati nell'esecuzione "matematica" della consegna e quindi distratti nell'aspetto linguistico.

Tabella 4.2: Analisi delle dimostrazioni rispetto alla forma.

Criteri di analisi	Classe I			Classe IV			Classe III Ling.					
	SÌ	NO	In parte	N.C.	SÌ	NO	In parte	N.C.	SÌ	NO	In parte	N.C.
Padronanza e pertinenza del linguaggio specifico	26 100%				14 93%			1 6,67%	14 58,3%	10 41,7%		N.C.
Sintassi grammaticale corretta	19 73,1%	4 15,4%		3 11,5%	11 73,3%	1 6,67%		3 20%	19 79,2%	5 20,8%		
Assenza di errori grammaticali	22 84,6%	1 3,8%		3 11,5%	12 80%			3 20%	24 100%			
Punteggiatura corretta	9 34,6%	11 42,3%		6 23,1%	9 60%	3 20%		3 20%	7 29,2%	17 70,8%		
Sintassi semplice	11 42,3%	11 42,3%		4 15,4%	4 26,67%	6 40%	2 13,3%	3 20%	1 4,2%	23 95,8%		
Sintassi articolata	11 42,3%	11 42,3%		4 15,4%	7 46,67%	4 26,67%	1 6,67%	3 20%	23 95,8%	1 4,2%		
Utilizzo del gerundio	9 34,6%	14 53,8%		3 11,5%	12 80%			3 20%	15 62,5%	9 37,5%		
Utilizzo corretto dei connettori linguistici	19 73,1%	1 3,8%		6 23,1%	12 80%			3 20%	9 37,5%			15 62,5%
Linguaggio impersonale o personale	Imper. 13 50%	Per. 1 3,8%	A metà 9 34,6%	Per. 3 11,5%	Imper. 4 26,67%	Per. 7 46,67%	A metà 1 6,67%	Per. 3 20%	Imper. 14 58,3%	Per. 9 37,5%	A metà 1 4,2%	

Va sottolineato, ad ogni modo, che tali errori sono circoscritti a singoli episodi, quindi non denotano una grave incapacità di tali alunni nello scrivere correttamente in italiano. Le percentuali cambiano nettamente se si analizza, invece, l'utilizzo della punteggiatura: il 60% degli studenti di IV la inserisce correttamente, mentre in I solo il 34% dei ragazzi, probabilmente perché, meno abituati alla "stesura" di una dimostrazione, hanno concentrato le loro forze nella sua "costruzione" piuttosto che nella sua "scrittura".

Focalizzando l'attenzione sulla *tipologia della sintassi* utilizzata gli studenti, si osserva che gli alunni di I si dividono equamente tra coloro i quali utilizzano una sintassi semplice, composta da frasi brevi e coordinate, e coloro che preferiscono una sintassi più articolata, fatta da frasi lunghe e con molte subordinate. Si trova, invece, che un quinto degli alunni di IV (circa il 20%) segue uno stile ibrido, ovvero passa da una sintassi semplice e lineare ad una più complessa, o viceversa; inoltre, la maggioranza degli studenti della classe più avanzata preferisce utilizzare principalmente una sintassi articolata (il 46,67%), mentre solo il 26,67% la semplifica. Questa caratteristica è rafforzata dal fatto che addirittura l'80% degli studenti di IV utilizza, anche più volte in un periodo, verbi coniugati al *gerundio*, i quali, come è risaputo, contribuiscono sensibilmente a complicare la sintassi, allungando le frasi e appesantendo notevolmente l'esposizione, la comprensibilità e la leggibilità del periodo stesso. Nemmeno gli studenti di I sono immuni da questa tendenza, ma la percentuale di coloro che utilizzano il gerundio scende sensibilmente (53.8%).

Per quanto concerne l'utilizzo dei connettori linguistici gli studenti delle due classi mostrano una simile capacità: l'80% degli alunni di IV li usa in maniera pertinente e corretta e il 73,1% dei ragazzi di I. Soprattutto tra gli studenti della classe inferiore, si riscontrano casi in cui il connettore linguistico "quindi" viene sostituito dal simbolo matematico di implicazione.

Considerando l'imposizione generale delle "produzioni dimostrative" degli studenti si rileva che l'esatta metà degli alunni di I preferisce uno *stile* di esposizione *impersonale* e che, invece, un'altra loro consistente percentuale (il 34,6%) non mantiene uno stile costante, passando dal personale all'impersonale, o viceversa. Queste preferenze si invertono in IV, dove quasi la metà degli studenti imposta la dimostrazione su uno stile *personale* e solo il 6,67% non mantiene uno stile fisso.

Gli studenti ritenuti "non valutabili" dal punto di vista di tutti questi aspetti, ri-

guardanti la forma, stendono una dimostrazione prettamente schematica e simbolica, non discorsiva, quindi non analizzabile sotto il profilo di una produzione linguistica e sintattica.

Analizziamo, ora, le dimostrazioni dal punto di vista del solo **contenuto**. I dati relativi sono riportati in tabella 4.3.

Dai dati raccolti emergono in maniera lampante due differenze nel comportamento dimostrativo degli alunni di I rispetto ai compagni di IV.

Innanzitutto si nota in maniera evidente la maggiore difficoltà degli studenti di I nell'individuare in maniera chiara e corretta quali siano le *ipotesi* da cui partire con il procedimento dimostrativo e quale la *tesi* da dimostrare.

Solo la metà di loro le individua correttamente (contro l'86,8% degli studenti di IV), mentre il 38,5% non dimostra questa capacità. Dagli elaborati degli alunni di IV, d'altro canto, si percepisce che questi studenti individuano correttamente le ipotesi ma spesso non le esplicitano: la percentuale, infatti, scende dall'86,8% di coloro che le individuano al 66,6% di chi anche le presenta in maniera esplicita. Al contrario, in I si osserva la tendenza opposta: la percentuale degli studenti che esplicitano le ipotesi passa dal 50% di chi le individua al 61,5%. Questo fa pensare che molti di questi alunni esplicitino degli elementi delle animazioni delle PWWs esaminate senza essere coscienti che si tratta di ipotesi.

Identici meccanismi si instaurano nelle due classi anche per quanto riguarda l'individuazione e l'esplicitazione della tesi. Infatti, di nuovo, l'86,8% degli studenti di IV individuano correttamente la tesi (o si percepisce che lo facciano), ma solo il 66,6% la esplicita (in aggiunta, il 13,3% la esprime in maniera incompleta). Per quanto riguarda gli studenti di I - che si dimostrano leggermente più abili nell'individuare la tesi (61,5%) piuttosto che le ipotesi (il 50% evidenziato prima) - la percentuale di coloro che esplicitano la "conclusion" sale leggermente fino al 65,4% rispetto al 61,5% di coloro che la individuano (o si percepisce lo facciano).

Tabella 4.3: Analisi delle dimostrazioni rispetto al contenuto.

Criteri di analisi	Classe I			Classe IV			Classe III Ling.				
	SÌ	NO	N.C.	SÌ	NO	A metà	N.C.	SÌ	NO	A metà	N.C.
Individua correttamente le HP (<i>data</i>)	13 50%	10 38,5%	3 11,5%	13 86,8%	1 6,6%	A metà	1 6,6%	17 70,8%	3 12,5%		4 16,7%
Esplicita le HP	16 61,5%	7 27%	3 11,5%	10 66,6%	4 26,8%		1 6,6%	16 66,7%	8 33,3%		
Individua correttamente la TH (<i>conclusion</i>)	16 61,5%	7 27%	3 11,5%	13 86,8%	1 6,6%		1 6,6%	13 54,2%	8 33,3%		3 12,5%
Esplicita la TH	17 65,4%	6 23,1%	3 11,5%	10 66,6%	2 13,3%	2 13,3%	1 6,6%	15 62,5%	9 37,5%		
Individua correttamente la reg. di gar. (<i>warrant</i>)	4 15,4%	19 73,1%	3 11,5%	9 60%	5 33,4%		1 6,6%	7 29,2%	17 70,8%		
Esplicita la regola di garanzia	2 7,7%	23 88,5%	1 3,8%	2 13,3%		alcune sottointese	1 6,6%		21 87,5%	3 12,5%	

Il secondo aspetto che differenzia notevolmente le due classi riguarda l'individuazione delle regole di garanzia ("warrant"). Molti degli studenti di I (19 su 26, pari al 73,1%), quasi i tre quarti, infatti, non costruiscono una vera dimostrazione, ma si limitano a tradurre in modo discorsivo ciò che è illustrato nell'animazione, o ne descrivono a parole le fasi di costruzione: non portano quasi mai delle giustificazioni (né implicite, né tantomeno esplicite) alle affermazioni fatte, né motivano, di norma, i passi del loro ragionamento. Solo per una ristretta percentuale di questi alunni (15,4%) si coglie dai loro elaborati un tentativo giustificazione delle proprie affermazioni, ma solo il 7,7% (2 studenti su 26) le porta esplicitamente. Al contrario, gli studenti di IV dimostrano un comportamento più attento e puntuale per quanto riguarda la giustificazione dei propri passi di ragionamento: il 60% di essi individua correttamente le regole di garanzia che permettono e motivano i passi deduttivi da loro effettuati, nonostante la maggior parte di questi studenti non le esplicitino tutte (solo 2 alunni su 15, pari al 13,3%, lo fanno). Per la maggioranza degli studenti, infatti, si percepisce implicitamente dai loro elaborati il fatto che essi abbiano individuato la regola di garanzia che sostiene un determinato passo di ragionamento, ma ne esplicitano alcune, lasciandone la maggior parte sottointesa. Questa difficoltà, dunque, accomuna entrambe le classi, ma si evidenzia un netto miglioramento e una notevole crescita nelle capacità degli studenti di IV. Infine, la presenza di un 34% di studenti (5 su 15, ovvero un terzo) che non dimostra in modo deciso la capacità di portare giustificazioni alle proprie affermazioni fa pensare che, in IV, i meccanismi argomentativi degli alunni non abbiano ancora raggiunto la completa maturazione e il pieno sviluppo.

Analizziamo ora gli aspetti **ibridi**, ovvero quelle caratteristiche delle dimostrazioni che si pongono a metà tra la forma e il contenuto.

Innanzitutto, ci si aspetta che una rigorosa dimostrazione matematica segua un percorso logico-deduttivo ordinato, lineare chiaro e preciso.

Dall'analisi dei dati raccolti (riportati in tabella 4.4) si osserva che, per la classe I, 18 studenti su 26 (pari al 68,2%) segue nella propria stesura della dimostrazione una chiara e corretta concatenazione dei passi di esposizione. Solo l'11,5% di essi (3 su 26), però, non salta passaggi, ovvero esplicita tutti i passi di ragionamento. Questo perché, come sottolineato in precedenza, la maggior parte degli alunni di I si limitano a tradurre in

modo discorsivo ciò che è illustrato nell'animazione, o ne descrivono a parole le fasi di costruzione: la concatenazione delle affermazioni fatte, quindi, risulta chiara e corretta, ma esse non denotano, di fatto, dei veri "passi di ragionamento" (nel senso descritto dal modello di argomentazione di Toulmin). Infatti, per più della metà degli studenti di prima (il 53,9%, 14 su 26), il *linguaggio* utilizzato nelle dimostrazioni formali da essi scritte assume un ruolo prettamente *descrittivo*; mentre solo per il 23,1% di questi alunni (6 su 26) il linguaggio *veicola e traduce un processo deduttivo*. Si osserva, poi, un 11,5% dei casi (3 su 26) in cui il linguaggio impiegato nelle dimostrazioni scritte assume entrambi i ruoli.

Al contrario, gli studenti di IV scrivono le dimostrazioni mostrando un linguaggio che esplicita e traduce in maniera evidente un processo deduttivo per il 66,6% di casi (due terzi degli alunni, 10 su 15); solo uno studente utilizza il linguaggio in maniera prettamente descrittiva. Anche in questa classe resta un 13,3% dei casi (2 studenti su 15) in cui il linguaggio assume entrambi i ruoli. Resta in linea con questi dati anche il fatto che, in questa classe, 11 alunni su 15 (pari al 73,4%) mostrino, nel proprio percorso deduttivo, una corretta e chiara concatenazione delle affermazioni, esplicitando tutti i passi di raginamento nella dimostrazione formale da essi scritta.

Infine, va evidenziato che la grande maggioranza degli studenti, sia nella classe I (l'80,8%) che in IV (il 73,4%), abbiano seguito l'evoluzione cronologica della PWW animata da essi esaminata; si può ipotizzare che la leggera differenza di queste due ultime percentuali, a discapito degli alunni di IV, sia dovuta al fatto che alcune animazioni delle PWWs proposte agli studenti della classe avanzata fossero totalmente "statiche", dunque gli studenti coinvolti da queste dimostrazioni senza parole non hanno potuto godere dei "suggerimenti" ispirati invece dal movimento delle animazioni più dinamiche.

Riassumendo, dalle differenze tra le due classi rilevate nell'analisi dei dati appena condotta, si nota un'*evoluzione* nella costruzione e nell'esposizione di una dimostrazione formalizzata. Si evince, quindi, che nel passaggio dalla classe I alla IV di un Liceo Scientifico (indirizzo di studi in cui si affronta una matematica già piuttosto impegnativa) gli studenti hanno *maturato e messo a punto un meccanismo di argomentazione*, passando

Tabella 4.4: Analisi delle dimostrazioni in base ai criteri ibridi tra forma e contenuto.

Criteri di analisi	Classe I				Classe IV				Classe III Ling.			
	SÌ	NO	A metà	N.C.	SÌ	NO	A metà	N.C.	SÌ	NO	A metà	N.C.
Corretta e chiara concatenazione dei passi	18 69,2%	4 15,4%		4 15,4%	11 73,4%	3 20%		1 6,6%	6 25%	18 75%		
Esplicita tutti i passi di ragionamento	3 11,5%	19 73,1%		4 15,4%	11 73,4%	3 20%		1 6,6%		24 100%		
Esplicita tutte le regole di garanzia		22 84,6%		4 15,4%	2 13,3%	12 80%		1 6,6%		24 100%		
Il linguaggio esplicita un processo DEDUTTIVO	6 23,1%	14 53,9%	3 11,5%	3 11,5%	10 66,6%		2 13,3%	3 20%	2 8,4%	17 70,8%		5 20,8%
Il linguaggio ha un ruolo DESCRITTIVO	14 53,9%	6 23,1%	3 11,5%	3 11,5%	1 6,6%	10 66,6%	2 13,3%	2 13,3%	17 70,8%	2 8,4%		5 20,8%
Segue la costruzione cronologica dell'animaz.	21 80,8%	2 7,7%		3 11,5%	11 73,4%	3 20%		1 6,6%	19 79,2%	5 20,8%		

da un *pensiero argomentativo* ancora *NON strutturato* ad un pensiero argomentativo decisamente *più strutturato e completo*. Gli studenti di IV, infatti, si dimostrano più maturi nelle capacità argomentative, manifestano un comportamento dimostrativo più completo e puntuale: individuano le ipotesi con facilità, quasi sempre esplicitandole correttamente; di norma focalizzano ed esplicitano la tesi; sono attenti nel giustificare i loro passi di ragionamento e le loro conclusioni, anche se spesso lasciano tali motivazioni implicite.

Classe III Linguistico

È interessante allargare il confronto con i risultati prodotti dagli elaborati di una classe appartenente al Liceo Linguistico, un indirizzo di studi diverso dal precedente perché caratterizzato da motivazioni e impostazioni di fondo differenti dall'indirizzo Scientifico.

Tutte le PWWs proposte alle studentesse di questa classe concernono la possibilità di visualizzare alcuni procedimenti algebrici elementari; l'idea centrale che caratterizza tali procedimenti consiste nella rappresentazione di numeri reali attraverso grandezze geometriche. La dimostrazione di alcune elementari identità algebriche, infatti, può essere ricavata direttamente dall'osservazione delle figure geometriche: molte operazioni possono essere visualizzate attraverso figure (segmenti, quadrati, rettangoli) e si basano principalmente sui principi di equiestensione e di additività delle aree.

Anche i dati relativi all'analisi degli elaborati di questa classe sono contenuti nelle tabelle 4.2, 4.3 e 4.4 precedenti.

Sotto gli aspetti inerenti la **forma** delle dimostrazioni e della produzione scritta, le studentesse della classe III linguistico mostrano dei comportamenti sostanzialmente in linea con i compagni delle classi I e IV scientifico, specie per quanto riguarda l'utilizzo di una corretta sintassi grammaticale e la sostanziale (in questo caso totale) assenza di errori grammaticali; si dimostrano, però, più distratte nell'inserimento della punteggiatura (solo 7 su 24, pari al 29,2%, la utilizzano correttamente). Va sottolineato, che, nel complesso, queste alunne dimostrano una padronanza e pertinenza del linguaggio e della simbologia specifici decisamente inferiori a quella dei compagni più piccoli (il 58,3% contro il 100% degli studenti di I). Per quanto riguarda la struttura sintattica utilizzata, dai

loro elaborati emerge con grande evidenza che le studentesse di III preferiscano, molto più che nelle altre classi, una sintassi articolata (23 di esse su 24, pari al 95,8%), costruiscono, quindi, frasi lunghe e intrecciate da legami di subordinazione; questa caratteristica è rafforzata, anche in questo caso, dal forte utilizzo di verbi declinati al gerundio (per il 62,5% delle ragazze) che, di nuovo, contribuiscono a complicare la struttura sintattica dei periodi, nonché la loro leggibilità. Ancora in linea con i compagni di I, poco più della metà delle studentesse di III espone la propria dimostrazione preferendo uno stile impersonale; a differenza delle altre due classi, esse mantengono uno stesso stile (sia esso personale o impersonale) per tutta la stesura della dimostrazione. Curioso risulta, invece, il fatto che il 62,5% di queste alunne non utilizzi connettori linguistici nel corso della dimostrazione.

Per quanto riguarda i soli aspetti di **contenuto**, sono molto interessanti e curiosi i dati che emergono, in particolare, dal paragone tra le dimostrazioni formalizzate scritte dalle studentesse di III linguistico con quelle dei compagni di I scientifico. Le studentesse di III sono state più abili dei compagni di I nell'identificare quali fossero le ipotesi delle dimostrazioni (il 70,8% di esse, contro il 50% dei compagni), ma non molto più capaci nell'esplicitarle (66,7% contro il 61,5% della I); hanno, però, dimostrato una capacità leggermente minore dei compagni nell'individuare e nell'esprimere in maniera corretta la tesi da dimostrare. I dati della classe III risultano, invece, pienamente in linea con quelli della classe I rispetto all'individuazione delle regole di garanzia: le alunne di III non hanno praticamente mai dato giustificazioni alle proprie affermazioni. Se concentriamo l'attenzione sugli aspetti **ibridi** tra forma e contenuto, infatti, appare lampante (in maniera ancora più accentuata rispetto agli studenti di I) che le ragazze di III non costruiscono una dimostrazione, ma si limitano a tradurre in modo discorsivo ciò che è illustrato nell'animazione, o ne descrivono a parole le fasi di costruzione: non impostano mai, dunque, un percorso deduttivo che dalle ipotesi conduca alla dimostrazione della tesi (questo spiega perché esse non abbiano utilizzato connettori linguistici). Il ruolo che assume il linguaggio utilizzato, infatti, è esclusivamente descrittivo (per il 70,8 % dei casi, affiancato da un 20,8% di studentesse che tutto sommato inseriscono nelle loro descrizioni alcune affermazioni di carattere deduttivo). Le loro produzioni, quindi, non sono composte da alcun passo di ragionamento (se non in rari e limitati casi).

Infine, anche le studentesse di III linguistico si fanno guidare, in linea di massima, dall'evoluzione cronologica della PWWs animata, esattamente come gli alunni delle altre classi.

In conclusione, dalle osservazioni finora avanzate a proposito del comportamento dimostrativo delle studentesse di III linguistico, appare chiaro che, nel tentativo di formalizzare discorsivamente l'animazione della PWWs assegnata, esse hanno assunto e fatto uso di un atteggiamento dimostrativo desunto, per imitazione, dal comportamento dell'insegnante o dei compagni: utilizzano, infatti, l'atteggiamento linguistico atteso e tradizionalmente tipico delle dimostrazioni matematiche (con costrutti linguistici tipici, quali, ad esempio, l'uso del gerundio o la costruzione di periodi lunghi e ricchi di subordinate), ma dimostrano di non aver compreso che cosa significhi effettivamente *dimostrare* e quale sia il *funzionamento* di una dimostrazione, ben diverso da una descrizione.

4.2.3 Analisi delle dimostrazioni: i protocolli

Sarebbe interessante riportare un'analisi dettagliata di tutti gli elaborati raccolti durante la sperimentazione: infatti ciascuno di essi offre all'insegnante notevoli spunti di riflessione sulle conoscenze (relativamente allo specifico argomento in esame) e sulle abilità argomentative del singolo studente; ne dipinge, dunque, un quadro generale utile da cui l'insegnante (attento) può trarre indicazioni, rimandi e criteri di valutazione sul percorso di insegnamento-apprendimento da proporre a quello specifico studente. Tuttavia, per non appesantire la trattazione con l'analisi di tutti i protocolli, si sceglie di riportare solamente i casi più significativi, descrivendone alcuni maggiormente rappresentativi e particolarmente interessanti.

Mostriamo, quindi, tre "profili" di dimostrazione (uno per ciascuna classe) esemplificativi delle caratteristiche emerse dall'analisi dei risultati esposta nei paragrafi precedenti, relativamente al comportamento dimostrativo assunto dagli alunni.

Profilo A

Mostriamo due comportamenti dimostrativi molto diversi tra loro e assunti da due studenti di I, che nel seguito chiameremo rispettivamente *studente A* e *studente B*.

Figura 4.1: Dimostrazione formalizzata dallo studente A della classe I.

• Riconosci il Teorema illustrato? (S) NO

Se sì, quale Teorema illustra? ... Teorema di Pitagora

Scrivi la relazione algebrica che esprime il Teorema da dimostrare.

... $CA^2 + CB^2 = AB^2$

• Analizza come è stata costruita la figura proposta dall'animazione.

A partire dall'illustrazione, ricostruisci la dimostrazione proposta e poi esprimila, per iscritto, in forma chiara e sintetica, spiegando e motivando bene sia le indicazioni che accompagnano la figura, sia il ragionamento che conduce alla tesi.

Non dare nulla per scontato!

!!!

$\hat{A}ABC$ è un triangolo rettangolo. Su due cateti sono costruiti due esomi quadrati la cui somma è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa.

$\hat{B}UE \cong \hat{C}HD \Rightarrow BCHU \cong BEDC \cong BC^2$

$\hat{A}NF \cong \hat{D}CH \Rightarrow ACMN \cong ACDF \cong AC^2$

\blacksquare $FBCA$ e $DEBC$ sono traslati.

$SPAC \cong PREC$

$SPR \cong ACB$

$AC^2 + CB^2 = AB^2$

Dal primo impatto visivo, si nota che lo studente A ha prodotto una dimostrazione formale fortemente schematizzata; non possiamo, quindi, trarre informazioni particolarmente dettagliate riguardo l'utilizzo del linguaggio cosiddetto "naturale". Ci concentriamo, quindi, sull'analisi della **struttura argomentativa** della dimostrazione.

Dall'affermazione con cui si apre la dimostrazione, " $\triangle ABC$ è un triangolo rettangolo", deduciamo che lo studente ha individuato ed esplicitato, in maniera completa e corretta, le ipotesi. La frase subito successiva, "*Sui due cateti sono costruiti due quadrati la cui somma è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa*", rappresenta l'esplicitazione corretta in forma discorsiva della tesi, che però *anticipa* il resto della dimostrazione, ovvero i passi deduttivi.

Quanto segue è scritto interamente utilizzando il simbolismo matematico in modo persoché corretto e preciso. L'unica osservazione che si può avanzare è far notare che nelle due catene di uguaglianze $BCHU \cong BEDC \cong BC^2$ e $ACMN \cong ACDF \cong AC^2$ lo studente utilizza il simbolo \cong di "congruenza" volendo, invece, affermare che i parallelogrammi in esame sono tra loro "equiestesi" (avrebbe quindi dovuto usare il simbolo \equiv). Si trova, inoltre, un'altra imprecisione nella nomenclatura del parallelogramma $SPCA$: probabilmente per distrazione (in quanto non si riscontrano altri errori simili) l'alunno ha invertito le ultime due lettere scrivendo $SPAC$. Ad ogni modo, interpretando in maniera discorsiva i vari passi di ragionamento fatti dallo studente, si ottiene un percorso deduttivo che segue passo passo l'evoluzione cronologica dell'animazione considerata:

- 1° **passo di ragionamento** la congruenza tra i due triangoli $\triangle BUE$ e $\triangle CHD$ porta all'equivalenza tra il quadrato rosa chiaro e il parallelogramma rosa scuro (prima figura);
- 2° **passo di ragionamento** la congruenza tra i due triangoli $\triangle ANF$ e $\triangle DCH$ porta all'equivalenza tra il quadrato verde chiaro e il parallelogramma verde scuro (prima figura);
- 3° **passo di ragionamento** i parallelogrammi verde scuro e rosa scuro (prima figura) vengono traslati;
- 4° **passo di ragionamento** il parallelogramma verde scuro è equivalente al parallelogramma rosa scuro (seconda figura);
- 5° **passo di ragionamento** i due triangoli $\triangle SPR$ e $\triangle ACB$ sono congruenti;

6° passo di ragionamento nel triangolo ABC la somma dei due quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa.

I passi di ragionamento seguono un ordine logico abbastanza lineare. Sia nel primo che nel secondo passo lo studente distingue il dato dalla conclusione ed esplicita l'inferenza tra i due attraverso l'uso del simbolo di implicazione \Rightarrow . Il quarto passo, invece, è errato: probabilmente l'alunno voleva invece affermare che $SPCA \cong ACDF$ e che $PRBC \cong CBED$. L'ultimo passo riprende nuovamente la tesi (anticipata all'inizio della dimostrazione) ma ora scritta in maniera simbolica.

Va assolutamente sottolineato, però, che lo studente *A non giustifica alcun passaggio in modo esplicito*, lasciando sottintese tutte le regole di garanzia, perdendo, così, nella chiarezza espositiva della concatenazione dei vari passaggi, in quanto il lettore deve sforzarsi di ricostruire il percorso deduttivo pensato dall'alunno.

La figura 4.2 mostra la dimostrazione formalizzata scritta dallo studente B.

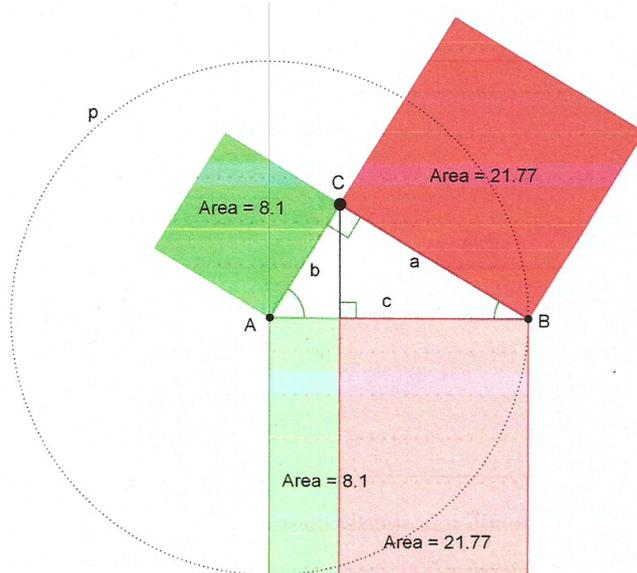
Questo elaborato è visivamente molto diverso dal precedente. Leggendone il testo si nota chiaramente che la dimostrazione è suddivisa in due parti:

1. *“La somma dell'area del quadrato costruito sul lato b ... produce il quadrato costruito su c (quindi c^2)”*
2. *“dunque, per trovare c , dobbiamo semplicemente trovare la radice dell'area del quadrato dato dalla somma di a^2 e di b^2 ... che da come risultato c ”*

La prima parte rappresenta la formulazione discorsiva della tesi da dimostrare: ciò ci porta a sostenere che lo studente abbia individuato la tesi, ma dalla stesura non si percepisce se esso fosse consapevole che si trattasse dell'obiettivo finale della dimostrazione. La seconda parte, di fatto, esprime in effetti un passo deduttivo, non volto, però, alla costruzione di un percorso di ragionamento che conduca alla tesi esplicitata prima: in questo passaggio, infatti, lo studente non fa altro che *utilizzare e applicare la tesi* per giustificare un'affermazione che esprime una *conseguenza operativa* della tesi stessa.

Lo studente B, anche se in modo non chiaro e lineare, individua le ipotesi esplicitandole solo in parte: indica, infatti, le misure dei lati a , b , e c inserendole nella formulazione

Figura 4.2: Dimostrazione formalizzata dallo studente B della classe I.



- Riconosci il Teorema illustrato? (SÌ) NO

Se sì, quale Teorema illustra? *PI. THOMA*

Scrivi la relazione algebrica che esprime il Teorema da dimostrare. ~~Area = a² + b² = c²~~

$$\sqrt{b^2 + a^2} = c$$

- Analizza come è stata costruita la figura proposta dall'animazione.

A partire dall'illustrazione, ricostruisci la dimostrazione proposta e poi esprimila, per iscritto, in forma chiara e sintetica, spiegando e motivando bene sia le indicazioni che accompagnano la figura, sia il ragionamento che conduce alla tesi.

Non dare nulla per scontato!

... LA SOMMA DELL'AREA DEL QUADRATO COSTRUITO SUL LATO b (di area b^2) E DEL QUADRATO COSTRUITO SUL LATO a (di area a^2) PRODUCE IL QUADRATO COSTRUITO SU c (QUINDI c^2); ... SUNKQUE, PER TROVARE c, DOBBIAMO SEMPLICEMENTE TROVARE LA RADICE DELL'AREA DEL QUADRATO DATO DALLA SOMMA DI a^2 E DI b^2 . DETTO QUESTO SI DEVE LA FORMULA $\sqrt{a^2 + b^2}$... CHE DA COME RISULTATO c

discorsiva della tesi, ma non dichiara esplicitamente che il procedimento parte dalla costruzione di un triangolo rettangolo avente i lati delle suddette misure.

Facendo una media tra i due comportamenti dimostrativi descritti appena sopra, si ottiene un profilo caratterizzato per:

- un **pensiero argomentativo** *non del tutto strutturato*: lo studente ha dimostrato discrete abilità nell'individuare le ipotesi e la tesi che esplicita in maniera non del tutto consapevole; non porta nessuna giustificazione alle affermazioni fatte; a volte mostra un processo e percorso deduttivo in cui i passi di ragionamento seguono un ordine logico accettabile, mentre altre volte si limita a descrivere discorsivamente il risultato finale o il procedimento seguito dall'animazione;
- un *linguaggio* che a volte *veicola e traduce* un **processo deduttivo** non del tutto strutturato, mentre a volte *assume un ruolo principalmente* **discorsivo**;
- una **forma** *linguisticamente corretta*: lo studente dimostra buona padronanza del linguaggio specifico ed utilizza in modo pertinente una simbologia pressoché adeguata e corretta; quando utilizza una scrittura discorsiva l'alunno impiega una sintassi grammaticale corretta, non commette errori grammaticali, ma non cura la punteggiatura; a volte utilizza costrutti che includono il gerundio e preferisce una sintassi articolata; adotta uno stile contemporaneamente personale e impersonale; altre volte lo studente utilizza una formalizzazione prettamente schematica e simbolica.

Profilo B

Mostriamo una dimostrazione scritta da una studentessa della classe III ad indirizzo linguistico.

Figura 4.3: Dimostrazione formalizzata da una studentessa di III Linguistico.

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

animazione = 1

• Riconosci la relazione illustrata? SÌ ~~NO~~

Se sì, quale relazione illustra?

Scrivi la relazione algebrica da dimostrare. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

.....

• Analizza come è stata costruita la figura proposta dall'animazione.

A partire dall'illustrazione, ricostruisci la dimostrazione proposta e poi esprimila, per iscritto, in forma chiara e sintetica, spiegando e motivando bene sia le indicazioni che accompagnano la figura, sia il ragionamento che conduce alla tesi.

Non dare nulla per scontato!

*Partendo da un quadrato di lato ab sommato ad un quadrato di lato a-b
 ... si ~~giunge~~ ottengono due nuove figure: la prima è data da il...
 ... quadrato di lato a cui si aggiunge un quadrato di lato b; la...
 ... seconda è di forma uguale alla prima ma al quadrato a-b ~~non~~ vengono
 ... aggiunti due segmenti di lato b x a e due quadrati di lato b x b...*

La prima cosa che emerge in modo evidente sono gli errori in alcuni concetti mate-

matici e nella loro scrittura simbolica. Già nella prima riga, infatti, si legge “un quadrato di lato ab ”, mentre dall’immagine si desume che il lato del primo quadrato è suddiviso in due parti lunghe rispettivamente a e b , dunque la misura del lato vale $a + b$. Errori simili si ritrovano in fondo alla dimostrazione dove, nel tentativo di esplicitare la misura dei lati dei rettangoli azzurri nel quadrato maggiore più a destra, la studentessa afferma “al quadrato $a - b$ vengono aggiunti due segmenti di lato axb e due quadrati di lato bxb ”. In questa affermazione si notano vari errori, sia di scrittura simbolica matematica, che concettuali. Innanzitutto la ragazza dimentica di esplicitare “al quadrato di lato $a - b$ ”; successivamente, quelli che vengono aggiunti non sono “segmenti” ma “rettangoli”, le cui dimensioni misurano b e $a - b$, non certamente axb , espressione che, invece, esprime un’area e non la lunghezza di un segmento. Quest’ultimo errore si ripete nell’affermazione “due quadrati di lato bxb ” in cui, nuovamente, la studentessa scambia la misura della lunghezza del segmento “lato del rettangolo” (che vale b) con la misura dell’area del quadrato avente quel segmento come lato (cioè bxb). Si nota, infine, un’imprecisione nell’utilizzo del linguaggio specifico nell’affermazione “...è di forma uguale alla prima”, dove l’espressione “di forma” in realtà vorrebbe significare “congruente”, ovvero certamente “della stessa forma” ma anche “equiestesa”.

Analizziamo la **struttura argomentativa** della dimostrazione. Dall’affermazione “Partendo da un quadrato di lato ab sommato ad un quadrato di lato $a - b$ ” si evince che la studentessa è stata capace nell’individuare ed esplicitare quali siano i dati di partenza (ovvero due quadrati aventi il lato rispettivamente di misura $a + b$ e $a - b$), ma non li esprime del tutto correttamente (come notato all’inizio). Quello che la ragazza si limita a fare, per il resto della stesura, è di tradurre in maniera discorsiva e descrittiva quale sia il risultato della dimostrazione, senza, però, capire che quella che sta esplicitando non è altro che la tesi: infatti, all’affermazione “...si ottengono ...” non viene data nessuna motivazione. La studentessa, quindi, non imbastisce nessun processo deduttivo, né tanto meno ne esplicita i passi.

Il profilo che viene dipinto, dunque, è caratterizzato da:

- un **pensiero argomentativo** *NON ben strutturato*: l’alunno ha dimostrato buone abilità nell’individuare in modo consapevole le ipotesi (che esplicita in maniera

non del tutto corretta), ma non altrettanto capace di esprimere consciamente la tesi; non porta nessuna giustificazione alle affermazioni fatte; non mostra nessun processo e percorso deduttivo, quindi non si coglie in esso la presenza di nessun passo di ragionamento;

- un **contenuto matematico molto impreciso**: lo studente non dimostra padronanza del linguaggio specifico; utilizza una simbologia non sempre adeguata, spesso scorretta, e commette molti errori di contenuto;
- un *linguaggio che assume un ruolo* esclusivamente **descrittivo**.
- una **forma linguisticamente corretta**: lo studente impiega una sintassi grammaticale corretta, ma non cura molto la punteggiatura; non commette errori grammaticali; utilizza volentieri costrutti che includono il gerundio e preferisce una sintassi articolata (la dimostrazione è composta da un unico periodo caratterizzato da frasi lunghe e subordinate); adotta uno stile impersonale;

Profilo C

La seguente dimostrazione, inerente la Legge dei Coseni (o Teorema di Carnot, o Teorema del coseno), è stata formalizzata da uno studente di IV scientifico.

Figura 4.4: Dimostrazione formalizzata di uno studente di IV.

animazione = 1

$$c^2 = (b \sin \theta)^2 + (a - b \cos \theta)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

- Riconosci la relazione illustrata? NO
- Se sì, quale Teorema illustra? *Teorema dei coseni*
- Analizza come è stata costruita la figura proposta dall'animazione.
 A partire dall'illustrazione, ricostruisci la dimostrazione proposta e poi esprimila, per iscritto, in forma chiara e sintetica, spiegando e motivando bene sia le indicazioni che accompagnano la figura, sia il ragionamento che conduce alla tesi.
 Non dare nulla per scontato!

Si costruisce un triangolo qualsiasi, tracciando la sua altezza. Si prende in considerazione l'angolo theta. Si costruiscono i quadrati di tutti i lati del triangolo e si proietta l'altezza sul lato b. L'altezza è uguale a b sin theta, poiché un lato di un triangolo rettangolo (in questo caso l'altezza) è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto (legge triangoli rettangoli). Per lo stesso teorema, si può dire che l'altro lato

del triangolo formato dall'altezza, è uguale a $b \cos \theta$.
(lato = ipotenusa per coseno angolo adiacente)

Conoscendo il lato a , possiamo affermare che il lato del secondo triangolo formato dall'altezza è uguale a $a - b \cos \theta$. Avendo trovato tutti i lati del *

Per il teorema di pitagora l'ipotenusa è uguale alla radice del primo cateto alla seconda più il secondo cateto alla seconda perciò:

$$c^2 = \sqrt{(b \sin \theta)^2 + (a - b \cos \theta)^2}$$

elevando la formula al quadrato si ottiene

$$c^2 = b^2 \sin^2 \theta + (a - b \cos \theta)^2$$

* secondo triangolo formato dall'altezza

ipse: c
 $b \sin \theta$
 $a - b \cos \theta$

possiamo scrivere il teorema di pitagora

e si risolve nel seguente modo

$$c^2 = (b \sin \theta)^2 + a^2 + (b \cos \theta)^2 - 2ab \cos \theta$$

$$c^2 = b^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + a^2 - 2ab \cos \theta$$

Sapendo che

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ per l'identità fondamentale delle
goniometria

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta$$

Analizziamo la **struttura argomentativa** della dimostrazione. Riportiamo le affermazioni scritte dallo studente indicandone il ruolo da esse assunto all'interno del processo deduttivo:

Ipotesi “Si costruisce un triangolo qualsiasi, tracciando la sua altezza. Si prende in considerazione l'angolo θ .” Individua ed esplicita le ipotesi (dato). Per essere puntigliosi, avrebbe potuto specificare la misura di lati: “triangolo qualsiasi di lati a , b e c ”.

Costruzione “Si costruiscono i quadrati di tutti i lati del triangolo e si proietta l'altezza sul lato b .” Descrive la costruzione.

1° passo di ragionamento “L'altezza è uguale a $b \sin \theta$ ” (conclusione 1) “poiché un lato di un triangolo rettangolo (in questo caso l'altezza) è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto (Legge Triangoli rettangoli)” (regola di garanzia). In questo passo il dato è rappresentato dalle ipotesi sopra esplicitate.

2° passo di ragionamento “Per lo stesso teorema,” (regola di garanzia) “si può dire che l'altro lato, del triangolo formato dall'altezza, è uguale a $b \cos \theta$ ” (conclusione 2) “(lato= ipotenusa per coseno angolo adiacente)” (riprende la regola di garanzia. Per una maggiore precisione, lo studente avrebbe potuto specificare “triangolo rettangolo formato dall'altezza”.

3° passo di ragionamento “Conoscendo il lato a ,” (dato) “possiamo affermare che il lato del secondo triangolo formato dall'altezza è uguale a $a - b \cos \theta$ ” (conclusione 3). In questo caso lo studente lascia *sottointesa* la regola di garanzia: “per differenza”.

4° passo di ragionamento “Avendo trovato tutti i lati del secondo triangolo formato dall'altezza, cioè c , $b \sin \theta$, $a - b \cos \theta$ ” (dato: le conclusioni dei passi di ragionamento 1, 2 e 3 confluiscono a formare il dato del quarto passo) “per il Teorema di Pitagora l'ipotenusa è uguale alla radice del primo cateto alla seconda più il secondo cateto alla seconda” (regola di garanzia) “perciò $c = \sqrt{(b \sin \theta)^2 + (a - b \cos \theta)^2}$.” (conclusione 4). Per la regola di garanzia sarebbe stato sufficiente dire “per il Teorema di Pitagora”.

5° passo di ragionamento “*elevando la formula al quadrato*” (regola di garanzia) “*si ottiene $c^2 = b \sin^2 + (a - b \cos \theta)^2$* ” (conclusione 5). Il dato di questo passo è rappresentato dalla conclusione del passo precedente. Si noti che lo studente commette un errore nella scrittura “ $b \sin^2$ ” volendo esprimere invece “ $(b \sin \theta)^2$ ”; nel seguito, però, scrive questo termine correttamente e non commette altri errori analoghi negli elevamenti al quadrato, quindi si può tranquillamente concludere che sia stato un errore di fretta o di distrazione.

6° passo di ragionamento “*e si risolve nel seguente modo*” (regola di garanzia) “ $c^2 = (b \sin \theta)^2 + a^2 + (b \cos \theta)^2 - 2ab \cos \theta$; $c^2 = b^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + a^2 - 2ab \cos \theta$ ” (conclusione 6). Anche in questo caso il dato di questo passo è rappresentato dalla conclusione del passo precedente.

7° passo di ragionamento “*Sapendo che $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ per l'identità fondamentale della goniometria*” (regola di garanzia) “ $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta$.” (conclusione 7, nonché la **tesi**). Nuovamente, il dato di quest'ultimo passo è rappresentato dalla conclusione del passo 6.

Si evince, dunque, che lo studente ha individuato ed esplicitato correttamente sia le ipotesi che la tesi; si desume, inoltre, che egli ha individuato correttamente le regole di garanzia, le ha esplicitate tutte, lasciandone solamente una sottointesa.

Questo tipo di profilo si caratterizza per:

- una **forma** *linguisticamente corretta*: lo studente dimostra padronanza del linguaggio specifico ed utilizza in modo pertinente una simbologia adeguata e corretta; impiega una sintassi grammaticale corretta e cura la punteggiatura; non commette errori grammaticali; utilizza volentieri costrutti che includono il gerundio e preferisce una sintassi articolata, ma intercala anche frasi più corte e semplici; adotta uno stile prevalentemente impersonale;
- un **contenuto** matematico ed un **pensiero argomentativo** *ben strutturati*: l'alunno ha dimostrato buone abilità nell'individuare in modo consapevole le ipotesi e la tesi, che esplicita in maniera completa e corretta; è perfettamente in grado di

concatenare in modo chiaro e corretto tutti i passi di ragionamento effettuati, non dando nulla per scontato; inoltre si mostra molto attento a giustificare e motivare ogni singola affermazione fatta;

- un *linguaggio che veicola e traduce* il **processo deduttivo** compiuto.

4.3 Questionario sul confronto tra approccio visuale e quello formale studiato

Nella fase successiva alla stesura della dimostrazione formale, l'attività proposta agli studenti prevede un questionario composto da una serie di domande volte ad indagare l'*efficacia* del *registro visuale* in relazione a quello *formale* classico, tradizionalmente presentato in classe.

Si chiede, innanzitutto, agli studenti se ricordano la dimostrazione formale del teorema illustrato vista in classe ed, eventualmente, di esporla per iscritto. La tabella 4.5 riassume le risposte degli studenti.

Tabella 4.5: Dimostrazione studiata in classe.

Domanda	SÌ	NO	Non risp
Ricorda la dimostrazione formale del teorema illustrato	18 27,7%	39 60%	8 12,3%
Esponde la dimostrazione formale	16 (dei 18 "SÌ") 24,6%	2 (dei 18 "SÌ") 3,1%	
Esponde <i>correttamente</i> la dimostrazione formale	10 (dei 16 "SÌ") 15,4%	6 (dei 16 "SÌ") 9,2%	

Ben il 60% degli studenti (39 su 65) afferma di non ricordare la dimostrazione formale vista in classe. Questo risultato lascia abbastanza perplessi, considerando che gli argomenti trattati nelle PWWs proposte sono stati tutti affrontati nel corso dell'anno scolastico al termine del quale si è svolta la sperimentazione, e, inoltre, sono contenuti decisamente centrali dei programmi del curriculum di matematica delle classi a cui sono

rivolte le attività. Gli studenti avrebbero dovuto riuscire, per lo meno, ad abbozzare un qualche tentativo di dimostrazione vista.

Il 12% degli studenti (8 su 65) non risponde affatto alla domanda: dalla lettura dei loro elaborati si presume che essi non abbiano avuto tempo a sufficienza per concentrarsi su questa richiesta, considerando che molti di loro (dopo la stesura della dimostrazione) hanno compilato solamente le domande che prevedevano una risposta chiusa riguardante un indice di gradimento (come vedremo in seguito).

Solo 18 studenti (pari al 27,7%) afferma di ricordare la dimostrazione formale studiata in classe a proposito del teorema o della relazione illustrata nella PWW animata. Di questi 18, 16 ragazzi (il 24,6%) si sono cimentati nel tentativo di esporla, di cui 10 sono riusciti a presentarla in maniera esaustiva e corretta. Va evidenziato che la totalità dei 6 studenti che hanno esposto in maniera errata la dimostrazione formale studiata, in realtà, si sono limitati a riscrivere discorsivamente la relazione o l'enunciato del teorema in analisi, senza di fatto dimostrarlo o darne una qualche giustificazione. Dunque, solo il 15,4% degli studenti ha dimostrato di ricordare in maniera completa e corretta la dimostrazione del teorema/relazione vista in classe.

La successiva domanda posta nel questionario è la seguente: “*Quanto è efficace, per te, questo approccio visuale alla dimostrazione in esame?*”, di cui si riportano di seguito le risposte degli alunni.

Tabella 4.6: Efficacia dell'approccio **visuale** -1.

Domanda	Per nulla	Poco	Abbastanza	Molto	Non risp.
Quanto è efficace l'approccio visuale alla dimostrazione in esame?	0	12 18,5%	43 66,1%	8 12,3%	2 3,1%

La maggioranza degli studenti (43, pari al 66,1%), ovvero i due terzi, afferma che affrontare la dimostrazione, riguardante quello specifico contenuto matematico, attraverso un approccio visuale è *abbastanza* efficace, che appare una risposta alquanto “tiepida”; mentre le percentuali degli studenti che danno risposte più “decise” sostanzialmente si equivalgono con il 18,5% degli studenti che scelgono *poco* e il 12,3% di quelli che pensano che l'approccio visuale sia *molto* efficace.

Decisamente degno di nota è il fatto che per nessuno studente affrontare una dimostrazione in maniera illustrata sia totalmente inefficace.

La piccola percentuale degli alunni che non dà risposta alla domanda rappresenta la parte di studenti che ha dedicato tutto il tempo alla stesura della dimostrazione in linguaggio formalizzato, tralasciando le fasi successive dell'attività sperimentale proposta.

A questo punto si chiede agli studenti: “*Trovi questo approccio visuale alla dimostrazione in esame più o meno efficace dell’approccio formale, se lo ricordi? Perché?*”. In tabella 4.7 le risposte raccolte.

Tabella 4.7: Efficacia dell’approccio **visuale** -2 .

Domanda	PIÙ	MENO	Non risp	Altro
L’approccio visuale è PIÙ o MENO efficace dell’approccio formale?	33 50,8%	8 12,3%	15 23,1%	9 13,8%
Perché?			25 38,5%	

L’esatta metà degli studenti (33, pari al 50,8%) si schiera affermando che l’approccio visuale alla dimostrazione è *più* efficace di quello formale; addirittura due studenti aggiungono e sottolineano “molto più efficace”, mentre un altro alunno ci tiene a specificare “più efficace ma difficile da capire”. Le motivazioni che gli studenti portano alle loro risposte riconoscono alla visualizzazione una serie di utili caratteristiche:

- è maggiormente intuitivo
- chiarezza e semplicità di comprensione
- immediatezza di comprensione (evidenza)
- semplicità di riformulazione
- permette di ragionare sulla figura e “vedere” passo passo la costruzione
- maggiore facilità nell’assimilare e fissare i concetti
- maggiore facilità nel memorizzare e ricordare il procedimento
- applicabilità alla realtà

- il colore e la dinamicità aiutano la comprensione

Il 12,3% degli studenti (8 su 65), invece, sostiene che l'approccio più efficace è quello formale. Dalle motivazioni espresse da questi alunni emergono elementi che indicano qualche diffidenza nei confronti della visualizzazione. Le maggiori perplessità denunciate si possono riassumere nei due aspetti seguenti:

1. la pratica didattica è tradizionalmente incentrata sulla proposta dell'approccio formale; ciò porta gli studenti a considerarlo, per abitudine, più semplice;
2. la natura algebrica del problema suggerisce o addirittura richiede un'impostazione risolutiva di tipo algebrico. È interessante il fatto che l'allievo si senta portato da una clausula del *contratto didattico* a risolvere l'esercizio assegnato utilizzando "gli stessi strumenti", convincendosi che in tal modo egli possa evitare eventuali confusioni.

Ci sono, poi, 9 studenti che nella loro risposta non si schierano né per il *più*, né per il *meno*, dando risposte diverse, come, ad esempio, "non ricordo l'approccio formale", "forse ci vorrebbe anche una piccola introduzione teorica", "i due approcci sono simili", "non tanto", "entrambi efficaci".

Come sottolineato a proposito del precedente quesito, la maggior parte degli studenti che non rispondono alla domanda (allo stesso modo di coloro che non motivano la loro risposta) probabilmente avevano esaurito il tempo a loro disposizione nelle prime due fasi dell'attività, tralasciando quelle successive e rispondendo, al limite, solo alle domande in cui la risposta è collegata ad un "indice di gradimento".

La successiva domanda rivolta agli studenti indaga sull'utilità della visualizzazione per la comprensione dei contenuti matematici: "*Questo approccio illustrato alla dimostrazione ti ha aiutato a comprendere meglio il teorema in esame? Perché?*". La tabella 4.8 ne riassume le risposte.

Ancora una volta, solo il 9,2% dei ragazzi (6 su 65) afferma con decisione l'utilità della visualizzazione per la comprensione di una dimostrazione, mentre il 66,1% degli studenti (43 su 65) non si sbilancia più di tanto dando una risposta "tiepida" e scegliendo l'opzione *abbastanza*, mettendo, così, in evidenza che, tutto sommato, la visualizzazione di una dimostrazione ne facilita la comprensione. Le motivazioni date dagli studenti che hanno

Tabella 4.8: L'approccio visuale aiuta la comprensione?

Domanda	Per nulla	Poco	Abbastanza	Molto	Non risp.
L'approccio visuale ti ha <i>aiutato a comprendere meglio</i> il teorema?	1 1,5%	12 18,5%	43 66,1%	6 9,2%	3 4,6%
Perché?					20 30,8%

sottolineato un'utilità dell'approccio visuale fanno nuovamente riferimento alla maggiore evidenza, completezza e immediatezza di un'immagine o di un'animazione, nonché alla sua maggiore leggibilità e alla facilità nella memorizzazione e assimilazione dei contenuti in essa vincolati, contro, invece, l'astrazione di un procedimento formale.

Appare curiosa la motivazione di uno studente secondo il quale l'approccio visuale gli ha permesso di “*ragionare* sullo svolgimento e sul perché si fanno certi procedimenti”, lasciando intendere che, al contrario, un approccio formale porta gli alunni ad operare più “meccanicamente”.

Interessante anche la motivazione in cui viene messa in evidenza la differenza tra la *conoscenza* e la *comprensione* di una formula/relazione: “*Prima conoscevo la formula senza sapere la dimostrazione, ora che l'ho vista graficamente l'ho capita.*”

Le motivazioni dei 12 studenti (pari al 18,5%) che hanno scelto l'opzione *poco* denunciano una confusione causata dall'approccio visuale in quanto non accompagnato da una spiegazione “esperta” (dal docente), oppure fanno nuovamente riferimento alla clausula del contratto didattico per la quale un esercizio va risolto utilizzando lo “stesso linguaggio” e gli “stessi strumenti” con cui viene formulato; altre ancora sostengono che un simile approccio non aggiunga nulla alla propria conoscenza.

Infine, lo studente che sostiene la totale inutilità della visualizzazione non porta nessuna motivazione alla propria risposta; mentre le percentuali degli studenti che non hanno risposto alla domanda, o non ne hanno motivato la risposta, vanno spiegati esattamente come gli analoghi casi riscontrati nelle risposte alla domanda precedente.

Il questionario sull'analisi del rapporto tra gli approcci visuale e formale si conclude con una domanda che indaga su un aspetto già sottolineato nelle risposte degli studenti

alle domande precedenti: “Secondo te, questo tipo di dimostrazione illustrata ti sarà utile nel ricordarla più a lungo?”.

Tabella 4.9: L’approccio visuale aiuta la memorizzazione?

Domanda	Per nulla	Poco	Abbastanza	Molto	Non risp.
La dimostrazione illustrata ti sarà utile per ricordarla più a lungo?	1 1,5%	14 21,5%	32 49,2%	12 18,5%	6 9,2%

Con il 67,7% la maggioranza degli studenti (44 su 65) dà una risposta positiva al quesito, sottolineando, ancora una volta, l’utilità della visualizzazione nel fissare, memorizzare e ricordare concetti e procedimenti matematici. Al contrario, circa un quinto degli alunni (il 23%) non sostiene questa caratteristica dell’approccio visuale.

4.4 Svolgimento dell’esercizio

L’attività proposta alle classi si conclude con la richiesta di risolvere un esercizio chiave sull’argomento dell’PWWs in esame. Gli esercizi proposti sono volutamente stati scelti elementari ed immediati, in quanto lo scopo finale di quest’ultima parte dell’attività non è testare le capacità e le strategie di risoluzione di problemi messe in atto dagli studenti, ma è indagare sulla possibile utilità dell’approccio visuale nella risoluzione di un esercizio.

Tabella 4.10: Risoluzione dell’esercizio.

Domanda	SÌ	NO	Incompleto
Risolve l’esercizio	34 52,3%	27 41,5%	4 6,2%
Risolve <i>correttamente</i> l’esercizio	20 (dei 34 “SÌ”) 30,8%	10 (dei 34 “SÌ”) 15,4%	4 (dei 34 “SÌ”) 6,2%

Come mostrano i dati riportati in tabella 4.10, soltanto la metà degli studenti (34 su 65, pari al 52,3%) affronta la risoluzione dell’esercizio: gli altri, sicuramente per la mancanza di tempo a loro disposizione, non lo iniziano nemmeno (27 alunni, pari al

41,5%) oppure tentano solo un primo abbozzo risolutivo, ma totalmente insufficiente (il 6,2% dei discenti).

Tra i 34 studenti che approcciano l'esercizio, 20 lo risolvono correttamente (pari al 30,8%), mentre i rimanenti commettono errori nell'applicazione delle relazioni protagoniste della PWWs in esame: ad esempio dimenticano di riportare delle potenze, oppure ne sbagliano la risoluzione.

Infine, l'ultima domanda proposta agli studenti chiede: *“Nel risolvere l'esercizio, ti è stata utile la dimostrazione illustrata? Perché?”*.

Tabella 4.11: Utilità dell'approccio visuale nella risoluzione dell'esercizio.

Domanda	SÌ	NO	Non risp.
Ti è stata <i>utile</i> la dimostrazione illustrata?	13 20%	20 30,8%	32 49,2%
Perché?			2 3,1%

Come si evince dalla tabella 4.11, purtroppo questo quesito non ha avuto molto successo, in quanto il 49,2% degli studenti, arrivati a questa fase dell'attività, non ha risposto per la mancanza di tempo a disposizione. Ad ogni modo, si può notare che per la maggioranza degli alunni (20, pari al 30,8%) che rispondono alla domanda, l'approccio visuale, offerto dall'animazione della dimostrazione senza parole in esame, non ha avuto alcuna utilità nella risoluzione dell'esercizio proposto. Gran parte delle motivazioni portate a sostegno di queste risposte fa riferimento al fatto che la relazione in esame fosse già stata acquisita durante la trattazione tradizionale in classe e che, dunque, il suo utilizzo fosse già diventato di automatica e meccanica applicazione.

È assolutamente interessante sottolineare come, ancora una volta, in tali motivazioni, l'aggettivo “normale” venga associato al procedimento formale di prassi proposto nelle classi.

Alcuni studenti, inoltre, hanno sottolineato la maggiore utilità della visualizzazione di un contenuto o di un processo matematico nel momento della spiegazione e/o della comprensione di una formula/relazione, non nel momento della sua applicazione ad una situazione

problematica concreta.

Le motivazioni portate dai 13 alunni (pari al 20%) che sostengono in qualche modo di essersi serviti della PWW durante la risoluzione dell'esercizio, associano l'utilità della dimostrazione illustrata della relazione alla comprensione della stessa.

Capitolo 5

Conclusioni

“Le Proofs Without Words” possono essere, per gli insegnanti e per gli studenti, uno strumento didattico valido ed efficace utilizzabile per un percorso sull’apprendimento specifico del pensiero argomentativo strutturato?

Questa è la domanda a cui volevo trovare risposta.

Dall’osservazione fatta attraverso il mio lavoro di sperimentazione posso concludere che le Proofs Without Words si dimostrano essere un valido strumento da utilizzare nella pratica didattica per offrire agli studenti importanti occasioni in cui sperimentare, mettere alla prova e sviluppare le proprie capacità argomentative. La visualizzazione delle dimostrazioni, anche animate attraverso i software di geometria dinamica, è a mio avviso un’ottima modalità per avvicinare gli studenti alla dimostrazione e al pensiero argomentativo strutturato. In questo modo, infatti, si rendono intuitivi e immediati (proprio in quanto “visibili”) alcuni contenuti matematici e procedimenti formali (come, ad esempio, le identità algebriche) che altrimenti potrebbero risultare sterili conseguenze di meccanicismi e definizioni “costruite”, cioè dare la sensazione di essere “privi di sostanza”. Inoltre, guidare gli studenti nella *traduzione* delle dimostrazioni senza parole inizialmente in percorsi deduttivi corretti, completi e coerenti solo orali, per poi arrivare alla stesura di dimostrazioni formalizzate scritte, permette agli alunni di costruire e sviluppare un pensiero argomentativo strutturato. Ecco allora che la visualizzazione si collega alle attività di deduzione e lo studente ha l’occasione di sfruttare una possibilità di apprendimento

decisamente efficace. Ricordando la teoria dei “concetti figurali” di Fischbein (in cui si evidenzia la doppia natura di alcuni “oggetti matematici”, da un lato ideale ed astratta e dall’altro reale) e la teoria delle rappresentazioni semiotiche di Duval, possiamo pensare alla visualizzazione come un ottimo *compagno di strada* lungo l’apprendimento, nell’ottica di permettere agli studenti di sviluppare abilità nell’utilizzo e nella coordinazione di diversi registri di rappresentazione, al fine di perseguire un apprendimento graduale ed efficace di procedimenti e di “oggetti” matematici.

In conclusione, dunque, le Proofs Without Words possono rappresentare un *mezzo* didattico potente che, con la loro straordinaria potenzialità ed efficacia intuitiva, offrono occasioni propedeutiche per una successiva astrazione, costruzione di significato e sviluppo del pensiero argomentativo strutturato.

5.1 Una possibile prosecuzione della sperimentazione

La sperimentazione potrebbe proseguire nella direzione dello studio del rapporto tra visuale e formale. Ricordiamo, infatti, che il lavoro di tesi condotto ha incontrato le classi coinvolte in un momento dell’anno scolastico (*al termine*) in cui gli argomenti oggetto delle PWWs proposte erano già stati affrontati in classe, dunque i contenuti erano già bagaglio degli studenti. Sarebbe interessante, allora, condurre un lavoro di sperimentazione simile *all’inizio* dell’anno scolastico, quando gli argomenti non sono ancora stati affrontati: utilizzare, quindi, le attività con le animazioni delle PWWs per *introdurre* e *spiegare* gli argomenti in esame, e solo successivamente formalizzarli. In tal modo si potrebbe studiare e valutare se, rispetto all’introduzione dei contenuti tramite il tradizionale registro formale, l’utilizzo del registro illustrato-visuale possa essere più o meno efficace, e perché.

Appendice A

Le PWWs animate

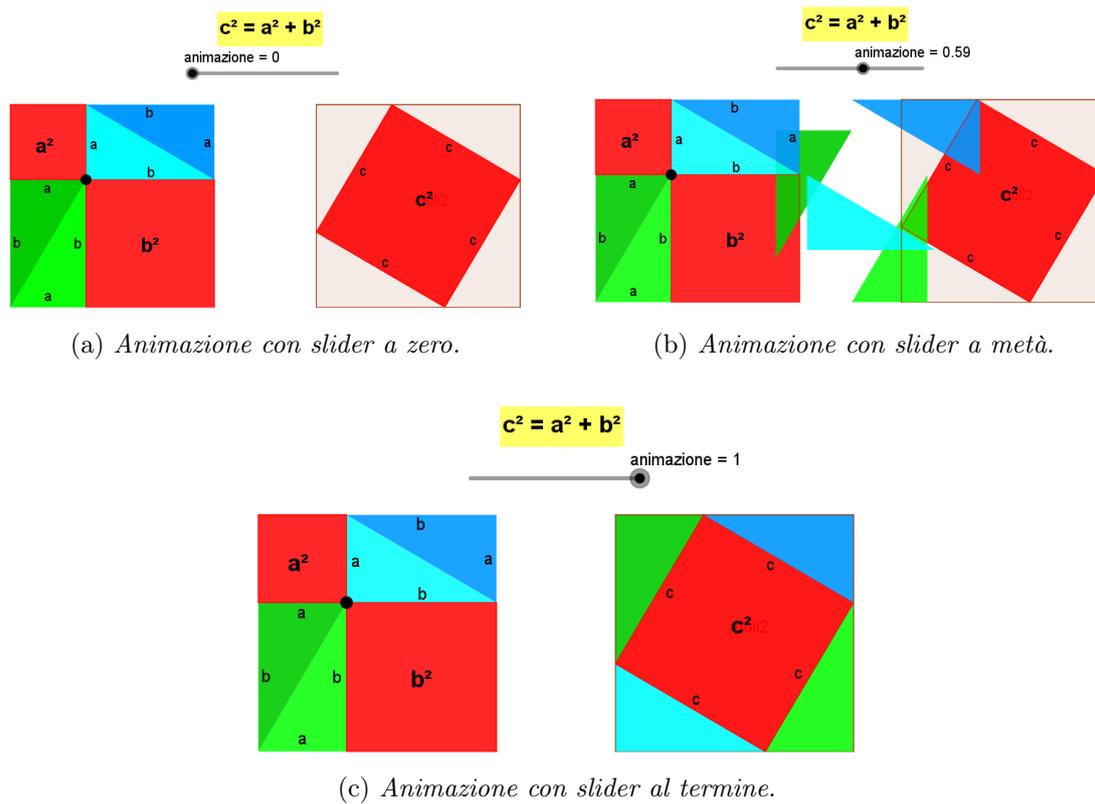
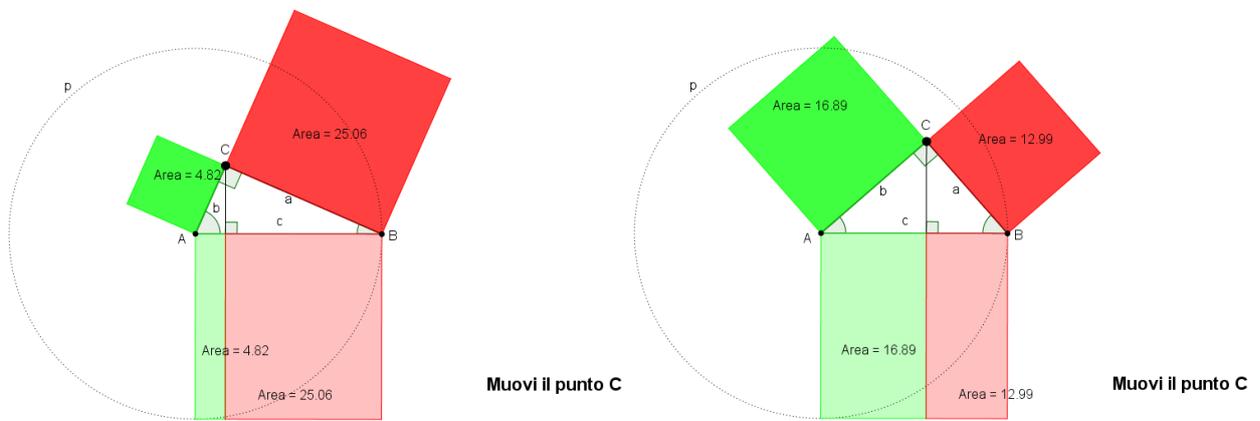


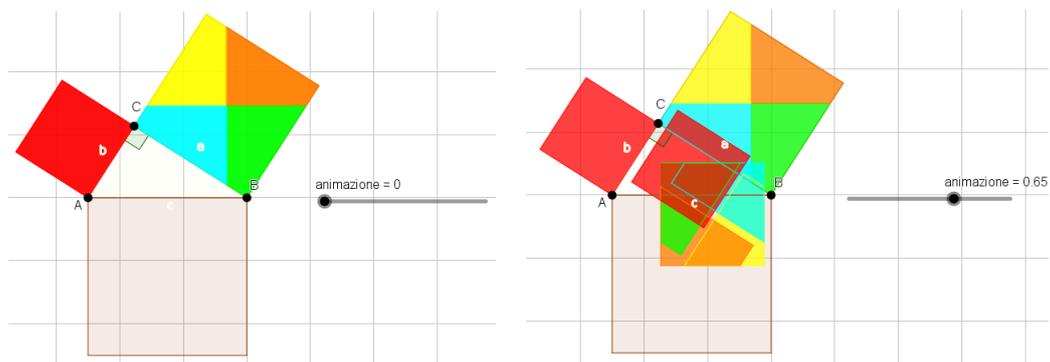
Figura A.1: Teorema di Pitagora - equiscomponibilità quadrati.



(a) Animazione posizione iniziale.

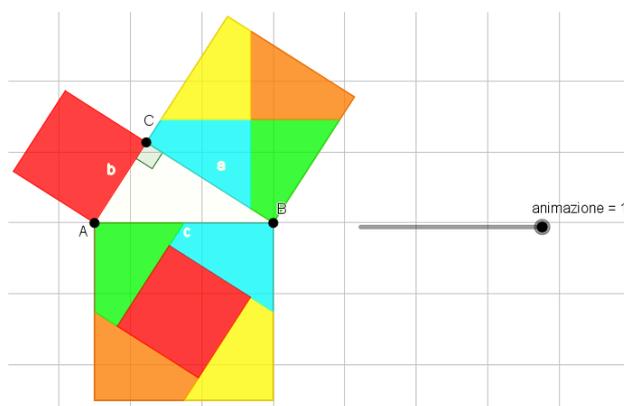
(b) Animazione muovendo il punto C.

Figura A.2: Teorema di Pitagora - dimostrazione di Euclide.



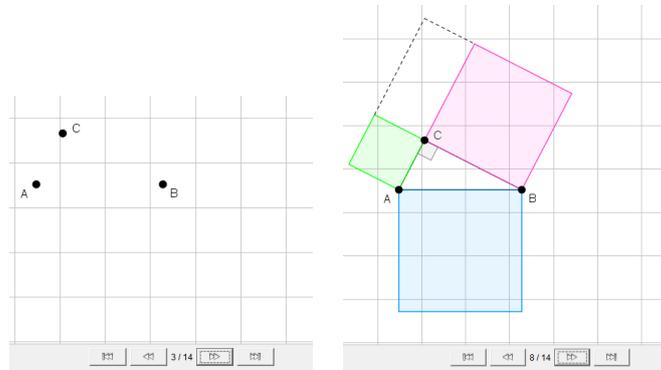
(a) Animazione con slider a zero.

(b) Animazione con slider a metà.



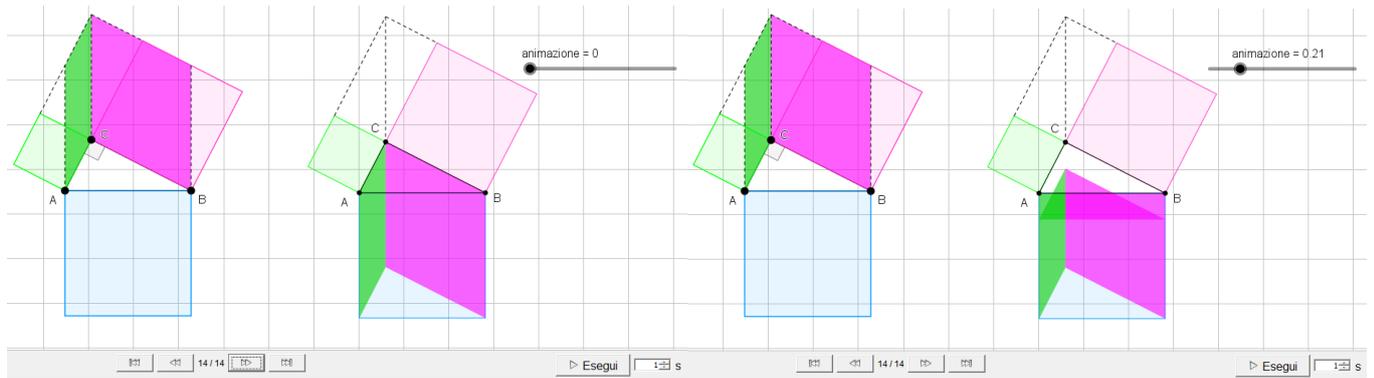
(c) Animazione con slider al termine.

Figura A.3: Teorema di Pitagora - Perigal.



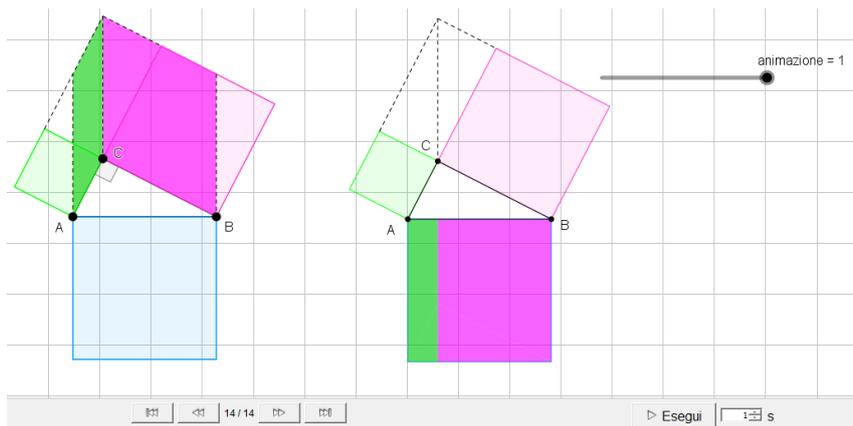
(a) Animazione al primo passo della costruzione..

(b) Animazione a metà costruzione.



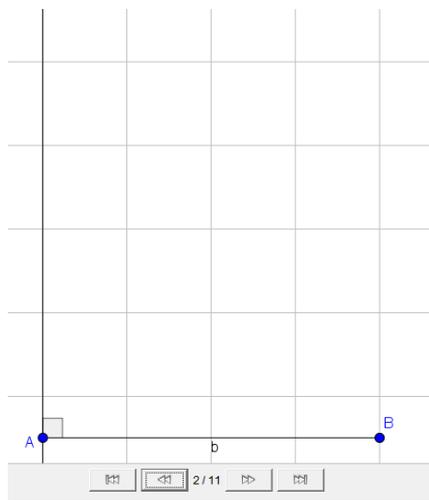
(c) Animazione al termine della costruzione e slider a zero.

(d) Animazione con slider a metà.

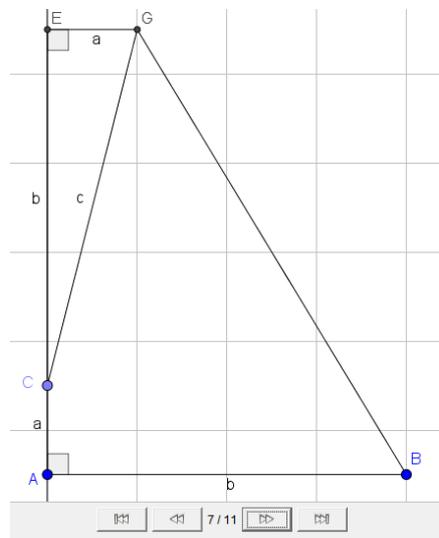


(e) Animazione con slider al termine.

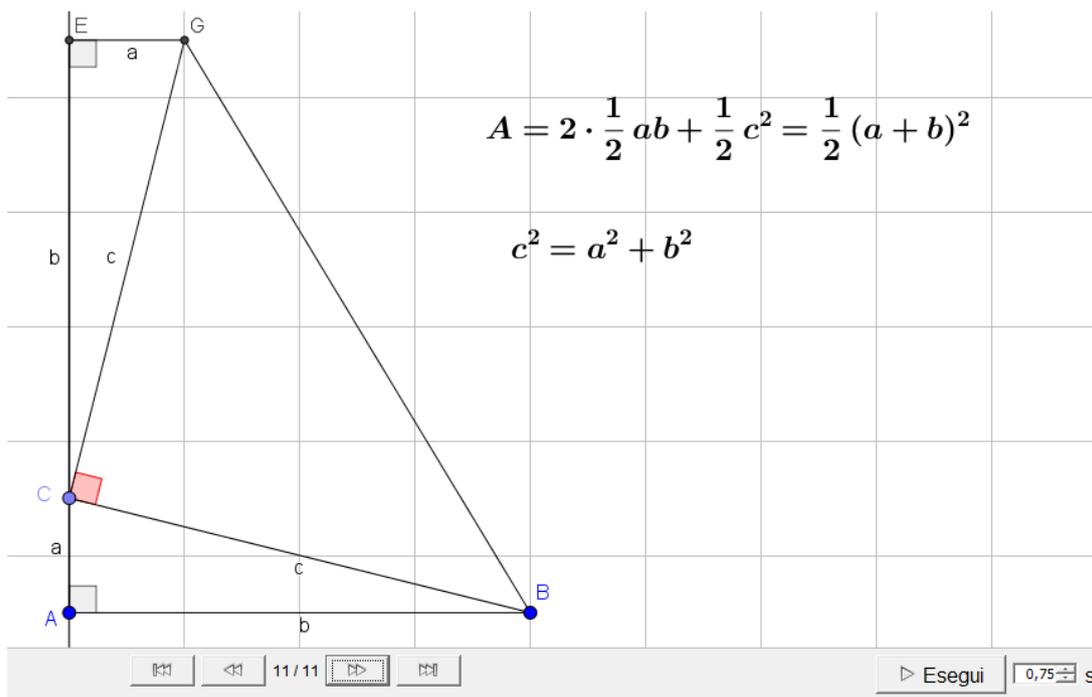
Figura A.4: Teorema di Pitagora - equivalenza ed equiscomponibilità.



(a) Animazione al primo passo della costruzione.

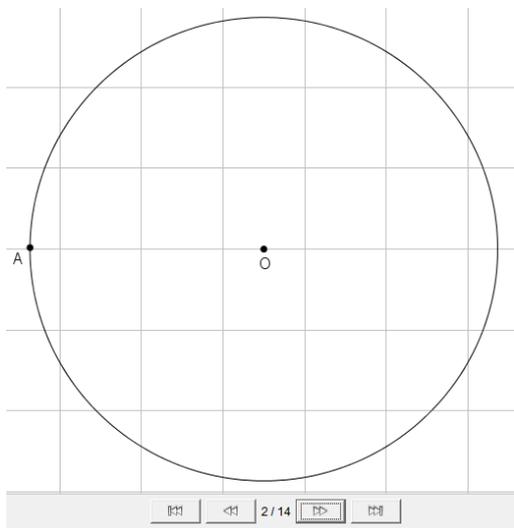


(b) Animazione a metà costruzione.

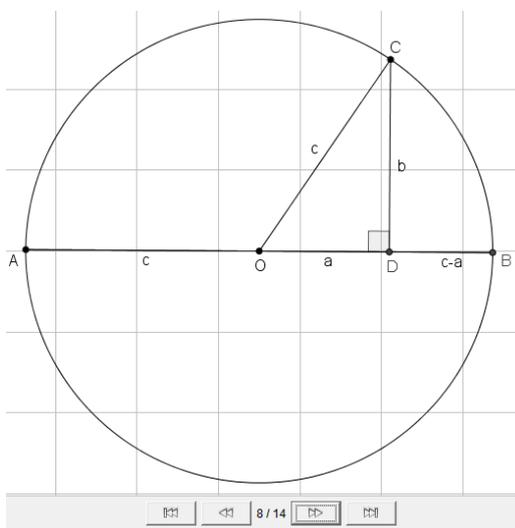


(c) Animazione al termine della costruzione.

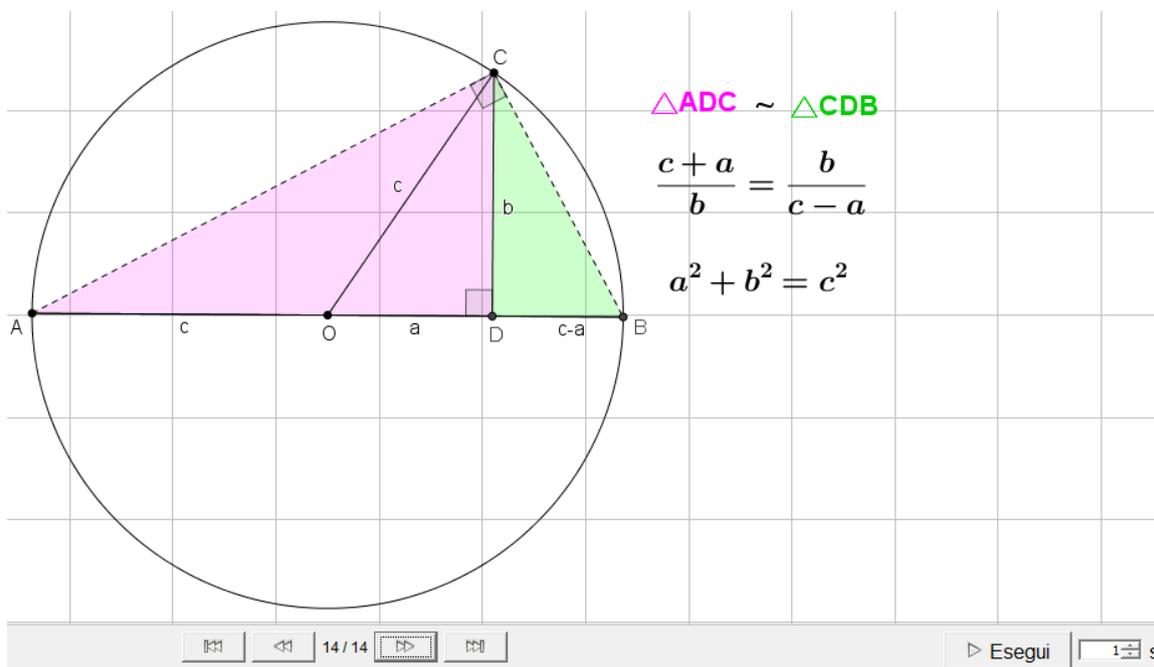
Figura A.5: Teorema di Pitagora - trapezio e triangolo.



(a) Animazione al primo passo della costruzione.

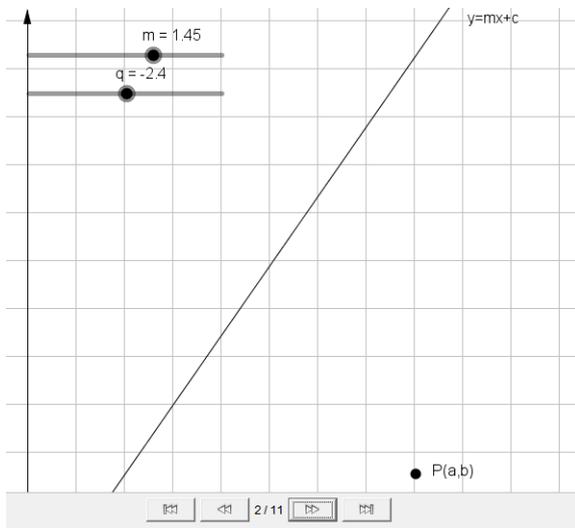


(b) Animazione a metà costruzione.

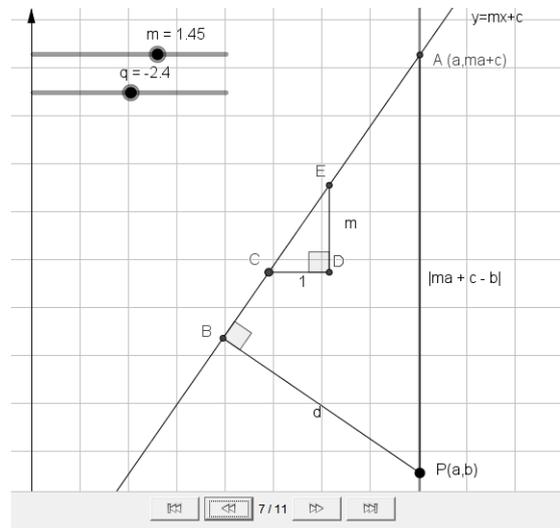


(c) Animazione al termine della costruzione.

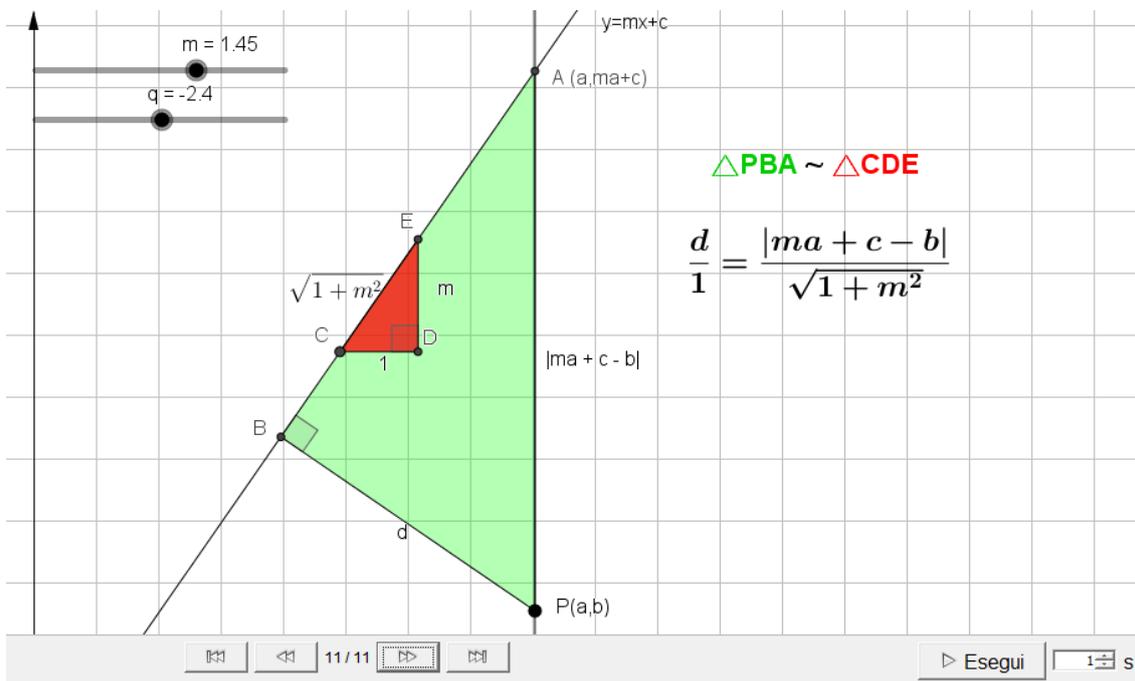
Figura A.6: **Teorema di Pitagora - circonferenza e triangoli simili.**



(a) Animazione al primo passo della costruzione.

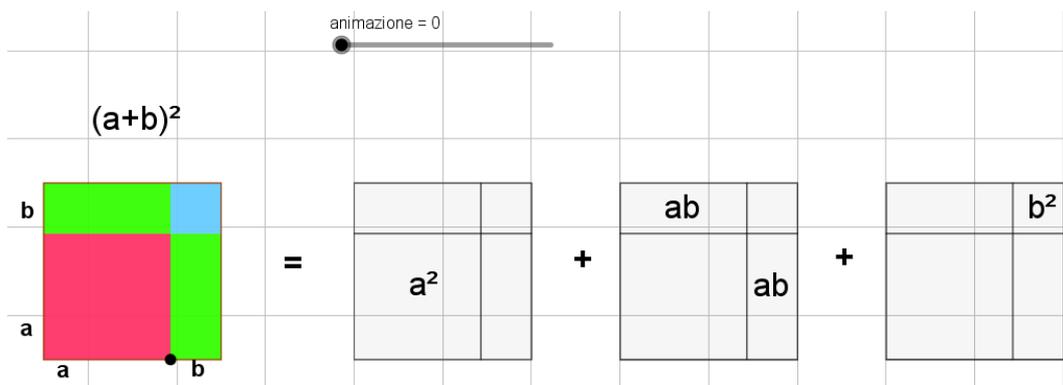


(b) Animazione a metà costruzione.

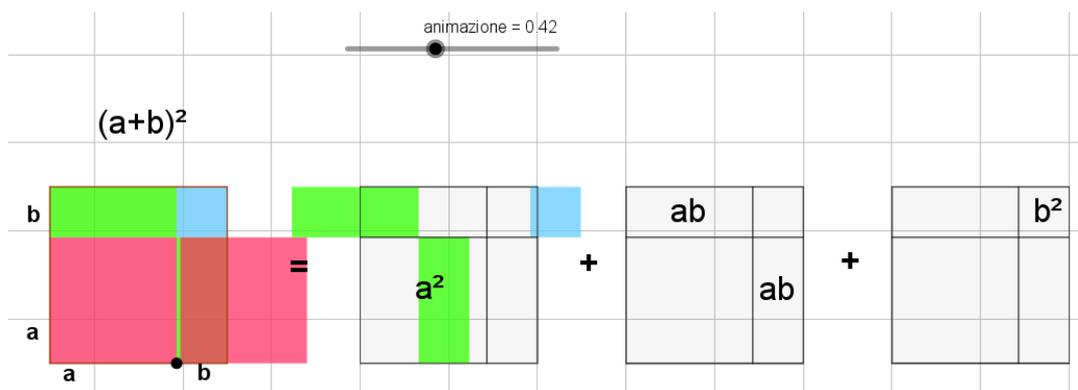


(c) Animazione al termine della costruzione.

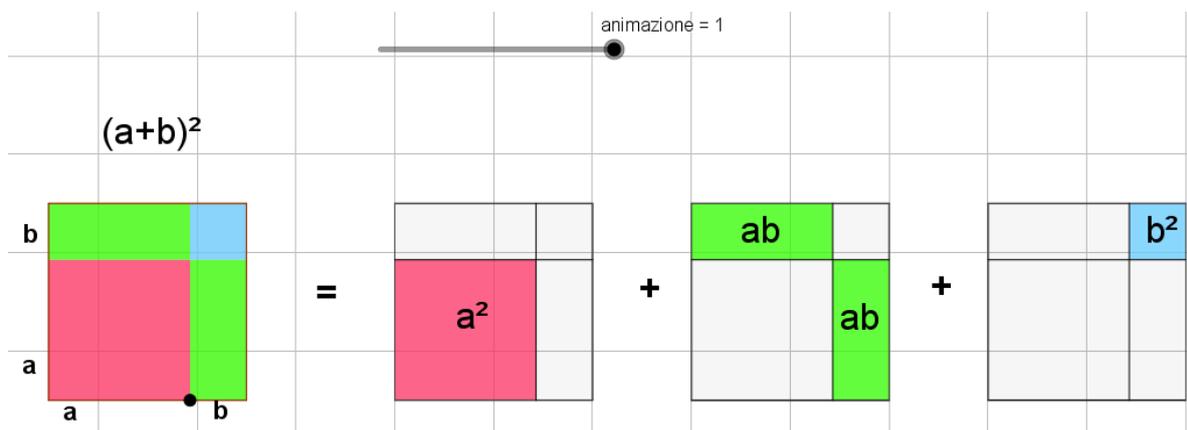
Figura A.7: Distanza punto - retta.



(a) Animazione con slider a zero.



(b) Animazione con slider a metà.

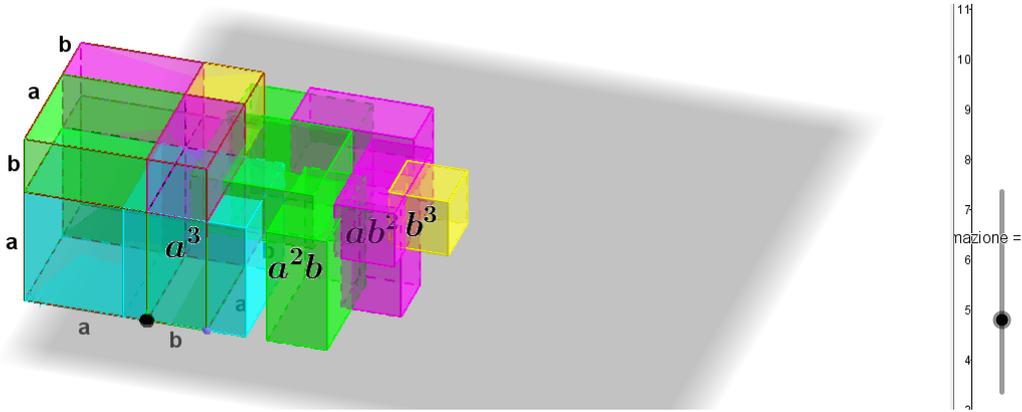


(c) Animazione con slider al termine.

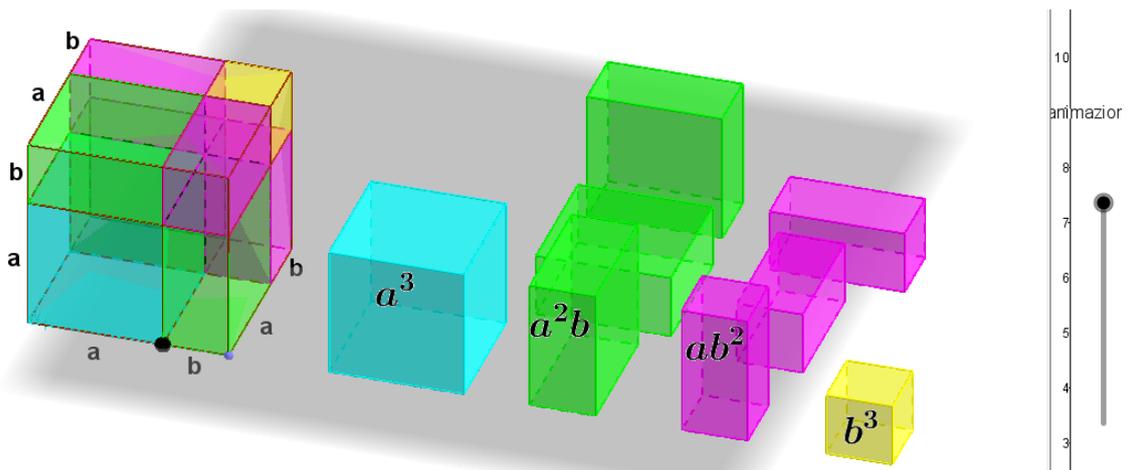
Figura A.8: Quadrato del binomio.



(a) Animazione con slider a zero.

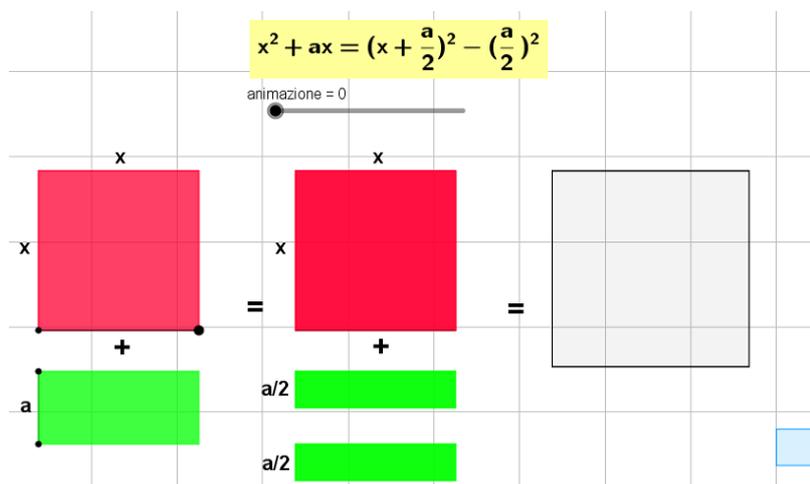


(b) Animazione con slider a metà.

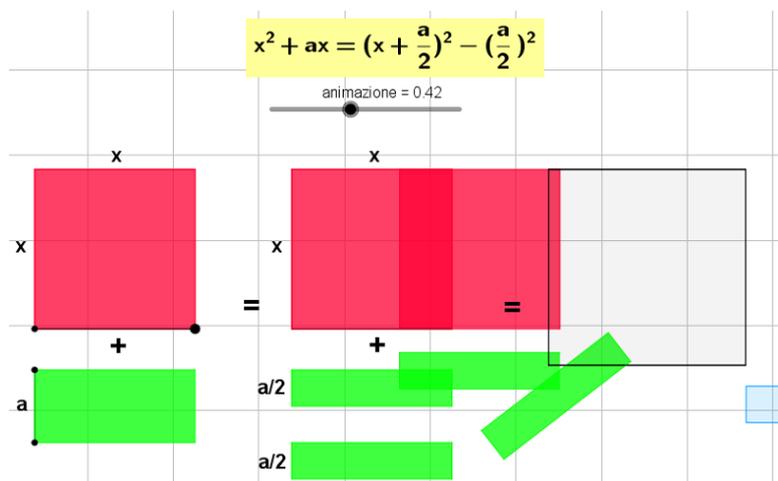


(c) Animazione con slider al termine.

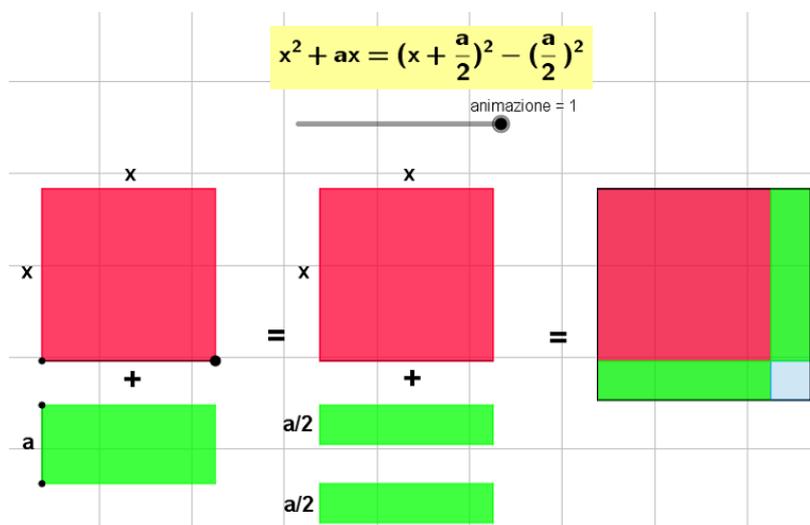
Figura A.9: Cubo di un binomio.



(a) Animazione con slider a zero.

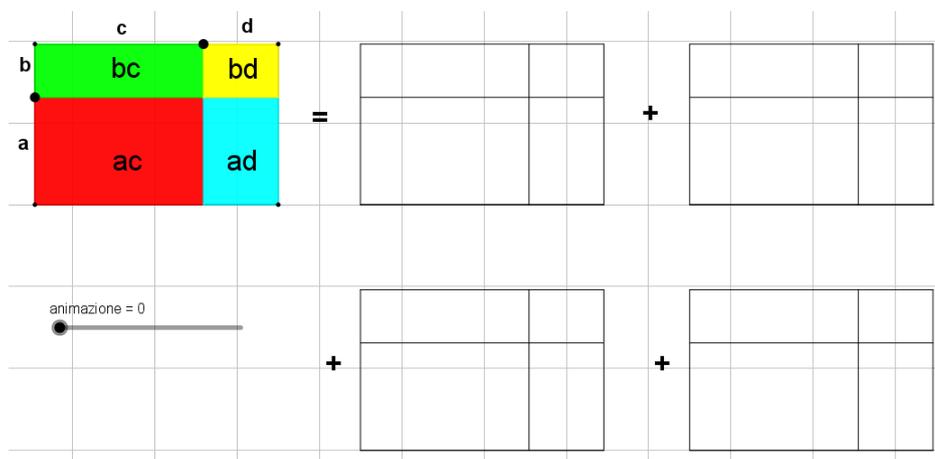


(b) Animazione con slider a metà.

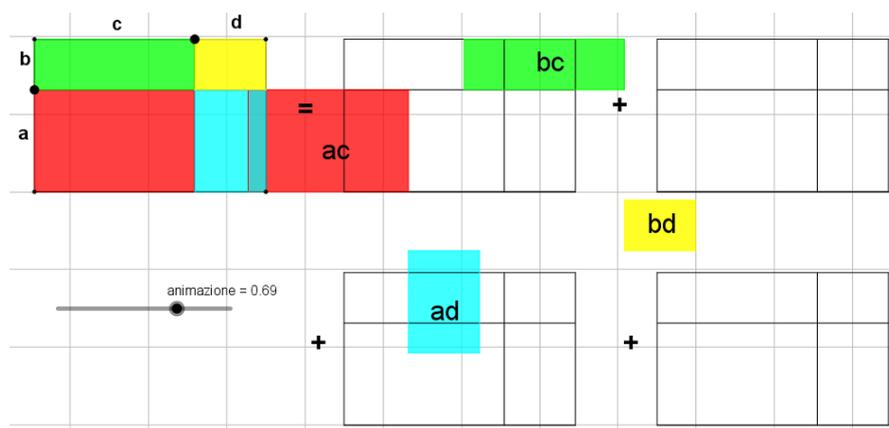


(c) Animazione con slider al termine.

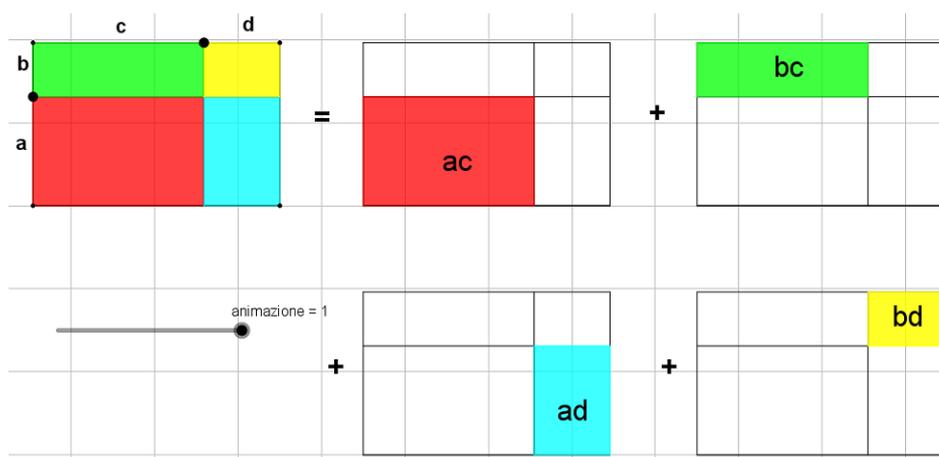
Figura A.10: Completamento del quadrato del binomio.



(a) Animazione con slider a zero.

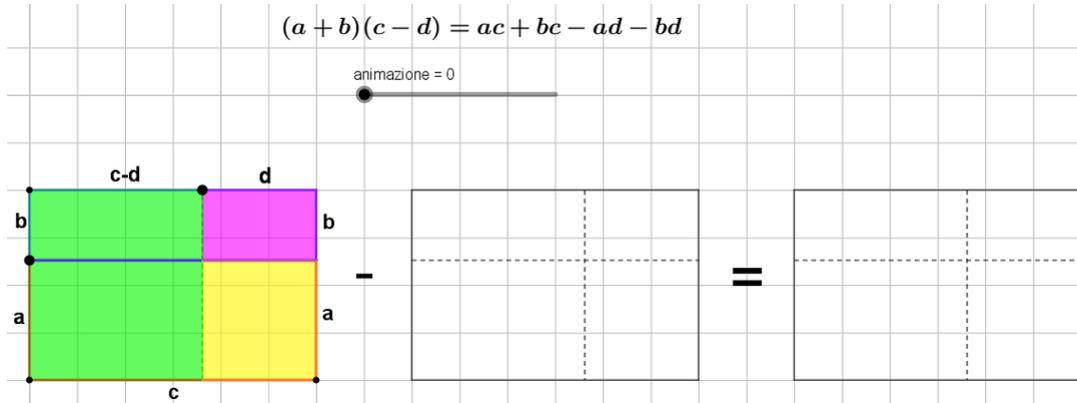


(b) Animazione con slider a metà.

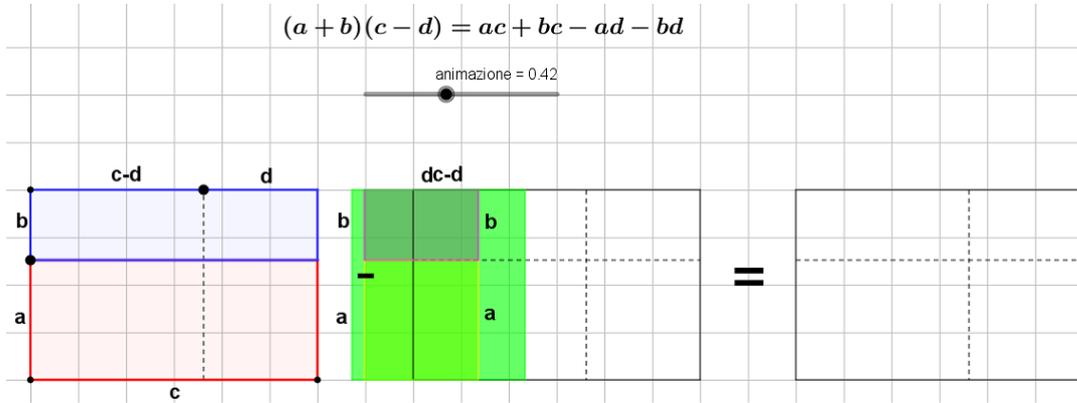


(c) Animazione con slider al termine.

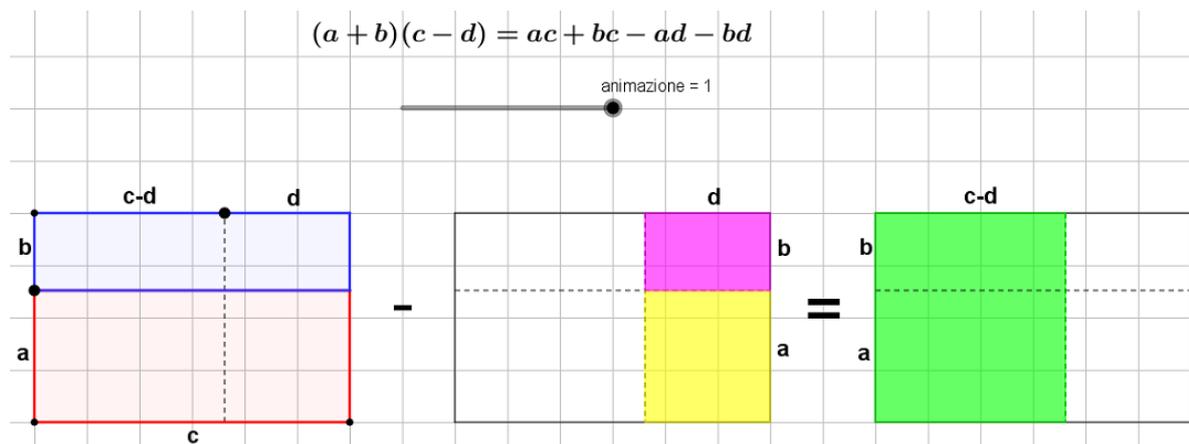
Figura A.11: Prodotto di due binomi (somma e somma).



(a) Animazione con slider a zero.

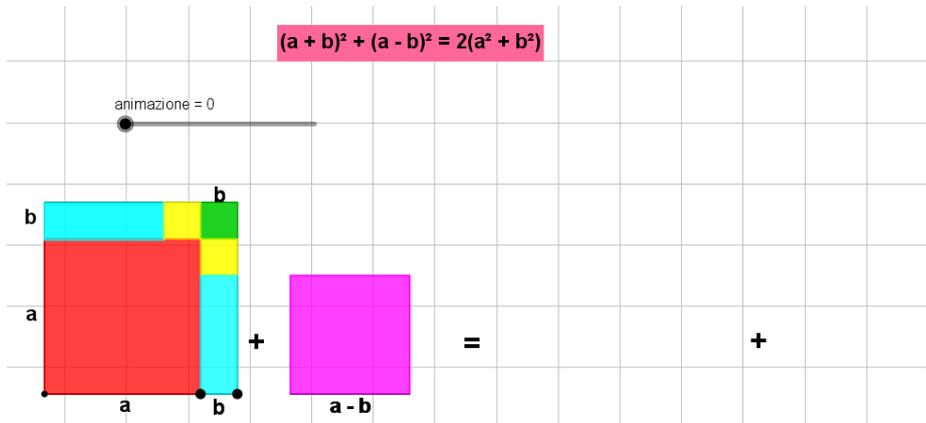


(b) Animazione con slider a metà.

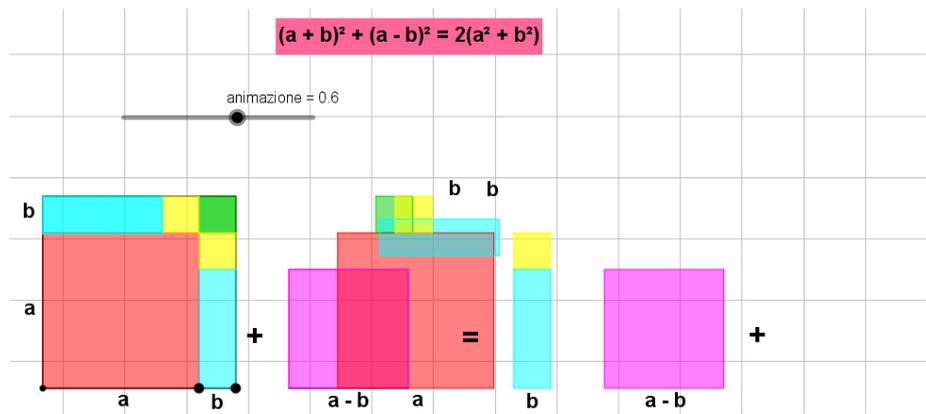


(c) Animazione con slider al termine.

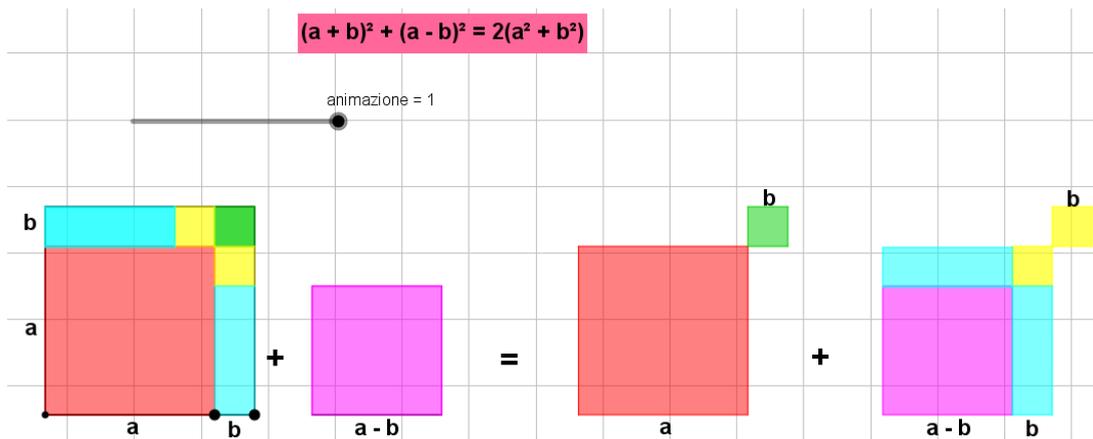
Figura A.12: Prodotto di due binomi (somma e differenza).



(a) Animazione con slider a zero.



(b) Animazione con slider a metà.



(c) Animazione con slider al termine.

Figura A.13: Aree algebriche (somma).

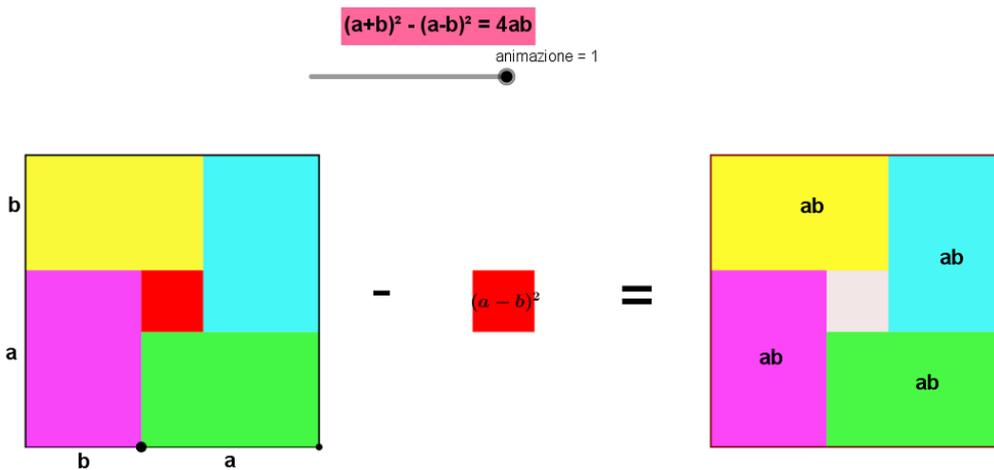
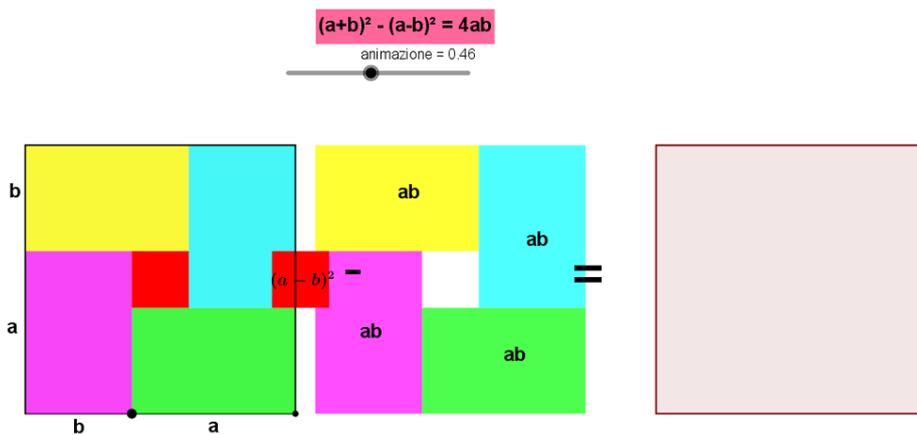
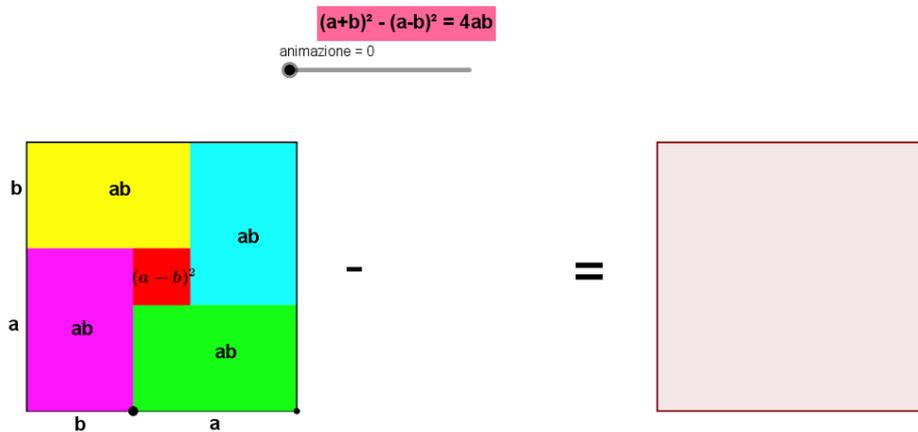
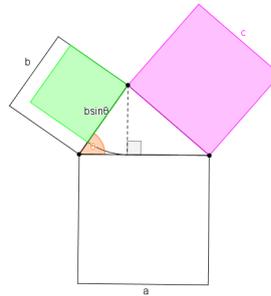
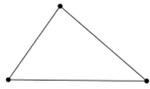
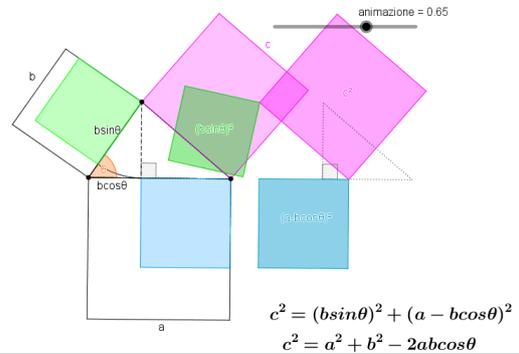
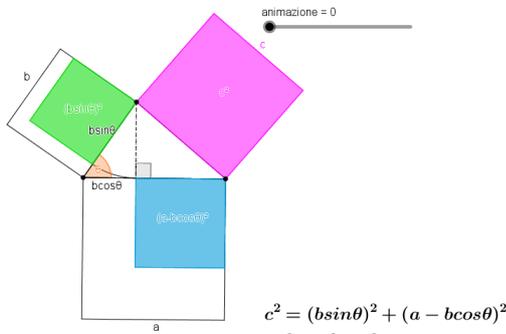


Figura A.14: Aree algebriche (differenza).



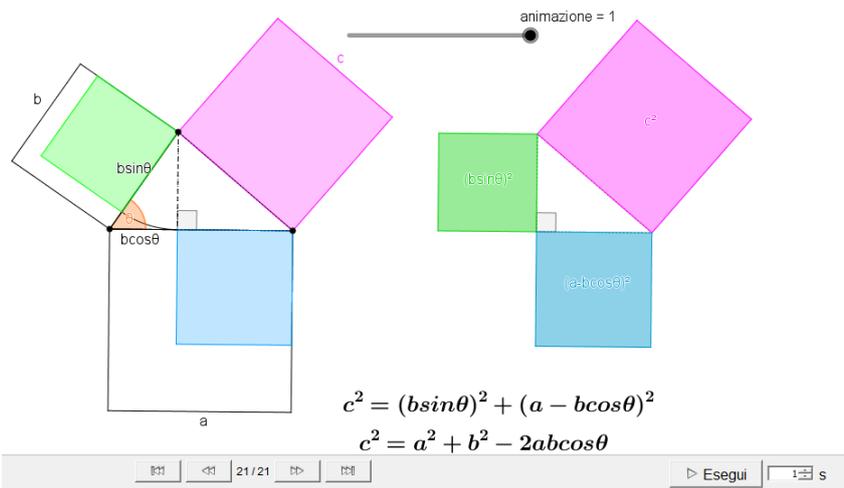
(a) Animazione al primo passo della costruzione.

(b) Animazione a metà costruzione.



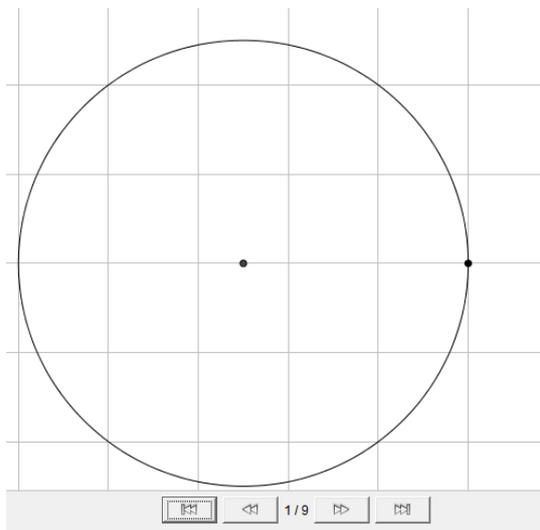
(c) Animazione al termine della costruzione e slider a zero.

(d) Animazione con slider a metà.

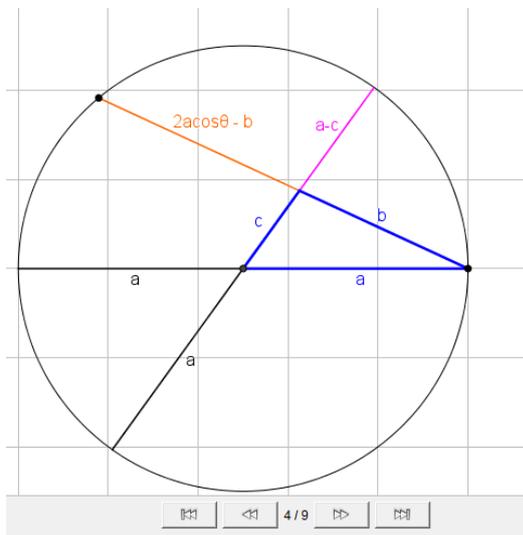


(e) Animazione con slider al termine.

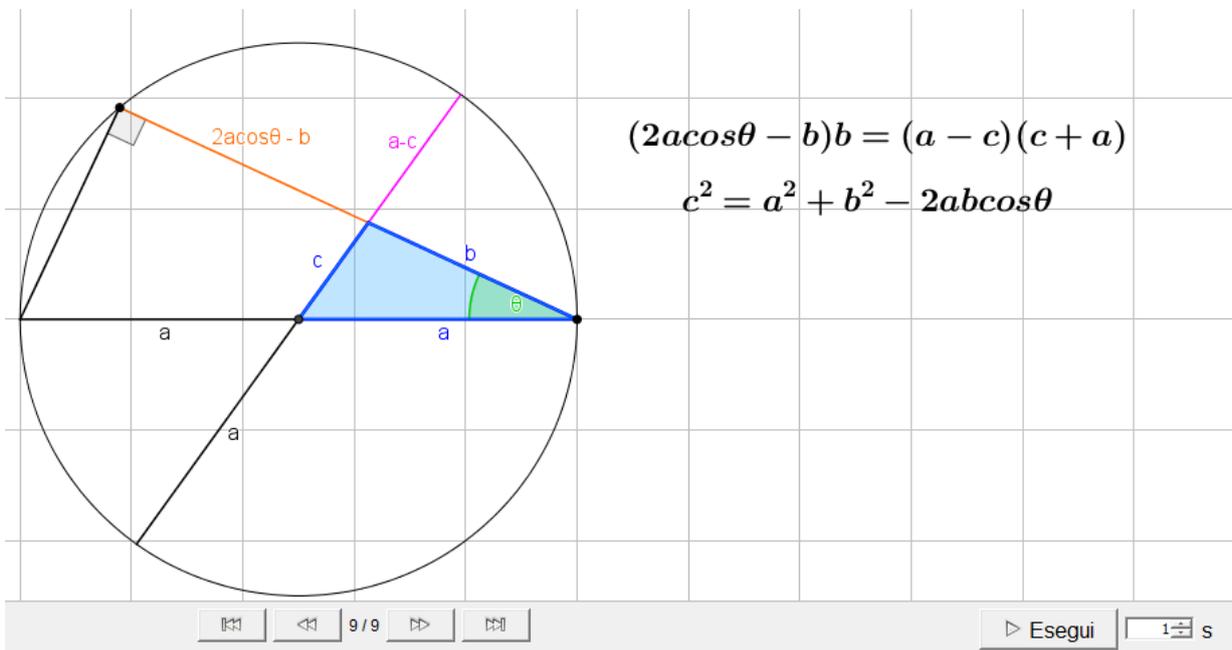
Figura A.15: Legge dei coseni I.



(a) Animazione al primo passo della costruzione.



(b) Animazione a metà costruzione.



(c) Animazione al termine della costruzione.

Figura A.16: Legge dei coseni II.

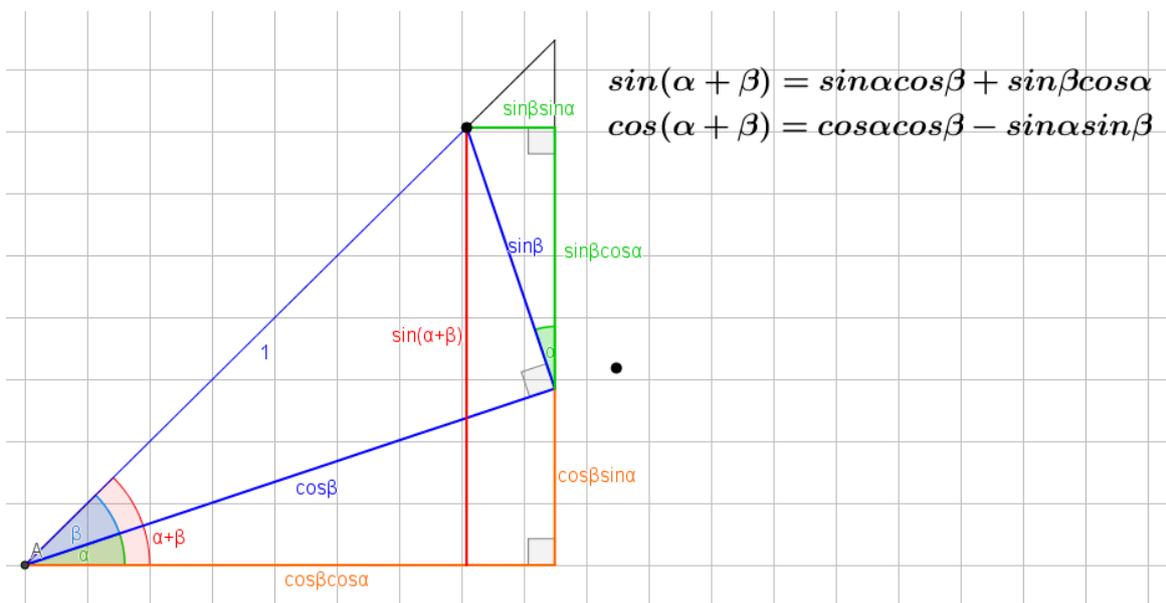


Figura A.17: Seno e Coseno della somma - con triangolo rettangolo.

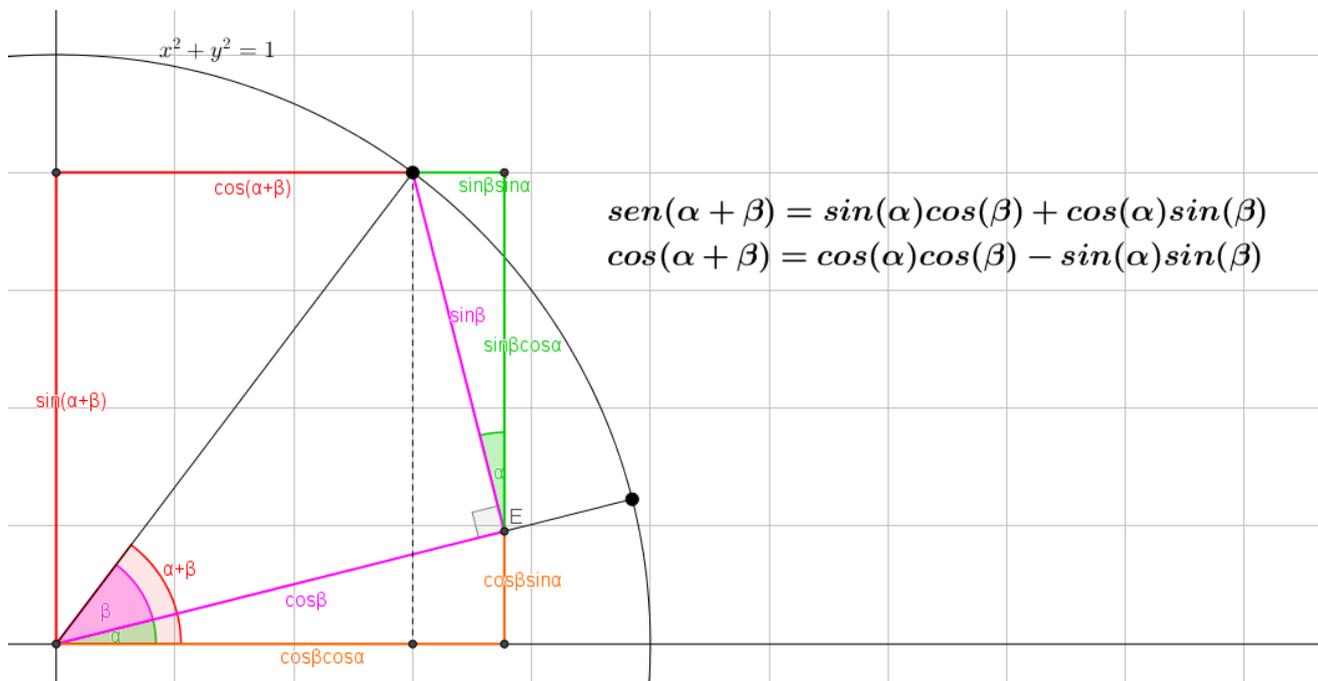
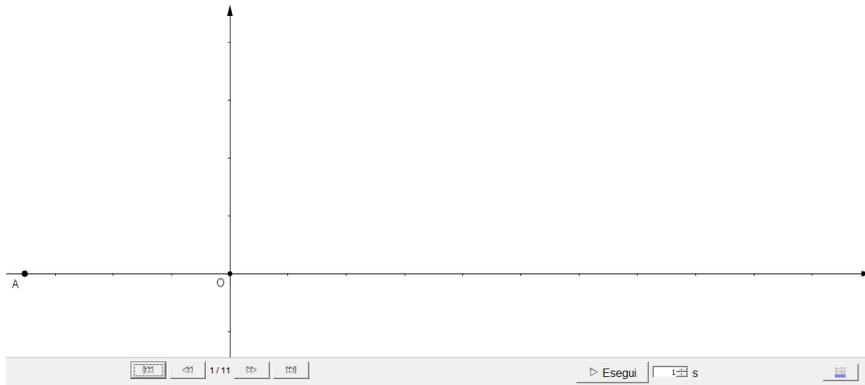
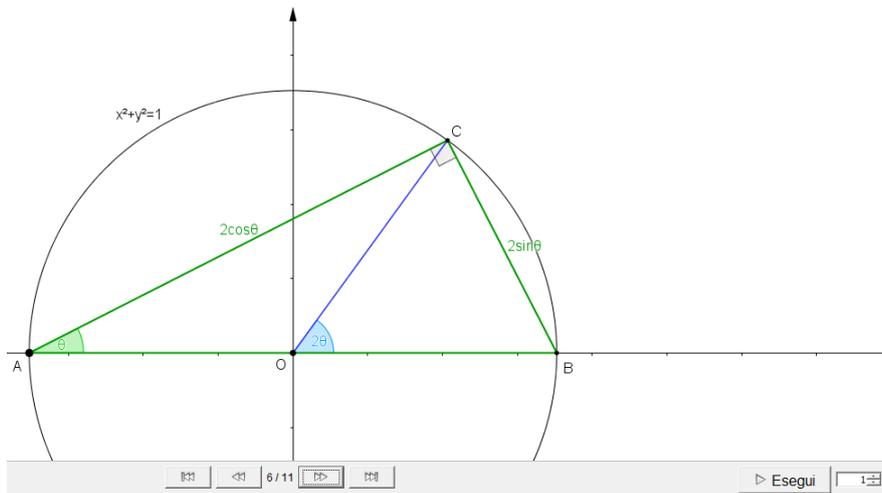


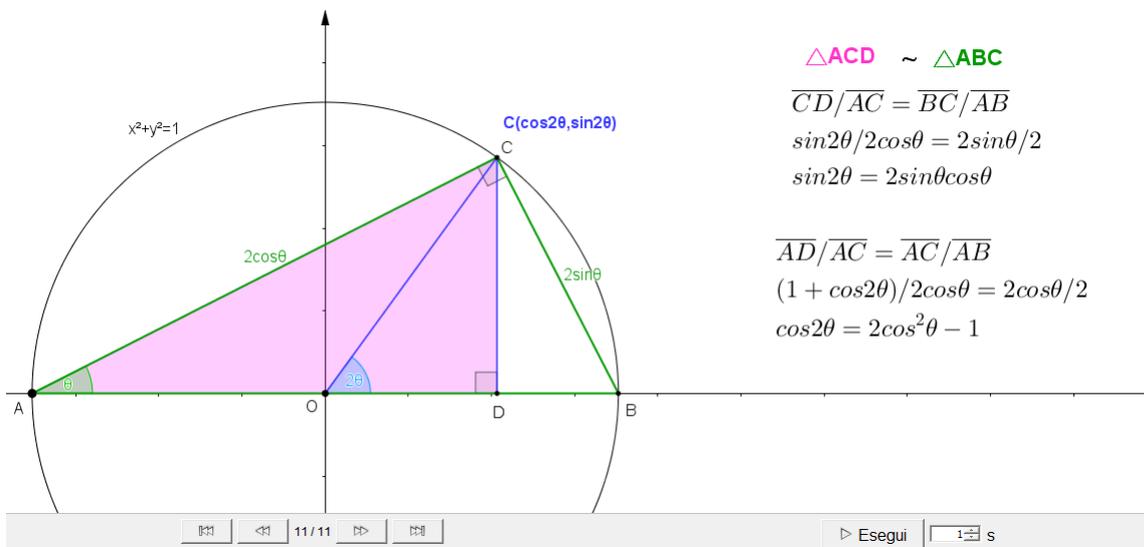
Figura A.18: Seno e Coseno della somma - sulla circonferenza goniometrica.



(a) Animazione al primo passo della costruzione.

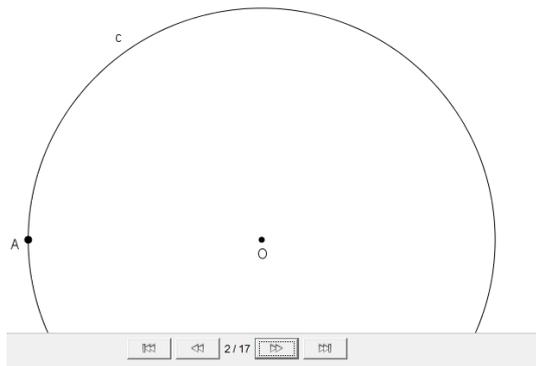


(b) Animazione a metà costruzione.

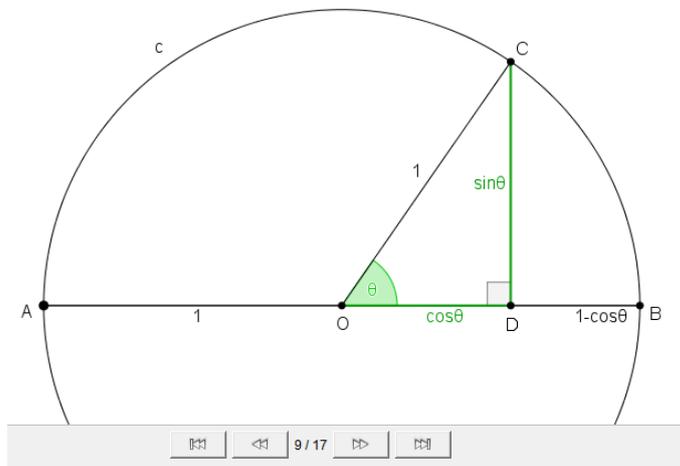


(c) Animazione al termine della costruzione.

Figura A.19: **Formule di duplicazione del seno e del coseno.**



(a) Animazione al primo passo della costruzione.



(b) Animazione a metà costruzione.

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

(c) Animazione al termine della costruzione.

93

Figura A.20: **Formule di bisezione della tangente.**

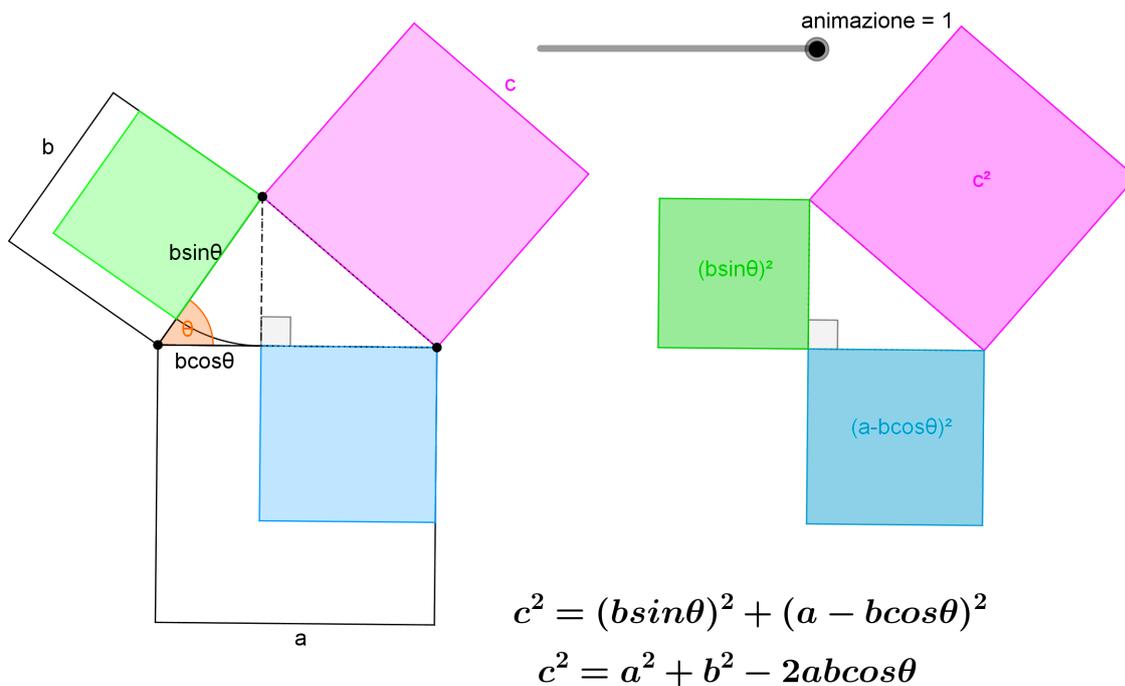
Appendice B

Schede delle attività

Riportiamo a titolo esemplificativo solo UNA delle schede delle attività svolte dalle classi, precisamente l'“Attività 1” proposta alla classe IV, inerente la dimostrazione senza parole sulla *Legge dei Coseni I*’.

Attività 1

Mostrare animazione.



- Riconosci la relazione illustrata? SÌ NO
 Se sì, quale Teorema illustra?

.....

- Analizza come è stata costruita la figura proposta dall'animazione.
 A partire dall'illustrazione, ricostruisci la dimostrazione proposta e poi esprimila, per iscritto, in forma chiara e sintetica, spiegando e motivando bene sia le indicazioni che accompagnano la figura, sia il ragionamento che conduce alla tesi.
 Non dare nulla per scontato!

.....

- Se l'hai studiata, ti ricordi la dimostrazione formale del Teorema illustrato? SÌ NO

Se sì, prova ad esporla.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Quanto è efficace, per te, questo approccio visuale alla dimostrazione in esame?

PER NULLA POCO ABBASTANZA MOLTO

- Trovi questo approccio visuale alla dimostrazione in esame più o meno efficace dell'approccio formale, se lo ricordi?

Perché?

.....

.....

.....

- Questo approccio illustrato alla dimostrazione ti ha aiutato a comprendere meglio il Teorema in esame?

PER NULLA POCO ABBASTANZA MOLTO

Perché?

.....

.....

.....

- Secondo te, questo tipo di dimostrazione illustrata ti sarà utile nel ricordarla più a lungo?

PER NULLA POCO ABBASTANZA MOLTO

- Risolvi il seguente esercizio:

Considerati rispettivamente sui lati Ox e Oy dell'angolo $x\hat{O}y = 120^\circ$ due punti A e B tali che $\overline{OA} = 3a$ e $\overline{OB} = a$, e prolungato il lato Oy dalla parte di O , si consideri su tale prolungamento il punto C tale che $\overline{OC} = a$.

Si calcoli il perimetro del triangolo ABC .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Appendice C

Esercizi proposti nelle attività

Riuniamo in questa appendice tutti gli esercizi proposti a conclusione delle attività.

Classi I e II:

Esercizio attività 1 su Teorema di Piatgora - equiscomponibilità quadrati:

Un rettangolo è equivalente a un rombo le cui diagonali sono lunghe rispettivamente 30 cm e 112 cm. Sapendo che una dimensione del rettangolo è lunga 70 cm, calcola la lunghezza della sua diagonale.

Esercizio attività 2 su Teorema di Piatgora - dimostrazione di Euclide:

Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa e il cateto maggiore lunghi rispettivamente 30 cm e 24 cm. Calcola le lunghezze delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Esercizio attività 3 su Teorema di Piatgora - equivalenza ed equiscomponibilità:

In un parallelogramma $ABCD$, la diagonale minore BD e il lato DA sono lunghi rispettivamente 15 cm e 13 cm. Sapendo che l'altezza DH relativa al lato AB è lunga 12 cm, calcola l'area del parallelogramma.

Esercizio attività 4 su Teorema di Piatgora - Perigal:

Un rombo ha il perimetro di 78 cm e una diagonale congruente alla diagonale di un

rettangolo con le dimensioni lunghe rispettivamente 12 cm e 9 cm. Calcola l'area del rombo.

Esercizio attività 5 su Teorema di Piatgora - trapezio e triangolo:

La base maggiore e la diagonale minore di un trapezio rettangolo sono lunghe rispettivamente 4,5 dm e 3,6 dm. Sapendo che la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo, calcola la lunghezza dell'altezza del trapezio e l'area del trapezio.

Esercizio attività 6 su Teorema di Piatgora - circonferenza e triangoli simili:

Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa e un cateto lunghi rispettivamente 130 cm e 120 cm. Calcola il perimetro di un rombo equivalente al triangolo sapendo che una sua diagonale è lunga 50 cm.

Esercizio attività 7 su Teorema di Piatgora - distanza punto-retta:

Calcola la distanza d del punto $P(4; -5)$ dalla retta di equazione $2x = 6 - y$.

I precedenti esercizi riguardanti il Teorema di Pitagora sono stati tratti da *Matematica Teoria Esercizi - Geometria B*, di G. Bonola e I. Forno, testo di geometria per la scuola secondaria di I grado, mentre l'esercizio sulla distanza punto-retta è stato preso da *Algebra 2*, di M. Re Franceschini e G. Grazzi, testo per il biennio del Liceo Scientifico.

Classe III linguistico:

Esercizio attività 1 sul Quadrato del binomio:

Sviluppa ed eventualmente semplifica la seguente espressione:

$$\left(-3 + \frac{4}{3}a^2x\right)^2 - \left(3 + \frac{4}{3}a^2x\right)^2 =$$

Esercizio attività 2 sul Cubo di un binomio:

Sviluppa ed eventualmente semplifica la seguente espressione:

$$\left(-x^3 + \frac{1}{3}x^2\right)^3 =$$

Esercizio attività 3 su Prodotto di due binomi (somma e somma):

Sviluppa ed eventualmente semplifica la seguente espressione:

$$(2x + 3a)\left(\frac{1}{6}ax + a^2\right) =$$

Esercizio attività 4 su Prodotto di due binomi (somma e differenza):

Sviluppa ed eventualmente semplifica la seguente espressione:

$$\left(\frac{3}{5}ab - 1\right)\left(\frac{1}{3} + 5ab\right) =$$

Esercizio attività 5 sul Completamento del quadrato del binomio:

Completa la seguente espressione in modo da ottenere un quadrato di un binomio:

$$4x^2 - 20x + \dots\dots$$

Esercizio attività 6 sulle Aree Algebriche (somma):

Sviluppa la seguente espressione:

$$\left(\frac{3}{2}a + 10x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a - 10x\right)^2 =$$

Esercizio attività 7 sulle Aree Algebriche (differenza):

Sviluppa la seguente espressione:

$$\left(\frac{5}{6}x + 3y\right)^2 - \left(\frac{5}{6}x - 3y\right)^2 =$$

I precedenti esercizi sono stati tratti da *Algebra 1*, di M. Re Franceschini e G. Grazzi, testo per il biennio del Liceo Scientifico.

Classe IV:

Esercizio attività 1 sulla Legge dei Coseni I:

Considerati rispettivamente sui lati Ox e Oy dell'angolo $x\hat{O}y = 120^\circ$ due punti A e B tali che $\overline{OA} = 3a$ e $\overline{OB} = a$, e prolungato il lato Oy dalla parte di O , si consideri su tale prolungamento il punto C tale che $\overline{OC} = a$.

Si calcoli il perimetro del triangolo ABC .

Esercizio attività 2 sulla Legge dei Coseni II:

Nel quadrilatero $ABCD$ si sa che i lati AB , AD , BC misurano rispettivamente a , $2a$, $3a$ e che $B\hat{A}D = 90^\circ$, $D\hat{B}C = \alpha$ con $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Calcolare la misura del lato DC .

Esercizio attività 3 su Seno e Coseno della somma di due angoli - sulla circonferenza goniometrica:

Sviluppa ed eventualmente semplifica la seguente espressione:

$$\sin 105^\circ - \cos 105^\circ =$$

Esercizio attività 4 su Seno e Coseno della somma di due angoli - su triangolo rettangolo:

Sviluppa ed eventualmente semplifica la seguente espressione:

$$\sin(90^\circ + \alpha) \cos(90^\circ + \beta) + \cos(90^\circ + \alpha) \sin(90^\circ + \beta) =$$

Esercizio attività 5 sulle Formule di duplicazione del Seno e del Coseno:

Sviluppa ed eventualmente semplifica la seguente espressione:

$$\frac{\cos 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha} =$$

Esercizio attività 6 sulla Formula di bisezione della tangente:

Sapendo che: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, calcolare $\tan \frac{\alpha}{2}$.

I precedenti esercizi sono stati tratti da *Matematica Due*, di L. Lamberti. L. Mereu e A. Nanni, testo per il triennio del Liceo Scientifico.

Bibliografia

- uno** [1] Roger B. Nelsen. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America, Washington, 1993.
- due** [2] C. Alsina and Roger B. Nelsen. *An Invitation to Proofs Without Words*. European Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 3, No. 1, 2010, pp. 118-127.
- tre** [3] Gian Marco Todesco. *L'immagine come strumento della mente*. Tratto da *L'immagine nella scienza e nell'arte*. Vol. 1, No. 2, 2016, pp. 10-19.
- quattro** [4] Luigi Tommasi. *Software di "geometria dinamica" e visualizzazione: cosa cambia nell'apprendimento-insegnamento della matematica?*, tratto dal confronto sul tema "La visualizzazione per l'apprendimento di concetti matematici: tecnologie di ieri e di oggi", Congresso Nazionale Mathesis, Bergamo, 2002.
- cinque** [5] G. Bonola e I. Forno. *Matematica Teoria Esercizi*. Vol. "Geometria B", Lattes Editori, 2011.
- sei** [6] M. Re Fraschini e G. Grazzi. *Algebra 2*. Edizioni Atlas, 2004.
- sette** [7] M. Re Fraschini e G. Grazzi. *Algebra 1*. Edizioni Atlas, 2003.
- otto** [8] L. Lamberti, L. Mereu e A. Nanni. *Matematica Due*. Edizioni Etas, 2004.
- nove** [9] *Linguaggio e argomentazione nello studio della matematica. Riflessioni e proposte sull'argomentazione*. A cura del Gruppo di Progetto (primaria-medie-superiori), Piano Nazionale Lauree Scientifiche, Unità locale Università di Genova, Laboratorio PLS.

- dieci** [10] Giorgio T. Bagni. *Visualizzazione e didattica della matematica nella scuola secondaria superiore* (1997). Tratto da *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.
- undici** [11] R. Duval. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, in “Annales de Didactique et de Sciences Cognitives”, Vol. 5, 37-40, 1993.
- dodici** [12] MIUR. *Schema di regolamento recante “Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali”*, 2010.
- tredici** [13] MIUR. *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, 2012.
- quattordici** [14] *TIMSS Advanced 2015 Mathematics Framework*, cap. 1.

Elenco delle figure

2.1	Schematizzazione del modello di argomentazione di Toulmin.	21
3.1	Animazione dinamica della PWW <i>Cubo del binomio</i>	31
3.2	Animazione statica della PWW <i>Seno e Coseno della somma di due angoli - sulla circonferenza goniometrica</i>	31
3.3	Animazione con barra di navigazione della PWW <i>Formule di duplicazione del seno e del coseno</i>	33
3.4	Animazione con barra di navigazione e slider della PWW <i>Legge dei coseni I</i>	34
4.1	Dimostrazione formalizzata dallo studente A della classe I.	54
4.2	Dimostrazione formalizzata dallo studente B della classe I.	57
4.3	Dimostrazione formalizzata da una studentessa di III Linguistico.	59
4.4	Dimostrazione formalizzata di uno studente di IV.	62
A.1	Teorema di Pitagora - equiscomponibilità quadrati	76
A.2	Teorema di Pitagora - dimostrazione di Euclide	77
A.3	Teorema di Pitagora - Perigal	77
A.4	Teorema di Pitagora - equivalenza ed equiscomponibilità	78
A.5	Teorema di Pitagora - trapezio e triangolo	79
A.6	Teorema di Pitagora - circonferenza e triangoli simili	80
A.7	Distanza punto - retta	81
A.8	Quadrato del binomio	82
A.9	Cubo di un binomio	83
A.10	Completamento del quadrato del binomio	84
A.11	Prodotto di due binomi (somma e somma)	85

A.12 Prodotto di due binomi (somma e differenza).	86
A.13 Aree algebriche (somma).	87
A.14 Aree algebriche (differenza).	88
A.15 Legge dei coseni I.	89
A.16 Legge dei coseni II.	90
A.17 Seno e Coseno della somma - con triangolo rettangolo.	91
A.18 Seno e Coseno della somma - sulla circonferenza goniometrica.	91
A.19 Formule di duplicazione del seno e del coseno.	92
A.20 Formule di bisezione della tangente.	93

Elenco delle tabelle

3.1	Suddivisione delle PWWs in base alle classi di destinazione.	29
4.1	Fase del riconoscimento.	39
4.2	Analisi delle dimostrazioni rispetto alla forma	44
4.3	Analisi delle dimostrazioni rispetto al contenuto	47
4.4	Analisi delle dimostrazioni in base ai criteri ibridi tra forma e contenuto	50
4.5	Dimostrazione studiata in classe.	66
4.6	Efficacia dell'approccio visuale -1.	67
4.7	Efficacia dell'approccio visuale -2	68
4.8	L'approccio visuale aiuta la comprensione?	70
4.9	L'approccio visuale aiuta la memorizzazione?	71
4.10	Risoluzione dell'esercizio.	71
4.11	Utilità dell'approccio visuale nella risoluzione dell'esercizio.	72

Ringraziamenti

Ringrazio il professor Bolondi che, con pazienza e disponibilità, ha creduto in questa sperimentazione, mi ha accompagnato e ha costruito con me questo pezzo di percorso.

Ringrazio il professor Negrini che ha accettato di seguirmi.

Ringrazio il professor Lucilli che ha accolto il mio lavoro nelle sue classi. Ringrazio gli studenti dell'ISIS "Enrico Mattei" di Latisana che si sono messi in gioco con me.

Ma il mio più grande pensiero va al mio amore, Carlo, compagno di vita, che ha creduto assieme a me in questo sogno, mi ha sostenuto quotidianamente, mi ha spronato, mi ha incoraggiato e ha festeggiato i piccoli passi con me lungo la strada verso questo grande e sudato traguardo. Grazie!

Ringrazio infinitamente il mio babbo e la mia mamma che mi hanno educata a credere nei miei sogni, a scegliere in libertà la mia strada da percorrere, a buttarmi, a provare, a verificarmi, a cadere e a rialzarmi.

Ringrazio Silvia, lei c'è, sempre.