ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

SPAZI DI HILBERT
A NUCLEO RIPRODUCENTE

Tesi di Laurea

Relatore:
Chiar.mo Prof.
NICOLA ARCOZZI

Presentata da:
ELIA BUBANI

Sessione unica

Anno Accademico 2016/2017

Introduzione

Il presente lavoro ha come oggetto gli spazi di Hilbert a nucleo riproducente.
Lo studio parte concentrandosi sulla proprietà teorica che accomuna gli spazi di Bergman, di Dirichlet e di Hardy, ovvero di esser spazi di Hilbert di funzioni.
Nel secondo capitolo vengono presentate maggiori speculazioni teoriche che correlano gli spazi di Hilbert di funzioni alle loro funzioni nucleo associate, stabilendo quindi una corrispondenza biunivoca tramite il teorema di Moore-Aronszajn. Sempre nello stesso capitolo viene introdotta l'algebra dei moltiplicatori, fornendo come esempio che le algebre dei moltiplicatori dello spazio di Bergman e dello spazio di Hardy siano l'insieme delle funzioni olomorfe e limitate definite sul disco unitario.
Nell'ultimo capitolo si descrive il prodotto tensoriale di spazi di Hilbert, per poi applicarlo alla nozione di spazio di Hilbert a nucleo riproducente a valori vettoriali(vvRKHS) e infine viene data una costruzione di un operatore di moltiplicazione in questo dato spazio.

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Richiami

Definizione 1.1. La chiusura di un insieme X si indica con $cl(X)$.

Definizione 1.2. $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} | \mid z - a \mid < r\}$ $\mathbf{D} = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} | \mid z \mid < 1\}$ $\mathbb{T} = \partial\mathbf{D}$

Definizione 1.3. Si definisce $\mathbf{H}^\infty(\mathbf{D}) = \{f | f : \mathbf{D} \to \mathbb{C}, f$ olomorfa e limitata $\}$

Definizione 1.4. Assegnato un campo $\mathbb{K}$, un insieme A, si definisce *Algebra di Banach* se è una $\mathbb{K}$-algebra e al tempo stesso *Spazio di Banach* che soddisfa :

$$\forall x, y \in A \text{ si ha } \parallel xy \parallel \leq \parallel x \parallel \parallel y \parallel \tag{1.1}$$

Proposizione 1.1.1. $\mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$ *è Algebra di Banach*

Dimostrazione. Di base si sa già che $\mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$ sia una $\mathbb{C}$-algebra. Resta quindi da provare che $\mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$ sia spazio normato completo rispetto a:

$$\parallel f \parallel = \sup_{\mathbf{D}} \mid f \mid \tag{1.2}$$

Verifichiamo che 1.2 sia una norma:

- $\mid f(z) \mid \geq 0 \ \forall z \in \mathbf{D} \ \forall f \in \mathbf{H}^\infty(\mathbf{D}) \Rightarrow \quad \| f \| \geq 0$
- $\forall \ \lambda \in \mathbb{C} \ \forall f \in \mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$ si ha $\quad \mid \lambda f(z) \mid = \mid \lambda \mid\mid f(z) \mid \ \ \forall z \in \mathbf{D} \Rightarrow$
  $\| \lambda f \| = \mid \lambda \mid\| f \|$
- $\forall f, g \in \mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$ si ha $\quad \mid f(z) + g(z) \mid \leq \mid f(z) \mid + \mid g(z) \mid \quad \Rightarrow$
  $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$

Ora si deve provare la completezza di questo spazio, perciò:
data $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$, ovvero:
$\forall \ n, m > n_\varepsilon$ si ha $\mid f_n(z) - f_m(z) \mid < \varepsilon \ \forall z \in \mathbf{D} \Rightarrow$ si ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathbb{C}$ $\forall z \in \mathbf{D}$ (ovvero uniformemente rispetto a $z \in \mathbf{D}$) e poiché spazio metrico completo la successione è convergente uniformemente su $\mathbf{D}$. Ora una successione di funzioni olomorfe che tende uniformemente ad f implica che anche f sia olomorfa, inoltre poiché le f_n sono limitate allora anche la funzione limite f lo è $\Rightarrow f \in \mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$, perciò tale spazio è completo.
Infine la condizione 1.1 è verificata con l'uguaglianza. □

1.2 Risultati di Analisi Funzionale

Definizione 1.5. Siano X, Y spazi normati, si definisce $X \oplus Y$ l'insieme degli elementi di $X \times Y$ con norma $\| (x, y) \|_{X\oplus Y} = \| x \|_X + \| y \|_Y$

Definizione 1.6. Siano H_1 e H_2 spazi di Hilbert, con $H_1 \oplus H_2$ si intende l'insieme degli elementi di $H_1 \times H_2$ con struttura di prodotto scalare:

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >_{H_1\oplus H_2} = < x_1, x_2 >_{H_1} + < y_1, y_2 >_{H_2}$$

Proposizione 1.2.1. *$H_1 \oplus H_2$ è uno spazio di Hilbert*

Definizione 1.7. $\mathcal{B}(H) = \mathscr{L}(H, H) = \{T | T : H \to H$ lineare e limitata $\}$
$H^* = \mathscr{L}(H, \mathbb{C})$

Teorema 1.2.2 (Lemma di Riesz)**.** *Sia H spazio di Hilbert e $T \in H^*$, allora esiste ed è unico $y_T \in H$ tale che:*

- $T(x) =< x, y_T > \quad \forall x \in H$
- $\| y_T \|_H = \| T \|_{H^*}$

Teorema 1.2.3 (Teorema del grafico chiuso)**.** *Siano X, Y spazi di Banach e $T : X \to Y$ lineare, allora sono equivalenti:*

- *T è limitata*
- *$\Gamma(T) = \{(x, Tx) | x \in X\}$ è insieme chiuso in $X \oplus Y$*

Teorema 1.2.4. *Siano X, Y spazi di Banach, Z spazio normato, $B : X \oplus Y \to Z$ sequilineare e tale che:*

- *$\forall x$ si ha $y \mapsto B(x, y)$ limitata*
- *$\forall y$ si ha $x \mapsto B(x, y)$ limitata*

Allora B è continua su $X \oplus Y$

Definizione 1.8. Sia H spazio di Hilbert, sia $A : H \to H$ operatore lineare e limitato. Si definisce $A^* : H \to H$ l'operatore che soddisfa:

$$< Ax, y >=< x, A^*y > \quad \forall x, y \in H$$

Proposizione 1.2.5. *A^* è operatore lineare e limitato, in cui esistenza, unicità e continuità discendono dal Lemma di Riesz.*
Inoltre si verifica che $\| A^* \| = \| A \|$

Teorema 1.2.6 (di estensione di applicazioni limitate)**.** *Siano X e Y spazi di Banach, D sottospazio lineare di X denso in X, $\tilde{A} : D \to Y$, $\tilde{A} \in \mathscr{L}(D, Y)$.*
Allora esiste $A : X \to Y$, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ tale che:

- *$Ax = \tilde{A}x \ \forall x \in D$*
- *$\| A \|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \| \tilde{A} \|_{\mathscr{L}(D,Y)}$*

Per quanto riguarda i teoremi di Parseval e Plancherel si rimanda alle pagine 36-46 e 318-328 di [2] della bibliografia e per il teorema di L. Carleson si rimanda a [4].

Capitolo 2

Spazi di Hilbert di funzioni

Definizione 2.1. Uno *Spazio di Hilbert di funzioni* (in seguito HFS),indicato con H, è uno spazio di funzioni f: $X \to \mathbb{C}$, con X insieme generico, tale che H è spazio di Hilbert che soddisfa:

$$\eta_y : H \to \mathbb{C} \text{ per cui } \eta_y(f) = f(y), \text{ è funzionale continuo non nullo } \forall y \in X. \tag{2.1}$$

2.1 Lo spazio di Bergman

$$\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D}) = \{f | f : \mathbf{D} \to \mathbb{C},\ f \text{ olomorfa tale che } \textstyle\int_{\mathbf{D}} \mid f(z) \mid^2 dm(z) < +\infty\}$$

Osservazione 1. Con $dm(z)$ si indica la misura di Lebesgue del piano complesso, perciò se $z = x + iy$ si ha che :

$$\textstyle\int_{\mathbf{D}} f(z)dm(z) = \int_{\mathbf{D}} f(x+iy)dxdy$$

Osservazione 2. Proviamo innanzitutto che

$$< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dm(z) \tag{2.2}$$

sia un prodotto scalare.
Per farlo ci serviamo del seguente

Lemma 2.1.1. *$\forall f, g \in \mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})$ si ha*

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dm(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}}{n+1}\ ,$$

in cui $\hat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Dimostrazione. Poiché f e g sono funzioni olomorfe su $\mathbf{D}$ si ha che
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ e $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}(m) z^n$ $\forall z \in \mathbf{D}$
da cui $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dm(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} (\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \overline{\sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}(m) z^m})\ dm(z) =$
$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} (\sum_{n,m=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \overline{\hat{g}(m) z^m})\ dm(z) = \frac{1}{\pi} (\sum_{n,m=0}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(m)} (\int_{\mathbf{D}} z^n \overline{z^m}\ dm(z)))$
Da qui per calcolare

$$\int_{\mathbf{D}} z^n \overline{z^m}\ dm(z)$$

si usa un cambiamento di variabili in coordinate polari:
$z = R(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) = R(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)) \qquad$ con $r \in [0,1), \vartheta \in [0, 2\pi)$

$$T : [0,1) \times [0, 2\pi) \to \mathbf{D}$$
$$(R, \vartheta) \mapsto R(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$$

si ha che :

$$\mathcal{J}_T = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta), -R\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta),\ R\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

perciò $\mid det(\mathcal{J}_T) \mid = R$ da cui $\int_{\mathbf{D}} z^n \overline{z^m}\ dm(z) = \int_{[0,1)\times[0,2\pi)} R^{n+m+1} e^{i\vartheta(n-m)} dR d\vartheta =$
$= \int_0^1 R^{n+m+1} (\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta(n-m)} d\vartheta) dR$
A questo punto :

- se $n \neq m$ si ha che $\frac{d}{d\vartheta}\Big(\frac{e^{i\vartheta(n-m)}}{i(n-m)}\Big) = e^{i\vartheta(n-m)} \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta(n-m)} d\vartheta = \Big[\frac{e^{i\vartheta(n-m)}}{i(n-m)}\Big]_0^{2\pi} =$
  $= \frac{1}{i(n-m)} - \frac{1}{i(n-m)} = 0$

- se $n = m$ si ha che $\int_0^1 R^{n+m+1} (\int_0^{2\pi} d\vartheta) dR = 2\pi \Big[\frac{R^{2(n+1)}}{2(n+1)}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{n+1}$

$\Rightarrow$ si ha che $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dm(z) = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}}{n+1}$ $\square$

Per verificare che sia un prodotto scalare, 2.2 deve soddisfare:

1. $< f, f >= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|^2}{n+1} \geq 0$
   Se $< f, f >= 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|^2}{n+1} = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\hat{f}(n) = 0$
   $\Rightarrow$ poiché f è olomorfa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n = 0$

2. $< f+g,h >= \ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\hat{f}(n)+\hat{g}(n))\overline{\hat{h}(n)}}{n+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)\overline{\hat{h}(n)}}{n+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{g}(n)\overline{\hat{h}(n)}}{n+1} =$
   $=< f,h > + < g,h >$

3. $\forall \alpha \in \mathbb{C} \ \ < \alpha f, g >= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}}{n+1} = \alpha < f,g >$

4. $< g,f >= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\overline{\overline{\hat{g}(n)}\hat{f}(n)}}{n+1} = \overline{< f,g >}$

$\Rightarrow$ 2.2 è un prodotto scalare

Osservazione 3 (Completezza di $\mathbf{L}_a^2(\mathbf{D})$).
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathbf{L}_a^2(\mathbf{D}) \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n,m \geq n_\varepsilon$ si ha $\| f_n - f_m \| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\lim_{n,m\to\infty} \| f_n - f_m \| = \lim_{n,m\to\infty} \Big(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} | f_n(z) - f_m(z) |^2 \, dm(z) \Big)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Sia $z \in \mathbf{D} \Rightarrow | f_n(z) - f_m(z) |^2 \leq \int_{\mathbf{D}} | f_n(z) - f_m(z) |^2 \, dm(z) \Rightarrow$
$| f_n(z) - f_m(z) | \leq \big(\int_{\mathbf{D}} | f_n(z) - f_m(z) |^2 \, dm(z) \big)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$ per $n,m \longrightarrow +\infty$
$\forall z \in \mathbf{D}$ si ha $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathbb{C} \Rightarrow$
poiché $\mathbb{C}$ è completo si ha $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ per $n \longrightarrow +\infty$.
Di conseguenza per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha $f \in L^2(\mathbf{D})$.
Per verificare che f sia olomorfa si usa il Teorema di Morera,
si devono quindi soddisfare le sue ipotesi, ovvero :

- f è continua, in quanto dato $z_0 \in \mathbf{D}$ si ha

  $$\lim_{z\to z_0} | f(z) - f(z_0) | \leq \lim_{z\to z_0} \Big(| f(z) - f_n(z) | + | f_n(z) - f_n(z_0) | + | f_n(z_0) - f(z_0) | \Big)$$

  poiché le f_n sono continue si ha che

  $$\lim_{z\to z_0} | f_n(z) - f_n(z_0) | = 0 \quad \Rightarrow \text{ si ha}$$

  $$\lim_{z\to z_0} | f(z) - f(z_0) | \leq \lim_{z\to z_0} \Big(| f(z) - f_n(z) | + | f_n(z_0) - f(z_0) | \Big) \leq$$

  $$\leq 2 \big(\int_{\mathbf{D}} | f(z) - f_n(z) |^2 \, dm(z) \big)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \text{ per } n \longrightarrow +\infty$$

- $\forall K$ compatto , $K \subset \mathbf{D}$ si ha che

$$\left| \oint_{\partial K} f(z)dz \right| = \left| \oint_{\partial K} (f(z) - f_n(z))dz + \oint_{\partial K} f_n(z)dz \right|$$

poiché le f_n sono olomorfe si ha che

$$\oint_{\partial K} f_n(z)dz = 0 \quad \Rightarrow \text{ si ha}$$

$$\left| \oint_{\partial K} f(z)dz \right| = \left| \oint_{\partial K} (f(z) - f_n(z))dz \right| \leq \oint_{\partial K} \mid f(z) - f_n(z) \mid\mid dz \mid \quad \leq$$

$$\leq \oint_{\partial K} \mid f(z) - f_n(z) \mid^2 \mid dz \mid \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Osservazione 4. Verifichiamo che $\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})$ soddisfi 2.1 :

$$\mid f(z) \mid^2 \leq \int_{\mathbf{D}} \mid f(z) \mid^2 dm(z) \quad \forall z \in \mathbf{D} \;\Rightarrow \sup_{f \in \mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})} \frac{\mid \eta_z(f) \mid}{\parallel f \parallel} < +\infty \quad .$$

Si può quindi concludere che $\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})$ è un HFS, tale spazio si chiama *Spazio di Bergman.*

2.2 Lo spazio di Hardy

$\mathbf{H}^2 = \{f | f : \mathbf{D} \to \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;,\; \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2 < +\infty\}$

Proposizione 2.2.1. *f appartenente a $\mathbf{H}^2$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$.*

Dimostrazione. Verifichiamo la convergenza assoluta dei termini indipendente dalla scelta di un dato z. Sapendo che $\mathbb{C}$ è completo, verifichiamo se è rispettata la condizione di Cauchy. Sia $0 < r \leq 1$ tale che $\forall z$ si ha $z \leq r$, $N > M$:

$$\mid \sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{M} a_n z^n \mid^2 = \mid \sum_{n=M}^{N} a_n z^n \mid^2 \leq \sum_{n=M}^{N} \mid a_n z^n \mid^2 \leq \sum_{n=M}^{N} \mid a_n \mid^2 \cdot \sum_{n=M}^{N} \mid z \mid^{2n} \leq$$

$$\leq \sum_{n=M}^{N} \mid a_n \mid^2 \cdot \sum_{n=M}^{N} r^{2(n-M+M)} \leq \sum_{n=M}^{N} \mid a_n \mid^2 \cdot \frac{r^{2M}}{1 - r^2} \to 0 \, per N, M \to \infty$$

$\square$

Osservazione 5. Tramite la proposizione precedente si ha quindi che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ha derivate di ogni ordine con raggio di convergenza $\rho = 1$, perciò è olomorfa.

Osservazione 6. Sia r tale che $0 < r < 1$, $f \in \mathbf{H}^2$. Si osserva che:

$$\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\vartheta}) \mid^2 d\vartheta = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\vartheta}\Big)\overline{\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\vartheta}\Big)} d\vartheta = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\vartheta} d\vartheta =$$

$$= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2 r^{2n} < \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2 < +\infty \, .$$

Inoltre si ha che $f(re^{i\vartheta}) \to f(e^{i\vartheta})$ per $r \to 1$, perciò per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue ho che $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$.

Osservazione 7. Per il teorema di Plancherel su $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ ho che:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid F(n) \mid^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mid f(e^{i\vartheta}) \mid^2 d\vartheta \, ,$$

in cui $F(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it}) dt$.
Calcoliamo $F(n)$:

$$\text{se } n < 0 \text{ si ha che } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it}) dt = \frac{1}{-2in\pi} \int_0^{2\pi} -ine^{-int} f(e^{it}) dt = \frac{1}{-2in\pi} \oint_{\mathbb{T}} f(z) dz = 0$$

poiché $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è successione di funzioni olomorfe con $f_n(e^{it}) = f((1-\frac{1}{n})e^{it})$, su una successione monotona di insiemi misurabili $\partial\mathbf{D}(0, 1-\frac{1}{n})$ convergente a $\mathbb{T}$ e si può quindi applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue .
Invece se $n \geq 0$ si ha che:

$$F(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{int}} dt = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f((1-\frac{1}{k})e^{it})}{(1-\frac{1}{k})e^{int}} dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} a_m (1-\frac{1}{k})^m e^{imt}}{(1-\frac{1}{k})e^{int}} dt = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \big(1-\dfrac{1}{k}\big)^m}{1-\frac{1}{k}} \Big(\int_0^{2\pi} e^{it(m-n)} dt\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2\pi}{2\pi} a_n \big(1-\frac{1}{k}\big)^{n-1} = a_n$$

Si ottiene quindi che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mid \hat{f}(n) \mid^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mid f(e^{i\vartheta}) \mid^2 d\vartheta \, .$$

Osservazione 8. Proviamo che

$$< f, g >_{\mathbf{H}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \overline{g(e^{i\vartheta})} \, d\vartheta \tag{2.4}$$

sia un prodotto scalare.
Per farlo ci serviamo del seguente

Lemma 2.2.2.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \overline{g(e^{i\vartheta})} \, d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} \;\; \forall f, g \in \mathbf{H}^2 \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Applicando il teorema di L. Carleson con $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ si ha che

$$m(\{t \in [0, 2\pi] \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{int} = f(e^{it})\}) = 2\pi \;\; ,$$

dove con m si denota la misura di Lebesgue. Riapplicando lo stesso risultato su g si ha:

$$m(\{t \in [0, 2\pi] \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(n) e^{int} = g(e^{it})\}) = 2\pi \;\; ,$$

dove $G(n)$ definiti come gli $F(n)$.
Da 7 si ha che $F(n) = \hat{f}(n)$ se $n \geq 0$, $F(n) = 0$ se $n < 0$, $G(n) = \hat{g}(n)$ se $n \geq 0$ e $G(n) = 0$ se $n < 0$. Perciò:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \overline{g(e^{i\vartheta})} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)(e^{in\vartheta}) \overline{\sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}(m)(e^{im\vartheta})} \Big) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(m)} \Big(\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta(n-m)} d\vartheta \Big) = \frac{2\pi}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} \;\; .$$

□

Per verificare che sia un prodotto scalare, 2.4 deve soddisfare:

1. $< f, f > = \sum_{n=0}^{\infty} \mid \hat{f}(n) \mid^2 \geq 0$
   Se $< f, f > = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mid \hat{f}(n) \mid^2 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\hat{f}(n) = 0$
   $\Rightarrow$ poiché f è olomorfa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n = 0$

2. $< f+g,h >= \sum_{i=0}^{\infty}(\hat{f}(n)+\hat{g}(n))\overline{\hat{h}(n)} = \sum_{i=0}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{h}(n)} + \sum_{i=0}^{\infty}\hat{g}(n)\overline{\hat{h}(n)} =$
   $=< f,h > + < g,h >$

3. $\forall\alpha \in \mathbb{C} \ \ < \alpha f, g >= \sum_{i=0}^{\infty}\alpha\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \alpha < f,g >$

4. $< g,f >= \sum_{i=0}^{\infty}\overline{\hat{g}(n)}\overline{\overline{\hat{f}(n)}} = \overline{< f,g >}$

Osservazione 9 (Completezza di $\mathbf{H}^2$).
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathbf{H}^2 \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n,m \geq n_\varepsilon$ si ha $\| f_n - f_m \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$

$$\lim_{n,m\to\infty} \| f_n - f_m \|^2 = \lim_{n,m\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} | \hat{f}_n(j) - \hat{f}_m(j) |^2 = 0$$

Perciò si ha:

$$| f_n(z) - f_m(z) | \leq \sum_{j=0}^{\infty} | \left(\hat{f}_n(j) - \hat{f}_m(j)\right) z^j |^2 = \sum_{j=0}^{\infty} | \hat{f}_n(j) - \hat{f}_m(j) |^2 | z |^{2j} \to 0 \ \text{ per } n,m \to +\infty$$

$\forall z \in \mathbf{D} \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$, poiché $\mathbb{C}$ è completo $\exists f : \mathbf{D} \to \mathbb{C}$
tale che $f_n(z) \to f(z) \quad \forall z \in \mathbf{D}$
Si dimostra che f è olomorfa con questa catena di proposizioni:

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathbb{C} \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è equilimitata

  Dimostrazione. Se per assurdo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non fosse equilimitata si avrebbe che $\forall M > 0 \Rightarrow | f_n(z) | > M \ \forall n \ \forall z \in \mathbf{D}$ da cui $\forall M \ | f_n(z) - f_m(z) | \geq || f_n(z) | - | f_m(z) || \geq$
  $\geq | M - | f_m(z) || \ \ \forall m \ \forall z \in \mathbf{D}$ perciò $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non sarebbe di Cauchy. □

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equilimitata e olomorfe $\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua

  Dimostrazione. Poiché f_n olomorfa, grazie alle stime di Cauchy, si ha che in $D(\xi, R)$ (con $\xi \in \mathbf{D}$ e $R < 1 - | \xi |$)

$$| f_n'(\xi) | \leq \frac{max_{\partial D(\xi,R)} | f_n |}{R} \leq \frac{M}{R}$$

Da cui $| f_n(z) - f_n(w) |=| f'_n(\xi) || z - w | \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
con V_z, V_w intorni di z e w tali che $V_z \cap V_w \subseteq D(\xi, R) \Rightarrow$
prendendo come $\delta =| x - y |= \frac{\varepsilon R}{M}$ si ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equilimitata □

- Per il teorema di Ascoli-Arzelà si ha che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette sottosuccessione convergente uniformemente su $\mathbf{D}$

- Con $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathbb{C}$ che ammette sottosuccessione convergente uniformemente su $\mathbf{D} \Rightarrow$
  si ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente uniformemente su $\mathbf{D}$

  Dimostrazione. Sia f il limite uniforme della sottosuccessione f_{n_k}
  $\Rightarrow$ si ha che

$$| f_n(z) - f(z) |\leq \underbrace{| f_n(z) - f_{n_k}(z) |}_{(1)} + \underbrace{| f_{n_k}(z) - f(z) |}_{(2)}$$

  (1) è successione di Cauchy non dipendente da z
  (2)f_{n_k} è sottosuccessione convergente uniformemente su $\mathbf{D}$
  $\Rightarrow (1) + (2) \to 0 \quad$ per $n \to +\infty$ □

- Data $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente uniformemente a f, con f_n olomorfe $\Rightarrow f$ olomorfa.

Resta da provare che tale f soddisfi $\sum_{n=0}^{\infty} | \hat{f}(n) |^2 < +\infty$.
Si ha che $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(e^{i\vartheta}) |^2 \, d\vartheta$ è convergente poiché f è limite uniforme di $f_n \in \mathbf{H}^2$, perciò $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(e^{i\vartheta}) |^2 \, d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} | \hat{f}(n) |^2 < +\infty$.

Osservazione 10. Verifichiamo che $\mathbf{H}^2$ soddisfi 2.1 :
$\eta_z(f) : \mathbf{H}^2 \to \mathbb{C}$ è limitata poiché $\forall z \in \mathbf{D}$ si ha che

$$| f(z) |^2 =| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n |^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} | a_n |^2 | z |^{2n} < \sum_{n=0}^{\infty} | a_n |^2 = \| f \|^2_{\mathbf{H}^2}$$

$$\Rightarrow \sup_{f\in\mathbf{H}^2} \frac{| \eta_z(f) |}{\| f \|} = \sup_{f\in\mathbf{H}^2} \frac{| f(z) |}{\| f \|} < +\infty \ .$$

Si può quindi concludere che $\mathbf{H}^2$ è un HFS, tale spazio si chiama *Spazio di Hardy*.

2.3 Lo spazio di Dirichlet

$\mathcal{D} = \{f | f : \mathbf{D} \to \mathbb{C},\ f \in \mathbf{H}^2$, tale che $f' \in \mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})\}$

Osservazione 11. Proviamo innanzitutto che

$$< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f'(z)\overline{g'(z)}\ dm(z) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta})\overline{g(e^{i\vartheta})}\ d\vartheta \tag{2.6}$$

sia un prodotto scalare.
Per farlo ci serviamo del seguente

Lemma 2.3.1. *Se $f, g \in \mathcal{D}$ allora vale:*

$$\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f'(z)\overline{g'(z)}\ dm(z)}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta})\overline{g(e^{i\vartheta})}\ d\vartheta}_{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

Dimostrazione. Poiché f e g sono funzioni olomorfe su $\mathbf{D}$ si ha che:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n \ \Rightarrow f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\hat{f}(n+1)z^n \quad \forall z \in \mathbf{D}$$

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}(m)z^n \ \Rightarrow g'(z) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\hat{g}(m+1)z^m \quad \forall z \in \mathbf{D}$$

Calcoliamo (1):

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f'(z)\overline{g'(z)}\ dm(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} (\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\hat{f}(n+1)z^n \overline{\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\hat{g}(m+1)z^m})\ dm(z) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} (\sum_{n,m=0}^{\infty} (n+1)(m+1)\hat{f}(n+1)z^n\overline{\hat{g}(m+1)z^m})\ dm(z) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\sum_{n,m=0}^{\infty} (n+1)(m+1)\hat{f}(n+1)\overline{\hat{g}(m+1)}(\int_{\mathbf{D}} z^n\overline{z^m}\ dm(z)))$$

da cui per 2.1.1 si ha che :

$$= \frac{1}{\pi}(\sum_{n,m=0}^{\infty} (n+1)(m+1)\hat{f}(n+1)\overline{\hat{g}(m+1)}(\int_{\mathbf{D}} z^n\overline{z^m}\ dm(z))) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n+1}\hat{f}(n+1)\overline{\hat{g}(n+1)}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} n\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

(2) proviene da risultati precedente discussi in $\mathbf{H}^2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta})\overline{g(e^{i\vartheta})}d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

$\Rightarrow$ si ha che:

$$(1) + (2) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

□

Per verificare che sia un prodotto scalare, 2.6 deve soddisfare:

1. $< f, f >= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \mid \hat{f}(n) \mid^2 \geq 0$
   Se $< f, f >= 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \mid \hat{f}(n) \mid^2 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\hat{f}(n) = 0$
   $\Rightarrow$ poiché f è olomorfa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n = 0$
2. $< f + g, h >= \sum_{i=0}^{\infty}(n+1)(\hat{f}(n) + \hat{g}(n))\overline{\hat{h}(n)} = \sum_{i=0}^{\infty}(n+1)\hat{f}(n)\overline{\hat{h}(n)} +$
   $+ \sum_{i=0}^{\infty}(n+1)\hat{g}(n)\overline{\hat{h}(n)} =< f, h > + < g, h >$
3. $\forall\alpha \in \mathbb{C}\ \ < \alpha f, g >= \sum_{i=0}^{\infty}(n+1)\alpha\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \alpha < f, g >$
4. $< g, f >= \sum_{i=0}^{\infty}(n+1)\overline{\hat{g}(n)}\overline{\overline{\hat{f}(n)}} = \overline{< f, g >}$

Osservazione 12 (Completezza di $\mathcal{D}$).
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathcal{D} \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ si ha $\| f_n - f_m \|< \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}(j+1) \mid \hat{f}_n(j) - \hat{f}_m(j) \mid^2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mid f_n(z) - f_m(z) \mid^2 < \sum_{j=0}^{\infty} \mid \hat{f}_n(j) - \hat{f}_m(j) \mid^2 < \sum_{j=0}^{\infty}(j+1) \mid \hat{f}_n(j) - \hat{f}_m(j) \mid^2 < \varepsilon$$

Poiché $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\mathbf{H}^2$ e di Cauchy in $\mathbb{C}$, che sono spazi completi si ha che

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ in } \mathbf{H}^2 \text{ e che}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \;\; \forall z \in \mathbf{D}$$

Poiché $f \in \mathbf{H}^2$ è olomorfa e conseguentemente pure f', perciò la completezza di $\mathcal{D}$ è provata se $f' \in \mathbf{L}^2(\mathbf{D})$:
f è limite puntuale di una successione di funzioni appartenente a $\mathcal{D}$, in particolare le f'_n sono tutte quadrato-sommabili su $\mathbf{D}$, perciò, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ha quanto voluto.

Osservazione 13. Verifichiamo che $\mathcal{D}$ soddisfi 2.1 : $\forall z \in \mathbf{D}$ si ha

$$\mid f(z) \mid^2 = \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mid^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2 \mid z \mid^{2n} < \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mid a_n \mid^2 = \parallel f \parallel^2_{\mathcal{D}} \;\; .$$

Si può quindi concludere che $\mathcal{D}$ è un HFS, tale spazio si chiama *Spazio di Dirichlet.*

Esempio 2.1 ($\mathbf{L}^2_{[0,1]}$ $\underline{\textit{non}}$ è un HFS)**.**
Questo poiché $\eta_z(f) : \mathbf{L}^2_{[0,1]} \to \mathbb{C}$ non è limitata in quanto:

$$\exists f \in \mathbf{L}^2_{[0,1]} \text{ tale che } \forall c > 0 \text{ si ha } \mid f(x) \mid > c \parallel f \parallel$$

$$\text{Prendo } f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} \;\Rightarrow\; \int_0^1 \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2$$

$$\Rightarrow \text{si ha } \left|\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right| > \sqrt{2}c \;\;\; \forall c > 0 \text{ poiché } \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right| = +\infty$$

Capitolo 3

Teoria del nucleo riproducente

3.1 Proprietà generali

Proposizione 3.1.1. *Sia H un HFS su $X \Rightarrow \forall \lambda \in X$ si ha che $\eta_\lambda : H \to \mathbb{C}$ è limitata allora per il Lemma di Riesz $\exists! k_\lambda \in H$ tale che $\eta_\lambda(f) = f(\lambda) =< f, k_\lambda >$.*

Definizione 3.1. k_λ è chiamato il *nucleo riproducente* in λ poiché esso riproduce il valore di f in λ.

Proposizione 3.1.2. *Sia H un HFS e k_λ nucleo riproducente.*

$$\begin{aligned} \textit{Si ha che } \eta_\zeta : H &\to \mathbb{C} \qquad \textit{è limitata:} \\ k_\lambda &\mapsto k_\lambda(\zeta) \end{aligned}$$

allora, analogamente a prima, per il Lemma di Riesz $\exists!\ k_\zeta \in H$
tale che $k_\lambda(\zeta) =< k_\lambda, k_\zeta >$.

Definizione 3.2. Si definisce $k(\zeta, \lambda) =< k_\lambda, k_\zeta >$ e si chiama *funzione nucleo* per H.

Osservazione 14. Assegnato H, un HFS, la funzione

$$\begin{aligned} k : X \times X &\to \mathbb{C} \\ (\zeta, \lambda) &\mapsto k(\zeta, \lambda) \end{aligned}$$

è definita univocamente tramite k_λ e k_ζ appartenenti ad H.

Osservazione 15. Sia

$$\varphi : H \oplus H \to \mathbb{C}$$
$$(k_\lambda, k_\zeta) \mapsto k(\zeta, \lambda)$$

Sapendo che $k(\zeta, \lambda) =< k_\lambda, k_\zeta >$ si ha automaticamente che φ è sesquilineare. Inoltre si verifica che:

- $\forall k_\lambda$ si ha $k_\zeta \mapsto \varphi(k_\lambda, k_\zeta) = \overline{\eta_\lambda(k_\zeta)}$ limitata
- $\forall k_\zeta$ si ha $k_\lambda \mapsto \varphi(k_\lambda, k_\zeta) = \eta_\zeta(k_\lambda)$ limitata

Perciò applicando 1.2.4 si ha che φ è continua su $H \oplus H$

Proposizione 3.1.3. *Sia H un HFS su X, con $(e_i)_{i\in I}$ sistema ortonormale per H. Allora vale:*

$$k(\zeta, \lambda) = \sum_{i\in I} \overline{e_i(\lambda)} e_i(\zeta)$$

Dimostrazione. Per l'identità di Parseval rispetto a $(e_i)_{i\in I}$ si ha:

$$k_\lambda = \sum_{i\in I} < e_i, k_\lambda > e_i \text{ e } k_\zeta = \sum_{j\in I} < e_j, k_\zeta > e_j$$

e in base a 3.1.1 si ottiene

$$k_\lambda = \sum_{i\in I} e_i(\lambda) e_i \quad \text{e} \quad k_\zeta = \sum_{j\in I} e_j(\zeta) e_j \quad .$$

Da cui:

$$k(\zeta, \lambda) =< k_\lambda, k_\zeta >=< \sum_{i\in I} e_i(\lambda) e_i, \sum_{j\in I} e_j(\zeta) e_j >= \sum_{i,j\in I} \overline{e_i(\lambda)} e_j(\zeta) < e_i, e_j >=$$
$$= \sum_{i\in I} \overline{e_i(\lambda)} e_i(\zeta)$$

Ora si verifica la convergenza di $\sum_{i\in I} \overline{e_i(\lambda)} e_i(\zeta)$:

$$\Big| \sum_{i\in I} \overline{e_i(\lambda)} e_i(\zeta) \Big| = \Big| \sum_{i\in I} \overline{< e_i, k_\lambda >} \eta_\zeta(e_i) \Big| = \Big| \eta_\zeta \Big(\sum_{i\in I} < k_\lambda, e_i > e_i \Big) \Big| \leq$$
$$\leq \underbrace{\| \eta_\zeta \|}_{(1)} \underbrace{\| \sum_{i\in I} < e_i, k_\lambda > e_i \|}_{(2)}$$

- (1)$< +\infty$ poiché η_ζ è limitata
- (2)$< +\infty$ per il Teorema di Parseval

$\square$

Esempio 3.1. Tramite 3.1.3 si possono calcolare le $funzioni\ nucleo$ per $\mathbf{H}^2$, per $\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})$ e per $\mathcal{D}$

1. Si parte verificando che $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}$ è sistema ortogonale per $\mathbf{H}^2$, per $\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})$ e per $\mathcal{D}$:

$$< z^j, z^k >_{\mathbf{H}^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta(k-j)} d\vartheta = \begin{cases} 1 & \text{se } k=j \\ 0 & \text{se } k\neq j \end{cases}$$

$$< z^j, z^k >_{\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{D}} \overline{z^j} z^k dm(z) = \begin{cases} \frac{1}{j+1} & \text{se } k=j \\ 0 & \text{se } k\neq j \end{cases}$$

$$< z^j, z^k >_{\mathcal{D}} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{D}} j\overline{z^{j-1}} k z^{k-1} dm(z) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta(k-j)} d\vartheta = \begin{cases} j+1 & \text{se } k=j\neq 0 \\ 0 & \text{se } k\neq j \vee k=j=0 \end{cases}$$

2. Perciò i sistemi ortonormali per gli spazi $\mathbf{H}^2, \mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})$ e $\mathcal{D}$ sono rispettivamente $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(\sqrt{j+1}z^j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\frac{z^j}{\sqrt{j+1}})_{j\in\mathbb{N}}$

3. Da cui si ha che:

$$k(z,w)_{\mathbf{H}^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{w}^j z^j = \frac{1}{1-\overline{w}z}$$

$$k(z,w)_{\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\overline{w}^j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(\overline{w}z)^j = \left[\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} t^j\Big)\right]_{t=\overline{w}z} = \left[\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{1-t}\Big)\right]_{t=\overline{w}z}$$

$$\Rightarrow k(z,w)_{\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D})} = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^2}$$

$$k(z,w)_{\mathcal{D}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{w}^j z^j}{j+1} = \frac{1}{\overline{w}z}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^{j+1}}{j+1}(-1)^{j+1}(-1)^{j+1} = -\frac{1}{\overline{w}z}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^{j+1}}{j+1}(-1)^{2j+1}$$

$$\Rightarrow \quad k(z,w)_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{\overline{w}z}\log(1-\overline{w}z)$$

Proposizione 3.1.4.
Se H è spazio di funzioni olomorfe si ha che la funzione nucleo $\underline{k}$:

1. *è olomorfa rispetto alla prima variabile;*
2. *è anti-olomorfa rispetto alla seconda.*

Dimostrazione.

1. $k_\lambda : \zeta \mapsto k_\lambda(\zeta) =< k_\lambda, k_\zeta >= k(\zeta, \lambda)$ è funzione olomorfa, perciò risulta che $k(\zeta, \lambda)$ è olomorfa rispetto a ζ
2. $k_\zeta : \lambda \mapsto k_\zeta(\lambda) =< k_\zeta, k_\lambda >= \overline{< k_\lambda, k_\zeta >} = \overline{k(\zeta, \lambda)}$ è funzione olomorfa, perciò risulta che $k(\zeta, \lambda)$ è anti-olomorfa rispetto a λ

□

Proposizione 3.1.5. *La funzione nucleo $k : X \times X \to \mathbb{C}$ è semi-definita positiva.*

Dimostrazione. $\forall N$, $\forall \{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ insieme finito di punti distinti in X e $a_1, \cdots, a_N$ generici numeri complessi, si ha:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \overline{a_i} a_j k(\lambda_i, \lambda_j) = \sum_{i,j=1}^{N} \overline{a_i} a_j < k_{\lambda_j}, k_{\lambda_i} >=< \sum_{j=1}^{N} a_j k_{\lambda_j}, \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} >=\| \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} \|^2 \geq 0$$

Inoltre se

$$\sum_{i,j=1}^{N} \overline{a_i} a_j k(\lambda_i, \lambda_j) = 0 \Leftrightarrow \| \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} \|^2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} = 0$$

e nel caso in cui i k_{λ_i} sono linearmente indipendenti si ha $a_1 = \cdots = a_n = 0$, ovvero che la funzione nucleo è definita positiva. □

Osservazione 16. Il proposito seguente sarà di verificare il comportamento reciproco della funzione nucleo. Ovvero partendo da una funzione k con le proprietà appena dimostrate si risalirà ad un unico HFS. Quanto appena enunciato è il teorema di Moore-Aronszajn.

Definizione 3.3. Un nucleo $k : X \times X \to \mathbb{C}$ è una funzione definita positiva auto-aggiunta$\big(k(x, y) = \overline{k(y, x)}\ \big)$ che soddisfa:

$$k(\lambda, \lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in X$$

Teorema 3.1.6 (di Moore-Aronszajn).
Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli $HFSs$ su X e i nuclei su X.

Dimostrazione. **Esistenza di H come HFS**
Sia k un nucleo su X, si definisce il seguente spazio vettoriale:

$$\mathcal{V} = \{\sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} | n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, k_\lambda = k(\cdot, \lambda)\}$$

Su $\mathcal{V}$ si definisce il seguente prodotto scalare:

$$< \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i}, \sum_{j=1}^{M} b_j k_{\zeta_j} >= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_i \overline{b_j} k(\zeta_j, \lambda_i)$$

Verifica:

1. Prova che $<, >$ sia lineare nel primo argomento.

$$< \alpha \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} + \beta \sum_{j=1}^{M} b_j k_{\zeta_j}, \sum_{h=1}^{P} c_h k_{\xi_h} >=< \sum_{i=1}^{N} \alpha a_i k_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{M} \beta b_j k_{\zeta_j}, \sum_{h=1}^{P} c_h k_{\xi_h} >$$

Si definiscono:

$$k_{\omega_l} = \begin{cases} k_{\lambda_l} & \text{se } l \in \{1, \cdots, N\} \\ k_{\zeta_{l-N}} & \text{se } l \in \{N+1, \cdots, N+M\} \end{cases}$$

$$d_l = \begin{cases} \alpha a_l & \text{se } l \in \{1, \cdots, N\} \\ \beta b_{l-N} & \text{se } l \in \{N+1, \cdots, N+M\} \end{cases}$$

Da cui

$$< \sum_{i=1}^{N} \alpha a_i k_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{M} \beta b_j k_{\zeta_j}, \sum_{h=1}^{P} c_h k_{\xi_h} >=< \sum_{l=1}^{N+M} d_l k_{\omega_l}, \sum_{h=1}^{P} c_h k_{\xi_h} >= \sum_{l=1}^{N+M}\sum_{h=1}^{P} d_l \overline{c_h} k(\xi_h, \omega_l) =$$

$$= \sum_{l=1}^{N}\sum_{h=1}^{P} d_l \overline{c_h} k(\xi_h, \omega_l) + \sum_{l=N+1}^{N+M}\sum_{h=1}^{P} d_l \overline{c_h} k(\xi_h, \omega_l) = \alpha \sum_{i=1}^{N}\sum_{h=1}^{P} a_i \overline{c_h} k(\xi_h, \lambda_i) +$$

$$+\beta \sum_{j=i}^{M}\sum_{h=1}^{P} b_j \overline{c_h} k(\xi_h, \zeta_j) = \alpha < \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i}, \sum_{h=1}^{P} c_h k_{\xi_h} > +\beta < \sum_{j=1}^{M} b_j k_{\zeta_j}, \sum_{h=1}^{P} c_h k_{\xi_h} >$$

2. Si prova la coniugato-simmetria:

$$< \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i}, \sum_{j=1}^{M} b_j k_{\zeta_j} >= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \overline{a_i}\overline{b_j k(\lambda_i,\zeta_j)} =$$

$$= \overline{\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} b_j a_i k(\lambda_i,\zeta_j)} = \overline{< \sum_{j=1}^{M} b_j k_{\zeta_j}, \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} >}$$

3. Si ha:

$$< \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i}, \sum_{j=1}^{N} a_j k_{\lambda_j} >= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i \overline{a_j} k(\lambda_j,\lambda_i) \geq 0$$

in particolare se $< \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i}, \sum_{j=1}^{N} a_j k_{\lambda_j} >= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i \overline{a_j} k(\lambda_j,\lambda_i) = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_N = 0$

poiché k è definita positiva.

Definiamo H come il completamento di $\mathcal{V}$ rispetto al prodotto scalare $<,>$ precedentemente assegnato.
Si procede con la prova che H è un HFS in cui k assegnato è proprio la funzione nucleo. Per farlo occorre definire la valutazione delle funzioni appartenenti ad H:

$$f : X \to \mathbb{C}$$
$$\lambda \mapsto < f, k_\lambda >$$

Inoltre si verifica che è limitata

$$\eta_\lambda : H \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto f(\lambda)$$

poiché per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha

$$| f(\lambda) | = |< f, k_\lambda >| \leq \| f \| \| k_\lambda \| \quad \forall f \in H$$

Da cui per il Lemma di Riesz si ha che $\exists! v \in H$ tale che $f(\lambda) =< f, k_\lambda > \ \Rightarrow v = k_\lambda$, perciò $\eta_\zeta(k_\lambda) = k_\lambda(\zeta) =< k_\lambda, k_\zeta >= k(\zeta,\lambda)$, che corrisponde proprio al nucleo preso in partenza.

Unicità di H come HFS Siano H e H' entrambi HFS con stesso nucleo k. Si considera la funzione

$$U : Span(k_\lambda|\lambda \in X) \to H'$$
$$\sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} \mapsto \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i}$$

che è un isomorfismo isometrico, perciò, per 1.2.6, U si estende su H con la proprietà $\parallel U \parallel_{\mathscr{L}(Span(k_\lambda|\lambda\in X),H')}=\parallel U \parallel_{\mathscr{L}(H,H')}$ U rimane isomorfismo isometrico tra H e H' poiché:

$$\parallel Ux \parallel_{H'} \leq \parallel U \parallel_{\mathscr{L}(H,H')} \parallel x \parallel_H = \parallel U \parallel_{\mathscr{L}(Span(k_\lambda|\lambda\in X),H')} \parallel x \parallel_H =$$

$$= \sup_{\sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} \neq 0} \frac{\parallel \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} \parallel}{\parallel \sum_{i=1}^{N} a_i k_{\lambda_i} \parallel} \parallel x \parallel_H = \parallel x \parallel_H$$

e

$$\parallel Ux \parallel_{H'} \geq \parallel x \parallel_H \Leftrightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\parallel Ux \parallel}{\parallel x \parallel} \geq 1 = \sup_{x \in Span(k_\lambda|\lambda\in X)\setminus\{0\}} \frac{\parallel Ux \parallel}{\parallel x \parallel}$$

In conclusione $U : H \to H'$ è isomorfismo isometrico che permette di considerare H e H' come lo stesso HFS. □

Osservazione 17. Il teorema di Moore-Aronszajn permette di concepire H, un HFS, come $cl(Span(\{k_\lambda\}_{\lambda\in X}))$.

3.2 I moltiplicatori

Sia H_k un HFS su X con nucleo k .

Definizione 3.4. $Mult(H_k) = \{\varphi \mid \forall f \in H_k \text{ si ha } \varphi f \in H_k\}$

Proposizione 3.2.1. *$Mult(H_k)$ è un'algebra.*

Dimostrazione. Date $f, g \in Mult(H_k)$ si ha che:

- $f + g \in Mult(H_k) \Leftrightarrow (f+g)h \in H_k \ \forall h \in H_k \Leftrightarrow fh + gh \in H_k \ \forall h \in H_k$ che è vero poiché H_k è spazio vettoriale
- $fg \in Mult(H_k) \Leftrightarrow (fg)h \in H_k \ \forall h \in H_k \Leftrightarrow f \underbrace{gh}_{\in H_k} \in H_k \ \forall h \in H_k$ che è vero per definizione di f

□

Osservazione 18. Si considera l'operatore lineare

$$\begin{aligned} M_\varphi : H_k &\to H_k \\ f &\mapsto \varphi f \end{aligned}$$

Si osserva che:

$$\Gamma(M_\varphi) = \{(f, \varphi f) | f \in H_k, \varphi f \in H_k\} = H_k \oplus H_k \text{ è insieme chiuso.}$$

Allora, per il Teorema del grafico chiuso, si ha che M_φ è limitato.

Proposizione 3.2.2. *I nuclei riproducenti sono autovettori per l'aggiunto di M_φ.*

Dimostrazione.

$$< f, M_\varphi^* k_\zeta > = < M_\varphi f, k_\zeta > = < \varphi f, k_\zeta > = \varphi(\zeta) f(\zeta) = \varphi(\zeta) < f, k_\zeta > =$$

$$= < f, \overline{\varphi(\zeta)} k_\zeta > \quad \forall f \in H_k$$

□

Proposizione 3.2.3. *Vale la condizione:*

$$\| M_\varphi \|_{\mathcal{B}(H)} \geq \sup_{\zeta \in X} | \varphi(\zeta) |$$

Dimostrazione.

$$\| M_\varphi \|_{\mathcal{B}(H)} = \| M_\varphi^* \|_{\mathcal{B}(H)} = \sup_{f \in H_k \setminus \{0\}} \frac{\| M_\varphi^* f \|}{\| f \|} \geq \frac{\| M_\varphi^* k_\zeta \|}{\| k_\zeta \|} = \frac{\| \overline{\varphi(\zeta)} k_\zeta \|}{\| k_\zeta \|} = | \overline{\varphi(\zeta)} | =$$

$$= | \varphi(\zeta) | \quad \forall \zeta \in X$$

□

Teorema 3.2.4. *Sono equivalenti:*

- $\varphi \in Mult(\mathbf{L}_a^2(\mathbf{D}))$
- $\varphi \in \mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$

Dimostrazione. Per la prima implicazione si ha:

$$\varphi \in Mult(\mathbf{L}_a^2(\mathbf{D})) \Leftrightarrow \forall f \in \mathbf{L}_a^2(\mathbf{D}) \text{ si ha } \varphi f \in \mathbf{L}_a^2(\mathbf{D}) \Rightarrow \varphi \in Mult(\mathbf{L}_a^2(\mathbf{D}))$$

In base a questo si ha φ olomorfa su $\mathbf{D}$.
Inoltre vale

$$\forall z \in \mathbf{D} \quad | \varphi(z) |^2 \leq \Big(\int_{\mathbf{D}} | \varphi(z) | \, dm(z) \Big)^2 \leq C \int_{\mathbf{D}} | \varphi(z) |^2 \, dm(z) \leq C \| \varphi \|^2_{\mathbf{L}_a^2(\mathbf{D})}, \text{con C>0}$$

costante e perciò f è limitata.

Viceversa, φf è olomorfa poiché prodotto di funzioni olomorfe.
Con $f \in \mathbf{L}_a^2(\mathbf{D})$ si verifica che $\varphi f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{D})$:

$$\int_{\mathbf{D}} | \varphi(z) f(z) |^2 \, dm(z) \leq \int_{\mathbf{D}} \big(\sup_{\mathbf{D}} | \varphi(z) |^2 \big) | f(z) |^2 \, dm(z) \leq$$

$$\leq \underbrace{\sup_{\mathbf{D}} | \varphi(z) |^2}_{<+\infty} \| f \|^2_{\mathbf{L}_a^2(\mathbf{D})}$$

Osservazione 19. In questo modo si è anche provato che:

$$\| M_\varphi \|_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2_a(\mathbf{D}))} = \sup_{f \neq 0} \sqrt{\frac{\int_{\mathbf{D}} | \varphi(z) f(z) |^2 \, dm(z)}{\int_{\mathbf{D}} | f(z) |^2 \, dm(z)}} = \sup_{z \in \mathbf{D}} | \varphi(z) | \tag{3.1}$$

□

Osservazione 20. Si può estendere il risultato 3.1 con il seguente

Teorema 3.2.5. *M_φ appartiene a $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{C}))$ se e solo se φ appartiene a $\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{C}}$.*
In particolare vale:

$$\| M_\varphi \|_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{C}))} = \| \varphi \|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{C}}} .$$

Dimostrazione.

$$\| M_\varphi f \|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{C})} = \int_{\mathbb{C}} | \varphi(z) f(z) |^2 \, dm(z) \leq \int_{\mathbb{C}} \left(supess_{\mathbb{C}} \, | \varphi(z) | \right)^2 | f(z) |^2 \, dm(z) =$$

$$= \| \varphi \|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{C}}} \int_{\mathbb{C}} | f(z) |^2 \, dm(z) \ \ \forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{C}) \Rightarrow \ \| M_\varphi \|_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{C}))} \leq \| \varphi \|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{C}}}$$

Per l'altra disuguaglianza.
Sia λ tale che $0 < \lambda < \| \varphi \|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{C}}}$ (se fosse $\| \varphi \|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{C}}} = 0$, è banale che $\| M_\varphi \|_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{C}))} \geq 0$) e sia $E = \{ z | \lambda < | \varphi(z) | \}$. Considero $f = \chi_E$, da cui $m(E) = \| \chi_E \|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{C})} > 0$ (se non fosse così avrei $m(E) = 0 \ \Rightarrow \lambda \geq supess_{\mathbb{C}} \mid \varphi \mid$ che contraddice l'ipotesi) e si ha:

$$\| M_\varphi f \|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{C})} = \int_{\mathbb{C}} | \varphi(z) f(z) |^2 \, dm(z) = \int_E | \varphi(z) |^2 \, dm(z) > m(E) \lambda^2 = \lambda^2 \, \| \chi_E \|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{C})}$$

$$\Rightarrow \| M_\varphi \|_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{C}))} \geq \lambda \ \ \forall \lambda \ \Rightarrow \| M_\varphi \|_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{C}))} \geq \| \varphi \|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{C}}}$$

□

Teorema 3.2.6. *Sono equivalenti:*

- $\varphi \in Mult(\mathbf{H}^2)$
- $\varphi \in \mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$

Dimostrazione. Come prima osservazione si può constatare che $\mathbf{H}^2$ e $\mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$ sono rispettivi sottospazi di $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ e $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})$. Se $\varphi \in \mathbf{H}^\infty(\mathbf{D})$ provare che $\varphi f \in \mathbf{H}^2 \ \forall f \in \mathbf{H}^2$ è equivalente ad avere M_φ (operatore di moltiplicazione in $\mathbf{H}^2$) limitato.
Per 3.2.3 e 3.2.5 valgono:

- $\sup_{\mathbf{D}} \mid \varphi \mid \leq \parallel M_\varphi \parallel_{\mathcal{B}(\mathbf{H}^2)} \leq \parallel M_\varphi \parallel_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))}$
- $\parallel M_\varphi \parallel_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))} = \parallel \varphi \parallel_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{D})}$

si ottiene quindi

$$\sup_{\mathbf{D}} \mid \varphi \mid \leq \parallel M_\varphi \parallel_{\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))} = \parallel \varphi \parallel_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{D})} \leq \sup_{\mathbf{D}} \mid \varphi \mid \ .$$

Viceversa se $\varphi \in Mult(\mathbf{H}^2) \Leftrightarrow \varphi f \in \mathbf{H}^2 \ \forall f \in \mathbf{H}^2 \Rightarrow$ prendendo $f = 1$ ottengo $\varphi \in \mathbf{H}^2$, perciò φ è analitica, inoltre è limitata per 3.2.3. □

Osservazione 21. Quanto provato in 3.2.2 è reciproco, ovvero se un operatore lineare limitato ha come autovettori i nuclei riproducenti, allora tale operatore è l'aggiunto dell'operatore di moltiplicazione di una certa funzione.
In dettaglio, partendo da $T : H_k \to H_k$ tale che $Tk_\lambda = ak_\lambda$ con $a \in \mathbb{C}$, si definisce $\varphi : \lambda \mapsto \overline{a}$. φ è ben definita poiché:

$$\text{se } \zeta = \lambda \Rightarrow \text{si ha } k_\lambda = k_\zeta \Rightarrow Tk_\lambda = Tk_\zeta = ak_\lambda \Rightarrow \varphi(\zeta) = \varphi(\lambda)$$

Considerando T^*:

$$< T^* f, k_\lambda > = < f, Tk_\lambda > = < f, \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda > = \varphi(\lambda) f(\lambda) \quad \forall \lambda \in X \quad \forall f \in H_k$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} T^* : H_k &\to H_k \\ f &\mapsto \varphi f \end{aligned}$$

ed è perciò provato il seguente teorema.

Teorema 3.2.7. *Sia H_k un HFS su X. La funzione φ è un moltiplicatore di H_k se e solo se l'operatore T definito da*

$$Tk_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda$$

si estende a un operatore lineare e limitato su tutto H_k. In questo caso si ha che T è l'aggiunto di M_φ.

Proposizione 3.2.8. *Sia H spazio di Hilbert e $T : H \to H$ operatore lineare limitato. T è di norma al più ρ se e solo se*

$$\rho^2 I - T^*T \geq 0 \ .$$

Dimostrazione.

$$\rho^2 I - T^*T \geq 0 \Leftrightarrow < v, (\rho^2 I - T^*T)(v) > \geq 0 \ \forall v \Leftrightarrow < v, \rho^2 v - T^*Tv > \geq 0 \ \forall v$$

$$\Leftrightarrow < v, \rho^2 v > - < v, T^*Tv > \geq 0 \ \forall v \Leftrightarrow \ \rho^2 < v, v > - < Tv, Tv > \geq 0 \ \forall v$$

$$\Leftrightarrow \ \rho^2 \parallel v \parallel^2 - \parallel Tv \parallel^2 \geq 0 \ \forall v \Leftrightarrow \ \rho^2 \geq \frac{\parallel Tv \parallel^2}{\parallel v \parallel^2} \geq 0 \ \forall v \neq 0 \Leftrightarrow \rho \geq \sup_{v \neq 0} \frac{\parallel Tv \parallel}{\parallel v \parallel} = \parallel T \parallel$$

□

Proposizione 3.2.9. *La funzione φ è un moltiplicatore di H_k con norma al più ρ se e solo se*

$$(\rho^2 - \varphi(\zeta)\overline{\varphi(\lambda)})k(\zeta, \lambda) \geq 0$$

Dimostrazione. Utilizzando 3.2.8 con $T = M_\varphi^*$ si ottiene la relazione

$$\parallel M_\varphi \parallel \leq \rho \Leftrightarrow \rho^2 Id - M_\varphi M_\varphi^* \geq 0 \Leftrightarrow < v, \rho^2 Id - M_\varphi M_\varphi^* v > \geq 0 \ \forall v \in H_k \tag{3.2}$$

Poiché H_k è HFS, si ha $H_k = cl(Span(\{k_\lambda\}_{\lambda \in X}))$ e 3.2 è equivalente a

$$< \sum_j a_j k_{\lambda_j}, \rho^2 Id - M_\varphi M_\varphi^* (\sum_i a_i k_{\lambda_i}) > \geq 0 \ \ \forall N, \ \forall \{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\} \text{ insieme finito di}$$

$$\text{punti distinti in } X \text{e } a_1, \cdots, a_N \text{ generici numeri complessi}$$

$$\Leftrightarrow < \sum_j a_j k_{\lambda_j}, \rho^2 \sum_i a_i k_{\lambda_i} - M_\varphi M_\varphi^* \sum_i a_i k_{\lambda_i} > \geq 0$$

$$\Leftrightarrow < \sum_j a_j k_{\lambda_j}, \rho^2 \sum_i a_i k_{\lambda_i} > - < \sum_j a_j k_{\lambda_j}, M_\varphi M_\varphi^* \sum_i a_i k_{\lambda_i} > \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 < \sum_j a_j k_{\lambda_j}, \sum_i a_i k_{\lambda_i} > - < M_\varphi^* \sum_j a_j k_{\lambda_j}, M_\varphi^* \sum_i a_i k_{\lambda_i} > \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 < \sum_j a_j k_{\lambda_j}, \sum_i a_i k_{\lambda_i} > - < \sum_j a_j \overline{\varphi(\lambda_j)} k_{\lambda_j}, \sum_i a_i \overline{\varphi(\lambda_i)} k_{\lambda_i} > \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} \rho^2 a_j \overline{a_i} k(\lambda_i, \lambda_j) - \sum_{i,j} a_j \overline{a_i} \varphi(\lambda_i) \overline{\varphi(\lambda_j)} k(\lambda_i, \lambda_j) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} a_j \overline{a_i} k(\lambda_i, \lambda_j) [\rho^2 - \varphi(\lambda_i) \overline{\varphi(\lambda_j)}] \geq 0$$

che è equivalente a chiedere che $(\rho^2 - \varphi(\zeta)\overline{\varphi(\lambda)})k(\zeta, \lambda)$ sia definita positiva.

$\square$

Capitolo 4

Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert e vvRKHS

4.1 Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert

Definizione 4.1. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert, $\varphi_1 \in H_1, \varphi_2 \in H_2$, si definisce

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$$
$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto < \varphi_1, \psi_1 >< \varphi_2, \psi_2 > \quad .$$

Proposizione 4.1.1. *$\varphi_1 \otimes \varphi_2$ è forma coniugato-bilineare.*

Dimostrazione. Nel primo argomento si ha:

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2(a\psi_1 + b\xi_1, \psi_2) =< \varphi_1, a\psi_1 + b\xi_1 >< \varphi_2, \psi_2 >= \overline{a} < \varphi_1, \psi_1 >< \varphi_2, \psi_2 > +$$

$$+\overline{b} < \varphi_1, \xi_1 >< \varphi_2, \psi_2 >= \overline{a}\varphi_1 \otimes \varphi_2(\psi_1, \psi_2) + \overline{b}\varphi_1 \otimes \varphi_2(\xi_1, \psi_2) \ .$$

Nel secondo argomento si ha:

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2(\psi_1, a\psi_2 + b\xi_2) =< \varphi_1, \psi_1 >< \varphi_2, a\psi_2 + b\xi_2 >= \overline{a} < \varphi_1, \psi_1 >< \varphi_2, \psi_2 > +$$

$$+\overline{b} < \varphi_1, \psi_1 >< \varphi_2, \xi_2 >= \overline{a}\varphi_1 \otimes \varphi_2(\psi_1, \psi_2) + \overline{b}\varphi_1 \otimes \varphi_2(\psi_1, \xi_2) \ .$$

□

Definizione 4.2. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert, si definisce

$$\mathscr{E} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i \otimes \psi_i \,|a_i \in \mathbb{C}, \varphi_i \in H_1, \psi_i \in H_2, n < \infty\} \ .$$

$\mathscr{E}$ è dotato di un prodotto scalare, che si definisce su

$$< \varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu >=< \varphi, \eta >_{H_1}< \psi, \mu >_{H_2}$$

e si estende su $\mathscr{E}$ nel seguente modo:

$$< \sum_i a_i\varphi_i \otimes \psi_i, \sum_j b_j\eta_j \otimes \mu_j >_{\mathscr{E}}= \sum_{i,j} a_i\overline{b_j} < \varphi_i, \eta_j >_{H_1}< \psi_i, \mu_j >_{H_2}$$

Proposizione 4.1.2. *$<, >_{\mathscr{E}}$ è ben definito, ovvero $< \lambda, \lambda^{'} >$ non dipende da una precisa combinazione lineare finita decisa per esprimere λ e $\lambda^{'}$.*

Alla dimostrazione si premette il seguente

Lemma 4.1.3. *Se μ è la forma nulla allora $< \mu, \eta >= 0 \ \forall\eta \in \mathscr{E}$.*

Dimostrazione.

$$< \mu, \eta >=< \mu, \sum_i a_i\varphi_i\otimes\psi_i >= \sum_i \overline{a_i} < \mu, \varphi_i\otimes\psi_i >= \sum_i \overline{a_i}\mu(\varphi_i, \psi_i) = 0 \text{ poiché } \mu \text{ è forma nulla}$$

□

Si procede con la prova di 4.1.2

Dimostrazione. Per applicare il lemma precedente si usa come forma nulla $\mu = \lambda - \lambda$, di conseguenza si ha $< \lambda - \lambda, \eta >= 0 \ \forall\eta \in \mathscr{E}$.
Prendiamo quindi: $\sum_i a_i\alpha_i \otimes \beta_i = \lambda = \sum_j b_j\delta_j \otimes \varepsilon_j$,
da cui $< \sum_i a_i\alpha_i \otimes \beta_i - \sum_j b_j\delta_j \otimes \varepsilon_j, \eta >= 0 \ \forall\eta \in \mathscr{E}$.
Si definisce:

$$c_k\varphi_k \otimes \psi_k = \begin{cases} a_k\alpha_k \otimes \beta_k & \text{se } k \in \{1, \cdots, N\} \\ -b_{N-k}\delta_{N-k} \otimes \varepsilon_{N-k} & \text{se } k \in \{N+1, \cdots, N+M\} \end{cases}$$

e si ha

$$< \sum_i a_i\alpha_i\otimes\beta_i - \sum_j b_j\delta_j\otimes\varepsilon_j, \eta >=< \sum_{k=1}^{N+M} c_k\varphi_k\otimes\psi_k, \eta >= \sum_{k=1}^{N+M} c_k < \varphi_k\otimes\psi_k, \eta >= 0 \ \forall\eta \in \mathscr{E}$$

$$\Leftrightarrow < \sum_i a_i \alpha_i \otimes \beta_i, \eta > - < \sum_j b_j \delta_j \otimes \varepsilon_j, \eta >= 0 \ \forall \eta \in \mathscr{E}$$

$$\Leftrightarrow < \sum_i a_i \alpha_i \otimes \beta_i, \eta >=< \sum_j b_j \delta_j \otimes \varepsilon_j, \eta > \ \ \forall \eta \in \mathscr{E}$$

Scegliendo $\eta = \lambda'$, in cui $\sum_k c_k \eta_k \otimes \vartheta_k = \lambda' = \sum_l d_l \mu_l \otimes \nu_l$, si ha:

$$< \sum_i a_i \alpha_i \otimes \beta_i, \sum_k c_k \eta_k \otimes \vartheta_k >=< \sum_j b_j \delta_j \otimes \varepsilon_j, \sum_l d_l \mu_l \otimes \nu_l >$$

ovvero la tesi. □

Segue quindi la prova che $<,>_{\mathscr{E}}$ sia un prodotto scalare.

Proposizione 4.1.4. *$<,>_{\mathscr{E}}$ è definito positivo.*

Dimostrazione. Sia $\lambda = \sum_{k=1}^{M} d_k \eta_k \otimes \mu_k$, $M_1 = Span(\{\eta_k\}_{k=1}^{M})$ e $M_2 = Span(\{\mu_k\}_{k=1}^{M})$. Introducendo $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_1}$ e $\{\psi_l\}_{l=1}^{N_2}$ basi ortonormali rispettivamente di M_1 e M_2, possiamo esprimere ogni η_k rispetto ai φ_j e analogamente ogni μ_k rispetto ai ψ_l, otteniamo quindi

$$\lambda = \sum_{j,l=1}^{N_1,N_2} c_{jl}(\varphi_j \otimes \psi_l) \quad .$$

Si ha perciò

$$< \lambda, \lambda >=< \sum_{j,l=1}^{N_1,N_2} c_{jl}(\varphi_j \otimes \psi_l), \sum_{i,m=1}^{N_1,N_2} c_{im}(\varphi_i \otimes \psi_m) >= \sum_{j,l,i,m=1}^{N_1,N_2,N_1,N_2} c_{jl}\overline{c_{im}} < \varphi_j, \varphi_i >< \psi_l, \psi_m >=$$

$$= \sum_{j,l=1}^{N_1,N_2} | \ c_{jl} \ |^2 \geq 0 \quad .$$

Infine se

$$< \lambda, \lambda >= 0 \Rightarrow c_j l = 0 \ \forall j, l \Rightarrow \lambda \text{ è la forma nulla.}$$

□

Proposizione 4.1.5. $<,>_{\mathscr{E}}$ *è coniugato-simmetrica.*

Dimostrazione. Siano $\lambda, \lambda \in \mathscr{E}$

$$< \lambda, \lambda' >=< \sum_i a_i\varphi_i \otimes \psi_i, \sum_j b_j\eta_j \otimes \mu_j >_{\mathscr{E}}= \sum_{i,j} a_i\overline{b_j} < \varphi_i, \eta_j >_{H_1}< \psi_i, \mu_j >_{H_2}=$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\overline{a_i}}\overline{b_j} < \varphi_i, \eta_j >_{H_1}< \psi_i, \mu_j >_{H_2}= \sum_{i,j} \overline{\overline{a_i}}\overline{b_j}\overline{< \eta_j, \varphi_i >}_{H_1}\overline{< \mu_j, \psi_i >}_{H_2} =$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\overline{a_i}}\overline{b_j}\ \overline{< \eta_j \otimes \mu_j, \varphi_i \otimes \psi_i >}_{\mathscr{E}} = \overline{\sum_{i,j} \overline{a_i}b_j\ \ < \eta_j \otimes \mu_j, \varphi_i \otimes \psi_i >_{\mathscr{E}}} =$$

$$= \overline{< \sum_j b_j\eta_j \otimes \mu_j, \sum_i a_i\varphi_i \otimes \psi_i >_{\mathscr{E}}} = \overline{< \lambda', \lambda >}$$

□

Proposizione 4.1.6. $<,>_{\mathscr{E}}$ *è lineare.*

Dimostrazione. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\lambda, \mu, \lambda' \in \mathscr{E}$

$$< \alpha\lambda + \beta\mu, \lambda' >=< \alpha \sum_i a_i\varphi_i \otimes \psi_i + \beta \sum_k c_k\rho_k \otimes \sigma_k, \sum_j b_j\eta_j \otimes \mu_j >$$

si definisce:

$$d_l\gamma_l \otimes \delta_l = \begin{cases} \alpha a_l\varphi_l \otimes \psi_l & \text{se } l \in \{1, \cdots, N\} \\ \beta c_{N-l}\rho_{N-l} \otimes \sigma_{N-l} & \text{se } l \in \{N+1, \cdots, N+M\} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$< \alpha \sum_i a_i\varphi_i \otimes \psi_i + \beta \sum_k c_k\rho_k \otimes \sigma_k, \sum_j b_j\eta_j \otimes \mu_j >=< \sum_l d_l\gamma_l \otimes \delta_l, \sum_j b_j\eta_j \otimes \mu_j >=$$

$$= \sum_{l,j} d_l\overline{b_j} < \gamma_l \otimes \delta_l, \eta_j \otimes \mu_j >= \sum_{i,j} \alpha a_i b_j < \varphi_i \otimes \psi_i, \eta_j \otimes \mu_j > +$$

$$+ \sum_{k,j} \beta c_k\overline{b_j} < \rho_k \otimes \sigma_k, \eta_j \otimes \mu_j >= \alpha < \sum_i a_i\varphi_i \otimes \psi_i, \sum_j b_j\eta_j \otimes \mu_j > +$$

$$+\beta < \sum_k c_k\rho_k \otimes \sigma_k, \sum_j b_j\eta_j \otimes \mu_j >= \alpha < \lambda, \lambda' > +\beta < \mu, \lambda' >$$

□

Definizione 4.3. Si denota con $H_1 \otimes H_2$ il completamento di $\mathscr{E}$ rispetto a $<,>_{\mathscr{E}}$.

Proposizione 4.1.7. *Se $\{\varphi_k\}_k$ e $\{\psi_l\}_l$ sono famiglie ortonormali rispettivamente di H_1 e H_2, allora $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}_{k,l}$ è famiglia ortonormale di $H_1 \otimes H_2$.*

Dimostrazione.

$$< \varphi_k \otimes \psi_l, \varphi_j \otimes \psi_m >=< \varphi_l, \varphi_j >< \psi_k, \psi_m >= \begin{cases} 1 & \text{se } k = j = l = m \\ 0 & \text{se } k \neq j \vee l \neq m \end{cases}$$

□

Proposizione 4.1.8. *Se H_1 e H_2 sono separabili allora $H_1 \otimes H_2$ è separabile.*

Dimostrazione. Si ha immediatamente che $Span(\{\varphi_k \otimes \psi_l\}_{k,l}) \subseteq \mathscr{E}$ perciò si ha $cl(Span(\{\varphi_k \otimes \psi_l\}_{k,l})) \subseteq cl(\mathscr{E}) = H_1 \otimes H_2$.
Per provare $cl(\mathscr{E}) \subseteq cl(Span(\{\varphi_k \otimes \psi_l\}_{k,l}))$, ovvero l'altra inclusione, sia $\varphi \otimes \psi \in \mathscr{E}$, per il Teorema di Parseval si ha $\varphi = \sum_k c_k\varphi_k$ con $\sum_k \mid c_k \mid^2 < \infty$, $\psi = \sum_l d_l\psi_l$ con $\sum_l \mid d_l \mid^2 < \infty \Rightarrow \sum_{k,l} \mid c_k d_l \mid^2 < \infty$, perciò nuovamente per il Teorema di Parseval $\exists\ \mu = \sum_{k,l} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l$.
Si ottiene quindi

$$\| \varphi \otimes \psi - \sum_{l<M,k<N} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l \|^2 = \| \varphi \otimes \psi \|^2 + \| \sum_{l<M,k<N} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l \|^2 +$$

$$-2Re(< \varphi \otimes \psi, \sum_{i<M,j<N} c_j d_i \varphi_j \otimes \psi_i >) = \| \sum_k c_k\varphi_k \otimes \sum_l d_l\psi_l \|^2 + \| \sum_{l<M,k<N} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l \|^2 +$$

$$-2Re(< \sum_k c_k\varphi_k \otimes \sum_l d_l\psi_l, \sum_{i<M,j<N} c_j d_i \varphi_j \otimes \psi_i >) = \sum_{k,l} \mid c_k d_l \mid^2 + \sum_{l<M,k<N} \mid c_k d_l \mid^2 +$$

$$-2Re(\sum_{j<M,i<N} \overline{c_j}\overline{d_i} < \sum_k c_k\varphi_k \otimes \sum_l d_l\psi_l, \varphi_j \otimes \psi_i >) = \sum_{k,l} \mid c_k d_l \mid^2 + \sum_{l<M,k<N} \mid c_k d_l \mid^2 +$$

$$-2Re(\sum_{j<M,i<N} \overline{c_j}\overline{d_i} < \sum_k c_k\varphi_k, \varphi_j >< \sum_l d_l\psi_l, \psi_i >) = \sum_{k,l} \mid c_k d_l \mid^2 + \sum_{l<M,k<N} \mid c_k d_l \mid^2 +$$

$$-2Re(\sum_{j<M,i<N} \overline{c_j}\overline{d_i} c_j d_i) = \sum_{k,l} \mid c_k d_l \mid^2 + \sum_{l<M,k<N} \mid c_k d_l \mid^2 -2 \sum_{j<M,i<N} \mid c_j d_i \mid^2 \to 0$$

per $N, M \to +\infty$. □

Esempio 4.1 (Isomorfismo tra $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k) \otimes \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s)$ e $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s)$).
$\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^s$ dotati delle rispettive misure di Lebesgue $\mu_{\mathbb{R}^k}$ e $\mu_{\mathbb{R}^s}$.
Sapendo che $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k)e\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s)$ sono separabili si ha, per 4.1.8, che $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k) \otimes \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s)$ è separabile.
Consideriamo $\{\varphi_m(x)\}_m$,$\{\psi_l(y)\}_l$ rispettivamente sistemi ortonormali di $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k)$e di $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s)$.
Osserviamo che :

$$< \varphi_m(x)\psi_l(y), \varphi_i(x)\psi_j(y) >_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s)} = \int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s} \varphi_m(x)\psi_l(y)\overline{\varphi_i(x)\psi_j(y)}dxdy$$

e applicando il teorema di Fubini si ha

$$\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s} \varphi_m(x)\psi_l(y)\overline{\varphi_i(x)\psi_j(y)}dxdy = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi_m(x)\overline{\varphi_i}(x)dx \cdot \int_{\mathbb{R}^s} \psi_l(y)\overline{\psi_j(y)}dy =$$

$$=< \varphi_m(x), \varphi_i(x) >_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k)}< \psi_l(y), \psi_j(y) >_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s)} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = i = l = j \\ 0 & \text{se } m \neq i \vee l \neq j \end{cases}$$

Si è quindi provato che $\{\varphi_m(x)\psi_l(y)\}_{m,l}$ è insieme ortonormale di $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s)$.
Per concludere che $\{\varphi_m(x)\psi_l(y)\}_{m,l}$ sia sistema ortonormale sia $f(x,y) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s)$ tale che $< f(x,y), \varphi_m(x)\psi_l(y) >= 0 \ \forall m,l$,
si ha quindi che

$$\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s} f(x,y)\overline{\varphi_m(x)\psi_l(y)}dxdy = 0 \ \forall l,m \quad ,$$

per il teorema di Fubini si può riscrivere

$$\int_{\mathbb{R}^s} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\overline{\varphi_m(x)}dx \Big) \overline{\psi_l(y)}dy$$

Poiché $\{\psi_l(y)\}_l$ base di $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s)$ si ha $\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\overline{\varphi_m(x)}dx = 0$ tranne su un insieme $S_k \subset \mathbb{R}^s$ tale che $\mu_{\mathbb{R}^s}(S_k) = 0 \quad \Rightarrow \forall y \notin \cup_k S_k(S_k$ costituiti come il precedente) si ha $\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\overline{\varphi_m(x)}dx = 0 \ \forall m \quad \Rightarrow$ poiché $\{\varphi_m(x)\}_m$ è sistema ortonormale si ha che $f(x,y) = 0$ quasi dappertutto su $\mathbb{R}^k$ e di conseguenza a queste considerazioni si ha $f(x,y) = 0$ quasi dappertutto su $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$. In questo modo si ha che $\{\varphi_m(x)\psi_l(y)\}_{m,l}$ è sistema ortonormale di $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s)$.
Si definisce $U : \varphi_m \otimes \psi_l \mapsto \varphi_m(x)\psi_l(y)$, per 1.2.6 si estende univocamente ad un operatore di norma 1, $U : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k) \otimes \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s) \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s)$ che verifica, date $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k), g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s)$:

$$U(f \otimes g) = U(\sum_m c_m\varphi_m \otimes \sum_l d_l\psi_l) =$$

$$= U(\sum_m c_m\varphi_m \otimes \sum_l d_l\psi_l)(u,v) = U(< \sum_m c_m\varphi_m, u >< \sum_l d_l\psi_l, v >) =$$

$$= U(\sum_m c_m < \varphi_m, u > \sum_l d_l < \psi_l, v >) = U(\sum_{m,l} c_m d_l \varphi_m \otimes \psi_l)(u,v) = U(\sum_{m,l} c_m d_l \varphi_m \otimes \psi_l) =$$

$$= \sum_{m,l} c_m d_l U(\varphi_m \otimes \psi_l) = \sum_{m,l} c_m d_l \varphi_m(x)\psi_l(y) = f(x)g(y)$$

Si è quindi provato che esiste ed è unico l'isomorfismo tale che

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k) \otimes \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^s) \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s)$$
$$f \otimes g \mapsto f \cdot g$$

Per questa proprietà si è soliti dire che i due spazi siano naturalmente isomorfi e inoltre risulta una generalizzazione stessa del teorema di Fubini.

4.2 Spazio di Hilbert a nucleo riproducente a valori vettoriali

Sia $\mathcal{L}$ spazio di Hilbert di dimensione m (m può essere finito o infinito). Scelto un sistema ortonormale per $\mathcal{L}$ si può identificare tale spazio con ℓ^2_m, ovvero lo spazio delle sequenze quadrato-sommabili di lunghezza m.

Definizione 4.4. Sia H un HFS su X, si definisce $H \otimes \mathcal{L}$ spazio di Hilbert a nucleo riproducente a valori vettoriali (in seguito vvRKHS).

Osservazione 22. Essendo H un HFS, si ha $H = cl(Span(\{k_x\}_{x\in X}))$, di conseguenza $H \otimes \mathcal{L} = cl(Span(\{f \otimes x\}_{f\in H, x\in\mathcal{L}}))$

Osservazione 23. Se X è numerabile si ha $H = cl(Span(\{k_x\}_{x\in X}))$ separabile e per 4.1.8 si ha che $H \otimes \mathcal{L}$ è separabile.
Dato $x \in H \otimes \mathcal{L}$ e $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$,$\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$sistemi ortonormali di H e $\mathcal{L}$, si ha

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \otimes g_k \quad .$$

Valutando x in (k_λ, u) si ha:

$$x(k_\lambda, u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \otimes g_k(k_\lambda, u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k < f_k, k_\lambda >< g_k, u >= \sum_{k=1}^{\infty} c_k < f_k, k_\lambda > \sum_{i=1}^{m} g_{k,i}\overline{u_i} \quad .$$

Perciò se:

$$\begin{cases} H = & \mathbf{L}^2_a(\mathbf{D}) \;\Rightarrow x(k_\lambda, u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sqrt{k+1}\lambda^k \sum_{i=1}^{m} g_{k,i}\overline{u_i} \\ H = & \mathcal{D} \;\Rightarrow x(k_\lambda, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{k+1}}\lambda^k \sum_{i=1}^{m} g_{k,i}\overline{u_i} \\ H = & \mathbf{H}^2 \;\Rightarrow x(k_\lambda, u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^k \sum_{i=1}^{m} g_{k,i}\overline{u_i} \end{cases}$$

4.2.1 Moltiplicatore di un vvRKHS

Osservazione 24. In $H \otimes \mathcal{L}$ non è chiaro cosa possa significare la condizione

$$\varphi \cdot F \in H \otimes \mathcal{L} \;\; \forall F \in H \otimes \mathcal{L} \, ,$$

poiché non è specificata l'operazione $\cdot$ tra φ e F.
L'intenzione è quindi di procedere con la costruzione di un operatore aggiunto dell'ipotetico operatore di moltiplicazione in $H \otimes \mathcal{L}$, coerente con le proprietà presentate nella sezione sui moltiplicatori di H.

Definizione 4.5. Dato

$$\begin{aligned} \varphi : X \to \mathcal{B}(\mathcal{L}) \, , \\ \lambda \mapsto \varphi(\lambda) \end{aligned}$$

si definisce l'operatore $T : k_\lambda \otimes v \mapsto k_\lambda \otimes \varphi(\lambda)^* v$.

Teorema 4.2.1. *L'operatore T si estende linearmente su $H \otimes \mathcal{L}$, è limitato e tale che*

$$\| \, T \, \| \geq \sup_{\lambda \in X} \| \, \varphi(\lambda) \, \| \;\; .$$

Dimostrazione. Tramite 4.5, al variare di $\lambda \in X$ e $v \in \mathcal{L}$ si ha T definita su $Span(\{k_\lambda \otimes v\}_{\lambda \in X, v \in \mathcal{L}})$ nel seguente modo:

$$T(\sum_i c_i k_{\lambda_i} \otimes v_i) = \sum_i c_i k_{\lambda_i} \otimes \varphi(\lambda_i)^* v_i \; .$$

Per 1.2.6 si ha quindi che T è estendibile con continuità a $cl(Span(\{k_\lambda \otimes v\}_{\lambda \in X, v \in \mathcal{L}})) = H \otimes \mathcal{L}$.
$\Gamma(T) = (H \otimes \mathcal{L}) \oplus (H \otimes \mathcal{L})$ poiché $\varphi(\lambda_i)^* \in \mathcal{B}(\mathcal{L}) \forall \lambda_i \in X$, si ha quindi che $\Gamma(T)$ è insieme chiuso, perciò per il teorema del grafico chiuso si ha che T è limitato.
Infine si osserva che:

$$\frac{\| Tk_\lambda \otimes v \|^2}{\| k_\lambda \otimes v \|^2} = \frac{\| k_\lambda \otimes \varphi(\lambda)^* v \|^2}{\| k_\lambda \otimes v \|^2} = \frac{\| k_\lambda \|^2 \| \varphi(\lambda)^* v \|^2}{\| k_\lambda \|^2 \| v \|^2} = \frac{\| \varphi(\lambda)^* v \|^2}{\| v \|^2} \quad \forall \lambda, \forall v$$

$$\Rightarrow \| T \| \geq \sup_{\lambda \in X} \| \varphi(\lambda) \| \quad .$$

□

Osservazione 25. Essendo T operatore lineare limitato, è ben definito T^* che rispetta la proprietà:

$$\| T^* \| = \| T \| \geq \sup_{\lambda \in X} \| \varphi(\lambda) \| \ ,$$

compatibile con quanto provato nella sezione dei moltiplicatori di uno spazio di Hilbert di funzioni, mediante questo significato si può considerare T^* operatore di moltiplicazione in $H \otimes \mathcal{L}$.

Bibliografia

[1] Agler, J.; McCarthy, J.E. *Pick interpolation and Hilbert function spaces.* American Mathematical Society, 2002, pp. 15-24 e 43-44

[2] Reed, M.; Simon, B. *I:Functional Analysis, Volume 1.* Academic Press, 1981, pp. 49-52

[3] Aronszajn, N. *Theory of Reproducing Kernels.* American Mathematical Society, Vol.68, No.3 (May, 1950), pp. 337-404

[4] Carleson, L. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series* . Acta Mathematica, **116** (1) 1966, pp. 135-157

Ringraziamenti

Nel corso di questi anni di studio numerose persone mi sono state vicine e mi hanno sostenuto, stimolato, spronato, fatto crescere e sicuramente sto mancando di menzionare altrettanti benefici e aspetti positivi. Di persona non mancherò di ringraziarvi nuovamente, scrivendolo qui ne rimane traccia.

Ai miei genitori, e ai miei nonni, va il grazie più profondo e pieno d'affetto, responsabili e motori della mia crescita.

Ringrazio il relatore Arcozzi, per la disponibilità e per tutti i chiarimenti forniti nello sviluppo di questo elaborato. I suoi ricevimenti e le sue lezioni mi hanno fatto comprendere più profondamente argomenti che da solo non riuscivo a cogliere e hanno alimentato sempre di più il mio interesse.

A miei amici più stretti che sono anche stati miei coinquilini Giacomo, Giovanni, Fabio, Giosuè, Dere, Mansu, Paolo, agli amici che hanno frequentato via del Porto, Federica, Ylenia, Beatrice, Nicoula, Eddy, agli amici dai tempi delle superiori Sapo, Tasso, Debora, Steve, Nicola, Livia, Sara e a agli amici conosciuti durante questi anni accademici Simone, Gianni, Lele, Marco, Paolo, Lorenzo Lanzoni, Lorenzo Alvisi, Daniele, Domenico, Silvia, Valentina, Eleonora, Rosa, Andrea, Noemi, Michele, Giulia, Matteo e Filippo.