Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

INTRODUZIONE ALLE RAPPRESENTAZIONI LINEARI DI GRUPPI FINITI

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
RÜDIGER ACHILLES

Presentata da:
IRENE MORETTO

III Sessione
Anno Accademico 2016-2017

Alla mia famiglia

Introduzione

In questo elaborato viene introdotta un'importante teoria matematica, chiamata *teoria delle rappresentazioni*, che ha molte applicazioni: dalla teoria dei numeri alla geometria, dalla probabilità alla chimica e meccanica quantistica.

Tale teoria si sviluppò alla fine del XIX secolo a partire da un problema che Richard Dedekind pose a Georg Frobenius. Dedekind congetturava la fattorizzazione del determinante di una matrice ottenuta sostituendo variabili distinte agli elementi nella tabella di moltiplicazione del gruppo. La fattorizzazione è stata dimostrata da Frobenius e segnò l'inizio della teoria delle rappresentazioni. Contributi importanti furono successivamente portati da molti altri matematici, tra cui ricordiamo Issai Schur, William Burnside e Richard Brauer.

L'idea che sta alla base di questo studio è quella di usare gli strumenti dell'algebra lineare per esaminare e descrivere le proprietà di un gruppo. Mediante una rappresentazione lineare, infatti, è possibile rappresentare gli elementi del gruppo attraverso gli automorfismi di uno spazio vettoriale e, di conseguenza, descrivere l'operazione del gruppo attraverso il prodotto di matrici.

In questo elaborato ci siamo limitati a studiare rappresentazioni complesse di grado finito di gruppi finiti. Tuttavia, alcuni risultati si possono generalizzare a campi la cui caratteristica non divide l'ordine del gruppo.

La tesi è suddivisa in quattro capitoli. Nel primo capitolo diamo le definizioni di base ed arriviamo ad un importante risultato, ovvero il teorema di

Maschke. Esso afferma che ogni rappresentazione si può decomporre in una somma diretta di sottorappresentazioni irriducibili. Da questo segue che ci possiamo limitare a studiare solo le rappresentazioni irriducibili.

Il secondo capitolo è dedicato alla teoria dei caratteri. Il carattere di una rappresentazione è una funzione che associa ad ogni elemento del gruppo la traccia della matrice corrispondente. Vediamo che, a meno di isomorfismi, una rappresentazione è univocamente determinata dal suo carattere. Quindi, dato un gruppo, studiamo tutti i suoi caratteri irriducibili per poter determinare la totalità delle sue rappresentazioni lineari.

Nel terzo capitolo discutiamo le rappresentazioni di gruppi abeliani e di prodotti di gruppi. Inoltre vediamo come una rappresentazione può essere indotta da una rappresentazione di un suo sottogruppo.

Infine, nell'ultimo capitolo determiniamo i caratteri di tutte le rappresentazioni irriducibili di alcuni gruppi importanti. A partire da questi possiamo determinare i caratteri irriducibili di tutti i gruppi finiti fino all'ordine 11.

Indice

Capitolo 0

Nozioni preliminari

0.1 Algebra multilineare

Consideriamo K un campo, $V_1, V_2, \dots, V_r, W$ K-spazi vettoriali.

Definizione 0.1. Una funzione $F\colon V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow W$ è detta *K-multilineare* se per ogni indice k, per ogni r-pla di vettori $v_1, \dots, v_r$, per ogni $v_k, v_k' \in V_k$ e per ogni $\lambda, \mu \in K$ vale:

$$F(v_1, \dots, \lambda v_k + \mu v_k', \dots, v_r) = \lambda F(v_1, \dots, v_k, \dots, v_r) + \mu F(v_1, \dots, v_k', \dots, v_r).$$

Definizione 0.2. Una funzione K-lineare $F\colon V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow W$ è *simmetrica* se per ogni permutazione $\sigma \in S_r$:

$$F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = F(v_1, \dots, v_r).$$

Invece diciamo che F è *antisimmetrica* se:

$$F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = sgn(\sigma) F(v_1, \dots, v_r),$$

dove $sgn(\sigma) \in \{+1, -1\}$ denota il segno di σ.

0.2 Prodotto tensoriale

Definizione 0.3. Il *prodotto tensoriale* è un K-spazio vettoriale $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ insieme ad una funzione $\tau\colon V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ che soddisfa la seguente *proprietà universale:* per ogni K-spazio vettoriale W e per ogni applicazione multilineare $F\colon V_1\times\cdots\times V_r \longrightarrow W$ c'è un unica trasformazione lineare $F'\colon V_1\otimes\cdots\otimes V_r \longrightarrow W$ tale che $F'\circ\tau = F$, cioè esiste unica una trasformazione lineare F' che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} V_1\times\cdots\times V_r \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "F"'] & & V_1\otimes\cdots\otimes V_r \arrow[dl, dashed, "F'"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Se $V_1 = V_2 = \cdots = V_r = V$, chiamiamo $V\otimes\cdots\otimes V$ l'r-esimo prodotto tensoriale e scriviamo T^rV.

Proposizione 0.2.1. *Se V_k ha dimensione finita n_k ed una base $\{v_{k,1},\dots,v_{k,n_k}\}$, allora $V_1\otimes\cdots\otimes V_r$ ha una base costituita dai vettori:*

$$v_{1,i_1}\otimes\cdots\otimes v_{r,i_r} = \tau(v_{1,i_1},\dots,v_{r,i_r}),\qquad 1\le i_k\le n_k.$$

Quindi abbiamo $\dim(V_1\otimes\cdots\otimes V_r) = n_1\cdots n_r$.

In generale, per ogni sequenza $w_1\in V_1,\dots,w_r\in V_r$ abbiamo:

$$w_1\otimes\cdots\otimes w_r = \tau(w_1,\dots,w_r)$$

e queste soddisfano:

$$w_1\otimes\cdots\otimes(\lambda w_k+\mu w'_k)\otimes\cdots\otimes w_r =$$
$$\lambda(w_1\otimes\cdots\otimes w_k\otimes\cdots\otimes w_r)+\mu(w_1\otimes\cdots\otimes w'_k\otimes\cdots\otimes w_r).$$

0.3 Prodotto semidiretto di gruppi

Definizione 0.4. Siano G un gruppo, K un suo sottogruppo ed H un suo sottogruppo normale. Diremo che G è il *prodotto semidiretto interno* dei gruppi K e H se per ogni elemento $s\in G$ esistono unici $k\in K, h\in H$ tali che: $s = hk$. L'unicità equivale alla condizione $H\cap K = \{1_G\}$.

Definizione 0.5. Sia H un gruppo e sia K un gruppo che agisce su H, cioè esiste un omomorfismo ϕ da K al gruppo degli automorfismi di H. Il *prodotto* *semidiretto esterno* G dei gruppi H e K è il prodotto cartesiano $H \times K$ con un operazione di moltiplicazione definita da:

$$(h, h)(h', k') = (h(\phi(k)(h')), kk').$$

Capitolo 1

Rappresentazioni lineari e prime definizioni

In questo capitolo vogliamo dare le definizione di base della teoria delle rappresentazioni ed enunciare il primo risultato significativo: il teorema di Maschke.

1.1 Rappresentazioni lineari

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$, l'insieme degli automorfismi di V con l'operazione di composizione forma un gruppo che è detto *gruppo degli automorfismi* di V e lo indichiamo con $\mathrm{GL}(V)$.

Se V ha dimensione finita n ed (e_i) è una sua base, ad ogni automorfismo $a\colon V \to V$ possiamo associare una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n. Dove gli $a_{ij} \in \mathbb{C}$ sono ottenuti esprimendo l'immagine $a(e_j)$ rispetto alla base (e_i) :

$$a(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ .$$

Viceversa, ad una matrice quadrata invertibile ($\det(A) \neq 0$) di ordine n è univocamente associato un automorfismo di V.

Perciò possiamo identificare $\mathrm{GL}(V)$ con il *gruppo delle matrici quadrate invertibili* o *gruppo generale lineare*.

Definizione 1.2. Sia G un gruppo finito con elemento neutro 1_G e composizione $(s, t) \mapsto st$ e sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$. Una *rappresentazione lineare di G in V* è un omomorfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Data ρ diciamo che V è lo *spazio di rappresentazione* di G oppure che V è una *rappresentazione* di G.

Osservazione 1. Per definizione di omomorfismo, per $s, t \in G$ abbiamo:

$$\rho(st) = \rho(s) \circ \rho(t).$$

Da cui segue:

$$\rho(1_G) = \mathrm{id}, \qquad \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

Notazione 1. Scriviamo spesso impropriamente ρ_s invece di $\rho(s)$.

D'ora in poi assumiamo che lo spazio vettoriale V abbia dimensione finita n. Questa assunzione non è troppo restrittiva poiché per molte applicazioni quello che ci interessa è un numero finito di elementi v_i di V e possiamo trovare una sottorappresentazione di V di dimensione finita che contiene i v_i.

Definizione 1.3. Sia V uno spazio di rappresentazione di un gruppo finito G tramite l'applicazione ρ e sia n la dimensione di V. Diciamo che n è il *grado della rappresentazione*.

Osservazione 2. Sia (e_i) una base di V e sia R_s la matrice associata a $\rho(s)$ rispetto a questa base. Per $s, t \in G$ abbiamo:

$$\det(R_s) \neq 0, \qquad R_{st} = R_s \cdot R_t. \tag{1.1}$$

Se denotiamo con $r_{ij}(s)$ i coefficienti di R_s, la formula diventa:

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) \cdot r_{jk}(t).$$

Viceversa, data una matrice invertibile $R_s = (r_{ij}(s))$ che soddisfa le proprietà precedenti (1.1), esiste una corrispondente rappresentazione lineare ρ di G in V.

Definizione 1.4. Siano ρ e ρ' due rappresentazioni dello stesso gruppo G negli spazi vettoriali V e V' rispettivamente. Queste *rappresentazioni* sono dette *isomorfe o simili* se esiste un isomorfismo lineare $\tau\colon V \to V'$ che trasforma ρ in ρ', cioè che per ogni $s \in G$ soddisfa l'identità:

$$\tau \circ \rho_s = \rho'_s \circ \tau,$$

o equivalentemente tale che il diagramma seguente sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho_s"'] & V' \arrow[d, "\rho'_s"] \\ V \arrow[r, "\tau"] & V' \end{tikzcd}$$

Se R_s e R'_s sono le matrici associate a ρ_s e ρ'_s rispettivamente, ciò significa che esiste una matrice invertibile T tale che, per ogni $s \in G$:

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T.$$

In particolare ρ e ρ' hanno lo stesso grado.

Esempio 1.1. *Rappresentazione unitaria*

Una rappresentazione di grado 1 di un gruppo G è un omomorfismo $\rho\colon G \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Poiché ogni elemento di G ha ordine finito, i valori $\rho(s)$ di ρ sono radici dell'unità; in particolare $|\rho(s)| = 1$. Se consideriamo ρ tale che per ogni $s \in G$ valga $\rho(s) = 1$, otteniamo una rappresentazione di G che chiamiamo *rappresentazione unitaria o banale.*

Esempio 1.2. *Rappresentazione regolare*

Sia G un gruppo di ordine G e sia V uno spazio vettoriale di dimensione g con base $(e_t)_{t \in G}$. Per $s \in G$, sia ρ_s l'applicazione lineare da V in se stesso che manda e_t in e_{st}; questo definisce una rappresentazione lineare chiamata *rappresentazione regolare* di G. Il suo grado è uguale all'ordine di G.

Notiamo che per ogni $s \in G$ vale $e_s = \rho_s(e_1)$, cioè le immagini di e_1 formano una base di V. Viceversa, sia W una rappresentazione di G che contiene un vettore w in modo che $\rho_s(w)$, al variare di $s \in G$, formi una base di W: allora W è isomorfa alla rappresentazione regolare (un isomorfismo può essere definito da $\tau\colon V \to W$ ponendo $\tau(e_s) = \rho_s(w)$).

Esempio 1.3. *Rappresentazione di permutazione*

Sia G un gruppo che agisce su un insieme finito X, cioè per ogni $s \in G$ è data una permutazione $x \mapsto sx$ di X, che, per ogni $s, t \in G, x \in X$, soddisfa le seguenti proprietà:

$$1_G\, x = x, \quad s(tx) = (st)x.$$

Sia V uno spazio vettoriale con base $(e_x)_{x\in X}$. Per $s \in G$ sia ρ_s l'applicazione lineare da V in se stesso che manda e_x in e_{sx}; la rappresentazione lineare di G così ottenuta è detta *rappresentazione di permutazione* associata all'insieme X.

1.2 Sottorappresentazioni

Definizione 1.5. Sia ρ una rappresentazione di G in V e W un sottospazio vettoriale di V. Se per $x \in W$ abbiamo che, per ogni $s \in G$, vale $\rho_s(x) \in W$ diciamo che W è *stabile o invariante* rispetto a G.

Definizione 1.6. Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione lineare e sia W un sottospazio vettoriale di V stabile rispetto a G. Se restringiamo ρ_s a W otteniamo un automorfismo di W e abbiamo $\rho_{st} = \rho_s \circ \rho_t$. La restrizione $\rho_{|W}\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ così ottenuta è una rappresentazione lineare di G in W e W è detto *sottorappresentazione* di V.

Esempio 1.4. Sia ρ la rappresentazione regolare di G in V e sia W un sottospazio di V di dimensione 1 generato dagli elementi $x = \sum_{s\in G} e_s$. Per ogni $s \in G$ abbiamo $\rho_s(x) = x$, di conseguenza W è una sottorappresentazione di V isomorfa alla rappresentazione banale.

Prima di proseguire con le sottorappresentazioni ricordiamo alcune nozioni di algebra lineare:

Definizione 1.7. Sia V uno spazio vettoriale e siano W e W' due suoi sottospazi. Diciamo che V è *somma diretta* di W e W' se ogni $x \in V$ si scrive in modo unico come: $x = w + w'$, con $w \in W$ e $w' \in W'$. Equivalentemente, se $W \cap W' = \{0\}$ e $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W')$. Scriviamo $V = W \oplus W'$ e diciamo che W' è il *complementare* di W in V.

L'applicazione p che manda ogni $x \in V$ nella sua componente $w \in W$ è detta *proiezione* di V su W, associata alla decomposizione $V = W \oplus W'$. L'immagine di p è W e per ogni $x \in W$, $p(x) = x$. Viceversa, se p è un applicazione lineare da V in se stesso che soddisfa queste due proprietà allora significa che V è somma diretta di W e del nucleo $W' = \{x \in V \mid p(x) = 0\}$ di p. Abbiamo così stabilito una corrispondenza biunivoca tra la proiezione p di V su W e i complementari di W in V.

Possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Teorema 1.2.1. *Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione lineare di G in V e sia W un sottospazio vettoriale di V stabile rispetto a G. Allora esiste un complementare W^0 di W che è stabile rispetto a G.*

Dimostrazione. Sia W' un arbitrario sottospazio complementare di W in V e sia p la proiezione di V su W. Costruiamo la media p^0 dei coniugati di p al variare degli elementi di G:

$$p^0 := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_t \circ p \circ {\rho_t}^{-1} \qquad (g \text{ è l'ordine di } G).$$

Per definizione p manda V su W e ρ_t fissa W perché per ipotesi W è stabile rispetto a G. In particolare per $x \in W$ abbiamo ${\rho_t}^{-1}(x) \in W$, allora:

$$p({\rho_t}^{-1}(x)) = {\rho_t}^{-1}(x), \qquad \rho_t(p({\rho_t}^{-1}(x)) = x, \qquad p^0(x) = x.$$

Cioè abbiamo mostrato che p^0 è una proiezione di V su W, che corrisponde a un complementare W^0 di W. Per quanto detto nella definizione 1.7 $W^0 =$ $\mathrm{Ker}(p^0)$. Abbiamo inoltre che per ogni $s \in G$:

$$\rho_s \circ p^0 = p^0 \circ \rho_s,$$

infatti, calcolando $\rho_s \circ p^0 \circ {\rho_s}^{-1}$, otteniamo:

$$\rho_s \circ p^0 \circ {\rho_s}^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_s \circ \rho_t \circ p \circ {\rho_t}^{-1} \circ {\rho_s}^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ p \circ {\rho_{st}}^{-1} = p^0.$$

Dimostriamo infine che W^0 è stabile rispetto a G. Siano $x \in W^0$ e $s \in G$ allora $p^0(x) = 0$, quindi $p^0(\rho_s(x)) = \rho_s(p^0(x)) = 0$, cioè $\rho_s(x) \in W^0$. □

Osservazione 3. Possiamo dimostrare il teorema precedente anche in un altro modo definendo un prodotto scalare (o prodotto hermitiano) su V. Tale prodotto lo indichiamo con $(x|y)$ e soddisfa le usuali proprietà: è lineare rispetto x, semilineare rispetto y e per ogni $\phi \neq 0$ vale $(\phi|\phi) > 0$. Se supponiamo che il prodotto scalare sia invariante rispetto a G, cioè che per ogni $s \in G$ valga $(\rho_s(x)|\rho_s(y)) = (x|y)$, allora il complemento ortogonale W^0 di W in V è stabile rispetto a G. Il teorema è dunque provato.

Osserviamo che l'ipotesi di invarianza non è sempre verificata. Nel caso in cui $(x|y)$ non lo sia, definiamo: $\sum_{t \in G}(\rho_t(x)|\rho_t(y))$. Quest'ultimo è ovviamente un prodotto scalare e di seguito mostriamo che è invariante rispetto a G. Per ogni $s \in G$, abbiamo:

$$\sum_{t \in G}(\rho_s(\rho_t(x))|\rho_s(\rho_t(y))) = \sum_{t \in G}(\rho_{st}(x)|\rho_{st}(y)) = \sum_{t \in G}(\rho_t(x)|\rho_t(y)),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che per ogni $s \in G$ e al variare di $t \in G$, si ottengono con st tutti gli elementi di G. Notiamo inoltre che dire che il prodotto scalare è invariante significa che: se (e_i) è una base ortonormale di V, allora la matrice di ρ_s rispetto a questa base è una matrice unitaria.

Osservazione 4. Supponiamo valgano le ipotesi del teorema 1.2.1 e siano $x \in V, w$ e w^0 le sue proiezioni su W e W^0 rispettivamente. Abbiamo $x = w + w^0$, da cui $\rho_s(x) = \rho_s(w) + \rho_s(w^0)$. Poiché W e W^0 sono stabili rispetto a G, abbiamo $\rho_s(w) \in W$ e $\rho_s(w^0) \in W^0$; cioè $\rho_s(w)$ e $\rho_s(w^0)$ sono le proiezioni di $\rho_s(x)$. Segue che le sottorappresentazioni W e W^0 determinano la rappresentazione V. Diciamo che V è la somma diretta di W e W^0 e scriviamo $V = W \oplus W^0$. Un elemento di V è identificato con una coppia (w, w^0), con $w \in W$ e $w^0 \in W^0$. Se R_s e R_s^0 sono le matrici associate alle sottorappresentazioni W e W^0, allora la matrice associata a $W \oplus W^0$ è:

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

La somma diretta di un numero finito di rappresentazioni è definita in modo simile.

Possiamo anche riformulare il teorema 1.2.1 nel seguente modo: *data una rappresentazione V di un gruppo G e W una sua sottorappresentazione, esiste un altra sottorappresentazione W^0 tale che: $V = W \oplus\ W^0$.*

1.3 Rappresentazioni irriducibili e il teorema di Maschke

Definizione 1.8. Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione lineare di G. Diciamo che è *irriducibile o semplice* se V è diverso da 0 e nessun sottospazio non banale di V è stabile rispetto a G.

Dal teorema 1.2.1 questa seconda condizione è equivalente a dire che V non è somma diretta di due rappresentazioni (eccetto nel caso della decomposizione banale $V = V \oplus 0$).

Teorema 1.3.1 (Teorema di Maschke)**.** *Ogni rappresentazione è una somma diretta di sottorappresentazioni irriducibili.*

Osservazione 5. Questo risultato è un corollario del teorema 1.2.1. Per dimostrarlo, in precedenza abbiamo soltanto usato l'ipotesi che la caratteristica del campo non divida l'ordine di G. Quindi, il teorema 1.2.1 e il teorema di Maschke, come suo corollario, valgono più in generale sotto questa ipotesi, mentre la dimostrazione alternativa dell'osservazione 3 funziona solo sul campo complesso.

Dimostrazione del teorema di Maschke. Sia V una rappresentazione lineare di G. Procediamo per induzione sulla dimensione $\dim(V)$ di V.

Se $\dim(V) = 0$ il teorema è ovvio: 0 è la somma diretta della famiglia vuota di rappresentazioni irriducibili.

Supponiamo che $\dim(V) \geq 1$. Se V è irriducibile non c'è nulla da provare. Altrimenti, per il teorema 1.2.1, è possibile decomporre V nella somma diretta $V' \oplus V''$ con $\dim(V') < \dim(V)$, $\dim(V'') < \dim(V)$ e V', V'' stabili rispetto a G. Per ipotesi induttiva V' e V'' sono somma diretta di rappresentazioni irriducibili, allora lo stesso è vero anche per V. □

Osservazione 6. Sia V una rappresentazione e sia $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ una sua decomposizione in somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Ci chiediamo se questa decomposizione è unica. Il caso in cui $\rho_s \colon G \to \mathbb{C}^*$ è tale per cui, per ogni $s \in G$, $\rho_s = 1$ mostra che in generale non è vero. In questo caso i W_i sono rette e abbiamo molte possibili decomposizioni di uno spazio vettoriale in somma diretta di rette. Tuttavia vedremo nel paragrafo 2.3 che il numero di W_i isomorfi a una data rappresentazione irriducibile non dipende dalla scelta della decomposizione.

1.4 Prodotto tensoriale di due rappresentazioni

Definizione 1.9. Siano $\rho^1 \colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ e $\rho^2 \colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ due rappresentazioni lineari del gruppo G. Per $s \in G$ definiamo un elemento $\rho_s \in \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$ in modo che, per $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$ soddisfi:

$$\rho_s(x_1 \otimes x_2) = {\rho_s}^1(x_1) \otimes {\rho_s}^2(x_2),$$

e scriviamo $\rho_s = {\rho_s}^1 \otimes {\rho_s}^2$. Tale ρ_s definisce una rappresentazione lineare di G in $V_1 \otimes V_2$ che è chiamata *prodotto tensoriale* delle rappresentazioni date.

Osserviamo che l'esistenza e l'unicità di ρ_s segue dalla multilinearità e dalla proposizione 0.2.1.

Scriviamo con le matrici: sia (e_{i_1}) una base per V_1, $r_{i_1 j_1}(s)$ la matrice associata a ${\rho_s}^1$ rispetto a questa base e siano analogamente (e_{i_2}) una base per V_2, $r_{i_2 j_2}(s)$ la matrice associata a ${\rho_s}^2$. Le formule

$${\rho_s}^1(e_{j_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1 j_1}(s) \cdot e_{i_1}, \qquad {\rho_s}^2(e_{j_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2 j_2}(s) \cdot e_{i_2}$$

implicano:

$$\rho_s(e_{j_1} \otimes e_{j_2}) = \sum_{i_1, i_2} (r_{i_1 j_1}(s) \cdot e_{i_1}) \otimes (r_{i_2 j_2}(s) \cdot e_{i_2}) = \sum_{i_1, i_2} r_{i_1 j_1}(s) \cdot r_{i_2 j_2}(s) \cdot (e_{i_1} \otimes e_{i_2}),$$

di conseguenza otteniamo che la matrice associata a ρ_s è $(r_{i_1 j_1} \cdot r_{i_2 j_2})$.

Osservazione 7. Il prodotto tensoriale di due rappresentazioni irriducibili in generale non è irriducibile. Sappiamo però che si decompone nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Capitolo 2

Teoria dei caratteri

In questo capitolo definiamo il carattere di una rappresentazione e studiamo le sue proprietà. Il carattere di una rappresentazione complessa di un gruppo finito determina, a meno di isomorfismi, la rappresentazione stessa.

2.1 Carattere di una rappresentazione

Definizione 2.1. Sia V uno spazio vettoriale con base (e_i) di n elementi e sia a un'applicazione lineare da V in se stesso con matrice associata (a_{ij}). Chiamiamo *traccia* di a lo scalare:

$$\mathrm{Tr}(a) = \sum_i a_{ii}.$$

Osserviamo che è la somma degli autovalori di a contati con molteplicità e che quindi non dipende dalla scelta della base.

Definizione 2.2. Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione lineare di un gruppo finito G nello spazio vettoriale V. Chiamiamo *carattere della rappresentazione* la funzione $\chi_\rho\colon G \to \mathbb{C}$ definita da $\chi_\rho(s) = \mathrm{Tr}(\rho_s)$.

Proposizione 2.1.1. *Se χ è il carattere di una rappresentazione ρ di grado n, abbiamo:*

(i) $\chi(1_G) = n$.

(ii) $\chi(s^{-1}) = \chi(s)^*$, *per* $s \in G$.

(iii) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$, *per* $s, t \in G$.

Dimostrazione.

(i) Poiché V ha dimensione finita abbiamo $\rho(1_G) = \text{id}$ e $\text{Tr}(\text{id}) = n$, da cui segue (i).

(ii) Ricordiamo che G è un gruppo finito perciò tutti i suoi elementi hanno ordine finito. Da questo segue che per ogni $s \in G$ anche ρ_s ha ordine finito. Infatti sia $s \in G$ e sia z il suo ordine, cioè $s^z = 1_G$, allora $\text{id} = \rho_{1_G} = \rho_{s^z} = {\rho_s}^z$. Di conseguenza anche gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di ρ_s hanno ordine finito e in particolare modulo 1, da cui:

$$\lambda_i \lambda_i^* = |\lambda_i|^2 = 1, \quad \text{cioè} \quad \lambda_i^* = \lambda_i^{-1}.$$

Perciò abbiamo:

$$\chi(s)^* = \text{Tr}(\rho_s)^* = \sum {\lambda_i}^* = \sum {\lambda_i}^{-1} = \text{Tr}({\rho_s}^{-1}) = \text{Tr}(\rho_{s^{-1}}) = \chi(s^{-1}).$$

(iii) Ponendo $u = ts, v = t^{-1}$ possiamo riscrivere la formula nel seguente modo: $\chi(uv) = \chi(vu)$. Questa è vera perché per due applicazioni lineari arbitrarie a e b da V in se stesso vale $\text{Tr}(ab) = \text{Tr}(ba)$.

□

Definizione 2.3. Una funzione $f\colon G \to \mathbb{C}$ tale che per $s, t \in G$ vale $f(tst^{-1}) = f(s)$ o equivalentemente, per $u, v \in G$, $f(uv) = f(vu)$ è chiamata *funzione di classe.*

Vedremo in seguito nel teorema 2.5.2 che una tale funzione è combinazione lineare di caratteri. In particolare, per la proposizione precedente, è ovvio che i caratteri sono funzioni di classe.

Proposizione 2.1.2. *Siano* $\rho^1\colon G \to \text{GL}(V_1)$ *e* $\rho^2\colon G \to \text{GL}(V_2)$ *due rappresentazioni lineari di* G *e siano* χ_1, χ_2 *i loro rispettivi caratteri. Allora:*

(i) Il carattere χ della somma diretta $V_1 \oplus V_2$ delle due rappresentazioni è uguale a $\chi_1 + \chi_2$.

(ii) Il carattere ψ del prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$ delle due rappresentazioni è uguale a $\chi_1 \cdot \chi_2$.

Dimostrazione. Siano R_s^1, R_s^2 le matrici associate rispettivamente a ρ^1 e ρ^2. La matrice associata alla rappresentazione $V_1 \oplus V_2$ è:

$$R_s = \begin{pmatrix} R_s^1 & 0 \\ 0 & R_s^2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\mathrm{Tr}(R_s) = \mathrm{Tr}(R_s^1) + \mathrm{Tr}(R_s^2)$, cioè $\chi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s)$.

Per la (ii) procediamo allo stesso modo e, usando la notazione del paragrafo 1.4, otteniamo:

$$\chi_1(s) = \sum_{i_1} r_{i_1 i_1}(s), \qquad \chi_2(s) = \sum_{i_2} r_{i_2 i_2}(s),$$

$$\psi(s) = \sum_{i_1, i_2} r_{i_1 i_1}(s) \cdot r_{i_2 i_2}(s) = \chi_1(s) \cdot \chi_2(s).$$

□

Nel caso di somma diretta o prodotto tensoriale di un numero finito n di rappresentazioni vale un risultato analogo.

2.2 Lemma di Schur e prime applicazioni

Enunciamo il Lemma di Schur che ci permetterà in seguito di dimostrare la relazione di ortogonalità che lega i caratteri irriducibili di un gruppo.

Proposizione 2.2.1 (Lemma di Schur). *Siano $\rho^1 \colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ e $\rho^2 \colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ due rappresentazioni irriducibili di G e sia f un applicazione lineare da V_1 a V_2 tale che, per ogni $s \in G$, vale $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$. Allora:*

(1) Se ρ^1 e ρ^2 non sono isomorfe, abbiamo $f = 0$.

(2) Se $V_1 = V_2$ e $\rho^1 = \rho^2$, f è un omotetia, cioè un multiplo scalare dell'identità.

Dimostrazione. Il caso in cui $f = 0$ è banale.

Supponiamo $f \neq 0$ e sia W_1 il suo nucleo, ovvero $W_1 = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}$. Per $x \in W_1$ abbiamo $f(\rho_s^1(x)) = \rho_s^2(f(x)) = 0$, ciò mostra che $\rho_s^1(x) \in W_1$ e quindi che W_1 è stabile rispetto a G. Poiché per ipotesi V_1 è irriducibile, W_1 è uguale a V_1 o a 0; il primo caso è escluso perché implica $f = 0$.
Consideriamo ora l'immagine di f, $W_2 = \{f(x) \mid x \in V_1\}$. Sia $f(x) \in W_2$, abbiamo $\rho_s^1(x) \in V_1$ perciò $f(\rho_s^1(x)) = \rho_s^2(f(x)) \in W_2$, cioè W_2 è stabile rispetto a G. Dall'irriducibilità di V_2 segue che W_2 è uguale a V_2 oppure a 0. Se $W_2 = 0$ si ha che $f = 0$ perciò è da escludere.
Il fatto che $W_1 = 0$ e $W_2 = V_2$ prova che f è un isomorfismo da V_1 in V_2; ma questo non è possibile per ipotesi di (1) e quindi $f = 0$. Il primo punto è così provato.

Supponiamo ora che $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$ e sia λ autovalore di f, ne esiste almeno uno perché stiamo considerando come campo degli scalari $\mathbb{C}$. Poniamo $f' := f - \lambda \cdot \mathrm{id}$. Supponiamo $f' \neq 0$. Abbiamo che $\rho_s^2 \circ f' = f' \circ \rho_s^1$, da cui segue che $\mathrm{Im}(f') = V_2$. Ma per come abbiamo definito f' abbiamo che $\mathrm{Im}(f') \subsetneqq V_2$. Abbiamo un assurdo perciò $f' = 0$, cioè $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$. Abbiamo così provato anche (2). □

Corollario 2.2.2. *Sia h un'applicazione lineare da V_1 a V_2 e sia g l'ordine di G, poniamo:*

$$h^0 := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} \circ h \circ \rho_t^1.$$

Allora:

(1) Se ρ^1 e ρ^2 non sono isomorfe, abbiamo $h^0 = 0$.

(2) Se $V_1 = V_2$ e $\rho^1 = \rho^2$, h^0 è un omotetia di rapporto $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(h)$, con $n = \dim(V_1)$.

Dimostrazione. Abbiamo $\rho_s^2 \circ h^0 = h^0 \circ \rho_s^1$. Infatti:

$$(\rho_s^2)^{-1} \circ h^0 \circ \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_s^2)^{-1} \circ (\rho_t^2)^{-1} \circ h \circ \rho_t^1 \circ \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_{ts}^2)^{-1} \circ h \circ \rho_{ts}^1 = h^0.$$

Dalla proposizione 2.2.1 con $f = h^0$ nel caso (1) abbiamo $h^0 = 0$ e nel caso (2) abbiamo che h^0 è un multiplo scalare dell'identità, cioè $h^0 = \lambda \cdot \mathrm{id}$. Inoltre, nell'ultimo caso abbiamo:

$$\mathrm{Tr}(h^0) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \mathrm{Tr}((\rho_t^1)^{-1} \circ h \circ \rho_t^1) = \mathrm{Tr}(h),$$

e poiché $\mathrm{Tr}(\lambda \cdot \mathrm{id}) = n \cdot \lambda$, allora $\lambda = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}(h)$. □

Vogliamo riscrivere il corollario 2.2.2 nel caso in cui invece di ρ^1, ρ^2, h, h^0 siano date le loro matrici associate. Abbiamo $\rho_t^1 = (r_{i_1 j_1}(t)), \rho_t^2 = (r_{i_2 j_2}(t))$, la matrice di h è definita da $(x_{i_2 i_1})$ e quella di h^0 da $(x_{i_2 i_1}^0)$ tale che:

$$x_{i_2 i_1}^0 = \frac{1}{g} \sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t).$$

L'espressione a destra dell'uguale è una forma lineare rispetto $x_{j_2 j_1}$; nel caso (1) questa forma si annulla per ogni sistema di valori di $x_{j_2 j_1}$ quindi i suoi coefficienti sono zero, da cui per i_1, i_2, j_1, j_2 arbitrari:

$$\frac{1}{g} \sum_{t \in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = 0. \tag{2.1}$$

Nel caso (2) abbiamo $h^0 = \lambda \cdot \mathrm{id}$ con $\lambda = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}(h)$, cioè, se $\delta_{i_2 i_1}$ indica il simbolo di Kronecker, $x_{i_2 i_1}^0 = \lambda \delta_{i_2 i_1}$ con $\lambda = \frac{1}{n} \sum \delta_{j_2 j_1} x_{j_2 j_1}$. Da cui segue:

$$\frac{1}{g} \sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j_1, j_2} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} x_{j_2 j_1}.$$

Inoltre nel caso (2) abbiamo:

$$\frac{1}{g} \sum_{t \in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } i_1 = i_2 \text{ e } j_1 = j_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2.2}$$

Osservazione 8. Siano ϕ e ψ due funzioni da G a $\mathbb{C}$, definiamo:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t^{-1})\psi(t) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t)\psi(t^{-1}).$$

Osserviamo che è un prodotto scalare bilineare e commutativo.

Con questa notazione le formule (2.1) e (2.2) diventano rispettivamente:

$$\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}. \tag{2.3}$$

2.3 Relazione di ortogonalità tra caratteri

Definizione 2.4. Siano ϕ e ψ due funzioni a valori complessi sul gruppo G di ordine g, definiamo il *prodotto scalare o prodotto hermitiano* delle due funzioni:

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t)\psi(t)^*.$$

Osserviamo che è lineare rispetto ϕ, semilineare rispetto ψ ed è tale che per ogni $\phi \neq 0$ vale $(\phi|\phi) > 0$.

Osservazione 9. Sia ψ una funzione su G a valori complessi, definiamo $\widetilde{\psi} := \psi(t^{-1})^*$ ed otteniamo:

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \phi(t)\widetilde{\psi}(t^{-1}) = \langle \phi, \widetilde{\psi} \rangle.$$

In particolare, se χ è il carattere di una rappresentazione di G, abbiamo $\widetilde{\chi} = \chi$ (prop. 2.1.1), cioè per ogni funzione ϕ su G vale $(\phi|\chi) = \langle \phi, \chi \rangle$. Perciò possiamo usare equivalentemente $(\phi|\chi)$ oppure $\langle \phi, \chi \rangle$ se stiamo considerando i caratteri.

Teorema 2.3.1.

(i) Se χ è il carattere di una rappresentazione irriducibile, allora $(\chi|\chi) = 1$, cioè χ è di norma 1.

(ii) Se χ e χ' sono i caratteri di due rappresentazioni irriducibili non isomorfe, allora $(\chi|\chi') = 0$, cioè χ e χ' sono ortogonali.

Dimostrazione.

(i) Sia ρ una rappresentazione irriducibile di grado n data in forma di matrice da $\rho_t = (r_{ij}(t))$. Sia $\chi(t) = \sum r_{ii}(t)$ il suo carattere, abbiamo:

$$(\chi|\chi) = \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle r_{ii}, r_{jj} \rangle.$$

Per la formula (2.2) abbiamo $\langle r_{ii}, r_{jj} \rangle = \frac{\delta_{ij}}{n}$. Allora:

$$(\chi|\chi) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} = \frac{n}{n} = 1.$$

(ii) Siano ρ e ρ' due rappresentazioni irriducibili non isomorfe date in forma di matrice da $\rho_t = (r_{i_1 j_1}(t))$ e $\rho'_t = (r_{i_2 j_2}(t))$. Siano $\chi(t) = \sum r_{i_1 i_1}(t)$ e $\chi'(t) = \sum r_{j_2 j_2}(t)$ i loro rispettivi caratteri, abbiamo:

$$(\chi|\chi') = \langle \chi, \chi' \rangle = \sum_{i_1, i_2} \langle r_{i_1 i_1}, r_{j_2 j_2} \rangle.$$

Poiché non sono isomorfe, per la formula (2.1) $\langle r_{i_1 i_1}, r_{j_2 j_2} \rangle = 0$, allora $(\chi|\chi') = 0$.

□

Questo teorema mostra che i caratteri irriducibili formano un sistema ortonormale.

Definizione 2.5. Il carattere di una rappresentazione irriducibile è detto *carattere irriducibile*.

Teorema 2.3.2. *Sia V una rappresentazione lineare di G, con carattere ϕ e supponiamo che V abbia una decomposizione in somma diretta di sottorappresentazioni irriducibili:*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Allora, se W è una rappresentazione irriducibile con carattere χ, il numero dei W_i isomorfi a W è uguale al prodotto scalare $(\phi|\chi) = \langle \phi, \chi \rangle$.

Dimostrazione. Sia χ_i il carattere di W_i; dalla proposizione 2.1.2 abbiamo:

$$\phi = \chi_1 + \cdots + \chi_k.$$

Allora $(\phi|\chi) = (\chi_1|\chi) + \cdots + (\chi_k|\chi)$. Ma, in accordo con il teorema precedente, $(\chi_i|\chi)$ è uguale a 1 o 0, a seconda che W_i sia isomorfo o meno a W. Il risultato dunque segue. □

Corollario 2.3.3. *Il numero dei W_i isomorfi a W non dipende dalla scelta della decomposizione di V.*
(Questo numero è detto *numero di occorrenze* o *molteplicità* di W in V e lo indichiamo con m_i.)

Dimostrazione. Basta osservare che $(\phi|\chi)$ non dipende dalla decomposizione. □

Corollario 2.3.4. *Due rappresentazioni con lo stesso carattere sono isomorfe.*

Dimostrazione. Infatti il corollario 2.3.3 mostra che le due rappresentazioni contengono una rappresentazione irriducibile fissata lo stesso numero di volte. □

Da qui si capisce il perché del nome "carattere": è quella funzione che caratterizza una rappresentazione a meno di isomorfismi.

Notazione 2. Quando si esegue k volte la somma diretta di un spazio vettoriale F scriviamo: kF oppure $F^{\oplus k}$.

Il corollario precedente riduce lo studio delle rappresentazioni a quello dei loro caratteri. Siano $\chi_1, \ldots, \chi_h$ i caratteri irriducibili distinti di G e siano $W_1, \ldots, W_k$ le rappresentazioni corrispondenti con molteplicità $m_1, \ldots, m_k$

rispettivamente. Ogni rappresentazione V di G è isomorfa alla somma diretta:

$$V = m_1 W_1 \oplus \cdots \oplus m_h W_h, \qquad m_i \text{ interi} \neq 0.$$

Il carattere ϕ di V è uguale a $m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h$, dove ricordiamo che $m_i = (\phi|\chi_i)$.
La relazione di ortogonalità degli χ_i implica inoltre:

$$(\phi|\phi) = \sum_{i=1}^{h} m_i^2,$$

da cui:

Teorema 2.3.5 (Criterio di irriducibilità)**.** *Se ϕ è il carattere di una rappresentazione V, $(\phi|\phi)$ è un intero positivo e $(\phi|\phi) = 1$ se e solo se V è irriducibile.*

Dimostrazione. Infatti $\sum m_i^2$ è uguale a 1 solo se uno degli m_i è uguale a 1 e gli altri sono 0, cioè solo se V è isomorfo a uno dei W_i. □

2.4 Decomposizione della rappresentazione regolare

Notazione 3. Sia G un gruppo di ordine g. Denotiamo i caratteri irriducibili di G con $\chi_1, \dots, \chi_h$ e i loro gradi con $n_1, \dots, n_k$. Ricordiamo che $n_i = \chi_i(1)$.

Sia R la rappresentazione regolare di G. Ricordiamo dall'esempio 1.2 che ammette una base $(e_t)_{t\in G}$ tale che $\rho_s(e_t) = e_{st}$. Se $s \neq 1_G$, abbiamo che per ogni t vale $st \neq t$, ciò mostra che gli elementi diagonali della matrice di ρ_s sono zero; in particolare otteniamo che $\mathrm{Tr}(\rho_s) = 0$. D'altra parte, per $s = 1_G$, abbiamo:

$$\mathrm{Tr}(\rho_s) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}) = \dim(R) = g.$$

Riassumendo possiamo enunciare la seguente proposizione:

Proposizione 2.4.1. *Il carattere r_G della rappresentazione regolare R è:*

$$r_G(s) = \begin{cases} g & se \quad s = 1_G \\ 0 & se \quad s \neq 1_G \end{cases}$$

Corollario 2.4.2. *Ogni rappresentazione irriducibile W_i è contenuta nella rappresentazione regolare con molteplicità uguale al suo grado n_i.*

Dimostrazione. Per il teorema 2.3.2, il numero di occorrenze di W_i in R è uguale a $\langle r_G, \chi_i \rangle$ e:

$$\langle r_G, \chi_i \rangle = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} r_G(s^{-1}) \cdot \chi_i(s) = \frac{1}{g}(g \cdot \chi_i(1_G)) = \chi_i(1_G) = n_i.$$

□

Corollario 2.4.3.

(a) I gradi n_i soddisfano la relazione $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = g$.

(b) Se $s \in G$ è diverso da 1_G, allora $\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0$.

Dimostrazione. Dal corollario precedente, per ogni $s \in G$ abbiamo $r_G(s) = \sum n_i \chi_i(s)$. Se $s = 1_G$ otteniamo (a), se $s \neq 1_G$ otteniamo (b). □

Osservazione 10. Quest'ultimo risultato può essere usato per determinare le rappresentazioni irriducibili di un gruppo G. Supponiamo di aver costruito alcune rappresentazioni irriducibili, tra di loro non isomorfe, con gradi $n_1, \dots, n_k$; affinché siano tutte le rappresentazioni irriducibili di G, a meno di isomorfismi, è necessario e sufficiente che $n_1^2 + \cdots + n_k^2 = g$.

2.5 Numero di rappresentazioni irriducibili

Ricordiamo che una funzione f su G è chiamata *funzione di classe* se per ogni $s, t \in G$ vale $f(tst^{-1}) = f(s)$.

Proposizione 2.5.1. *Sia f una funzione di classe su G e sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione lineare di G. Inoltre sia ρ_f l'applicazione lineare da V in se stesso definita da:*

$$\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t.$$

Se V è irriducibile di grado n e con carattere χ, allora ρ_f è un omotetia di rapporto λ dato da:

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n}\ (f|\chi^*).$$

Dimostrazione. Calcoliamo $\rho_s^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_s$:

$$\rho_s^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_s = \sum_{t\in G} f(t)\rho_s^{-1} \circ \rho_t \circ \rho_s = \sum_{t\in G} f(t)\rho_{s^{-1}ts}. \tag{2.4}$$

Poniamo $u = s^{-1}ts$, allora (2.4) diventa:

$$\rho_s^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_s = \sum_{u\in G} f(sus^{-1})\rho_u = \sum_{u\in G} f(u)\rho_u = \rho_f.$$

Abbiamo $\rho_f \circ \rho_s = \rho_s \circ \rho_f$. La seconda parte della proposizione 2.2.1 ci dice che ρ_f è un omotetia $\lambda \cdot \mathrm{id}$. La traccia di $\lambda \cdot \mathrm{id}$ è $n\lambda$; quella di ρ_f è $\sum_{t\in G} f(t)\,\mathrm{Tr}(\rho_t) = \sum_{t\in G} f(t)\chi(t)$. Perciò $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n}\ (f|\chi^*)$. □

Definizione 2.6. Chiamiamo H lo spazio lineare delle funzioni di classe su un gruppo G.

Tale spazio è lineare, infatti se f, g sono funzioni classe e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora $f + g$ e λf sono ancora funzioni di classi.

Per quanto osservato nel paragrafo 2.1 i caratteri irriducibili $\chi_1, \dots, \chi_h$ di G appartengono ad H. Inoltre vale:

Teorema 2.5.2. *I caratteri irriducibili $\chi_1, \dots, \chi_h$ formano una base ortonormale di H.*

Dimostrazione. Il teorema 2.3.1 mostra che gli χ_i formano un sistema ortonormale in H.

Rimane da provare che essi generano H. Supponiamo che $(\chi_1, \dots, \chi_h)$ generino un sottospazio proprio $M \subsetneqq H$. Consideriamo $\widetilde{f} \in H \smallsetminus M$ e la proiettiamo su M attraverso la proiezione definita da $\pi(\widetilde{f}) = \sum_{j=1}^{h} (\widetilde{f}|\chi_j^*)\chi_j^*$. Se $\widetilde{f} - \pi(\widetilde{f})$ è zero allora significa che $H \smallsetminus M = \emptyset$, perciò $M = H$. Da cui segue che $(\chi_1, \dots, \chi_h)$ è un sistema di generatori per H. Dunque è sufficiente mostrare che se $f \in H$ è tale che $(f|\chi_i^*) = 0$ allora $f = 0$. Infatti se vale questo, poiché $(\widetilde{f} - \pi(\widetilde{f})|\chi_i^*) = 0$ abbiamo $\widetilde{f} - \pi(\widetilde{f}) = 0$.
Considero f tale per cui $(f|\chi_i^*) = 0$ e per ogni rappresentazione ρ di G, poniamo $\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t$. Poiché f è ortogonale a χ_i^*, la proposizione 2.5.1 mostra che se ρ è irriducibile, ρ_f è zero; dalla decomposizione in somma diretta concludiamo che ρ_f è sempre zero.
Applicando questo alla rappresentazione regolare R e calcolando l'immagine del vettore di base e_1 attraverso ρ_f otteniamo:

$$\rho_f(e_1) = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t(e_1) = \sum_{t\in G} f(t)e_t.$$

Poiché ρ_f è zero, $\rho_f(e_1) = 0$ e la formula sopra mostra che per ogni $t \in G$ dobbiamo avere $f(t) = 0$; allora $f = 0$ e la dimostrazione è conclusa. □

Teorema 2.5.3. *Consideriamo la relazione di coniugio sul gruppo G: $t \sim t'$ se esiste $s \in G$ tale che $t' = sts^{-1}$. Il numero di rappresentazioni irriducibili di G (a meno di isomorfismi) è uguale al numero di classi di coniugio di G.*

Dimostrazione. Siano $C_1, \dots, C_k$ le classi distinte di G. Dire che una funzione f su G è una funzione di classe significa dire che essa è costante su ogni classe di equivalenza $C_1, \dots, C_k$. La funzione è così determinata dai suoi valori λ_i sulle C_i e questi possono essere scelti arbitrariamente. Di conseguenza, la dimensione dello spazio H delle funzioni di classe è uguale a k. D'altra parte dal teorema 2.5.2 questa dimensione è uguale, a meno di isomorfismi, al numero di rappresentazioni irriducibili di G. □

Proposizione 2.5.4. *Sia $s \in G$ e sia $c(s)$ il numero di elementi nella classe di coniugio di s. Allora:*

(a) Abbiamo $\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}$.

(b) Per $t \in G$ non coniugato di s abbiamo $\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(t) = 0$.

Dimostrazione. Sia f_s la funzione uguale a 1 sulla classe di s e uguale a 0 negli altri casi. Poiché è una funzione di classe, dal teorema 2.5.2 possiamo scrivere:

$$f_s = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i, \quad \text{con} \quad \lambda_i = (f_s|\chi_i) = \frac{c(s)}{g} \chi_i(s)^*.$$

Allora per ogni $t \in G$, abbiamo:

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(t).$$

Questo dimostra (a) se $t = s$ e (b) se t non è coniugato di s. □

Esempio 2.1. Sia $G = S_3$ il gruppo delle permutazione di tre elementi. Il suo ordine è 6 e ci sono tre classi di coniugio: l'elemento neutro 1, l'insieme delle tre trasposizioni e l'insieme delle due permutazioni cicliche. Sia t una trasposizione e sia c una permutazione ciclica. Abbiamo $t^2 = 1,\ c^3 = 1,\ tc = c^2 t$. Da queste formule segue che ci sono due caratteri irriducibili di grado 1: il carattere unitario χ_1 e il carattere χ_2 determinato dal segno della permutazione. Il teorema 2.5.3 mostra che esiste un altro carattere irriducibile θ. Se n è il suo grado dobbiamo avere $1 + 1 + n^2 = 6$, cioè $n = 2$. I valori di θ possono essere dedotti dal fatto che $\chi_1 + \chi_2 + 2\theta = r_G$ è il carattere della rappresentazione regolare di G. Osserviamo inoltre che otteniamo una rappresentazione irriducibile con carattere θ se G permuta le coordinate degli elementi di $\mathbb{C}^3$ che soddisfano l'equazione $x + y + z = 0$.

Riassumiamo tutti i caratteri irriducibili di S_3 in una tabella. Nelle righe di questa *tabella dei caratteri* mettiamo le rappresentazioni irriducibili, nelle colonne un rappresentante per ogni classe di coniugio e all'interno i valori che i caratteri assumono sulle classi di coniugio.

s	1	t	c
$c(s)$	1	3	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
θ	2	0	-1

2.6 Decomposizione canonica di una rappresentazione

Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione lineare di G. Andiamo a definire una decomposizione di V meno fine di quella in somma diretta di rappresentazioni irriducibili ma che ha il vantaggio di essere unica.

Definizione 2.7. Siano $\chi_1, \ldots, \chi_h$ i caratteri distinti delle rappresentazioni irriducibili $W_1, \ldots, W_h$ di G e $n_1, \ldots, n_h$ i loro gradi. Sia $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ una decomposizione di V in somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Per $i, j = 1, \ldots, h$ denotiamo con V_i la somma diretta degli U_j che sono isomorfi a W_i. Allora abbiamo:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h.$$

In altre parole, abbiamo decomposto V in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili e unito insieme le rappresentazioni isomorfe. Questa è detta *decomposizione canonica* di V.

Teorema 2.6.1.

(i) La decomposizione $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$ non dipende dalla scelta iniziale della decomposizione di V in rappresentazioni irriducibili.

(ii) La proiezione p_i di V su V_i associata a questa decomposizione è data dalla formula:

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (ii), cioè che p_i costruita in quel modo è una proiezione di V su V_i. Sia W una qualunque rappresentazione irriducibile di grado n e con carattere χ e restringiamo p_i a W. Consideriamo χ_i^* funzione di classe ed applichiamo la proposizione 2.5.1 con $\rho_{\chi_i^*} = \frac{g}{n_i}\, p_i$. Poiché W è irriducibile abbiamo che $\rho_{\chi_i^*}$ è un omotetia di rapporto $\lambda = \frac{g}{n}\, (\chi_i|\chi)$, di conseguenza p_i è un omotetia di rapporto $\frac{n_i}{n}\, (\chi_i|\chi)$. Abbiamo che p_i è 0 se $\chi \neq \chi_i$ e 1 se $\chi = \chi_i$, cioè è l'identità su una rappresentazione irriducibile isomorfa a W_i ed è 0 sulle altre. Per definizione dei V_i, segue che p_i è l'identità su V_i ed è 0 sui V_j tale che $j \neq i$. Se decomponiamo un elemento x di V nelle sue componenti $x_i \in V_i$:

$$x = x_1 + \cdots + x_h,$$

allora $p_i(x) = p_i(x_1) + \cdots + p_i(x_h) = x_i$. Cioè p_i è una proiezione di V su V_i.

La (i) segue perché la proiezione p_i determina V_i. □

Così la decomposizione di una rappresentazione V può essere fatta in due passi. Prima determiniamo la decomposizione canonica $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ e questo può essere fatto usando la formula data dalla proiezione p_i. Poi, se necessario, scegliamo una decomposizione di V_i in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili ognuna isomorfa a W_i:

$$V_i = W_i \oplus \cdots \oplus W_i.$$

Quest'ultima decomposizione può in generale essere fatta in infiniti modi; è arbitraria come la scelta di una base per uno spazio vettoriale (proposizione 2.7.1).

Esempio 2.2. Sia G un gruppo con due elementi $\{1, s\}$ con $s^2 = 1$. Questo gruppo ha due rappresentazioni irriducibili di grado 1, W^+ e W^-, corrispondenti rispettivamente a $\rho_s = \mathrm{id}$ e $\rho_s = -\mathrm{id}$. La decomposizione canonica di una rappresentazione V è $V = V^+ \oplus V^-$, dove V^+ (risp. V^-) consiste degli elementi $x \in V$ che sono simmetrici (risp. antisimmetrici), cioè che soddisfano $\rho_s(x) = x$ (risp. $\rho_s(x) = -x$). Le corrispondenti proiezioni sono:

$$p^+(x) = \frac{1}{2}(x + \rho_s(x)), \qquad p^-(x) = \frac{1}{2}(x - \rho_s(x)).$$

Decomporre V^+ e V^- in componenti irriducibili significa decomporre questi spazi in una somma diretta di rette.

2.7 Decomposizione esplicita di una rappresentazione

Usiamo la notazione del paragrafo precedente. Sia data una rappresentazione $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ e consideriamo la sua decomposizione canonica $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$. Abbiamo già visto come determinare l' i-esima componente V_i a partire dalla corrispondente proiezione (teorema 2.6.1). Ora diamo un modo esplicito per costruire una decomposizione di V_i in somma diretta di sottorappresentazioni isomorfe a W_i.

Definizione 2.8. Sia $(e_1, \ldots, e_n)$ una base del sottospazio W_i e sia data la rappresentazione corrispondente in forma di matrice $(r_{\alpha\beta}(s))$, rispetto a questa base. Sia $n = n_i = \dim(W_i)$ il suo grado e $\chi_i(s) = \sum_\alpha r_{\alpha\alpha}(s)$ il suo carattere. Per ogni coppia di interi α, β compresi tra 1 e n, denotiamo con $p_{\alpha\beta}$ l'applicazione lineare da V in se stesso definita da:

$$p_{\alpha\beta} := \frac{n}{g} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) \rho_t. \tag{2.5}$$

Proposizione 2.7.1.

(a) L'applicazione $p_{\alpha\alpha}$ è una proiezione; è zero sui V_j, $j \neq i$. La sua immagine $V_{i,\alpha}$ è contenuta in V_i e V_i è la somma diretta dei $V_{i,\alpha}$ per $1 \leq \alpha \leq n$. Per la proiezione p_i di V su V_i vale $p_i = \sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$.

(b) L'applicazione lineare $p_{\alpha\beta}$ è zero sui $V_j, j \neq i$, allo stesso modo sui $V_{i,\gamma}$ per $\gamma \neq \beta$. Questo definisce un isomorfismo da $V_{i,\beta}$ su $V_{i,\alpha}$.

(c) Sia x_1 un elemento $\neq 0$ di $V_{i,1}$ e sia $x_\alpha = p_{\alpha 1}(x_1) \in V_{i,\alpha}$. Gli x_α sono linearmente indipendenti e generano un sottospazio $W(x_1)$ stabile rispetto a G e di dimensione n. Per ogni $s \in G$, abbiamo:

$$\rho_s(x_\alpha) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) x_\beta,$$

in particolare $W(x_1)$ *è isomorfo a* W_i.

(d) Se $(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m)})$ *è una base di* $V_{i,1}$*, la rappresentazione* V_i *è la somma diretta delle sottorappresentazioni* $W(x_1^{(1)}), \dots, W(x_1^{(m)})$ *definite in (c).*

Così la scelta della base di $V_{i,1}$ dà una decomposizione di V_i in somma diretta di rappresentazioni isomorfe a W_i.

Dimostrazione. Osserviamo che la formula (2.5) ci permette di definire $p_{\alpha\beta}$ per una rappresentazione arbitraria di G e in particolare per una rappresentazione irriducibile W_j. Per W_i abbiamo:

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \frac{n}{g}\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1})\rho_t(e_\gamma) = \frac{n}{g}\sum_{\delta}\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1})r_{\delta\gamma}(t)e_\delta.$$

Per la formula (2.2) :

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \begin{cases} e_\alpha & \text{se } \gamma = \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Da questo abbiamo che $\sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$ è l'applicazione identità di W_i e inoltre valgono le formule:

$$p_{\alpha\beta}\circ p_{\gamma\delta} = \begin{cases} p_{\alpha\delta} & \text{se } \beta = \gamma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad \rho_s \circ p_{\alpha\gamma} = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)p_{\beta\gamma}.$$

Per W_j con $j \neq i$, usiamo la formula (2.1) e la stessa argomentazione per mostrare che tutti i $p_{\alpha\beta}$ sono zero.

Decomponiamo V in una somma diretta di sottorappresentazioni isomorfe a W_j e applichiamo il precedente ad ognuna di queste rappresentazioni. Le asserzioni (a) e (b) seguono; inoltre le formule sopra rimangono valide in V. Sotto le ipotesi (c), abbiamo:

$$\rho_s(x_\alpha) = \rho_s \circ p_{\alpha,1}(x_1) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)p_{\beta 1}(x_1) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)x_\beta,$$

che prova (c).

Infine (d) segue da (a), (b) e (c). □

Capitolo 3

Gruppi abeliani, prodotto di gruppi e rappresentazioni indotte

3.1 Gruppi abeliani

Vediamo come sono le rappresentazioni lineari nel caso che il gruppo finito considerato sia commutativo.

Definizione 3.1. Un gruppo G è detto *abeliano o commutativo* se per ogni $s, t \in G$ vale $st = ts$. Questo equivale a dire che ogni classe di coniugio di G è costituita da un solo elemento oppure che ogni funzione su G è una funzione di classe.

Teorema 3.1.1. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) G è abeliano.

(ii) Tutte le rappresentazioni irriducibili di G hanno grado 1.

Dimostrazione. Sia g l'ordine di G e siano $n_1, \ldots, n_h$ i gradi delle distinte rappresentazioni irriducibili di G. Sappiamo che h è il numero delle classi di coniugo di G e che $g = n_1^2 + \cdots + n_h^2$. Quindi g è uguale a h se e solo se tutti gli n_i sono 1, il che prova il teorema. $\square$

Corollario 3.1.2. *Sia A un sottogruppo abeliano di G e siano a, g i rispettivi ordini. Sia inoltre $\frac{g}{a}$ l'indice di A in G. Ogni rappresentazione irriducibile di G ha grado $\leq \frac{g}{a}$.*

Dimostrazione. Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione irriducibile di G. Restringendo al sottogruppo A possiamo definire una rappresentazione $\rho_A\colon A \to \mathrm{GL}(V)$ di A. Sia $W \subset V$ una sottorappresentazione irriducibile di ρ_A; poiché A è abeliano dal teorema 3.1.1 abbiamo $\dim(W) = 1$. Sia V' il sottospazio vettoriale di V generato dalle immagini $\rho_s(W)$ di W, al variare di $s \in G$. E' ovvio che V' è stabile rispetto G. Poiché ρ è irriducibile abbiamo $V' = V$. Ma, per $s \in G$ e $t \in A$ abbiamo:

$$\rho_{st}(W) = \rho_s(\rho_t(W)) = \rho_s(W).$$

Segue che il numero dei $\rho_s(W)$ è al massimo uguale a $\frac{g}{a}$, quindi, poiché V è somma dei $\rho_s(W)$, vale $\dim(V) \leq \frac{g}{a}$. $\square$

3.2 Prodotto di due gruppi

Vediamo come è ottenuta la rappresentazione di un prodotto di gruppi, a partire dalle rappresentazioni dei singoli gruppi. Viceversa, se abbiamo un gruppo che si può scrivere come prodotto di suoi sottogruppi, vediamo che la rappresentazione del gruppo può essere scritta come prodotto tensoriale di rappresentazioni dei sottogruppi. Analizziamo solo il caso di un prodotto tra due gruppi.

Definizione 3.2. Siano G_1 e G_2 due gruppi e sia $G_1 \times G_2$ il prodotto cartesiano $\{(s_1, s_2) \mid s_1 \in G_1, s_2 \in G_2\}$ dei due insiemi. Possiamo definire un operazione di prodotto nel seguente modo:

$$(s_1, s_2) \cdot (t_1, t_2) = (s_1 s_2, t_1 t_2).$$

Osserviamo che questa operazione definisce una struttura di gruppo su $G_1 \times G_2$. Tale gruppo è detto il *gruppo prodotto diretto* o *prodotto diretto* di G_1 e G_2. Se denotiamo con g_1, g_2 gli ordini dei due gruppi allora l'ordine del gruppo prodotto è: $g = g_1 g_2$.

Il gruppo G_1 può essere identificato con il sottogruppo di $G_1 \times G_2$ costituito degli elementi $(s_1, 1_{G_2})$, $s_1 \in G$. Analogamente per G_2. Inoltre ogni elemento di G_1 commuta con ogni elemento di G_2.

Viceversa, sia G un gruppo che contiene G_1 e G_2 come sottogruppi e supponiamo valgano le seguenti condizioni:

(i) Per ogni $s \in G$ esistono $s_1 \in G_1$ e $s_2 \in G_2$ tale che $s = s_1 s_2$.

(ii) Per $s_1 \in G_1$ e $s_2 \in G_2$ abbiamo: $s_1 s_2 = s_2 s_1$.

Il prodotto di due elementi $s = s_1 s_2,\ t = t_1 t_2$ può essere scritto:

$$st = s_1 s_2 t_1 t_2 = (s_1 t_1)(s_2 t_2).$$

Segue che, se consideriamo la coppia $(s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$ corrispondente all'elemento $s_1 s_2 \in G$ otteniamo un isomorfismo da $G_1 \times G_2$ in G. In questo caso diciamo anche che G è il *prodotto o prodotto diretto* dei sottogruppi G_1 e G_2 e lo identifichiamo con $G_1 \times G_2$.

Definizione 3.3. Siano $\rho^1 \colon G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ e $\rho^2 \colon G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ due rappresentazioni lineari dei gruppi G_1 e G_2 rispettivamente. Definiamo una rappresentazione lineare $\rho^1 \otimes \rho^2 \colon G_1 \times G_2 \to V_1 \otimes V_2$, con un procedimento analogo al paragrafo 1.4, tale che:

$$(\rho^1 \otimes \rho^2)(s_1, s_2) = \rho^1(s_1) \otimes \rho^2(s_2).$$

Questa rappresentazione è detta *prodotto tensoriale delle rappresentazioni ρ^1 e ρ^2*. Se χ_i è il carattere di ρ^i $(i = 1, 2)$, il carattere χ di $\rho^1 \otimes \rho^2$ è dato da:

$$\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1)\chi_2(s_2).$$

Osservazione 11. Se $G_1 = G_2 = G$ la rappresentazione $\rho^1 \otimes \rho^2$ definita sopra è una rappresentazione di $G \times G$. Se ci restringiamo al sottogruppo diagonale $\{(s,s) \mid s \in G\}$ di $G \times G$, questo dà la rappresentazione di G denotata con $\rho^1 \otimes \rho^2$ nel paragrafo 1.4. Le notazioni coincidono, ma è importante distinguere le due rappresentazioni.

Teorema 3.2.1.

(i) Se ρ^1 e ρ^2 sono irriducibili, $\rho^1 \otimes \rho^2$ è una rappresentazione irriducibile di $G_1 \times G_2$.

(ii) Ogni rappresentazione irriducibile di $G_1 \times G_2$ è isomorfa alla rappresentazione $\rho^1 \otimes \rho^2$, dove ρ^i è una rappresentazione irriducibile di G_i $(i = 1, 2)$.

Dimostrazione.

(i) Poiché ρ^1 e ρ^2 sono delle rappresentazioni irriducibili abbiamo:

$$(\chi_1|\chi_1) = \frac{1}{g_1} \sum_{s_1} |\chi_1(s_1)|^2 = 1, \qquad (\chi_2|\chi_2) = \frac{1}{g_2} \sum_{s_2} |\chi_2(s_2)|^2 = 1.$$

Moltiplicando si ottiene:

$$\frac{1}{g} \sum_{s_1, s_2} |\chi(s_1, s_2)|^2 = 1$$

e dal teorema 2.3.5 segue che $\rho^1 \otimes \rho^2$ è irriducibile.

(ii) E' sufficiente mostrare che ogni funzione di classe f su $G_1 \times G_2$, che è ortogonale ai caratteri della forma $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$, è zero; vedi dimostrazione del teorema 2.5.2. Supponiamo quindi di avere:

$$(f|\chi_1\chi_2) = \sum_{s_1, s_2} f(s_1, s_2)\chi_1(s_1)^*\chi_2(s_2)^* = 0$$

Fissiamo χ_2 e poniamo $g(s_1) = \sum_{s_2} f(s_1, s_2)\chi_2(s_2)^*$, allora per ogni χ_1 abbiamo:

$$\sum_{s_1} g(s_1)\chi_1(s_1)^* = 0.$$

Poiché g è una funzione di classe e per la formula precedente è ortogonale ad ogni χ_1 si conclude che $g = 0$. Ora al variare di χ_2 abbiamo $\sum_{s_2} f(s_1, s_2)\chi_2(s_2)^* = 0$ e con lo stesso argomento concludiamo che $f(s_1, s_2) = 0$.

□

Il teorema precedente riduce lo studio delle rappresentazioni di $G_1 \times G_2$ a quello delle rappresentazioni di G_1 e delle rappresentazioni di G_2.

3.3 Rappresentazioni indotte

Partendo da una rappresentazione di un sottogruppo vogliamo costruire una rappresentazione dell'intero gruppo. Questo è utile perché spesso è più facile determinare la rappresentazione di un gruppo più piccolo e poi estenderla ad uno più grande.

Definizione 3.4. Sia G un gruppo finito di ordine g e sia H un suo sottogruppo. Per $s \in G$, l'insieme $sH = \{st \mid t \in H\}$ è chiamato *classe laterale sinistra di* H contenente s. Due elementi $s, s' \in G$ sono detti *congruenti modulo* H e scriviamo $s' \equiv s \pmod{H}$, se appartengono alla stessa classe laterale sinistra, cioè se $s^{-1}s'$ appartiene ad H.

L'insieme delle classi laterali sinistre è denotato con G/H ed è una partizione dell'insieme G. Se h è l'ordine di H, allora G/H ha ordine g/h; l'intero g/h è detto *indice* di H in G ed è denotato con $(G : H)$.

Se scegliamo un elemento da ogni classe laterale sinistra di H otteniamo un sottoinsieme R di G chiamato *sistema di rappresentazione di* G/H. Ogni $s \in G$ può essere scritto unicamente come $s = rt$, con $r \in R$ e $t \in H$.

Definizione di rappresentazione indotta

Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione lineare di G e sia ρ_H la sua restrizione ad H. Sia $\theta\colon H \to \mathrm{GL}(W)$ una sottorappresentazione di ρ_H, cioè

W è un sottospazio vettoriale di V stabile rispetto $\rho_t, t \in H$. Sia $s \in G$; lo spazio vettoriale $\rho_s(W)$ dipende solo dalla classe laterale sinistra sH di s; infatti, se sostituiamo st ad s, con $t \in H$, abbiamo $\rho_{st}(W) = \rho_s(\rho_t(W)) = \rho_s(W)$, poiché $\rho_t(W) = W$.
Se σ è una classe laterale di H possiamo definire un sottospazio W_σ di V che per ogni $s \in \sigma$ è $\rho_s(W)$. E' chiaro che i W_σ sono permutati tra di loro da $\rho_s, s \in G$. La loro somma $\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ è così una sottorappresentazione di V.

Definizione 3.5. Diciamo che una rappresentazione ρ di G in V è *indotta* da una rappresentazione θ di H in W se V è somma dei W_σ e se tale somma è diretta, cioè $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$.

Osservazione 12. La definizione precedente può essere riformulata nei due seguenti modi:

1. Ogni $x \in V$ può essere scritto unicamente come $\sum_{\sigma \in G/H} x_\sigma$, con $x_\sigma \in W_\sigma$ per ogni σ.

2. Se R è un sistema di rappresentazione di G/H, lo spazio vettoriale V è la somma diretta dei $\rho_r(W)$, $r \in R$. In particolare abbiamo $\dim(V) = \sum_{r \in R} \dim(\rho_r(W)) = (G : H) \cdot \dim(W)$. Per vedere quest'ultimo fatto basta osservare che $V = \bigoplus_{r \in R} \rho_s(W)$ e che ogni elemento di G si può scrivere unicamente come $s = rt$, con $r \in R$ e $t \in H$.

Esempio 3.1.

1. Sia V la rappresentazione regolare di G, lo spazio V ha una base $(e_t)_{t \in G}$ tale che $\rho_s(e_t) = e_{st}$, per $s, t \in G$. Sia H un sottogruppo di G e sia W il sottospazio di V con base $(e_t)_{t \in H}$. La rappresentazione θ di H in W è la rappresentazione regolare di H ed è chiaro che ρ è indotta da θ.

2. Se ρ^1 e ρ^2 sono indotte da θ^1 e θ^2 rispettivamente, allora $\rho^1 \oplus \rho^2$ è indotta da $\theta^1 \oplus \theta^2$.

3. Se (V,ρ) è indotta da (W,θ) e se W_1 è un sottospazio stabile di W, il sottospazio $V_1 = \sum_{r\in R}\rho_r(W_1)$ di V è stabile rispetto a G e la rappresentazione di G in V_1 è indotta dalla rappresentazione di H in W_1.

4. Siano ρ la rappresentazione indotta da θ, ρ' una rappresentazione di G e ρ'_H la restrizione di ρ' ad H, allora $\rho\otimes\rho'$ è indotta da $\theta\otimes\rho'_H$.

Lemma 3.3.1. *Supponiamo che (V,ρ) sia indotta da (W,θ). Sia $\rho'\colon G\to \mathrm{GL}(V')$ una rappresentazione lineare di G e sia $f\colon W\to V'$ un'applicazione lineare tale che $f(\theta_t(w)) = \rho'_t(f(w))$, per tutti $t\in H$ e $w\in W$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $F\colon V\to V'$ che estende f e per ogni $s\in G$ soddisfa $F\circ\rho_s = \rho'_s\circ F$.*

Dimostrazione. Supponiamo che F sia una funzione che soddisfa queste condizioni e sia $x\in\rho_s(W)$, abbiamo $\rho_s^{-1}(x)\in W$; quindi:

$$F(x) = (F\circ\rho_s\circ\rho_s^{-1})(x) = (\rho'_s\circ F\circ\rho_s^{-1})(x) = (\rho'_s\circ f\circ\rho_s^{-1})(x).$$

Questa formula determina F su $\rho_s(W)$ e, poiché V è la somma dei $\rho_s(W)$, determina anche F su tutto V. Questo prova l'unicità di F.

Sia $x\in W_\sigma$ e scegliamo $s\in\sigma$, definiamo $F(x) := (\rho'_s\circ f\circ\rho_s^{-1})(x)$. Questa definizione non dipende dalla scelta di s in σ, infatti se sostituiamo st a s,con $t\in H$, abbiamo:

$$\rho'_{st}(f(\rho_{st}^{-1}(x))) = \rho'_s(\rho'_t(f(\rho_t^{-1}(\rho_s^{-1}(x))))) = \rho'_s(f(\rho_s^{-1}(x))).$$

Poiché V è somma diretta dei W_σ esiste un unica applicazione lineare $F\colon V\to V'$ che estende l'applicazione definita sui W_σ. E' facile controllare che, per ogni $s\in G$, $F\circ\rho_s = \rho'_s\circ F$. $\square$

Teorema 3.3.2. *Sia (W,θ) una rappresentazione lineare di H. Esiste ed è unica, a meno di isomorfismi, una rappresentazione lineare (V,ρ) di G che è indotta da (W,θ).*

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'esistenza della rappresentazione indotta ρ. Come mostrato nell'esempio 2 in 3.1 possiamo assumere che θ sia irriducibile. In questo caso, θ è isomorfa ad una sottorappresentazione della rappresentazione regolare di H, la quale è indotta dalla rappresentazione regolare di G. Applicando l'esempio 3 concludiamo che anche θ è indotta.

Rimane da provare l'unicità a meno di isomorfismi. Siano (V,ρ) e (V',ρ') due rappresentazioni indotte da (W,θ). Applichiamo il lemma 3.3.1 all'inclusione di W in V', vediamo che esiste un'applicazione lineare $F\colon V \to V'$ che è l'identità su W e soddisfa, per ogni $s \in G$, $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$. Di conseguenza l'immagine di F contiene tutti i $\rho'_s(W)$ e lo stesso è uguale per V'. Poiché V e V' hanno la stessa dimensione $(G : H) \cdot \dim(W)$, concludiamo che F è un isomorfismo. Il teorema è così provato. □

Supponiamo (V,ρ) sia indotta da (W,θ) e siano χ_ρ e χ_θ i corrispondenti caratteri di G ed H. Poiché (W,θ) determina (V,ρ) a meno di isomorfismi, siamo in grado di calcolare χ_ρ da χ_θ. Il teorema seguente mostra in che modo:

Teorema 3.3.3. *Sia h l'ordine di H e sia R un sistema di rappresentazioni di G/H. Per ogni $u \in G$, abbiamo:*

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r\in R\\ r^{-1}ur\in H}} \chi_\theta(r^{-1}ur) = \frac{1}{h}\sum_{\substack{s\in G\\ s^{-1}us\in H}} \chi_\theta(s^{-1}us).$$

In particolare, $\chi_\rho(u)$ è una combinazione lineare dei valori di χ_θ sull'intersezione di H con con le classi di coniugio di u in G.

Dimostrazione. Lo spazio V è la somma diretta dei $\rho_r(W), r \in R$. In più ρ_u permuta i $\rho_r(W)$ tra di loro. Più precisamente se scriviamo ur nella forma $r_u t$ con $r_u \in R$ e $t \in H$, vediamo che ρ_u manda $\rho_r(W)$ in $\rho_{r_u}(W)$. Per determinare $\chi_\rho(u) = \mathrm{Tr}_V(\rho_u)$ possiamo usare una base di V che è unione delle basi dei $\rho_r(W)$. Gli indici r tale che $r_u \neq r$ danno termini diagonali nulli; gli altri danno la traccia di ρ_u su $\rho_r(W)$. Consideriamo $R_u = \{r \in R \mid r_u = r\}$

e $\rho_{u,r}$ la restrizione di ρ_u a $\rho_r(W)$, allora otteniamo:

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in R_u} \mathrm{Tr}_{\rho_r(W)}(\rho_{u,r}).$$

Osserviamo che r appartiene a R_u se e solo se ur può essere scritto rt, con $t \in H$; cioè se $r^{-1}ur$ appartiene ad H.

Rimane da calcolare $\mathrm{Tr}_{\rho_r(W)}(\rho_{u,r})$, per $r \in R_u$. Per fare questo osserviamo che ρ_r definisce un isomorfismo di W su $\rho_r(W)$ e che abbiamo:

$$\rho_r \circ \theta_r = \rho_{u,r} \circ \rho_r, \qquad t = r^{-1}ur \in H.$$

La traccia di $\rho_{u,r}$ è così uguale a quella di θ_t, cioè $\chi_\theta(t) = \chi_\theta(r^{-1}ur)$. Infatti otteniamo:

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in R_u} \chi_\theta(r^{-1}ur).$$

La seconda formula data per $\chi_\rho(u)$ segue notando che tutti gli elementi $s \in G$ nella classe laterale sinistra $rH, r \in R_u$, soddisfano $\chi_\theta(s^{-1}us) = \chi_\theta(r^{-1}ur)$. $\square$

Capitolo 4

Tabelle dei caratteri di alcuni gruppi finiti

In questo capitolo studiamo alcuni gruppi notevoli e per ognuno di essi vediamo quali sono i suoi caratteri irriducibili.

Per semplicità di notazione, indichiamo con 1 l'elemento neutro di un gruppo.

4.1 Il gruppo ciclico C_n

C_n è un gruppo di ordine n costituito dalle potenze $1, r, \ldots, r^{n-1}$ di un elemento r tale che $r^n = 1$. E' un gruppo abeliano e può essere realizzato come il gruppo delle rotazioni di un angolo $2k\pi/n$ attorno ad un asse.

Per il teorema 3.1.1, le rappresentazioni irriducibili di C_n sono di grado 1. Una rappresentazione associa ad r il numero complesso $\chi(r) = w$ e ad r^k il numero $\chi(r^k) = w^k$. Poiché $r^n = 1$ abbiamo $w^n = 1$, cioè $w = e^{2\pi i h/n}$, con $h = 0, 1, \ldots, n-1$. Otteniamo così n rappresentazioni irriducibili di grado 1, i cui caratteri $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$ sono dati da:

$$\chi_h(r^k) = e^{2\pi i hk/n}.$$

Abbiamo $\chi_h \cdot \chi_{h'} = \chi_{h+h'}$, con la convenzione che $\chi_{h+h'} = \chi_{h+h'-n}$ se $h + h' \geq n$.

Per $n = 3$ abbiamo:

$$\chi_0 \cdot \chi_i = \chi_i, \qquad \chi_1 \cdot \chi_1 = \chi_2, \qquad \chi_2 \cdot \chi_2 = \chi_1 \qquad \chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_0,$$

e con $w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, la tabella dei caratteri è la seguente:

	1	r	r^2
χ_0	1	1	1
χ_1	1	w	w^2
χ_2	2	w^2	w

4.2 Il gruppo diedrale D_n

Il gruppo diedrale è il gruppo delle rotazione e delle riflessioni del piano che lasciano invariato un poligono regolare con n vertici. Esso contiene n rotazioni, che formano un sottogruppo ciclico isomorfo a C_n, e n riflessioni. Il suo ordine è perciò $2n$. Se denotiamo con r la rotazione mediante un angolo $2\pi/n$ e se s è una riflessione, abbiamo:

$$r^n = 1, \qquad s^2 = 1, \qquad srs = r^{-1}.$$

Se un elemento di D_n appartiene a C_n allora si può scrivere in modo unico nella forma r^k, con $0 \leqslant k \leqslant n-1$; mentre negli altri casi si può scrivere unicamente nella forma sr^k, con $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Osserviamo che la relazione $srs = r^{-1}$ implica $sr^ks = r^{-k}$, cioè $(sr^k)^2 = 1$.

Vediamo ora quali sono i caratteri irriducibili. Distinguiamo due casi:

Se n è pari, $n \geqslant 2$:

Ci sono 4 rappresentazioni di grado 1, ottenute scegliendo per r ed s i valori ± 1 in tutti i modi possibili:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Ora determiniamo le rappresentazioni di grado 2. Sia $w = e^{2\pi i/n}$ e sia h un intero arbitrario. Definiamo una rappresentazione ρ^h di D_n tale che:

$$\rho^h(r^k) = \begin{pmatrix} w^{hk} & 0 \\ 0 & w^{-hk} \end{pmatrix}, \qquad \rho^h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-hk} \\ w^{hk} & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo diretto mostra che questa è una rappresentazione. In particolare è indotta dalla rappresentazione di C_n con carattere χ_h. Abbiamo che ρ^h e ρ^{n-h} sono isomorfe, quindi consideriamo $0 \leq h \leq n/2$. I casi $h = 0$ ed $h = n/2$ sono poco interessanti: le corrispondenti rappresentazioni sono riducibili con caratteri $\psi_1 + \psi_2$ e $\psi_3 + \psi_4$ rispettivamente. D'altra parte, per $0 < h < n/2$, la rappresentazione ρ^h è irriducibile: poiché $w^h \neq w^{-h}$, le uniche rette stabili rispetto $\rho^h(r)$ sono gli assi coordinati che però non sono stabili rispetto $\rho^h(s)$. Lo stesso argomento mostra che queste rappresentazioni sono a due a due non isomorfe. I corrispondenti caratteri χ_h sono:

$$\chi(r^k) = w^{hk} + w^{-hk} = 2\cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right), \qquad \chi_h(sr^k) = 0.$$

Le rappresentazioni irriducibili di grado 1 e 2, sopra descritte, sono tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di D_n a meno di isomorfismi. Infatti, la somma dei quadrati dei loro gradi è uguale al grado del gruppo D_n:

$4 \times 1 + (n/2 - 1) \times 4 = 2n$.

Con $n = 2$ abbiamo $D_2 = C_2 \times C_2$ che è il gruppo di Klein. In questo caso i caratteri di grado 1 sono:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	-1	-1
ψ_4	-1	1

Se n è dispari:

Ci sono solo due rappresentazioni di grado 1 e i loro caratteri ψ_1 e ψ_2 sono dati dalla tabella:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

Le rappresentazioni ρ_h di grado 2 sono definite dalle stesse formule del caso n pari. Quelle corrispondenti a valori di h compresi tra 0 e $n/2$ sono a due a due non isomorfe e poiché n è dispari come valori di h possiamo considerare $0 < h \leq (n-1)/2$.

Queste sono tutte e sole le rappresentazioni irriducibili. Infatti la somma dei quadrati dei gradi è uguale a $2 \times 1 + \frac{1}{2}(n-1) \times 4 = 2n$ e questo è l'ordine di D_n.

Con $n = 3$ otteniamo $D_3 \cong S_3$. L'unico valore di h da considerare è 1 e $w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w^{-1} = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Per la tabella dei caratteri si veda l'esempio 2.1.

4.3 Il gruppo $D_{n\mathrm{h}}$

Il gruppo $D_{n\mathrm{h}}$ (notazione del matematico tedesco Arthur Schoenflies) si ottiene aggiungendo a D_n un piano speculare orizzontale (in tedesco: horizontale Spiegelebene) h, cioè $D_{n\mathrm{h}}$ è il prodotto $D_n \times I$, dove I è il gruppo di ordine 2 costituito dagli elementi $\{1, \iota\}$ con $\iota^2 = 1$. Il suo ordine è $4n$.

Per il teorema 3.2.1, le rappresentazioni irriducibili di $D_{n\mathrm{h}}$ sono il prodotto tensoriale di quelle di D_n e quelle di I. Il gruppo I ha solo due rappresentazioni irriducibili, entrambe di grado 1. I loro caratteri g e u sono dati dalla tabella:

	1	ι
g	1	1
u	1	-1

Di conseguenza, $D_{n\mathrm{h}}$ ha il doppio delle rappresentazioni irriducibili di D_n. Più precisamente, ogni carattere irriducibile χ di D_n definisce due caratteri χ_g e χ_u di $D_{n\mathrm{h}}$ come segue:

	x	ιx
χ_g	$\chi(x)$	$\chi(x)$
χ_u	$\chi(x)$	$-\chi(x)$

$(x \in D_n)$

Per esempio, il carattere χ_1 di D_n genera due caratteri χ_{1g} e χ_{1u}:

	r^k	sr^k	ιr^k	ιsr^r
χ_{1g}	$2\cos(2\pi k/n)$	0	$2\cos(2\pi k/n)$	0
χ_{1u}	$2\cos(2\pi k/n)$	0	$-2\cos(2\pi k/n)$	0

4.4 Il gruppo alterno A_4

A_4 è il gruppo delle permutazioni con segno pari di un insieme $\{a, b, c, d\}$ di 4 elementi. E' isomorfo al gruppo delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$ che stabilizzano un tetraedro regolare con baricentro nell'origine. Esso ha 12 elementi:

- L'elemento neutro 1;
- 3 elementi di ordine 2: $x = (ab)(cd)$, $y = (ac)(bd)$, $z = (ad)(bc)$, che corrispondono alle riflessioni del tetraedro attraverso rette congiungenti il punto medio di due spigoli opposti;
- 8 elementi di ordine 3: $(abc), (acb), \ldots, (bcd)$, che corrispondono alle rotazioni di $\pm$ 120° rispetto alle rette che congiungono un vertice al baricentro della faccia opposta.

Sia $t = (abc)$, $K = \{1, t, t^2\}$ e $H = \{1, x, y, z\}$. Abbiamo:

$$txt^{-1} = z, \qquad tzt^{-1} = y, \qquad tyt^{-1} = x;$$

in più H e K sono sottogruppi di A_4, H è normale e $H \cap K = \{1\}$. E' facile vedere che ogni elemento di A_4 si può scrivere unicamente come un prodotto $h \cdot k$, con $h \in H$ e $k \in K$, cioè che A_4 è il prodotto semidiretto di K e del sottogruppo normale H (definizione 0.4).

Ci sono 4 classi di coniugio in A_4:

- $\{1\}$,
- $\{x, y, z\}$,
- $\{t, tx, ty, tz\}$,
- $\{t^2, t^2x,\, t^2y, t^2z\}$;

di conseguenza abbiamo 4 caratteri irriducibili. Ci sono tre caratteri di grado 1, che corrispondono ai caratteri χ_0, χ_1, χ_2 del gruppo K estesi ad A_4 attraverso $\chi_i(h \cdot k) = \chi_i(k)$ per $h \in H$ e $k \in K$. L'ultimo carattere ψ può essere determinato usando il corollario 2.4.3. Sia $w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, allora abbiamo la seguente tabella:

s	1	x	t	t^2
$c(s)$	1	3	4	4
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	1	w	w^2
χ_2	1	1	w^2	w
ψ	3	-1	0	0

4.5 Il gruppo simmetrico S_4

S_4 è il gruppo di tutte le permutazioni di un insieme $\{a, b, c, d\}$ di 4 elementi. E' isomorfo al gruppo di tutti i movimenti rigidi che stabilizzano un tetraedro regolare. Ha 24 elementi divisi in 5 classi di coniugio:

- L'elemento neutro 1;
- 6 trasposizioni: $(ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)$;
- I 3 elementi di ordine 2 in A_4: $x = (ab)(cd),\ y = (ac)(bd),\ z = (ad)(bc)$;
- 8 elementi di ordine 3: $(abc), \ldots, (bcd)$;
- 6 elementi di ordine 4: $(abcd), (abdc), (acbd), (acdb), (adbc), (adcb)$.

Sia $H = \{1, x, y, z\}$ e sia L il gruppo delle permutazioni che lasciano fisso d. Abbiamo che S_4 è il prodotto semidiretto di L e del sottogruppo normale H. Ogni rappresentazione ρ di L si estende a S_4 con la formula: $\rho(h{\cdot}l) = \rho(l)$, per $h \in H, l \in L$. Questo ci da tre rappresentazioni irriducibili: due di grado 1 e una di grado 2.

Le altre rappresentazioni devono essere necessariamente di grado 3 perché deve valere che la somma dei gradi sia uguale all'ordine del gruppo.

Per determinare il terzo carattere irriducibile possiamo costruire la rappresentazione di permutazione (come nell'esercizio 1.3) e decomporla poi nella somma diretta della rappresentazione banale e di un'altra rappresentazione irriducibile di grado 3. Quest'ultima è quella che cerchiamo ed è detta *rappresentazione standard.* Determiniamo prima il carattere τ di quella di permutazione e poi per determinare il carattere ψ della rappresentazione standard basta sottrarre il carattere della rappresentazione unitaria:

s	1	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(adcd)$
τ	4	2	0	1	0
ψ	3	1	-1	0	-1

L'ultimo carattere invece lo possiamo determinare usando il corollario 2.4.3, ricordando che anche quest'ultimo deve avere grado 3.

Possiamo osservare che i valori dei caratteri di S_4 sono interi, questa è una proprietà delle rappresentazioni di gruppi simmetrici.
Quindi i caratteri irriducibili di S_4 sono i seguenti:

	1	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(adcd)$
$c(s)$	1	6	3	8	6
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
ψ	3	1	-1	0	-1
ϕ	3	-1	-1	0	1

4.6 Il gruppo dei quaternioni Q_8

Il gruppo dei quaternioni è il gruppo moltiplicativo formato dagli otto elementi $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, che sono legati dalle relazioni:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = k, \quad ji = -k,$$

$$ik = -j, \quad ki = j, \qquad jk = i, \quad kj = -i.$$

Il suo ordine è 8. E' un gruppo hamiltoniano, cioè non abeliano i cui sottogruppi sono tutti normali.

Le classi di coniugio sono 5: $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{i, -i\}$, $\{j, -j\}$, $\{k, -k\}$. Abbiamo quindi 5 rappresentazioni irriducibili e poiché la somma dei quadrati dei loro gradi deve essere uguale a 8 ce ne saranno 4 di grado 1 e una di grado 2.

Consideriamo il gruppo quoziente $Q = Q_8/\langle 1, -1\rangle$ rispetto al sottogruppo normale $\{1, -1\}$. Abbiamo $Q = \{\{1, -1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\}$. Osserviamo che Q non è altro che il gruppo di Klein e perciò conosciamo già i suoi caratteri irriducibili di grado 1 (paragrafo 4.2). Ora sollevando questi caratteri a Q_8 possiamo determinare i 4 caratteri irriducibili di grado 1.

Per determinare l'ultimo carattere irriducibile di grado 2 usiamo il corollario 2.4.3. Quindi i caratteri irriducibili di Q_8 sono:

s	1	-1	i	j	k
$c(s)$	1	1	2	2	2
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
ϕ	2	-2	0	0	0

Osserviamo che i gruppi non isomorfi Q_8 e D_4 (che sono gli unici gruppi non abeliani di ordine 8) hanno la stessa tabella di caratteri.

Bibliografia

[1] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups.* Translated from the second French edition by Leonard L. Scott. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[2] A. Baker, *Representations of finite groups.* Manuscript of 14/09/2017, `http://www.maths.gla.ac.uk/~ajb/dvi-ps/groupreps.pdf`

[3] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory.* A first course. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] Wikipedia, *Maschke's Theorem.* Last edited on 25 November 2017, `https://en.wikipedia.org/wiki/Maschke%27s_theorem`

[5] J. E. Humphreys, *Review of the book of C. W. Curtis: Pioneers of representation theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer, 1999*, Bull. Amer. Math. Soc (N.S.) 37 (2000), 359–362.