Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

UN APPROCCIO ETNOMATEMATICO ALLA DIDATTICA: i gruppi cristallografici dell'Alhambra

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Prof. ssa
ALESSIA CATTABRIGA

Correlatori:
Prof. sse
VERONICA ALBANESE
MANUELA FABBRI

Presentata da:
SIMONA RIGGI

Anno Accademico 2016/2017

Il compito degli uomini di cultura
è più che mai quello di seminare dei dubbi,
non già di raccogliere certezze.
Norberto Bobbio

Introduzione

Obiettivo di questa tesi è analizzare gli effetti dell'etnomatematica sull'apprendimento della matematica in contesto scolastico e sulla conseguente valenza formativa di tale approccio.
L'etnomatematica studia le pratiche matematiche, come contare, misurare e rappresentare la realtà, utilizzate dai diversi gruppi socio-culturali. La ricerca in questo campo infatti indaga su come queste pratiche si sviluppino nelle aggregazioni sociali, sulla presenza della matematica in diversi ambiti della vita quotidiana, come quello religioso, artistico e sociale, e su come questi studi possano contribuire in ambito didattico. Proporre esempi di etnomatematica ad una classe crea stimoli di riflessione sullo sviluppo della matematica in relazione alla cultura e alla storia, permette di formulare ipotesi sulla natura e sull'origine della matematica, fornisce l'occasione all'insegnante di proporre approfondimenti sulla storia della matematica e di creare connessioni interdisciplinari, per esempio con la storia dell'arte o con la filosofia. Stimola quindi il ragionamento e la formazione del pensiero critico: utilizzare un approccio etnomatematico soddisfa in questo modo alcuni degli obiettivi individuati nelle Indicazioni Nazionali per i Licei e nelle Linee Guida per gli istituti Tecnici e Professionali. Inoltre permette di stimolare e motivare gli studenti ad impegnarsi in una disciplina percepita spesso come difficile e distante dai propri interessi.
Una didattica della matematica basata sull'etnomatematica crea momenti di riflessione sul significato di cultura e di diversità, fondamentali in una società sempre più multietnica come quella in cui viviamo. Partendo dal presupposto che la cultura del gruppo socio-culturale condiziona i comportamenti del singolo e la sua visione della realtà, anche le pratiche matematiche sono influenzate dalle elaborazioni sociali e, poichè l'etnomatematica si occupa di studiare le interazioni tra matematica e i vari aspetti culturali, la sua trattazione in aula permette di affrontare un'analisi sul significato di cultura. Inoltre presentando come differenti popolazioni abbiano interpretazioni diverse della matematica si creano occasioni per gli studenti di confronto sul significato e sul valore della multiculturalità. Infatti ragionare sulle differenze

culturali permette di riflettere sulla diversità e sulle occasioni di crescita che questa porta.

Come esempio di approccio etnomatematico alla didattica, in questo lavoro ho analizzato i gruppi cristallografici presenti nei mosaici dell'Alhambra di Granada, in Spagna. Si tratta di un caso in cui i concetti matematici sono intrinsecamente presenti nell'arte. Tra le splendide decorazioni di questo monumento, frutto della cultura araba, sono stati realizzati tutti e diciassette i gruppi cristallografici piani. È interessante sottolineare come l'arte geometrica sia stata sviluppata dagli artisti arabi per decorare i monumenti seguendo il divieto presente nel Corano di rappresentare Allah e la natura.
L'analisi della matematica presente nelle decorazioni artistiche dell'Alhambra, mi ha permesso di progettare un percorso interdisciplinare e realizzare parte di esso in quattro classi di un Liceo scientifico. Nelle lezioni ho utilizzato un approccio etnomatematico: partendo dal contesto storico e artistico in cui è fiorita l'Alhambra sono arrivata ad introdurre, dopo una serie di attività di tipo laboratoriale, il concetto matematico di gruppo. Ho inoltre presentato l'etnomatematica, descrivendo alcuni studi in questo settore. Gli studenti hanno prestato attenzione e si sono mostrati interessati durante tutta la lezione.
Dall'attività è risultato evidente come il docente possa utilizzare l'approccio etnomatematico per presentare nuovi argomenti in classe, può infatti partire da un contesto storico-culturale per introdurre i concetti matematici. Oppure può farne uso per presentare approfondimenti su vari temi, così da fornire stimoli di riflessione sul significato di matematica, di cultura e di diversità.
L'approccio etnomatematico alla disciplina, insieme all'utilizzo di una metodologia che prevede il coinvolgimento attivo degli studenti attraverso lavori di gruppo orientati alla ricerca-scoperta, ha contribuito a rendere interessante ed efficace l'attività svolta.
Un ulteriore indagine che ho effettuato riguarda la concezione di matematica che hanno i ragazzi. Per realizzarla ho somministrato due questionari da compilare in aula, uno prima e uno dopo l'approfondimento.
Le concezioni sono percezioni e idee che la persona attribuisce alla materia e formano la base su cui si costruiscono le conoscenze. Nei questionari ho indagato sulla presenza di visioni statiche o dinamiche della matematica e su quella di concezioni platoniche o costruttiviste. La visione statica è principalmente legata all'identificazione della matematica con un insieme di regole e formule, mentre quella dinamica vede la matematica soprattutto come una scienza utile nella rappresentazione della realtà e nella soluzione di problemi quotidiani. La concezione platonica ritiene la matematica un sapere che esiste a prescindere dall'uomo, mentre secondo la concezione costruttivista la

matematica è frutto di una costruzione umana.
Dal questionario si evince che negli stessi studenti spesso convivono sia la visione statica che quella dinamica della matematica ed è difficile definire quale sia più forte. Invece non ho riscontrato una differenza numericamente significativa fra quanti condividono la visione platonica e quanti quella costruttivista. Inoltre dalla compilazione dei questionari risulta che la matematica è percepita sia come una disciplina strettamente scolastica, sia come una scienza che ha origine dalla cultura. Spesso gli studenti non hanno un'idea chiara sulla natura della matematica e per crearsi un pensiero a riguardo devono essere sollecitati al ragionamento dai docenti.

Nella mia tesi ho affrontato queste tematiche suddividendole in quattro capitoli.
Nel Capitolo 1 ho descritto l'etnomatematica e come il suo utilizzo possa influenzare il processo di insegnamento e di apprendimento. Inoltre ho trattato alcuni esempi di temi affrontati dalla ricerca in etnomatematica.
Nel Capitolo 2 dopo aver descritto il contesto storico-culturale in cui è stata costruita l'Alhambra, ho richiamato alcune nozioni su spazi euclidei ed isometrie e ne ho analizzato i reticoli e i sottogruppi discreti, per poi classificare i gruppi dei fregi e i gruppi cristallografici piani.
Nel Capitolo 3 ho proposto un progetto didattico in vista di un viaggio di istruzione all'Alhambra, del quale ho approfondito la lezione sugli argomenti matematici. Ho descritto inoltre l'esperienza che ho realizzato in aula sulla matematica presente nell'Alhambra.
Nel Capitolo 4 ho esaminato le concezioni degli studenti sulla matematica, in particolare riguardo alla sua natura e al rapporto tra matematica e cultura, attraverso l'analisi di due questionari che ho somministrato in aula. Dopo un'introduzione in cui ho riportato alcuni risultati di ricerca in questo campo, ho mostrato i risultati dei questionari per trarre le conclusioni sull'idea di matematica degli studenti.

Approfondimenti scolastici come quello che ho proposto durante questo lavoro di tesi forniscono utili stimoli di riflessione sui concetti di matematica e cultura. Utilizzare un approccio etnomatematico motiva gli studenti verso lo studio della disciplina, li spinge a riflettere e a formarsi un opinione sulla matematica, sulla cultura e sulla multiculturalità. Inoltre permette di creare collegamenti interdisciplinari e con la vita quotidiana. Per questi motivi credo che l'etnomatematica possa fornire contributi utili alla didattica della matematica, poichè abbina aspetti scientifici ad aspetti formativi culturali.

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Etnomatematica

In questo capitolo viene descritta l'etnomatematica e come il suo utilizzo possa influenzare il processo di insegnamento e di apprendimento. Inoltre si analizzano alcuni esempi di temi affrontati dalla ricerca in etnomatematica, presenti in [3] e in [4].

1.1 Etnomatematica e didattica

L'istruzione ha un ruolo fondamentale nella crescita dell'individuo, accompagna il giovane per molti anni, fornendo le conoscenze e i saperi necessari per creare uno spirito critico.
"I percorsi liceali forniscono allo studente gli strumenti culturali e metodologici per una comprensione approfondita della realtà, affinchè egli si ponga, con atteggiamento razionale, creativo, progettuale e critico, di fronte alle situazioni, ai fenomeni e ai problemi, ed acquisisca conoscenze, abilità e competenze coerenti con le capacità e le scelte personali e adeguate al proseguimento degli studi di ordine superiore, all'inserimento nella vita sociale e nel mondo del lavoro"[1].
Nelle Linee Guida per gli Istituti Tecnici si legge: *"La Scuola può aiutare gli allievi dell'Istruzione Tecnica non solo a prepararsi all'inserimento nel mondo del lavoro o al preseguimento degli studi, ma anche e soprattutto a dare un senso personale alla propria vita, per riuscire a vivere e ad assumere meglio la complessità del mondo"*.
In queste parole notiamo l'importanza per lo sviluppo della persona e per la sua integrazione nella società. Per questo le conoscenze devono essere tra-

[1] *Art. 2 comma 2 del "Regolamento recante revisione dell'assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei ai sensi dell'articolo 64, comma 4, del decreto legge 25 giugno 2008, n.112".*

smesse in modo da sviluppare un ragionamento creativo e capacità riflessive, come si legge nelle Indicazioni Nazionali per i Licei: *"Conoscere non è un processo meccanico, implica la scoperta di qualcosa"*.
È fondamentale stimolare la curiosità negli studenti, in modo che imparino a farsi delle domande e che abbiano gli strumenti per cercare le risposte in maniera autonoma.
Per raggiungere questo tra gli obiettivi specifici di apprendimento per l'area logico-argomentativa presenti nelle Indicazioni Nazionali per i licei troviamo: *"Aquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico, ad identificare i problemi e a individuare possibili soluzioni"*.
La matematica gioca un ruolo fondamentale nella formazione del ragionamento logico. Per svolgere gli esercizi bisogna osservare i dati iniziali, considerare gli strumenti acquisiti nel corso delle lezioni e decidere la strategia migliore per giungere alla soluzione. Questo metodo di azione torna utile non solo in ambito scolastico, ma in più situazioni della vita.
Inoltre sia le Linee Guida per gli Istituti Tecnici che le Indicazioni Nazionali per i Licei sottolineano l'importanza di connessioni interdisciplinari, il rapporto tra matematica e realtà e quello tra matematica e filosofia: *"La formazione di cittadini attivi e responsabili nell'ambito tecnico e scientifico richiede, anzitutto, una riflessione sul significato umano e sociale della scienza e della tecnica"*.
Utilizzare un approccio etnomatematico in classe è in linea con queste richieste. L'etnomatematica studia le pratiche matematiche di gruppi sociali e culturali particolari, per esempio società indigene, come popolazioni africane, nativoamericane o aborigene, o sottogruppi di società più complesse, per esempio gruppi di lavoratori, colletività locali o religiose, o persone di un'età determinata.
Il termine fu coniato nel 1985 dallo studioso brasiliano Ubiratan D'Ambrosio, che in [6] definisce l'etnomatematica come *"Le tecniche per capire e spiegare la realtà tenendo conto dell'ambiente sociale, culturale e naturale"*.
Per capire e spiegare la realtà, così come per risolvere problemi pratici quotidiani, è necessario sviluppare stili e tecniche. Ogni popolo ha le proprie, così como ad esempio ha i propri modi di interpretare gli avvenimenti storici. In particolare i modi di osservare, comparare, classificare, quantificare, misurare, contare e rappresentare variano nei diversi gruppi. Queste attività formano le pratiche matematiche: attività quotidiane o culturali che hanno alla base idee o procedure matematiche. Il modo di applicare e sviluppare i concetti matematici dipende dal modo di osservare la realtà.
Studiando la storia si nota un parallelismo tra potere politico ed economico e sviluppo di idee scientifiche e matematiche. La storia dell'uomo è fatta da incontri e confronti tra popolazioni, che hanno portato ad assimilazione e a

soppressione di sistemi di conoscenze. Il dinamismo culturale condiziona lo sviluppo dei saperi e dei modi di pensare.
La storia ci mostra come l'evoluzione della matematica accademica è legata a fattori culturali, linguistici, sociali, politici, economici, ideologici e religiosi.
L'etnomatematica ricerca processi e attività in cui compaiono le conoscenze matematiche e indaga sui motivi che hanno portato a sviluppi diversi in relazione al modello naturale, culturale e sociale. In molte culture i concetti matematici non rappresentano una struttura a sè stante, ma sono integrati in altri ambiti come quello religioso, politico, sociale.
Ubiratan D'Ambrosio in [18] scrive che l'etnomatematica è come un modo *"per valorizzare le culture locali, per superare l'imposizione di una cultura dominante"*.
Spiegare la matematica utilizzando un approccio etnomatematico rende la disciplina più accessibile a popolazioni diverse, un esempio è fornito dall'America Latina, dove convivono popolazioni di origine europea e africana e popolazioni native.
Inoltre lo studio delle pratiche tradizionali può affascinare studenti che non sono attratti dalla matematica formale. Un approccio etnomatematico può fare da ponte tra la cultura della popolazione e la conoscenza accademica.
Un metodo di lavoro nella ricerca etnomatematica è osservare le pratiche di un particolare gruppo culturale oppure la struttura che c'è dietro azioni o decorazioni ornamentali, per descriverle in maniera matematica. Un altro è considerare diverse pratiche, per esempio il contare, o diversi concetti, per esempio l'infinito, e vedere come vengono visti da diverse culture, facendo un'analisi comparativa.
La ricerca etnomatematica vuole rispondere a domande come:

- Da dove vengono le idee che portano allo sviluppo matematico?
- Come si crea la matematica?
- In che maniera la matematica accedemica è presente nelle pratiche matematiche dei distinti gruppi culturali?
- In che modo e a che fine utilizzare aspetti culturali nell'istruzione matematica?

La ricerca etnomatematica tocca diverse dimensioni:

- Cognitiva: prevede l'acquisizione, la raccolta e la diffusione delle conoscenze matematiche, viste spesso come fenomeni sociali, culturali e antropologici.

- Concettuale: si basa sulle rappresentazioni della realtà delle popolazioni.
- Educativa: considera valori umani come il rispetto, la tolleranza, la dignità, l'integrazione e la pace, nell'insegnamento della matematica.
- Epistemologica: porta a riflettere sulla natura della matematica e sull'astrazione, partendo dall'osservazione e dai metodi fino ad arrivare alle teorie matematiche.
- Storica: esamina come sono nate e si sviluppano le idee matematiche. Insegnando la matematica in un contesto storico, gli studenti sono in grado di capire l'evoluzione e i contributi delle varie popolazioni in un continuo sviluppo di concetti matematici.
- Politica: ha lo scopo di riconoscere e rispettare le radici socioculturali dei diversi gruppi, rafforzando il dialogo in questo dinamismo culturale.

Queste dimensioni mettono in evidenza i processi cognitivi, le capacità di apprendere e le attitudini da utilizzare in classe.
La correlazione tra ricerca etnomatematica e didattica della matematica è profonda: molti studiosi di etnomatematica hanno iniziato come professori e hanno notato collegamenti tra programmi scolastici e cultura. Per esempio Claudia Zaslavsky era una professoressa delle superiori di New York, che negli anni 60 fece un viaggio in Tanzania e lì notò che i giochi mankala e altre abitudini locali facevano uso della matematica. Raccolse le sue esperienze in [25], facendo diventare simboli tradizionali, lavori di artigianato, sculture con simmetrie circolari e bilaterali esempi interessanti da trattare in classe. Inoltre durante le proprie lezioni notò che gli studenti di origine africana mostrarono orgoglio per le proprie radici. Questo incoraggiò molti studiosi a perseverare con l'approccio etnomatematico.
Ron Eglash è un importante ricercatore etnomatematico, che ha basato parte del suo lavoro sulle popolazioni dell'Africa Occidentale, e ha sviluppato un programma per il computer chiamato *Culturally situated Design Tool*[2], che permette agli studenti di creare e modificare motivi decorativi tradizionali.
William Babbitt preparò un'esperienza in classe sull'uso dei simboli *Adinkra* del Ghana nell'istruzione di scuola superiore e notò che le classi che avevano utilizzato collegamenti culturali durante le spiegazioni avevano conseguito risultati migliori nelle valutazioni. R. Eglash e W. Babbitt trattarono e costruirono programmi su aspetti culturali delle popolazioni africane e del latinoamerica.

[2]Reperibili alla pagina web *https : //csdt.rpi.edu/*.

Uno dei primi studiosi che invece si occupò della matematica delle popolazioni native americane fu Luis Ortiz-Franco. Un esempio interessante è quello degli Atzechi e dei loro calendari circolari, in cui spiccano le enormi conoscenze astronomiche e algebriche.
Un altro filone di ricerca analizza come il linguaggio condiziona i concetti matematici. Per esempio nel sistema di localizzazione occidentale si utilizzano le coordinate cartesiane, mentre tra la popolazione Maori e sull'isola di Tahiti, nell'oceano Pacifico, si utilizza un altro sistema che dipende dal linguaggio, descritto in [5]. Questo è formato da due diversi origini (punti nello spazio corrsipondenti alla posizione di chi parla e di chi ascolta) a partire dalle quali si definiscono due angoli, aventi i vertici in tali punti, ciascuno dei quali è delimitato da una parte dalla semiretta che passa per le due origini, dall'altra dalla semiretta che passa da un'origine e dal punto che si vuole localizzare.
In [14] si descrive come la popolazione Paez, che vive nella foresta amazzonica in Colombia, utilizza parole diverse per contare oggetti con forme differenti: gli oggetti vengono prima classificati e suddivisi in sette categorie, dopo di che vengono contati utilizzando parole diverse a seconda della categoria in cui si trovano.
Queste ricerche vengono integrate con lo studio di come gli allievi capiscono, articolano, processano e utilizzano idee, concetti, procedure e pratiche matematiche per risolvere problemi legati alle loro attività quotidiane. Nella creazione di curriculum è importante considerare la cultura della popolazione e gli interessi dello studente. Prendendo consapevolezza del ruolo della matematica nella cultura è possibile migliorare la capacità dello studente di creare connessioni, sia interdisciplinari che con la realtà, e di capire a fondo la matematica. Come evidenziato in [19] insegnare la matematica considerando il suo valore culturale aiuta gli studenti a conoscere la realtà, la cultura, la società e l'ambiente.
Fare etnomatematica significa insegnare la matematica con riguardo verso i diversi ambienti culturali. Un approccio etnomatematico in classe può prevedere per esempio l'uso di strumenti indigeni per introdurre concetti matematici. Oppure cercare la connessione tra argomenti trattati e ambiente, società o cultura, in maniera creativa: un'idea è ricercare componenti matematiche in letteratura, arte, cinema e quotidiani. L'etnomatematica inoltre fornisce lenti con cui osservare la realtà, fornendo così una visione utile nella risoluzione dei problemi di tutti i giorni, come descritto in [9].
L'etnomatematica mette in luce il processo di matematizzazione della realtà operato da diversi gruppi culturali e permette quindi di vedere come le pratiche e le idee matematiche sono presenti in moltissime situazioni. Descrive lo sviluppo delle arti e delle tecniche di diverse culture e lingue, per spiegare,

capire e gestire lo sviluppo sociale, culturale, ambientale, politico ed economico.
Gli studenti vengono in questo modo preparati a lavorare in un mondo multiculturale, riconoscendo ad ogni popolazione i contributi dati allo sviluppo della conoscenza matematica.
Vengono soddisfatte così le richieste delle Linee Guide e delle Indicazioni Nazionali riguardo le connessioni interdisciplinari e il rapporto tra matematica e situazioni quotidiane.
Sviluppare le lezioni con questo approccio aiuta a capire la logica e la profondità di certe idee matematiche ed esaminare le metodologie e le rappresentazioni di altre popolazioni può essere di stimolo per riflettere sui propri concetti.
L'etnomatematica vuole rafforzare la creatività e il rispetto per la propria cultura e per le altre, in una visione in cui la multiculturalità viene vissuta come una ricchezza fondamentale per lo sviluppo dell'umanità.

1.2 Alcuni esempi di studi etnomatematici

1.2.1 Mappe e Modellizzazione

Le mappe possono variare molto, per esempio le mappe della metro e della superficie di una stessa città sono molto diverse, ma rappresentano entrambe una modelizzazione di uno stesso luogo. Per la loro creazione bisogna scegliere gli aspetti da rappresentare così da selezionare le variabili da mettere nel modello: si effettua un'astrazione matematica.
Un esempio estremamente interessante è fornito dalle mappe utilizate dagli abitanti delle isole Marshall, arcipelogo situato in Oceania e formato da 29 atolli corallini e 5 isole, che si estende per una lunghezza totale di 960 km.
I navigatori per orientarsi in mare aperto devono imparare a vedere e capire i movimenti dell'oceano. Utilizzano così mappe per la navigazione di vario tipo, *mattang, rebbelith, meddo*, che mostrano il rapporto tra i moti del mare e la terraferma.
Le mattang, vedi Figura 1.1, sono rappresentazioni di ampie zone aperte di oceano in base ai movimenti delle onde, che dipendono dal rapporto tra terra, vento e acqua. Osservandole si nota che hanno caratteristiche comuni, per esempio presentano una notevole simmetria e sono formate da diverse forme geometriche: quadrati, archi, segmenti...

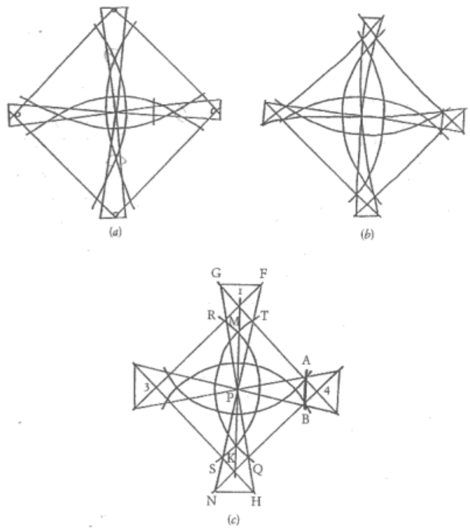


Figura 1.1: Esempi di mattang.

Le mattang presentano strutture idealizzate per spiegare i principi dell'interazione tra masse d'acqua e terra. Non servono per localizzare un'isola precisa: si tratta di un modello ideale. In particolare descrivono la rifrazione e la riflessione delle onde quando incontrano la terra.
Quando le onde procedono nella stessa direzione dei venti che le hanno generate hanno periodo e altezza simili tra loro. Le masse d'acqua si modificano quando incontrano ostacoli sottomarini o il fondale marino si alza, cioè quando l'acqua raggiunge circa i 200 m di profondità, mentre in pieno oceano la profondità è circa 4000-5000 m. Quando si avvicinano all'arcipelago le onde subiscono un cambio di direzione: il fronte d'onda avvicinandosi ad un'isola si modifica, a causa del cambio di altezza del fondale marino. Se per esempio nel mare aperto il vento soffia da est, si può capire che a ovest c'è un atollo osservando come l'acqua curva. Questo fenomeno si chiama rifrazione delle onde marine.
Quando le onde raggiungono la terra si verifica la riflessione dell'onda, si crea un'onda meno intensa che torna indietro. Per una costa ripida l'onda riflessa ha quasi la stessa energia dell'onda in arrivo.
In ogni mattang c'è un bastoncino che simboleggia da dove soffia il vento, nella terza immagine in Figura 1.1 è segnato dal segmento AB: serve come direzione che dà l'orientamento. In alcune dei segmenti su lati opposti simboleggiano le onde provenienti in direzioni opposte. Al centro c'è un atollo e le curve attorno simboleggiano la deviazione delle onde in seguito all'alzarsi del fondale marino. Dove onde opposte si incrociano si genera una serie di piccole onde. Altri atolli oltre quello centrale sono segnati con conchiglie.

Le mattang isolano e rendono astratte le onde, evidenziando la direzione rispetto al vento e alla posizione delle terre emerse. Sono modelli astratti perchè i sistemi di onde sono rappresentati in modo uniforme in direzioni perpendicolari e gli atolli sono collocati simmetricamente e simboleggiati con punti. Gli elementi essenziali, acqua, terra e vento, sono espressi in termini di punti, rette, curve e angoli.
Le meddo invece sono mappe di porzioni limitate, vedi Figura 1.2, mentre i rebbelith rappresentano l'intero arcipelago o parti estese di questo.

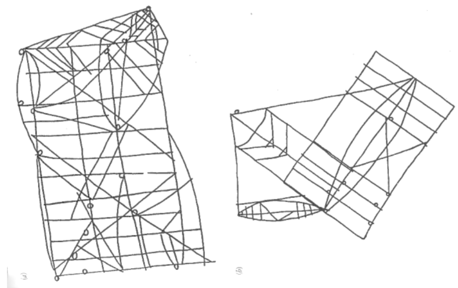


Figura 1.2: Esempi di meddo.

Sia nelle meddo e che nelle rebbelith viene rappesentata in maniera simbolica una situazione reale, cioè la posizione degli atolli non è ideale ma specifica dell'arcipelago, si considerano quindi come effettivamente variano le onde in relazione alla dimensione degli atolli e alle varie direzioni.
In queste mappe è stata concettualizzata una conoscenza acquisita in maniera empirica dai navigatori: si tratta di modelli usati per spiegare determinate situazioni. Ci permettono di visualizzare le relazioni tra le parti, tenendo allo stesso tempo conto del sistema complessivo.
Per la costruzione di questi modelli si utilizzano astrazione, generalizzazione e idealizzazione, attività di natura matematica. Nella scienza moderna c'è una forte correlazione tra mondo fisico e modellizzazione matematica. In questo caso i fenomeni oceanici vengono concettualizzati in un sistema coerente e strutturato: si crea un modello che semplifica ed evidenzia solo ciò che è essenziale per la navigazione.

1.2.2 Calendari e Algebra Modulare

I calendari sono affascinanti in quanto permettono di analizzare le differenze legate agli aspetti culturali e agli aspetti del mondo fisico che vengono osservati. Mostreremo due esempi di popolazioni che, nonostante la vicinanza geografica, hanno adottato metodi per misurare il tempo molto diversi.

Le Isole Kiriwina Sono isole al largo di Papua Nuova Guinea, abitate da 12000 persone. Fino alla metà del XX secolo la maggiore attività economica era l'agricoltura. L'organizzazione di questa attività è molto importante, per esempio l'anno rappresenta un intero ciclo di coltura. Il calendario è inoltre basato sulle fasi lunari: ci sono 29 o 30 giorni in ogni ciclo lunare, che chiamiamo per comodità mese, e 12 o 13 mesi in ogni anno. La maggior parte degli anni ha 12 mesi, ma ogni circa tre anni c'è un anno di 13. Questa correzione viene effettuata osservando il comportamento di un anellide marino. Infatti questo animale depone le uova esattamente una volta all'anno nel periodo della luna piena nel mare che circonda l'isola di Vakuta. Quando si osserva che questo particolare verme ha deposto le uova si stabilice la festa che segnala l'inizio della fase dei falò, periodo in cui gli spiriti dei defunti visitano i villaggi e considerato l'ultimo mese nel ciclo della coltivazione. Questa popolazione fornisce un esempio di cultura che scandisce il tempo in base all'osservazione di fenomeni naturali, la deposizione delle uova dell'anellide marino, e astronomici, il ciclo lunare.

L'Isola di Bali Si tratta di un'isola dell'arcipelogo indonesiano, abitata da circa due milioni di persone. L'indonesia è nazione dal 1949, ma la sua popolazione è formata da culture molto diverse. Fino al secolo scorso la maggiore attività economica era la coltivazione del riso e la popolazione viveva in villaggi circondati da muri di argilla. Il culto delle divinità ha un ruolo molto importante, per questo si presta molta attenzione al mantenimento dei templi, alle offerte e alla partecipazione a feste e cerimonie.
Nella cosmologia balinese la gente vive nel Mondo di Mezzo che è intermedio tra il Mondo Superiore degli dei e il Mondo Inferiore dei demoni. Entrambi questi due mondi controllano i cicli di crescita e decrescita, che danno come risultato i cicli e i processi vitali di tutte le cose viventi.
Il calendario giavanese-balinese comprende dieci cicli di lunghezze distinte, si parla di settimane da 10 giorni, da 9, da 8, così diminuendo fino al ciclo di un giorno. Ogni giorno ha dieci nomi, uno per ciclo. Per mettere in evidenza la posizione nei cicli diamo a ogni giorno dieci nomi tutti della forma: i_n, dove $n = 1, \dots, 10$ si riferisce alla lunghezza della settimana e $i = 1, ..., n$ è la posizione occupata dal giorno nel ciclo.
Ogni ciclo ha un suo significato nella mitologia balese, per esempio i giorni dell'ottavo ciclo rappresentano una traccia dell'identità del bambino in una incarnazione precedente, mentre quelli del quinto e del settimo determinano

le offerte da fare alle divinità.
La comunità per rappresentare la struttura dell'anno e segnalare giorni importanti utilizza i *tika.* Questo strumento, di cui è riportato un esempio in Figura 1.3, ha uno schema rettangolare di sette righe e trenta colonne, ogni colonna corrisponde a una settimana da sette giorni e le righe ai giorni del ciclo di 7 giorni: ad esempio ogni giorno della riga 3 sarà quindi 3_7. Il tika rappresenta tutto l'anno: ognuno dei 210 quadretti rappresenta un giorno e in esso possono essere rappresentati uno o più simboli sovrapposti utili a identificare i giorni degli altri cicli. Per esempio, per interpretare il significato dei simboli presenti in Figura 1.3 si utilizza la legenda riportata in Figura 1.4.

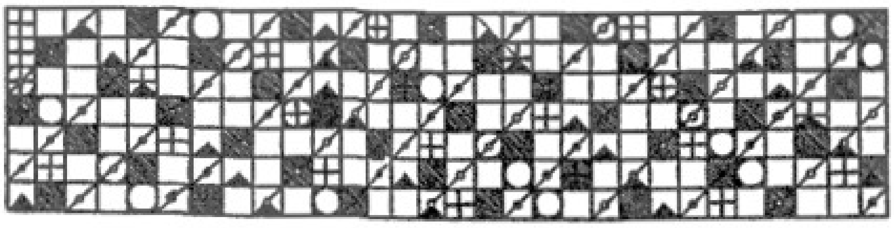


Figura 1.3: Esempio di tika.

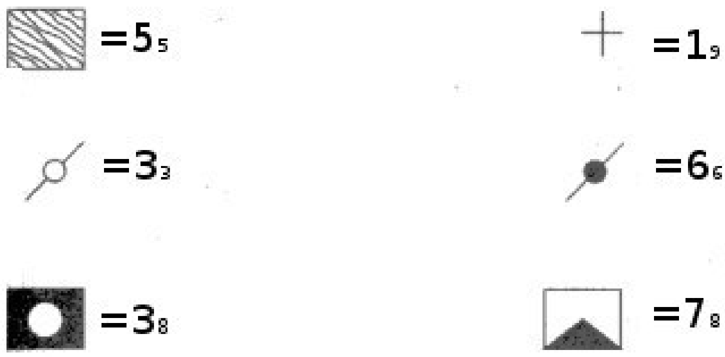


Figura 1.4: Legenda del tika in Figura 1.3.

Ogni simbolo presente nella legenda corrisponde ad un giorno specifico per un ciclo. Per esempio il primo simbolo in alto a sinistra rappresenta 5_5 il giorno 5 del ciclo da 5 giorni, o quello in basso a destra il giorno 7_8, cioè il giorno 7 del ciclo di 8 giorni.
Un anno ha 210 giorni. Dato che 210=1$\cdot$ 2 $\cdot$ 3 $\cdot$ 5 $\cdot$7, si avranno ogni anno esattamente 105 cicli da 2 giorni, 70 da 3, 42 da 5, 35 da 6, 30 da 7, 21 da

10. Poichè 4 e 8 non sono divisori di 210 vengono inseriti due ulteriori giorni chiamati 7_4 e due chiamati 7_8. Anche il ciclo di 9 giorni è discordante, si aggiungono quindi 3 giorni 1_9 che vengono posizionati all'inizio del tika. Con questi aggiustamenti tutti e dieci i cicli concludono insieme alla fine dei 210 giorni.

Mostriamo un esempio per far capire come si legge il tika: consideriamo il quadretto nella riga 7 e colonna 12. Il giorno corrispondente sarà l'ultimo nei cicli da sette giorni, poichè appartiene alla settima riga. Inoltre in esso sono segnati i simboli che indicano i giorni 5_5 e 6_6, quindi quel giorno sarà anche il quinto giorno della settimana da 5 giorni e il sesto nella settimana da 6 giorni. Per sapere a quale giorno corrisponde tale quadretto nelle settimane con un numero di giorni diverso da 7, 5 e 6, si possono osservare i simboli riportati nei quadretti successivi o precedenti. Ad esempio: nel quadretto successivo, cioè riga 1 colonna 13, sono indicati i simboli 3_8 e 1_9 così che il giorno considerato sarà 2_8 9_9.

Inoltre per determinare la posizione del giorno nei vari cicli, ci si può avvalere dell'algebra modulare. Se h divide k vale

$$i_k = (i \ mod \ h)_h.$$

Quindi valgono:

$$\begin{aligned} i_4 &= (i \ mod \ 2)_2; \\ i_6 &= (i \ mod \ 2)_2; \\ i_6 &= (i \ mod \ 3)_3; \\ i_8 &= (i \ mod \ 4)_4; \\ i_9 &= (i \ mod \ 3)_3; \\ i_{10} &= (i \ mod \ 5)_5; \\ i_{10} &= (i \ mod \ 2)_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nell'esempio considerato si ha quindi che:

$$\begin{aligned} 2_8 &= (2 \ mod \ 4)_4 = 2_4; \\ 2_4 &= (2 \ mod \ 2)_2 = 2_2; \\ 9_9 &= (9 \ mod \ 3)_3 = 3_3. \end{aligned}$$

Possiamo quindi trovare la posizione occupata dal giorno nella settimana con 2, 3 e 4 giorni.

Per trovare la posizione nella settimana di 10 giorni possiamo usare sia la posizione nella settimana da 5 giorni che nella settimana da 2 giorni:

$$\begin{cases} i_{10} = (5 \ mod \ 5)_5 \Longrightarrow i_{10} = 5 + 5k, \ \ con \ k = 0, 1 \Longrightarrow i_{10} = 5, 10 \\ i_{10} = (2 \ mod \ 2)_2 \Longrightarrow i_{10} = 2 + 2k, \ \ con \ k = 0, 1, 2, 3, 4 \Longrightarrow i_{10} = 2, 4, 6, 8, 10. \end{cases}$$

Quindi il giorno è 10_{10}. In conclusione il giorno sarà 1_1, 2_2, 3_3, 2_4, 5_5, 6_6, 7_7, 2_8, 9_9, 10_{10}.

In realtà non è necessario sapere che posto occupa un giorno in tutti i cicli per determinare quale giorno è all'interno dell'anno. Infatti dato che 5, 6, 7 sono primi tra loro e $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, sapendo la posizione occupata dal giorno nei cicli di lunghezza 5, 6 e 7, è possibile individuare in maniera univoca la sua classe di congruenza modulo 210, ossia la sua posizione nell'anno.
Tale risultato infatti è conseguenza immediata del seguente teorema, detto Teorema Cinese del resto.

Teorema 1.2.1 (Teorema Cinese del resto). *Siano $n_1, n_2, ..., n_m$ numeri naturali maggiori di uno e a due a due coprimi e $a_1, a_2, ..., a_m$ interi. Allora il sistema di congruenze*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (\ mod\ n_1) \\ x \equiv a_2 \ (\ mod\ n_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x \equiv a_m \ (\ mod\ n_m), \end{cases}$$

ha soluzioni. Date x_1 e x_2 due soluzioni allora $x_1 \equiv x_2 \pmod N$ dove $N = n_1 n_2 ... n_m$.

Ad esempio il giorno dell'esempio precedente è $(5_5, 6_6, 7_7)$ quindi per sapere che giorno è all'interno dell'anno bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \ (\ mod\ 5) \\ x \equiv 6 \ (\ mod\ 6) \\ x \equiv 7 \ (\ mod\ 7). \end{cases}$$

È facile vedere che 210 risolve il sistema e quindi il giorno considerato è l'ultimo giorno dell'anno.

Vediamo un altro esempio. Supponiamo di voler sapere quanti giorni mancano ad una festa sapendo che oggi è $(5_5,\ 6_6,\ 1_7)$ e il giorno della festa è $(5_5,\ 2_6,\ 4_7)$. Se indichiamo con X il numero dei giorni che mancano alla festa, vogliamo quindi risolvere il sistema di congruenze:

$$\begin{cases} X \equiv 5 - 5 \equiv 0 \ (\ mod\ 5) \\ X \equiv 2 - 6 \equiv 2 \ (\ mod\ 6) \\ X \equiv 4 - 1 \equiv 3 \ (\ mod\ 7). \end{cases}$$

Per trovare una soluzione possiamo usare i seguenti risultati.

Proposizione 1.2.2 (Formula risolutiva delle congruenze lineari). *Sia n un intero positivo e siano $a, b \in \mathbb{Z}$, dove $a \neq 0$. Sia inoltre $d = MDC(a, n)$. Allora la congruenza lineare*

$$ax \equiv b \;(\; mod\; n)$$

ammette soluzione se e solo se $d|b$. In tal caso tutte e sole le soluzioni della conguenza lineare sono tali che:

$$x \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{\varphi(\frac{n}{d})-1} \cdot \frac{b}{d} \quad \left(mod\; \frac{n}{d}\right),$$

dove $\varphi(n)$ è la funzione di Eulero, una funzione definita sui naturali che associa a ogni elemento n il numero di comprimi minori di n.

Usando i risultati sopra si può trovare una soluzione del sistema di congruenze a cui siamo interessati nel modo seguente. Siano n_1, n_2, n_3 numeri naturali maggiori di uno e a due a due coprimi e a_1, a_2, a_3 interi. Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \;(\; mod\; n_1) \\ x \equiv a_2 \;(\; mod\; n_2) \\ x \equiv a_3 \;(\; mod\; n_3), \end{cases}$$

sia $N = n_1 n_2 n_3$ e siano $N_1 = n_2 n_3,\; N_2 = n_1 n_3,\; N_3 = n_1 n_2$.
Siano poi y_i le soluzioni alle congruenze $N_i y_i \equiv 1 \;(\; mod\; n_i)$, per $i = 1, 2, 3$. Una soluzione del sistema è data da:

$$x \equiv a_1 N_1 y_1 + a_2 N_2 y_2 + a_3 N_3 y_3 \;(\; mod\; N).$$

Nel caso del nostro esempio abbiamo

$$n_1 = 5,\; n_2 = 6,\; n_3 = 7;$$
$$a_1 = 0,\; a_2 = 2,\; a_3 = 3.$$

Facendo i conti mediante le formule riportate sopra otteniamo $N_1 = 42$, $N_2 = 35$, $N_3 = 30$. Utilizzando la Proposizione 1.2.2 si ha

$$\begin{cases} 42 \cdot y_1 \equiv 1 \;(\; mod\; 5) \;\Rightarrow y_1 \equiv 42^{\varphi(5)-1} \;(\; mod\; 5) \;\Rightarrow y_1 = 42^{4-1} \;(\; mod\; 5) \\ 35 \cdot y_2 \equiv 1 \;(\; mod\; 6) \;\Rightarrow y_2 \equiv 35^{\varphi(6)-1} \;(\; mod\; 6) \;\Rightarrow y_2 = 35^{2-1} \;(\; mod\; 6) \\ 30 \cdot y_3 \equiv 1 \;(\; mod\; 7) \;\Rightarrow y_3 \equiv 30^{\varphi(7)-1} \;(\; mod\; 7) \;\Rightarrow y_3 = 30^{6-1} \;(\; mod\; 7), \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} y_1 \equiv 3 \ (\ mod\ 5) \\ y_2 \equiv 5 \ (\ mod\ 6) \\ y_3 \equiv 4 \ (\ mod\ 7). \end{cases}$$

Da cui

$$x \equiv 0 \cdot 42 \cdot 3 + 2 \cdot 35 \cdot 5 + 3 \cdot 30 \cdot 4 \ (\ mod\ 210) \equiv 80 \ (\ mod\ 210).$$

Mancano quindi 80 giorni alla festività cercata.

Questa è la risoluzione al problema utilizzando le nozioni dell'algebra modulare. I balinesi facendo uso dei tika possono evitare questo lunga procedura di calcolo. Infatti contando i numeri di righe e di colonne che distanziano i quadretti delle date interessate, dato $m=$ numero di righe, n = numero di colonne, il numero cercato sarà:

$$N = 7 \times n + m.$$

Il calendario giavese-balinese struttura il tempo in una maniera astratta, ma perfettamente coerente con la cultura, la mitologia e la filosofia della regione. L'uso di cicli infatti è una caratteristica che ricorre nella cultura del Bali, per esempio nella musica dei complessi gong, la cui struttura fondamentale è formata dalla sovrapposizione e intersezione di cicli.

1.2.3 Divinazione e Algebra di Boole

Quasi tutte le civiltà nel corso della loro storia hanno sviluppato forme di divinazione, ma le tecniche variano da cultura a cultura. Alcune dipendono dallo stato emotivo del veggente, mentre altre seguono percorsi strutturati e sistematici, come ad esempio il *sikidy*, il sistema di divinazione utilizzato da varie popolazioni del Madagascar.
In questo caso tra il processo casuale iniziale e la fase interpretativa si inseriscono un algoritmo algebrico e un processo di verifica. In Madagascar ci sono circa 20 gruppi etnici, che condividono la stessa lingua e in gran parte la stessa cultura, il sistema di divinazione presenta qualche piccola differenza, trascurabile se si osservano i concetti matematici alla base.
Le persone si rivolgono all'*ombiasy*, il divinatore, per i motivi più vari: ricerca di una sposa, identificazione di ladri, per sapere se la famiglia di origine di un bambino è adatta ad allevarlo o deve essere adottato da un'altra, etc.
L'ombiasy possiede una borsa con 120/200 semi di palma, che per iniziare la sessione risveglia, dopo di che prende una manciata di semi e li ammucchia a caso in 4 pile. Ogni pila viene ridotta togliendo due semi per volta fino

a che in ogni fila rimangano uno oppure due semi: effettua in questo modo un conteggio modulo 2. I resti diventano i termini di una prima colonna di una tabella. Il numero delle possibili colonne è $(2)^4 = 16$. Tale processo viene ripetuto altre 3 volte, si creano così altre tre colonne che vengono poste a sinistra della precedente. Si possono generare con questo procedimento $(16)^4 = 65536$ combinazioni. Mostriamo un esempio:

$$
\begin{array}{cccccc}
C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
\text{oo} & \text{oo} & \text{o} & \text{oo} & \leftarrow & C_5 \\
\text{oo} & \text{o} & \text{o} & \text{oo} & \leftarrow & C_6 \\
\text{oo} & \text{oo} & \text{oo} & \text{oo} & \leftarrow & C_7 \\
\text{o} & \text{oo} & \text{o} & \text{o} & \leftarrow & C_8
\end{array}
$$

Questo insieme di dati viene chiamato *madre del sikidy*. A questi dati verrà applicato un algoritmo algebrico che utilizzerà concetti dell'*algebra di Boole*. Per comodità di riferimento indicheremo le colonne con $C_i,\ i = 1, ..., 4$ e le righe con $C_i,\ i = 5, ..., 8$.

Algebra di Boole Si tratta di una struttura algebrica in cui le variabili assumono solo due valori, che denotiamo con o e oo, combinati tra loro con gli operatori logici AND, OR e NOT. La Tabella 1.1 descrive il comportamento degli operatori AND e OR.

AND(·)	OR(+)
o · o = o	o + o = o
oo · oo = oo	oo + oo = oo
o · oo = o	o + oo = oo
oo · o = o	oo + o = oo

Tabella 1.1: Operazioni AND e OR.

Si può verificare usando la tabella che sia AND che OR godono delle proprietà associativa e commutativa. L'operatore NOT rappresenta la complementazione: NOT(o)=oo e NOT(oo)=o.
Esistono altre operazioni, che risultano come combinazione degli operatori logici fondamentali, per esempio XOR, definito nella maniera seguente:

A XOR B = (A AND NOT(B)) OR (NOT(A) AND B).

Il comportamento di tale operatore è descritto dalla Tabella 1.2.

XOR($\oplus$)
o $\oplus$ o = o
oo $\oplus$ oo = o
oo $\oplus$ o = oo
o $\oplus$ oo = oo

Tabella 1.2: Operatore XOR.

Anche per l'operatore XOR valgono le proprietà commutativa e associativa. È l'operazione utilizzata dal *sikidy*. L'ombiasy combina gli elementi che occupano lo stesso posto nelle righe e nelle colonne della madre del sikidy con XOR e costruisce così le colonne C_i per $i = 9, \ldots, 16$, nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
C_9 &= C_8 \oplus C_7;\\
C_{10} &= C_6 \oplus C_5;\\
C_{11} &= C_4 \oplus C_3;\\
C_{12} &= C_2 \oplus C_1;\\
C_{13} &= C_9 \oplus C_{10};\\
C_{14} &= C_{11} \oplus C_{12};\\
C_{15} &= C_{13} \oplus C_{14};\\
C_{16} &= C_{15} \oplus C_1.
\end{aligned}
$$

I risultati trovati si distribuiscono sotto la madre del sikidy nel modo seguente:

C_4	C_3	C_2	C_1

C_9	C_{13}	C_{10}	C_{15}	C_{11}	C_{14}	C_{12}	C_{16}

La collocazione delle colonne non è causale: ognuna si trova in mezzo alle generatrici.
Con i valori dell'esempio precedente si ottiene la tabella seguente.

		C_4	C_3	C_2	C_1		
		oo	oo	o	oo		C_5
		oo	o	o	oo		C_6
		oo	oo	oo	oo		C_7
		o	oo	o	o		C_8
oo	oo	o	o	o	oo	oo	oo
oo	oo	o	oo	oo	o	oo	o
o	oo	oo	oo	o	o	o	o
oo	oo	o	o	oo	oo	o	o
C_9	C_{13}	C_{10}	C_{15}	C_{11}	C_{14}	C_{12}	C_{16}

Ad ogni colonna si associa un significato come mostrato nella Tabella 1.3.

C_1 : il cliente	C_5 : il fanciullo	C_9 : lo spirito	C_{13} : il divinatore
C_2 : i beni materiali	C_6 : le cattive intenzioni	C_{10} : il nutrimento	C_{14} : la gente
C_3 : un uomo che opera il male	C_7 : una donna	C_{11} : gli antenati	C_{15} : il creatore
C_4 : la terra	C_8 : il nemico	C_{12} : la via	C_{16} : la casa

Tabella 1.3: Significati del sikidy.

A questo punto l'ombiasy effettua delle procedure di controllo sulla struttura logica della tabella.

1. Almeno due delle 16 colonne devono coincidere. Ammettiamo, per assurdo, che siano tutte diverse. Le possibili stringhe ordinate di quattro elementi ognuno dei quali può assumere due valori sono 16 e si può calcolare che se fossero combinate tutte tra loro trammite XOR si otterrebbe $[o\ o\ o\ o]^t$.
   Combianando tutte le colonne ottenute dall'indovino, nell'ipotesi che fossero tutte diverse, si dovrebbe quindi ottenere o in tutte le posizioni. Ricordando come si sono trovate $C_i,\ i = 9, ..., 16$ abbiamo:

   $$C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5 \oplus C_6 \oplus C_7 \oplus C_8 \oplus C_9 \oplus C_{10} \oplus C_{11} \oplus C_{12} \oplus C_{13} \oplus C_{14} \oplus C_{15} \oplus C_{16}$$

   $$= 2(C_9 \oplus C_{10} \oplus C_{11} \oplus C_{12} \oplus C_{15}) \oplus C_{16} = C_{16} = C_{15} \oplus C_1 = [o\ o\ o\ o]^t.$$

   Ma per ottenere questo C_1 e C_{15} devono coincidere in tutte quattro le posizioni, infatti operando due valori con XOR si ottiene o quando i due valori sono uguali. Si ha quindi una contraddizione, poichè avevamo supposto che tutte le colonne fossero diverse tra loro.

2. Date le tre coppie C_2 e C_{11}, C_{13} e C_{16}, C_1 e C_{14}, le stringhe ottenute sommando tra loro gli elementi delle due coppie devono coincidere. Infatti:

$$C_{13} \oplus C_{16} = C_{13} \oplus (C_{15} \oplus C_1) = C_{13} \oplus (C_{13} \oplus C_{14}) \oplus C_1 = C_{14} \oplus C_1$$

$$C_1 \oplus C_{14} = C_1 \oplus (C_{12} \oplus C_{11}) = C_1 \oplus (C_1 \oplus C_2) \oplus C_{11} = C_2 \oplus C_{11}.$$

3. C_{15} deve contenere un numero pari di semi, si effettua quella che in logica si chiama controllo di parità, cioè se si sommano con XOR i valori nelle quattro posizioni di C_{15} si ottiene o. Si nota che:

$$\begin{aligned} C_{15} =& C_{13} \oplus C_{14} = (C_9 \oplus C_{10}) \oplus (C_{11} \oplus C_{12}) \Longrightarrow \\ C_{15} =& C_8 \oplus C_7 \oplus C_6 \oplus C_5 \oplus C_4 \oplus C_3 \oplus C_2 \oplus C_1. \end{aligned}$$

   Sommare i semi nelle posizioni di C_{15} è quivalente a sommare due volte ogni risultato nella madre di sikidy, si ottiene quindi o in tutte le posizioni.

Se i risultati delle tre verifiche confermano la correttezza dei procedimenti, si passa alla parte qualitativa di attribuzione del significato.
Questo metodo di divinazione mescola leggenda e tradizione a un procedimento con una logica di tipo matematico.

1.2.4 Sistemi sociali e Relazioni

Nei sistemi sociali le persone interagiscono tra loro creando rapporti, che possono essere sintetizzabili in sistemi matematici. Per descriverli, sia in matematica che nelle scienze sociali, bisogna specificare l'insieme di oggetti che si esaminano e definire le relazioni.

Popolazione basca di Sainte-Engrace Si tratta di una comunità di circa 370 abitanti situata sui Pirenei francesi. Gli abitanti hanno uno stile di vita basato sull'agricoltura e la pastorizia. La terra dove vivono è racchiusa da un cerchio di monti e la disposizione delle case forma un altro cerchio: la circolarità pervade tutte le loro interazioni, non ci sono primo e ultimo, ma ognuno ha dei vicini destri e sinistri. Per questa popolazione il concetto di uguaglianza ha una struttura dinamica e circolare. Per descriverlo in termini matematici richiamiamo il concetto di relazione di equivalenza.

Definizione 1.1. Una relazione $\sim$ sull'insieme A è un sottoinsieme di $A \times A$. Scriveremo $a_1 \sim a_2$ per indicare che $(a_1, a_2) \in \sim$.

Definizione 1.2. Una relazione $\backsim$ su A si dice di equivalenza se valgono le proprietà:

- riflessiva: $\forall x \in A \Longrightarrow x \backsim x$;
- simmetrica: $\forall x, y \in A$ si ha $x \backsim y \Longrightarrow y \backsim x$;
- transitiva: $\forall x, y, z \in A$ si ha $x \backsim y$ e $y \backsim z \Longrightarrow x. \backsim z$.

Definizione 1.3. Sia $\backsim$ una relazione di equivalenza su un insieme A e sia $x \in A$. Si chiama classe di equivalenza di x rispetto alla relazione $\backsim$ e si denota con $[x]$ il sottoinsieme di A definito da:

$$[x] = \{y \in A \mid x \backsim y\},$$

cioè l'insieme degli elementi di A che sono in relazione con x.

Quando una famiglia F_i necessita aiuto per seminare, battere il grano, tosare le pecore e macellare i maiali si è stabilito che il suo vicino a destra, F_{i+1}, e i due a sinistra, F_{i-1} e F_{i-2}, lo aiuteranno nei lavori. Si crea così una quaterna di lavoro $(F_{i-2}, F_{i-1}, F_i, F_{i+1})$ che sarà diversa da quella che si creerebbe se fosse F_{i+1} ad avere bisogno, cioè $(F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, F_{i+2})$. In ogni caso, alla fine tutte le famiglie daranno e riceveranno gli stessi aiuti.
Per controllare che questo è vero possiamo definire una relazione $\backsim_{Ar}$ sull'insieme delle famiglie $\mathbb{F}$ tale che due famiglie F e G sono in relazione tra loro se entrambe ricevono aiuti dallo stesso numero di famiglie. Definiamo poi una relazione $\backsim_{Ad}$ sempre sull'insieme delle famiglie, tale che due famiglie F e G sono in relazione tra loro se entrambe danno aiuti allo stesso numero di famiglie.
Per entrambe le relazioni valgono le tre proprietà della Definizione 1.3, inoltre si ha un'unica classe di equivalenza che comprende tutte le famiglie: ogni famiglia è in relazione con ogni altra. Si ha che quindi tutte le famiglie sono in un piano di uguaglianza nel dare e ricevere aiuti.

La cooperazione per la preparazione dei formaggi e la tosatura delle pecore è diversa, ma riflette sempre una relazione dello stesso tipo.
Il gregge formato da 500/600 pecore viene guidato sui monti a fine maggio e resta fino a fine settembre. In questi mesi si formano gruppi di dieci lavoratori per alternarsi nel lavoro, di questi sei si posizionano su sei diversi monti e ognuno ha un ruolo diverso. Ogni giorno c'è una rotazione: sale uno nuovo che si posiziona sulla prima montagna ogni pastore si sposta nel monte a lato e quello posizionato sull'ultimo scende. In questo modo ogni dieci giorni ogni

uomo ha lavorato 6 giorni e riposato 4 e si ritorna nella situazione iniziale. Alla fine di settembre sarannò passati 120 giorni, quindi dodici cicli completi in cui ogni uomo avrà avuto lo stesso numero di giorni di lavoro e di vacanza. Si può quindi definire una relazione di equivalenza $\backsim_L$ sull'insieme dei lavoratori, tale che due lavoratori M e N sono in relazione tra loro se hanno avuto lo stesso numero di giorni di lavoro e lo stesso numero di giorni di vacanza. Nuovamente ho una relazione di equivalenza e un'unica classe di equivalenza, ogni elemento dell'insieme è in relazione con ogni altro.
Nel lavoro alternano sei ruoli, elencati nella tabella seguente.

R_1:padrone di casa	R_4: guardiano delle pecore non da latte
R_2: capo pastore	R_5: guardiano degli agnelli
R_3: aiutante pastore	R_6: servo

Alla fine di ogni ciclo di dieci giorni ognuno avrà rivestito una volta ogni ruolo. Possiamo definire una relazione di equivalenza $\backsim_{R6}$ sull'insieme dei lavoratori, tale che due lavoratori M e L sono in relazione tra loro se entrambi hanno rivestito nel ciclo il ruolo 6. Analogamente possiamo creare altre cinque relazioni di equivalenza per gli altri ruoli. Si ha che ogni relazione è una relazione di equivalenza, dove si ha un'unica classe di equivalenza che comprende tutti gli elementi dell'insieme. Si verifica quindi nuovamente una situazione di uguaglianza.
Se le famiglie non sono esattamente 10, ma in numero pari, si eliminano alcuni ruoli, in modo da soddisfare sempre la relazione $2r - 2 = n$, dove $r =$ "*numero dei ruoli*" e $n =$ "*numero delle famiglie*". Se le famiglie sono dispari si considera $2r - 2 = n - 1$, in modo che alla fine si abbia un giorno in più di riposo.
I baschi di questa comunità, utilizzando un sistema di uguaglianza dinamico, non creano disparità di lavoro nè di potere.

Arcipelago di Tonga Per gli abitanti di Tonga, arcipelago in Polinesia, la gerarchia e il rango sono estremamente importanti. Il loro sistema sociale si può descrivere attraverso relazioni d'ordine.

Definizione 1.4. Una relazione $\preceq$ su un insieme A è detta d'ordine debole se valgono le proprietà:

- riflessiva: $\forall x \in A \Longrightarrow x \preceq x$;
- antisimmetrica: $\forall x, y \in A$ si ha $x \preceq y$ e $y \preceq x \Longrightarrow x = y$;
- transitiva: $\forall x, y, z \in A$ si ha $x \preceq y$ e $y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$.

Una relazione $\prec$ su un insieme A è detta d'ordine stretto se valgono le proprietà:

- $\forall x, y \in A$ *non sono mai vere contemporamente* $x \prec y$ *e* $y \prec x$;
- transitiva: $\forall x, y, z \in A$ si ha $x \prec y$ *e* $y \prec z \Longrightarrow x \prec z$.

Il regno di Tonga si trova nell'Oceano Pacifico meridionale ed è formato da 173 isole di cui una cinquantina disabitate, la superficie totale è di 700 km^2 e la popolazione supera di poco i 100 mila abitanti.
Per i togani il rango condiziona moltissimi aspetti della vita sociale: il linguaggio da utilizzare, gli atteggiamenti, i ruoli nelle cerimonie... C'è una gerarchia connessa con la parentela, basata sul confronto tra generazioni, età e genere. In particolare, se indichiamo con $\prec$ la relazione d'ordine stretto "avere rango minore di", si ha:

1. un padre "*Pa*" ha rango superiore dei figli "*Fi*", che hanno rango superiore della madre "Ma", cioè $[Ma \prec Fi \prec Pa]$;
2. nella stessa generazione le sorelle "*So*" hanno rango superiore dei fratelli "*Fr*", cioè $[Fr \prec So]$;
3. nella stessa generazione tra gente dello stesso sesso i più anziani hanno rango maggiore $[G \prec V]$.

Si possono creare rappresentazioni composte che sintetizzano più aspetti, per esempio:

$$FrG \prec \ FrV \prec \ SoG \prec \ SoV.$$

In generale si ha:

$$FrMa \prec Ma \prec FrG \prec \ FrV \prec \ SoG \prec \ SoV \prec Pa \prec SoPa.$$

I fratelli rispettano moltissimo le sorelle, che hanno responsabilità maggiori. Una donna riveste il ruolo più importante come sorella e zia, mentre ha una condizione più umile come moglie e madre.
Per un uomo i figli di un fratello sono alla pari dei propri, quindi è superiore a questi nipoti, ma riveste un rango inferiore rispetto ai figli delle sorelle. Nelle relazioni tra cugini si è superiori ai cugini in linea materna e inferiori a quelli in linea paterna.
I gruppi sociali sono stratificati nel modo seguente:

$$persone\ comuni\ \prec \textit{addetti alle cerimonie}\ \prec\ capi\ \prec\ re.$$

Se però il re ha una sorella e questa si sposa si ha che il marito e i figli della sorella sono di rango superiore al re. Per evitare questo le sorelle del re possono sposarsi solo con persone al di fuori dal sistema dei tonga, come gli abitanti delle isole Fiji e Samoa.

Come abbiamo visto in questi due esempi, le relazioni di equivalenza e di ordine possono essere utilizzate per descrivere ruoli sociali.

1.2.5 Figure sulla soglia e Linguaggi di Programmazione

Tamil Nadu è uno stato federato dell'India meridionale, in cui ogni giorno le donne disegnano sulla soglia di casa delle immagini: i *kolam*, di cui alcuni esempi sono presenti in Figura 1.5. Possono essere formati da una linea unica o da più linee e sono costituiti da sottounità fondamentali che si ripetono.

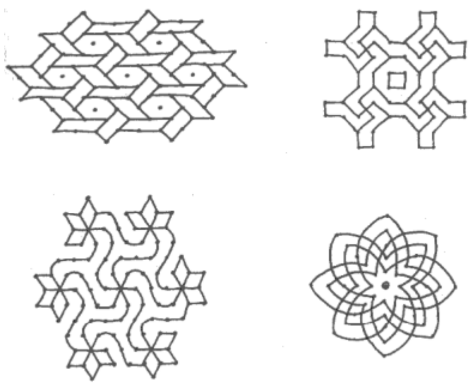


Figura 1.5: Esempi di kolam.

Kolam significa bellezza, grazia, forma, si tratta di un concetto collegato all'ordine come elemento fondamentale della bellezza. Ogni ragazza apprende a realizzare queste immagini dalla madre, per eseguire correttamente i kolam sono necessarie abilità, disciplina mentale e capacità di concentrazione. Servono a dare il benvenuto agli ospiti o a tenere lontane le disgrazie. Rappresentano oggetti, animali o piante.
Ci sono diverse tipologie di kolam. Per realizzare una di queste si dispone in principio una griglia di punti, chiamati *pulli*. Alcuni kolam sono costruiti tracciando le linee che collegano i pulli, altri invece linee che vi girano intorno. Presentano delle simmetrie, possono essere riflessioni rispetto all' asse verticale, all'asse orizzontale, o centri di rotazioni di 45°, 60°, 90° o 180°. Nella stessa immagine possono presentarsi una o più simmetrie.

Tra le sfide degli informatici c'è stata quella di riprodurre i kolam attraverso linguaggi di immagini, cioè linguaggi informatici specifici per la riproduzione di immagini: da una stringa di simboli si realizza un'immagine.
Il primo che stabilì un collegamento tra kolam e informatica fu Gift Siromoney, studioso di matematica e statistica del Madras Christian Collage in Tamil Nadu, come si può leggere in [23]. Dopo aver seguito un corso di informatica si dedicò alle interazioni tra questa disciplina e la cultura. Con la moglie si occupò dello studio di linguaggi di immagini. Questi linguaggi sono formati da insiemi di immagini elementari e da regole specifiche per combinare le varie unità, attravarso la costruzione di algoritmi. L'uso di questi linguaggi evidenziò la struttura interna dei kolam.
Un contributo importante in questo campo fu dato dal biologo ungherese Aristid Lindenmayer, che sviluppò un particolare linguaggio di immagini chiamato *L-system*.
In generale per ogni linguaggio di immagini esistono:

- un *alfabeto*:= un insieme di simboli;
- un *assioma*:= una stringa iniziale;
- delle *regole di produzione*:= un insieme di regole per creare nuove stringhe di simboli a partire dai precedenti;
- gli *esiti*:= le stringhe che derivano dall'applicazione delle regole di produzione.

Se ogni simbolo viene trattato separatamente e indipendentemente dai simboli presenti nella stessa stringa il linguaggio è del tipo context-free. Se ogni simbolo ha un'unica regola di produzione il linguaggio si dice deterministico.
Un esempio di linguaggio di immagini è quello che permette di far muovere una tartaruga sullo schermo, associando ad ogni lettera dell'alfabeto un comando. Stabilita una direzione iniziale, una lunghezza ℓ e un angolo α, si hanno i comandi:

- F: avanzare di un passo di lunghezza ℓ tracciando una linea;
- f: avanzare di un passo di lunghezza ℓ senza tracciare una linea;
- $+$: girare in senso antiorario di un angolo α;
- $-$: girare in senso orario di un angolo α.

Per esempio se $\ell = 1$ cm e $\alpha = 90°$ la stringa F+F+F+F rappresenterà un quadrato di lato 1cm. In generale, quindi, ad ogni stringa viene associata

un'immagine.
Chiaramente questo linguaggio di immagini produce solo immagini angolate, cioè poligoni. Al contrario, i kolam presentano tratti arrotondati, si possono quindi definire dei linguaggi in cui ci sono lettere che corrispondono a tratti curvilinei, come rappresentato in Figura 1.6. Questo è stato fatto dal gruppo di ricercatori del Madras Christian College, i quali hanno utilizzato il serpente, animale importante per la mitologia tamil, al posto della tartaruga.

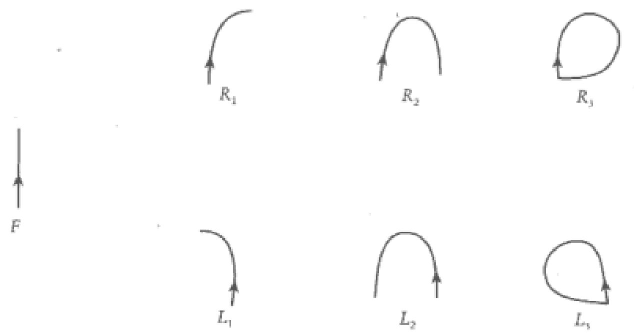


Figura 1.6: Movimenti per creare i kolam.

Questi linguaggi mettono in evidenza il procedimento di realizzazione di certi kolam. Per esempio l'immagine in Figura 1.7 può essere realizzata con un'unica linea, ma nel procedimento per costruirla con il linguaggio di immagini se ne utilizzano quattro identiche ognuna ruotata di 90° in senso orario rispetto alla precedente, come mostrato.

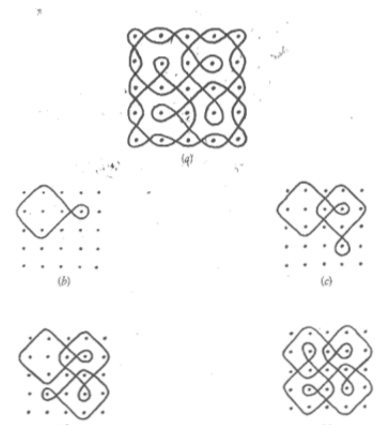


Figura 1.7: Esempio di costruzione di kolam attraverso un linguaggio di immagini.

La simmetria di rotazione è una caratteristica fondamentale del procedimento di costruzione. I linguaggi sviluppati non ripetono necessariamente le procedure delle donne di Tamil Nadu, però sfruttano ed evidenziano le simmetrie presenti nei kolam.
Per le cavigliere di Krishna, il kolam rappresentato in Figura 1.8, si utilizzano:

- l'*alfabeto*: F, R_1, R_3;
- l'*assioma*: $R_1FR_3FR_3FR_3FR_1$;
- le *regole di produzione*:
  1. $F \to F$;
  2. $R_1 \to R_1FR_3FR_1$;
  3. $R_3 \to R_1FR_3FR_3FR_3FR_1$;

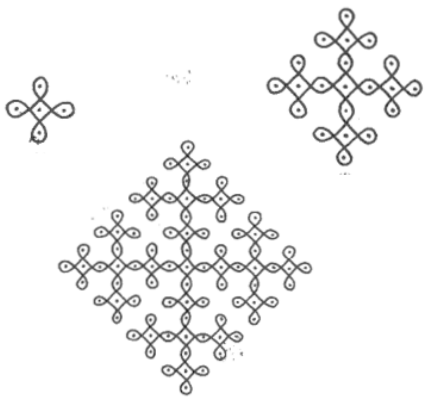


Figura 1.8: Cavigliere di Krishna.

Un altro esempio interessante di kolam è il serpente, rappresentato in Figura 1.9. Si può costruire scegliendo un angolo α =45° e utilizzando:

- l'*alfabeto*: F, +,–, A, dove A è la sequenza F+F+F–F–F+F+F+F;
- l'*assioma*: A–F–A–F;
- le *regole di produzione*: $A \to A + F + A - -F - -A + F + A$.

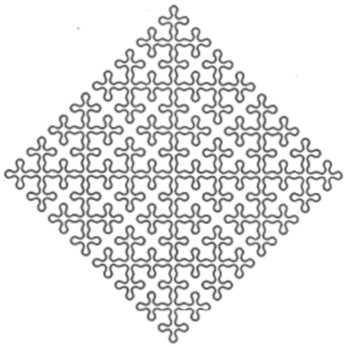


Figura 1.9: Il serpente.

Questo studio fornisce un esempio di come l'osservazione della cultura possa fornire occasioni di sviluppo informatico.

Capitolo 2

L'Alhambra e i Gruppi Cristallografici Piani

L'arte araba ha sviluppato mosaici e decorazioni di una bellezza straordinaria. Un esempio significativo è rappresentato dalla fortezza dell'Alhambra, a Granada (Spagna), monumento dichiarato Patrimonio dell'umanità nel 1984: *"Il bene incorpora apici artisitici unici: è una testimonianza eccezionale della Spagna mussulmana del secolo XIV"*.
Il tipo di decorazioni utilizzate all'interno dell'Alhambra, e più in generale nell'arte araba, e la loro ricchezza di strutture geometriche, è frutto del valore attribuito dagli arabi alla ricerca matematica e artistica, come sottolineato in [10]. La matematica infatti era vista come un fatto culturale: era concepita come strumento per l'astronomia, l'astrologia, l'ottica, la medicina e per attività quotidiane come pregare, navigare, dividere un'eredità...
La geometria delle decorazioni dell'architettura islamica è espressione delle credenze religiose: dato il divieto di raffigurare Allah e la natura si ricorre all'arte astratta, che fino ai giorni nostri affascina pittori, scrittori e matematici. Si indagano quindi le diverse rappresentazioni ottenibili combinando figure geometriche.
Nella cultura araba l'organizazzione socio-politica e religiosa condizionano molto la ricerca artistica e matematica. Perciò, lo studio della geometria utilizzata nelle decorazioni dell'Alhambra ben si presta ad essere affrontato in un'ottica etnomatematica.

In questo capitolo, dopo aver brevemente descritto l'evoluzione storica dell'Alhambra e della matematica araba, forniremo le nozioni di geometria euclidea necessarie per enunciare la classificazione dei gruppi dei fregi e dei gruppi cristallografici (tutti presenti nelle decorazioni dell'Alhambra). Per approfondimenti si veda [1], [2], [11], [15], [17], [24].

2.1 L'Alhambra e la matematica araba

Nel VI secolo l'egemonia culturale passò al mondo arabo. Nel 622 Maometto, nato nel 570, si recò da La Mecca a Medina, nel viaggio conosciuto come Egira, che segnò l'inizio dell'Islam. Maometto, già capo religioso, divenne anche capo militare e inizio l'espansione dello stato islamico, che si estese rapidamente in territori abitati sia da ebrei che da cristiani, ai quali fu offerta protezione e libertà di culto.
Attorno al 750 l'espansione si arrestò e gli arabi iniziarono ad assorbire i saperi delle culture dominate, siriani, greci, egizi, persiani, turchi... Molti testi di matematica e astronomia vennero tradotti dall'India e dalla Grecia, tra cui l'*Almagesto* di Tolomeo e gli *Elementi* di Euclide.
Attorno all'800 venne fondata a Bagdad la *Casa del sapere*, centro intellettuale cosmopolita, tra i membri c'era il matematico e astronomo al-Khuwarizmi, che scrisse diverse opere, portò in occidente il sistema numerico indiano e dal nome di una sua opera di aritmetica fu coniato il termine algebra, come si legge in [7]. In un testo sviluppa i metodi risolutivi di equazioni di secondo grado, a coefficienti interi positivi. Probabilmente al-Khuwarizmi trae ispirazione dall'antica matematica babilonese e dalla matematica indiana medievale. Si nota l'influenza ellenica nell'esigenza di fornire una rappresentazione geometrica delle procedure di risoluzione delle equazioni.
Gli indiani ragionavano per analogia, erano molto intuitivi, gli arabi affrontavano la matematica in maniera più strutturata. Sembra inoltre che la complessità delle leggi arabe sull'eredità stimolò lo studio dell'algebra.
Gli arabi assimilarono la trigonometria indiana, basata sul calcolo del seno e in seguito sulla tangente, e sull'utilizzo di formule di duplicazione e bisezione. Inoltre dettero contributi importanti alla fisica e all'astronomia, basti guardare gli studi sul peso specifico e sull'ottica, dove trattarono riflessione e rifrazione.
Arrivarono alla risoluzione di tutte equazioni di terzo grado attraverso l'intersezione di coniche. Si può presumere che attraverso la via della seta che collegava Cina e Persia, si sia trasmesso uno schema tipo il triangolo di Pascal, utilizzato in Cina.
Erano inoltre affascinati dal quinto postulato di Euclide, che volevano dimostrare.
Schematizzando la matematica araba si può dividere in:

1. aritmetica, di origine indiana, basata sul principio posizionale;

2. algebra, derivata da fonti greche, indiane e babilonesi, che però assume una forma nuova e sistematica;

3. trigonometria, con origine da principi greci ma con un'impostazione e un utilizzo di funzioni di provenienza indiana;

4. geometria, di origine greca, ma con un apporto di generalizzazioni.

Attorno al 1100 iniziò il declino della scienza araba, ci furono alcune personalità che continuarono gli studi sull'astronomia e sulla trigonometria, dando diversi contributi e introducendo le frazioni decimali (fino a quel momento si faceva uso delle frazioni sessagesimali), ma gli influssi che ebbero in Europa furono limitati.
Nel 1436 l'impero mussulmano collassò e i poli culturali si spostarono in Europa, che contemporaneamente attraversava un periodo di rinascita e sviluppo culturale.

L'Alhambra nasce nel periodo di massimo splendore dell'impero arabo come fortezza militare sulla collina Sabika, uno dei punti più elevati di Granada, città del sud della Spagna. Le prime fonti che parlano di basi miliatari nella zona risalgono al 899 d.C. In quel periodo quasi tutta la penisola iberica faceva parte del Califfato di Cordoba governato dai mori, che entrarono nella penisola nel 711 instaurando prima il regno al-Andalus e poi il Califfato. Divenne residenza reale dal 1238 con Muhammad ibn Nasr, primo sovrano del regno Nazarì di Granada. I mori governano fino alla conquista dei re cattolici Fernando II di Aragona e Isabella I di Castilla. Il 2 gennaio del 1492 il re Boabdil fu costretto a lasciare la città attraversando il sentiero che oggi prende il nome di sospiro del moro.
Dopo la conquista cattolica della penisola iberica e l'espulsione di mori ed ebrei, purtroppo molto della cultura araba andò perso anche a causa della distruzione di migliaia di volumi, come i 400000 testi presenti nella biblioteca al-Hakam a Cordoba o i libri bruciati nel rogo nella piazza Bibrabla di Granada ordinata dal cardinale Cisneros. Infine con l'espulsione dei mori e degli ebrei la cultura araba scomparve dalla penisola iberica.
Nelle decorazioni dell'Alhambra, frutto della cultura Nazarì, la geometria è utilizzata per suscitare armonia. La sua stessa struttura è basata sulle proporzioni pitagoriche e auree, ad esempio per disegnare la facciata del palazzo dei Comares si fa uso dei rettangoli aurei e dei reciproci interni. Per realizzare i mosaici e i fregi dell'Alhambra si utilizza il metodo di lavoro indiano e arabo: ricerca di nuove idee e pratiche attraverso l'esercizio libero. In questo modo, come vedremo, sono stati rappresentati tutti e diciassette i gruppi cristallografici piani.

2.2 Spazio Euclideo e Isometrie

Diamo per acquisite le nozioni di spazio vettoriale, prodotto scalare e trasformazione lineare, si veda [22]. La nozione di gruppo, data in questo capitolo per assodata, sarà richiamata nel Capitolo 3 (si veda la Definizione 3.4).

Definizione 2.1. Uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$ è una terna

$$(V_a, V, f_a)$$

dove V_a è un insieme, V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f_a : V_a \times V_a \to V$ è un'applicazione t.c. valgano le proprietà:

1. $\forall P \in V_a$ e $\forall v \in V$ $\exists!$ $Q \in V_a$ t. c. $f_a(P, Q) = v$;
2. $\forall$ $P, Q, S \in V_a$ si ha: $f_a(P, Q) + f_a(Q, S) = f_a(P, S)$.

Per semplicità si indica lo spazio affine con V_a, lasciando sottointesa l'applicazione f_a e lo spazio vettoriale V.
Dati P, $Q \in V_a$ l'immagine $f_a(P, Q)$ è chiamata vettore applicato da P in Q ed è indicata con il simbolo $\overrightarrow{PQ}$, inoltre scriveremo $Q = P + v$.

Definizione 2.2. Sia V_a uno spazio affine, un sottospazio affine di V_a è un sottoinsieme S_a tali che esistono un punto $P \in S_a$ e un sottospazio vettoriale W di V tali che:

$$S_a = P + W = \{P + w \mid w \in W\}.$$

Il sottospazio W di V è chiamato giacitura di S_a. Due sottospazi affini sono detti paralleli se hanno la stessa giacitura.
La dimensione di S_a è definita come la dimensione di W.

Definizione 2.3. Siano V_a, V'_a spazi affini, con $\mathbb{K}$-spazi vettoriali associati V, V', un isomorfismo di V_a su V'_a è un'applicazione biunivoca $g : V_a \to V'_a$ tale che esista un isomorfismo degli spazi vettoriali $\varphi : V \to V'$ che soddisfi la condizione

$$\overrightarrow{g(P)g(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall\ P, Q \in V_a.$$

Tale φ si chiama l' isomorfismo associato a f.
Un'affinità di V_a è un isomorfismo di V_a su se stesso.

È facile verificare il seguente risultato.

Proposizione 2.2.1. *L'insieme di tutte le affinità di V_a con l'operazione di composizione è un gruppo di trasformazioni: il* gruppo affine di V_a, *denotato con Aff(V_a).*
I sottogruppi di Aff(V_a) si chiamano gruppi di trasformazioni affini di V_a.

Definizione 2.4. Sia V_a uno spazio affine su V, di dimensione n, un riferimento affine R_a su V_a è la coppia :

$$R_a = (O, B),$$

dove O è un punto di V_a, detto origine del riferimento, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base ordinata di V.
Dato $P \in V_a$, diremo che P ha coordinate affini $(x_1, \cdots, x_n)$ rispetto ad R_a e scriveremo

$$P \equiv_{R_a} (x_1, \ldots, x_n),$$

se $\overrightarrow{OP} = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$.

Teorema 2.2.2. *Sia V_a uno spazio affine di dimensione n e sia $R = (O, B)$ un riferimento affine su V_a. Ogni $f \in$ Aff(V_a), con automorfismo associato φ, si esprime nella forma*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

dove $P \equiv_R (x_1, \cdots, x_n)$, $f(P) \equiv_R (y_1, \cdots, y_n)$, $f(O) \equiv_R (c_1, \cdots, c_n)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ è la matrice associata a φ rispetto alla base B e $\det A \neq 0$.
Viceversa, ogni trasformazione f: $V_a \to V_a$ di questa forma è un'affinità.

Definizione 2.5. Sia $v \in V$, la traslazione $t_v : V_a \to V_a$ definita da v è l'affinità che associa ad ogni $P \in V_a$ il punto $t_v(P)$ tale che $\overrightarrow{Pt_v(P)} = v$, scriveremo

$$t_v(P) = P + v.$$

Le traslazioni di V_a costituiscono un gruppo di trasformazioni affini, chiamato gruppo delle traslazioni di V_a e indicato con T_V. Tale gruppo è isomorfo al gruppo $(V, +)$ mediante l'applicazione

$$\begin{aligned} \Psi : V &\to T_V \\ v &\mapsto t_v \end{aligned}$$

Definizione 2.6. Uno spazio affine è detto euclideo e denotato con $\mathbb{E}$, se sullo spazio vettoriale associato V è stato fissato un prodotto scalare. Un piano euclideo è uno spazio euclideo di dimensione 2.
Indicheremo con $\langle , \rangle$ il prodotto scalare e con $\|\|$ la norma associata.

Definizione 2.7. Siano P e Q punti dello spazio euclideo $\mathbb{E}$. La distanza tra questi due punti è:

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Proposizione 2.2.3. *La distanza gode delle proprietà:*

1. $d(P, Q) \geq 0$, *per ogni* $P, Q \in \mathbb{E}$ *e* $d(P, Q) = 0$ *se e solo se* $P{=}Q$;
2. $d(P, Q) = d(Q, P), \quad \forall\ P, Q \in \mathbb{E}$;
3. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R), \quad \forall\ P, Q, R \in \mathbb{E}$ *e vale l'uguaglianza se e solo se P, Q, R sono allineati, cioè* $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ *sono proporzionali.*

Definizione 2.8. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $u : V \to V$ un endomorfismo su V. Si dice che u è unitario se

$$\langle u(v), u(w) \rangle = \langle u, w \rangle, \ \forall\ v, w \in V.$$

.

È facile provare che un operatore unitario è un isomorfismo.

Definizione 2.9. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo su V. Un'affinità $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ si dice isometria di $\mathbb{E}$ se l'endomorfismo associato $\varphi : V \to V$ è un operatore unitario.

Le isometrie di $\mathbb{E}$ costituiscono un gruppo di trasformazioni affini di $\mathbb{E}$, indicato con $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ e chiamato gruppo delle isometrie di $\mathbb{E}$.

Una caratterizzazione geometrica delle isometrie è la seguente.

Teorema 2.2.4. *Sia* $\mathbb{E}$ *uno spazio euclideo. Un'applicazione di insiemi* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *è un'isometria se e solo se*

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \quad \forall\ P, Q \in \mathbb{E}. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Se f è un'isometria, con isomorfismo associato $\varphi : V \to V$, allora

$$d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q),$$

perchè φ è un operatore unitario e quindi conserva la norma.
Supponiamo viceversa che la condizione (2.2) sia soddisfatta. Fissiamo arbitrariamente un punto $O \in \mathbb{E}$ e definiamo un'applicazione $\varphi : V \to V$ ponendo

$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}.$$

Poichè ogni vettore $v \in V$ è della forma $v = \overrightarrow{OP}$, l'applicazione φ è ben definita e tale che $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica il vettore nullo di V.
Inoltre, se $v = \overrightarrow{OP},\ w = \overrightarrow{OQ}$, si ha

$$\begin{aligned}\|\varphi(v) - \varphi(w)\| = \|\varphi(\overrightarrow{OP}) - \varphi(\overrightarrow{OQ})\| = \|\overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(Q)}\| = \\ = \|\overrightarrow{f(Q)f(P)}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = \|v - w\|.\end{aligned}$$

Poichè $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| = \|v - w\|,\ \forall\ v, w \in V$ si può dimostrare che φ è un operatore unitario.
Inoltre, poichè per ogni $P, Q \in \mathbb{E}$ si ha

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{PQ}) &= \varphi(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \varphi(\overrightarrow{OQ}) - \varphi(\overrightarrow{OP}) \\ &= \overrightarrow{f(O)f(Q)} - \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)},\end{aligned}$$

f è un'affinità con isomorfismo associato φ, pertanto è un'isometria. □

Osservazione 1. Sia $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ la matrice che compare in Formula (2.1) è ortogonale e quindi il suo determinante è uguale a ± 1.

Definizione 2.10. Un'isometria f, con automorfismo associato φ, si dice diretta se il determinante di una qualsiasi matrice associata a φ è uguale a 1, e inversa se è uguale a -1. Il sottogruppo delle isometrie dirette si denota con $\text{Isom}^+(\mathbb{E})$.

Le traslazioni sono particolari isometrie dirette, quindi T_V è un gruppo di isometrie dirette di $\mathbb{E}$.
Sia $O \in \mathbb{E}$ e consideriamo il sottoinsieme $\text{Isom}(\mathbb{E})_O$ di $\text{Isom}(\mathbb{E})$ costituito dalle isometrie di $\mathbb{E}$ che lasciano fisso O, è facile dimostrare che si tratta di un sottogruppo. Le isometrie dirette appartenenti a $\text{Isom}(\mathbb{E})_O$ si dicono rotazioni di centro O, e costituiscono il sottogruppo $\mathit{Isom}^+(\mathbb{E})_O := \mathit{Isom}(\mathbb{E})_O \bigcap \mathit{Isom}^+(\mathbb{E})$.

Definizione 2.11. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, $a \in V, a \neq 0$, la riflessione definita da a è l'automorfismo seguente:

$$\sigma_a : V \to V$$
$$u \to u - 2\Big(\frac{\langle a, u\rangle}{\langle a, a\rangle}\Big)a.$$

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione finita e sia H un iperpiano affine. La riflessione o simmetria rispetto a H è l'affinità r_H tale che:

1. $r_H(P) = P, \quad \forall \quad P \in H$;

2. l'automorfismo associato è σ_a con a ortogonale alla giacitura di H.

Si può dimostrare che tale riflessione esiste ed è unica. Il punto $r_H(P)$ è detto simmetrico di P rispetto ad H.

Per trovare esempi di gruppi di isometrie di uno spazio euclideo si possono studiare le isometrie che mandano una figura geometrica in se stessa.

Definizione 2.12. Una figura geometrica F di $\mathbb{E}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{E}$. Un'applicazione $f \in \text{Isom}(\mathbb{E})$ tale che f(F)=F si dice simmetria di F.
L'insieme delle simmetrie di una figura F costituiscono un sottogruppo di $\text{Isom}(\mathbb{E})$ indicato con $\text{Isom}(\mathbb{E})_F$, chiamato gruppo delle simmetrie di F.

Osservazione 2. Le rotazioni di centro O sono le simmetrie dirette di O. La riflessione rispetto ad un iperpiano H, lascia fisso l'iperpiano H.

2.3 Isometrie del piano

In questa sezione studiamo le isometrie nel caso di un piano euclideo. Il modello di piano euclideo che utilizzeremo è dato da $\mathbb{R}^2$ con la seguente struttura affine:

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)),$$

e con la distanza indotta dal prodotto scalare standard. Indicheremo tale modello con $\mathbb{E}$.
Ogni piano euclideo è isomorfo a tale modello mediante il passaggio a coordinate rispetto ad un riferimento euclideo, ossia un riferimento affine con base ortonormale.
Inoltre indicheremo con:

- M il gruppo delle isometrie, dette anche movimenti rigidi del piano, e il suo elemento neutro con 1;
- T il sottogruppo delle traslazioni;
- $O(2)$ il sottogruppo delle isometrie che fissano l'origine $O = (0, 0)$.

Per il Teorema 2.2.2 ogni elemento $m \in M$ è del tipo $m = t_a m'$ con $t_a \in T$ e $m' \in O(2)$. Quindi è possibile definire un omomorfismo suriettivo

$$\varphi : M \to O(2)$$

tale che $\varphi(t_a m') = m'$ il cui nucleo è T.
Vediamo come descrivere alcuni elementi di M mediante equazioni: [1]

1. traslazione t_a di un vettore $a =^t (a_1, a_2)$:
$$t_a(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix};$$

2. rotazione ρ_θ di un angolo θ intorno all'origine $(0, 0)$:
$$\rho_\theta(P) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

[1] Come descritto nel Teorema 2.2.2 se $\mathbb{E}$ è un generico piano euclideo le espressioni seguenti sono da intendere come equazioni rispetto ad un riferimento euclideo.

3. riflessione r_ℓ rispetto alla retta ℓ, che passa per l'origine e forma un angolo θ con l'asse x_1:
$$r_\ell(P) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
Indicheremo con r la riflessione rispetto l'asse x_1.

In seguito indicheremo con $A_{2\theta},\ R_\theta$ le matrici:
$$A_{2\theta} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}; \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proposizione 2.3.1. *Valgono le seguenti regole di composizione:*

1. $t_a t_b = t_{a+b}$;
2. $\rho_\theta \rho_\eta = \rho_{\theta+\eta}$;
3. $r^2 = 1$;
4. $\rho_\theta t_a = t_b \rho_\theta$, *con* $b = \rho_\theta(a)$;
5. $r t_a = t_c r$, *dove* $c = r(a)$;
6. $r \rho_\theta = \rho_{-\theta} r$;
7. $\rho_{2\theta} r = r_\ell$;
8. $r_\ell = \rho_\theta r \rho_\theta^{-1}$;
9. $r_\ell = \rho_{2\theta} r$;
10. $r_{\ell_1} r_{\ell_2} = \rho_{\varphi-\theta}$, *dove l'asse* ℓ_1 *forma un angolo* φ *con l'asse* x_1 *e l'asse* ℓ_2 *forma un angolo* θ *con l'asse* x_1.

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione è sufficiente fare una verifica esplicita utilizzando le matrici $A_{2\theta}$ e R_θ. A titolo di esempio dimostriamo il punto 6, cioè $\rho_{2\theta} r = r_\ell$.
La matrice associata ad r_ℓ è la matrice $A_{2\theta} = R_{2\theta} A_0$. Infatti:
$$R_{2\theta} A_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = A_{2\theta}.$$
□

Proposizione 2.3.2. *Il gruppo M è generato dai movimenti t_a, ρ_θ e r, con $a \in \mathbb{R}^2$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Precisamente, $\forall m \in M$, esistono un vettore a e un angolo θ, eventualmente nulli, tali che $m = t_a\rho_\theta$ oppure $m = t_a\rho_\theta r$ e questa scrittura è unica.*

Dimostrazione. Come conseguenza del Teorema 2.2.2 e dell'Osservazione 1 ogni movimento rigido m si può scrivere nella forma: $m = t_a m'$, dove $m' \in O(2)$. Se il movimento m' è una isometria diretta allora $m' = \rho_\theta$ e quindi $m = t_a\rho_\theta$.
Se m' è un'isometria inversa, allora $m' = r_\ell$, dove ℓ è una retta passante per l'origine. Si ha $r_\ell = \rho_{2\eta} r = \rho_\theta r$, quindi $m = t_a\rho_\theta r$.
Per dimostrare l'unicità supponiamo per assurdo che m si possa scrivere nei due modi: $m = t_a\rho_\theta r^i$ e $m = t_b\rho_\eta r^j$, dove $i, j = 1, 0$.
Se m è una isometria diretta allora $i = j = 0$, altrimenti $i = j = 1$. In entrambi i casi si può cancellare r^i, così da ottenere $t_a\rho_\theta = t_b\rho_\eta$, cioè $t_{a-b} = \rho_{\eta-\theta}$. Questa equazione è verificata solo nel caso in cui la traslazione e la rotazione siano entrambre l'identità. Pertanto $a = b$ e $\theta = \eta$. □

È fondamentale dimostrare che tutti i movimenti del piano si possono suddividere nelle seguenti tipologie.

Isometrie dirette:	Isometrie inverse:
traslazione di vettore a,t_a rotazione di un angolo $\theta \neq 0$ intorno ad un punto P, $\rho_{P\theta}$	riflessione di asse una retta ℓ, r_ℓ glissoriflessione: movimento ottenuto componendo una riflessione di asse una retta ℓ e una traslazione mediante un vettore non nullo a parallelo a ℓ, denotata con $\gamma_{\ell,a}$

Si osservi che $\gamma_{\ell,a} = t_a r_\ell = r_\ell t_a$.

Teorema 2.3.3. *Ogni movimento rigido del piano è una traslazione, o una rotazione, o una riflessione, o una glissoriflessione.*

Dimostrazione. Sia m un movimento rigido che conserva l'orientazione, $m = t_a\rho_\theta$. Se $\theta = 0$, allora $m = t_a$ è una traslazione.
Se $\theta \neq 0$, dobbiamo dimostrare che m è una rotazione intorno a un punto

P, cioè dobbiamo dimostrare che $\exists\ P = (x_1, x_2) \in \mathbb{E}$ tale che $P = m(P) = t_a\rho_\theta(P) = \rho_\theta(P) + a$ esplicitamente

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Che consiste nel risolvere:

$$\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è $2 - 2\cos\theta$ ed è diverso da zero per $\theta \neq 0$, quindi vi è un'unica soluzione (x_1, x_2).
Sia m un movimento che rovescia l'orientazione. Allora $m = t_a\rho_\theta r = t_a r_s$, dove s è una retta per l'origine. Se a è il vettore nullo, allora $m = r_s$ è una riflessione.
Se a non è il vettore nullo, per fare in modo che m sia una riflessione o una glissoriflessione deve esistere una retta ℓ lasciata fissa da m in modo tale che la restrizione di m a ℓ sia una traslazione. Mediante una rotazione degli assi coordinanti la retta s può diventare x_1. Nel nuovo sistema di coordinate il movimento m si scrive nella forma: $m = t_b r$, cioè come prodotto della traslazione t_b, dove $b = (b_1, b_2)$ è il vettore trasformato di a, e della riflessione r.
Se $P = (x_1, x_2)$ è un punto del piano, si ha che

$$m\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ -x_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che m manda la retta $\ell : x_2 = \frac{1}{2}b_2$ in sè. Infatti prendendo un punto $Q \in \ell$, $Q = (x_1, \frac{1}{2}b_2)$ si ha

$$m\begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ \frac{1}{2}b_2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto m è una riflessione di asse ℓ se $b_1 = 0$ ed è un una glissoriflessione di asse ℓ negli altri casi. $\square$

Il sottogruppo $O_P :=$Isom$(\mathbb{E})_P$ di M costituito dalle isometrie che lasciano fisso il punto P può essere espresso tramite gli elementi di $O(2)$.

Proposizione 2.3.4. *Sia P un punto del piano e sia $p = \overrightarrow{OP}$. Denotiamo con $\rho_{P\theta}$ la rotazione intorno a P di un angolo θ e con r_P la riflessione di asse la retta passante per P e parallela all'asse x_1. Allora risulta:*

$$\rho_{P\theta} = t_p\rho_\theta t_p^{-1}, \quad r_P = t_p r t_p^{-1}.$$

Il sottogruppo di M costituito da movimenti che lasciano fisso P è il sottogruppo:

$$O_P = t_p O(2) t_p^{-1} = \{t_p m t_p^{-1} \mid m \in O(2)\}.$$

Dimostrazione. Ogni movimento che lascia fisso P ha la forma $\rho_{P\theta}$ oppure $r_\ell = \rho_{P\theta} r_P$, dove r_P è la riflessione di asse la retta passante per P e parallela all'asse delle x_1 ed ℓ è la retta passante per P che forma un angolo di ampiezza $\frac{\theta}{2}$ con l'asse di r_P.
Ora per poter esprimere la rotazione $\rho_{P\theta}$ mediante la rotazione attorno all'origine bisogna trasportare il punto di rotazione P nell'origine. Ruotando ora il piano intorno all'origine di un angolo θ e riportando l'origine in P si ottiene proprio $\rho_{P\theta}$:

$$\rho_{P\theta} = t_p \rho_\theta t_{-p} = t_p \rho_\theta t_p^{-1}.$$

La riflessione r_P può essere ottenuta in modo analogo a partire da r:

$$r_P = t_p r t_{-p} = t_p r t_p^{-1},$$

quindi

$$r_\ell = \rho_{P\theta} r_P = t_p \rho_\theta t_p^{-1} t_p r t_p^{-1} = t_p \rho_\theta r t_p^{-1},$$

dove $\rho_\theta r$ è una riflessione con asse passante per l'origine O, cioè $\rho_\theta r \in O(2)$. $\square$

Le traslazioni e le glissoriflessioni non lasciano fisso nessun punto, a meno che il vettore di traslazione non sia nullo. Una rotazione lascia fisso un unico punto, il centro di rotazione, e la riflessione lascia fissi tutti i punti sull'asse di riflessione.

2.4 Reticoli e Sottogruppi Discreti

Se X è un sistema di generatori per un gruppo $(G, \times)$, scriveremo $G = \langle X \rangle$. Inoltre, dati $g_1, ...g_n \in G$, indicheremo con

$$\langle g_i \rangle = \{g_i^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

il sottogruppo ciclico di G generato da g_i, e con

$$\langle g_1, \cdots, g_n \rangle = \{g_1^{j_1} \times g_2^{j_2} \times \cdots \times g_n^{j_n} \mid j_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n\}$$

il sottogruppo generato da $\{g_1, \ldots, g_n\}$.

Definizione 2.13. Un reticolo piano è il sottogruppo del gruppo additivo $(\mathbb{R}^2, +)$ generato da due vettori a, b linearmente indipendenti:

$$L = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

dove la coppia di vettori (a,b) è la base del reticolo.

Definizione 2.14. Un sottogruppo $L \subset \mathbb{R}^2$ si dice discreto se non contiene vettori arbitrariamente piccoli, cioè se $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che L non contenga vettori non nulli di lunghezza minore di ε.

Lemma 2.4.1. *Sia L un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}^2$.*
(a) Un sottoinsieme chiuso e limitato S di $\mathbb{R}^2$ contiene soltanto un numero finito di elementi di L.
(b) Se $L \neq \{0\}$, allora L contiene un vettore non nullo di lunghezza minima.

Dimostrazione. (a) Poichè S è chiuso e limitato allora $L \bigcap S$ è limitato. Inoltre dato che L è chiuso, anche $L \cap S$ lo è. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, in un sottoinsieme limitato e infinito esiste almeno un punto di accumulazione. Cosa che non accade in L: dati $a, b \in L$, con $a \neq b$, la distanza tra a e b è per definizione $||b - a||$, ma dato che L è un sottogruppo $b - a \in L$ e quindi $||b - a||$ non può essere arbitrariamente piccola, dato che L è discreto e quindi non può esistere un punto di accumulazione. Dunque $L \bigcap S$ è un insieme finito.
(b) Supponiamo che $L \neq \{0\}$ e consideriamo un vettore non nullo arbitrario $b \in L$, e sia S il disco chiuso di raggio $||b||$ e di centro l'origine. Tale disco è un insieme limitato, quindi contiene soltanto un numero finito di elementi di L, incluso b. Il vettore di lunghezza minima sarà quello richiesto. □

Lemma 2.4.2. *Siano a, b vettori linearmente indipendenti appartenenti a un sottogruppo L di $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che il parallelogramma P da essi generato non contenga elementi di L all'infuori dei vettori $0, a, b, a + b$. Allora L è il reticolo generato da a e b, ossia:*

$$L = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dimostrazione. Sia v un elemento di L. Allora, poichè (a,b) è una base di $\mathbb{R}^2$, v è combinazione lineare del tipo $v = ra + sb$, dove r, s sono numeri reali. Prendiamo le parti intere di r, s, scrivendo: $r = m + r_0$, $s = n + s_0$, dove $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r_0$, $s_0 < 1$. Consideriamo il vettore $v_0 = r_0 a + s_0\, b = v - ma - nb$. Esso è contenuto nel parallelogramma P e inoltre appartiene a L. Ne segue che v_0 è uno dei vettori 0, a, b, $a + b$ e visto che r_0, $s_0 < 1$ deve essere il vettore nullo. Dunque $v = ma + nb$. □

Proposizione 2.4.3. *Ogni sottogruppo discreto L di $\mathbb{R}^2$ ha una delle forme seguenti:*
(1) $L=\{0\}$;
(2)L è generato come gruppo additivo da un vettore non nullo a:

$$L = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\};$$

(3) L è generato da due vettori linearmente indipendenti a,b:

$$L = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

in questo caso L come visto si chiama reticolo di base (a,b).

Dimostrazione. Sia L un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}^2$. Se $L = \{0\}$ non c'è niente da dire.
Se $L \neq \{0\}$ $\exists$ $a \in L, a \neq 0$. Supponiamo che tutti i vettori di L giacciano su una retta ℓ passante per l'origine. Per il punto (b) del Lemma 2.4.1 possiamo scegliere un vettore non nullo $a \in L$ di lunghezza minima. Vogliamo provare che L è generato da a, cioè ogni elemento v di L è un multiplo intero di a: $v = na$ con $n \in \mathbb{Z}$. Poichè $L \subset \ell$, dato $v \in L$ si ha $v = ra$, con $r \in \mathbb{R}$. Scriviamo r nella forma $r = n + r_0$, dove n è un intero e $0 \leqslant r_0 < 1$. Allora il vettore $v - na = r_0 a$ ha una lunghezza minore di a e poichè L è un gruppo, tale elemento sta in L. Pertanto $r_0 = 0$.
Supponiamo ora che $L \neq \{0\}$, ma L non sia contenuto in una retta. Allora L contiene due vettori linearmente indipendenti a', b'. Dimostreremo che da questa coppia di vettori è possibili costruire due vettori che generano il gruppo L. Sostituiamo a' con un vettore non nullo di lunghezza minima a sulla retta ℓ generata da da a'. L'argomentazione sviluppata prima prova che il sottogruppo $\ell \bigcap L$ è generato da un elemento a. Successivamente, consideriamo il parallelogramma P' generato da a e b'. Poichè P' è limitato per il Lemma 2.4.1 contiene un numero finito di elementi di L. Possiamo scegliere allora in questo insieme un vettore b avente distanza più piccola possibile dalla retta ℓ.
Vogliamo ora dimostrare che a, b generano L. Sia P il parallelogramma generato da a e b. P non contiene elementi di L all'infuori dei vettori 0, a, b, $a+b$: osserviamo che dato un vettore c del reticolo appartenente a P deve trovarsi su uno dei vettori a, b, $a + b$; altrimenti il vettore $c - a$ sarebbe più vicino a ℓ di b e uno dei vettori apparterrebbe a P'. Utilizzando il Lemma 2.4.2 si completa la dimostrazione. $\square$

2.5 Gruppi discreti di isometrie

Definizione 2.15. Consideriamo il sottogruppo ciclico di M generato dalla rotazione ρ_θ, dove $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Chiaramente n è il minimo intero positivo tale che $\rho_\theta^n = 1$, pertanto ρ_θ ha ordine n. Denotiamo il gruppo generato da ρ_θ con il simbolo C_n.

Definizione 2.16. Il gruppo diedrale D_n è un sottoguppo di M generato da due elementi: la rotazione ρ_θ, dove $\theta = \frac{2\pi}{n}$ ed una riflessione r_ℓ di asse una retta ℓ per O.

Dunque il gruppo D_n dipende dalla retta ℓ: cambiando coordinate possiamo però supporre che r_ℓ sia la riflessione r di asse l'asse delle x_1.
Chiaramente C_n è un sottogruppo di D_n.

Proposizione 2.5.1. *Il gruppo diedrale D_n è generato da due elementi a, b che soddisfano le relazioni:*

$$a^n = 1 \quad b^2 = 1 \quad ba = a^{-1}b.$$

Il gruppo D_n ha ordine 2n ed i suoi elementi sono:

$$\{1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, ..., a^{n-1}b\} = \{a^ib^j \mid 0 \leqslant i < n, 0 \leqslant j < 2\}.$$

Dimostrazione. Gli elementi $a = \rho_\theta$ e $b = r$ generano D_n. Le relazioni $a^n = 1, b^2 = 1, ba = a^{-1}b$ sono dimostrate nell'Ossevazione 2.3.1. Dalla Definizione 2.15 segue che gli elementi $1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}$ sono rotazioni distinte e sono tutti gli elementi di C_n. Anche gli elementi $b, ab, a^2b. \cdots, a^{n-1}b$ sono riflessioni distinte e quindi non vi sono ripetizioni nella lista degli elementi. Dato che a e b generano D_n, i suoi elementi sono costituiti dai prodotti arbitrari di a, b, a^{-1}, b^{-1}, i quali possono essere ridotti alla forma a^ib^j con $0 \leqslant i < n$, $0 \leqslant j < 2$. □

Definizione 2.17. Siano dati un gruppo G e un insieme X. Un'azione di G su X è un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

tale che valgano:
(a) $1_G \cdot x = x, \quad \forall\, x \in X$;
(b) $(gg')x = g(g'x), \quad \forall g, g' \in G,\ x \in X$.

Si dice che G agisce su X.

Se $\forall\ x, y \in X\ \exists\ g \in G$ tale che $gx = y$, si dice che G agisce transitivamente su X.
Dato un elemento $x \in X$, l'insieme

$$G(x) = \{y \in X \mid gx = y \text{ per qualche } g \in G\}$$

è chiamata orbita di x rispetto all'azione G.

Nel nostro contesto sia G un sottogruppo di M, allora G agisce sull'insieme dei punti del piano, sull'insieme delle rette del piano, sull'insieme dei triangoli del piano, e così via. L'azione di M sull'insieme dei punti del piano è transitiva, questo equivale a dire che essi sono indistinguibili: non ce n'è uno privilegiato rispetto ad un altro.

Definizione 2.18. Sia $S = \{P_1, \cdots, P_n\}$ un insieme finito di punti di $\mathbb{E}$. Il centro di gravità C di S è definito da

$$C = \frac{(P_1 + \cdots + P_n)}{n}.$$

Lemma 2.5.2. *Sia $S = \{P_1, \cdots, P_n\}$ un insieme finito di punti del piano e sia C il suo centro di gravità. Sia m un movimento rigido del piano e poniamo $m(P_i) = P'_i$ e $m(C) = C'$. Allora*

$$C' = \frac{(P'_1 + \cdots + P'_n)}{n}.$$

In altre parole, i movimenti rigidi mandano centri di gravità in centri di gravità.

Dimostrazione. Se $m = t_a$ allora $C = C + a$ e $P'_i = P_i + a$ si ha

$$C + a = \frac{((P_1 + a) + \cdots + (P_n + a))}{n}.$$

Se $m = \rho_\theta$ oppure $m = r$, allora m è un operatore lineare. Pertanto

$$C' = m\left(\frac{(P_1 + \cdots + P_n)}{n}\right) = \frac{m(P_1) + \cdots + m(P_n)}{n} = \frac{(P'_1 + \cdots + P'_n)}{n}.$$

□

Teorema 2.5.3 (Teorema del punto fisso)**.** *Sia G un sottogruppo finito del gruppo M dei movimenti del piano. Allora esiste un punto C del piano tale che*

$$g(C) = C \quad \forall\ g \in G.$$

Dimostrazione. Prendiamo un punto P del piano e sia S la sua orbita rispetto all'azione di G; S è un insieme finito, dato che G è finito. Il centro di gravità dell'insieme S è un punto fisso rispetto all'azione di G. Infatti ogni elemento di $g \in G$ permuta gli elementi dell'orbita $G(P) = \{P_1, \cdots, P_n\}$, utilizzando il Lemma 2.5.2 si prova he esso manda il centro di gravità in sè. □

Osservazione 3. Dal Teorema del punto fisso segue che se G è un sottogruppo finito di M, allora G è un sottogruppo di O_P, per $P \in \mathbb{E}$.

Dall'Osservazione 3 deriva un teorema che ci permette di identificare i sottogruppi finiti del gruppo M dei movimenti del piano. Questi risultati erano stati ottenuti da Leonardo da Vinci, che determinò sistematicamente le possibili simmetrie di un edificio a pianta centrale e studiò il modo di innestare nicchie e cappelle, mantenendo la simmetria.

Teorema 2.5.4 (Teorema di Leonardo)**.** *Sia G un sottogruppo finito del gruppo M dei movimenti rigidi del piano. Allora, introdotto un sistema di coordinate opportuno, G diventa uno dei gruppi seguenti:*

- *$G = C_n =< \rho_\theta >$, il gruppo ciclico di ordine n, dove $\theta = \frac{2\pi}{n}$;*
- *$G = D_n =< \rho_\theta, r_\ell >$, il gruppo diedrale di ordine $2n$, dove $\theta = \frac{2\pi}{n}$ ed ℓ è una retta per O.*

Dimostrazione. Con un opportuno cambio di coordinate, ottenuto spostando l'origine nel punto fisso di G la cui esistenza è garantita dal Teorema del punto fisso, G risulta essere un sottogruppo di $O(2)$. Poichè $O(2)$ è costituito solo da rotazioni ρ_θ di centro O e da riflessioni $\rho_\theta r$ con asse passante per O, consideriamo due casi.
Caso 1: G contiene solo rotazioni. Occorre provare che G è ciclico di ordine p. Se $G = \{1\}$ allora $G = C_1$, altrimenti G contiene una rotazione non banale ρ_θ. Poichè G è finito, possiamo scegliere θ in modo tale da essere il più piccolo angolo di rotazione positivo tra gli elementi di G. Vogliamo dimostrare che G è generato da ρ_θ. Dobbiamo quindi far vedere che preso un elemento arbitrario di G ρ_α con $\alpha \in \mathbb{R}$, esso si scrive come una potenza intera di ρ_θ.
Prendiamo due numeri $k \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \beta < \theta$, in modo tale che α si scriva nella forma $\alpha = k\theta + \beta$. Poichè G è un gruppo $\rho_\alpha, \rho_\theta \in G$, allora la composizione $\rho_\beta = \rho_\alpha \rho_{-k\theta}$ è contenuta in G: ma essendo per ipotesi θ il più piccolo angolo di rotazione positivo in G, si ha $\beta = 0, \alpha = k\theta$, pertanto $\rho_\alpha = \rho_{k\theta} = (\rho_\theta)^k$.
Infine, poichè l'angolo θ è minimo, scelto $n \in \mathbb{Z}$ tale che $0 \leqslant n\theta - 2\pi \leqslant \theta$, si

ha necessariamente $n\theta - 2\pi = 0$. Dunque $\theta = \frac{2\pi}{n}$ per qualche intero n.
Caso 2: G contiene almeno una riflessione. Possiamo supporre la riflessione standard r appartenente a G, eventualmente cambiando le coordinate. Per quanto dimostrato nel primo caso, il sottogruppo H delle rotazioni in G è un gruppo ciclico: $H = C_n$. Allora i $2n$ prodotti $\rho_\theta^i, \rho_\theta^i r$, con $0 \leqslant i \leqslant n-1$, appartengono a G e pertanto $D_n \subset G$.
Vogliamo dimostrare che $G = D_n$. Se $g \in G$ è una rotazione allora $g \in H$ per definizione di H e dunque $g \in D_a$.
Se g è una riflessione, $g = \rho_\alpha r$ per qualche rotazione ρ_α. Poichè r è un elemento di G si ha $\rho_\alpha r r = \rho_\alpha \in G$. Pertanto ρ_α è una potenza di ρ_θ, perciò $\rho_\alpha \in D_n$, da cui $G \subset D_n$. Quindi $G = D_n$. □

Da tale teorema segue immediatamente il seguente risultato.

Corollario 2.5.5. *Se G è un sottogruppo finito di O(2), allora $G = C_n$ oppure $G = D_n$.*

Definizione 2.19. Un sottogruppo G del gruppo dei movimenti M si dice discreto se non contiene nè traslazioni nè rotazioni arbitrariamente piccole. Più precisamente G è discreto se esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che:

- se $t_a \in G$ è una traslazione di un vettore non nullo a, allora la lunghezza di a è maggiore o uguale a $\varepsilon : |a| \geqslant \varepsilon$;
- se $\rho_\theta \in G$ è una rotazione intorno a un punto di angolo $\theta \neq 0$, allora l'ampiezza θ è maggiore o uguale a $\varepsilon : |\theta| \geqslant \varepsilon$.

I due strumenti principali per studiare un gruppo discreto G sono il suo gruppo delle traslazioni e il suo gruppo puntuale.

Definizione 2.20. Il gruppo delle traslazioni di G è l'insieme dei vettori a tale che $t_a \in G$.

$$L_G = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid t_a \in G\}.$$

Definizione 2.21. Sia G un sottogruppo discreto di M. Se restringiamo a G l'omomorfismo $\varphi : M \to O(2)$ tale che $\ker \varphi = T$, l'immagine $\varphi_{|G}(G) \subset O(2)$ è detta gruppo puntuale di G ed è indicata con P_G.

Osservazione 4. P_G è un sottogruppo discreto di $O(2)$. Infatti P_G è un sottogruppo di $O(2)$, inoltre la controimmagine di una rotazione $\rho_\theta \in P_G$ è costituita da tutti gli elementi di G che sono rotazioni di un angolo θ intorno a qualche punto, cioè dagli elementi di G della forma $t_a\rho_\theta$ per qualche $a \in \mathbb{R}^2$. Analogamente, denotando con ℓ l'asse di riflessione di $\rho_\theta r$, la controimmagine di una riflessione $\rho_\theta r$ è costituita da tutti gli elementi di G che sono riflessioni o glissoriflessioni rispetto a rette parallele a ℓ.
In conclusione, poichè G non contiene piccole rotazioni, lo stesso accade per il suo gruppo puntuale P_G, quindi si conclude che P_G è discreto.

Proposizione 2.5.6. *Un sottogruppo discreto di O(2) è un gruppo finito.*

Dimostrazione. Sia S un sottogruppo discreto di $O(2)$, i suoi elementi sono della forma ρ_θ oppure $\rho_\theta r$. Supponiamo per assurdo che S sia infinito, vogliamo dimostrare che S non è discreto. Consideriamo il sottogruppo R costituito da tutte le rotazioni di S. Se S ha infinite rotazioni allora R è infinito; se ha infinite riflessioni allora ha anche infinite rotazioni, infatti componendo due riflessioni non parallele ottengo una rotazione intorno al punto di intersezione degli assi di riflessione. Quindi S infinito implica R infinito.
Sia $A = \{\theta \in [0, 2\pi] \mid \rho_\theta \in R\}$. Poichè A è un sottoinsieme infinito di un intervallo reale compatto, allora A contiene un punto di accumulazione θ_0, cioè $\exists\ \theta_0 \in A,\ t.c.\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \theta \in A\ t.c.\ |\theta - \theta_0| < \varepsilon$.
Poichè R è un sottogruppo, $\rho_\theta, \rho_{\theta_a} \in R$ implicano $\rho_{\theta-\theta_a} \in R$. Quindi R non è discreto e ciò implica che anche S non è discreto. □

Combinando l'Osservazione 4 e la Proposizione 2.5.6 si ottiene il seguente corollario:

Corollario 2.5.7. *Il gruppo puntuale P_G di un gruppo discreto G è C_n oppure D_n.*

È fondamentale la proposizione seguente.

Proposizione 2.5.8. *Sia G un sottogruppo discreto di M, con il gruppo delle traslazioni L_G e il gruppo puntuale P_G. Gli elementi di P_G mandano il gruppo L_G in sè, cioè se $g_0 \in P_G$, e $a \in L_G$ allora $g_0(a) \in L_G$.*

Dimostrazione. Dire che $a \in L_G$ significa che $t_a \in G$, occorre provare che se $t_a \in G$, $g_0 \in P_G$, allora $t_{g_0(a)} \in G$. In base alla definizione di gruppo puntuale g_0 è l'immagine di qualche elemento g di G: $\varphi(g) = g_0$. La proposizione si dimostra provando che $t_{g_0(a)}$ è il coniugato di t_a mediante g. Per la

Proposizione 2.3.2 si ha che $g = t_b\rho$ oppure $t_b\rho r$, con ρ rotazione di centro O. Allora $g_0 = \rho$ oppure ρr, rispettivamente. Nel primo caso si ha

$$gt_ag^{-1} = t_b\rho t_a\rho^{-1}t_{-b} = t_bt_{\rho(a)}\rho\rho^{-1}t_{-b} = t_{\rho(a)}.$$

Il calcolo è analogo nell'altro caso. □

Dalla proposizone precedente segue che esiste quindi un'omomorfismo $\delta : P_G \to Aut(L_G)$. La classificazione dei gruppi discreti G di M si basa sulla struttura dei gruppi L_G e P_G e sull'azione di P_G su L_G mediante δ. Le due proposizioni seguenti ci danno informazioni sulla struttura del gruppo puntuale P_G quando il gruppo delle traslazioni non si riduce al solo vettore nullo.

Proposizione 2.5.9. *Sia G un sottogruppo discreto di M con gruppo delle traslazioni $L_G = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$, con a vettore non nullo. Allora:*
(a) *ogni rotazione in G ha ordine 1 oppure 2;*
(b) *il suo gruppo puntuale P_G è uno dei gruppi C_n, D_n, dove n=1 oppure 2.*

Dimostrazione. Sia $\rho_{P\theta}$ una rotazione di centro P e angolo θ in G e sia $b = ma$ un vettore di L_G. Si ha che $\rho_\theta \in P_G$ e $\rho_\theta(b) \in L_G$. I vettori b e $\rho_\theta(b)$ hanno la stessa direzione e lo stesso modulo, cioè $\rho_\theta(b) = \pm ma = \pm b$. Se ne deduce che $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$, quindi $\rho_{P,\theta}$ ha ordine 1 oppure 2. □

Proposizione 2.5.10 (Restrizione cristallografica)**.** *Sia G un sottogruppo discreto di M con gruppo delle traslazioni il reticolo $L_G = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, con a e b vettori linearmente indipendenti. Allora:*
(a) *ogni rotazione in G ha ordine 1,2,3,4, oppure 6;*
(b) *il suo sottogruppo puntuale P_G è uno dei gruppi C_n, D_n dove n=1,2,3,4, oppure 6.*

Dimostrazione. Sia $\rho_{P\theta}$ una rotazione di centro P e angolo θ in G e sia v un vettore non nullo in L_G di lunghezza minima. Si ha che $\rho_\theta \in P_G$ e $\rho_\theta(v) \in L_G$, pertanto $w = \rho_\theta(v) - v \in L$. Dato che v ha lunghezza minima $||w|| \geqslant ||v||$. Poichè $||w|| = 2||v|| \sin(\theta/2)$, si ha $2||v|| \sin(\theta/2) \geqslant ||v||$ e quindi $2 \sin(\theta/2) \geqslant 1$. Da ciò segue che $\theta \geqslant \frac{2\pi}{6}$. Dunque ρ_θ ha ordine $\leqslant 6$. Inoltre il caso $\theta = \frac{2\pi}{5}$ è da scartare, poichè in tal caso il vettore $w' = \rho_\theta^2(v) + v$ è più corto di v, infatti $||w'|| = 2||v|| \sin(\pi/10)$, dove $2 \sin(\pi/10) < 1$.
Il punto (b) segue dalla prima parte. □

Una prima classificazione dei gruppi discreti di movimento è la seguente.

Proposizione 2.5.11. *Se G è discreto L_G ha una delle forme seguenti:*
(1) $L_G = \{0\}$, in G non ci sono traslazioni, in tal caso diciamo che G il gruppo di simmetria dei rosoni.
(2)$L_G = \{mv \mid m \in \mathbb{Z}\}$ dove v è un vettore non nullo, in tal caso diciamo che G è un gruppo di simmetria dei fregi.
(3) $L_G = \{mv + nw \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ con v e w vettori linearmente indipendenti, diciamo che G è un gruppo cristallografico piano.

2.6 I Gruppi dei Fregi

Teorema 2.6.1. *I sottogruppi discreti G di M tali che il gruppo delle traslazioni sia ciclico infinito, cioè $L_G = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ sono, a meno di isomorfismo, sette.*

Dimostrazione. Come dimostrato nella Proposizione 2.5.9 il gruppo puntuale P_G di G è un sottogruppo di D_2. Esaminiamo i casi in dettaglio.

- `Caso 1.` Se $P_G = C_1$, allora G coincide con il gruppo delle traslazioni definite dai vettori di L_G, pertanto G è costituito solo da infinite traslazioni e $G = T \cap G$.

- `Caso 2.` Se $P_G = C_2$, allora in G, oltre alle infinite traslazioni t_{ma}, esiste una rotazione di angolo π intorno a qualche punto A; pertanto $t_{ma}\rho_{A,\pi} \in G$ e G comprende infinite rotazioni di angolo π, i cui centri sono una successione di punti equidistanti su una retta ℓ con un vettore di direzione a.

- Siano $P_G = D_1 = \langle r_s \rangle$ e g un elemento di G tale che $\varphi|_G(g) = r_s$. Allora g può essere una riflessione o una glissoriflessione, si veda il Teorema 2.3.3. Consideriamo la traslazione $t_b = gt_ag^{-1}$, poichè $t_b \in G$, allora $b = ma$. Se u è una retta con vettore di direzione a, allora t_a fissa u e, poichè $t_b(g(u)) = gt_ag^{-1}(g(u)) = gt_a(u) = g(u)$, si ha che t_b fissa la retta $g(u)$; pertanto $g(u)$ è una retta di direzione $b = ma$ e quindi g manda u in una retta parallela ad u.
  Se $g = r_\ell$ è una riflessione di asse la retta ℓ, affinchè u e $g(u)$ siano parallele si deve avere u parallela ad ℓ oppure u perpendicolare ad ℓ.

  - `Caso 3.` Se u è parallela ad ℓ, cioè se a è parallela ad ℓ, l'omomorfismo $\delta : P_G \to Aut(L_G)$ è banale, pertanto G è isomorfo al prodotto diretto $L_G \times D_1 \cong \mathbb{Z} \times D_1$.

- `Caso 4.` Se u è perpendicolare ad ℓ, cioè se a è perpendicolare ad ℓ, δ non è l'omomorfismo banale ($\delta(r_s)(ma) = -ma$) e G è isomorfo a $Z \rtimes_\delta D_1$, prodotto semidiretto di $\mathbb{Z}$ e D_1 rispetto a δ.

`Caso 5.` Sia g una glissoriflessione $\gamma_{\ell,c} = t_c r_\ell = r_\ell t_c$, allora $g^2 = t_c r_\ell t_c r_\ell = t_c r_\ell^2 t_c = t_{2c}$. Da $g^2 \in G$ segue che $2c = ma$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$ e quindi ℓ è una retta con un vettore di direzione a, cioè ℓ è parallela ad u. Se $m = 2n$ è pari, allora $c = na \in L_G$, l'elemento $gt_{-na} = r_\ell$ è una riflessione e $\varphi|_G(gt_{-na}) = \varphi|_G(g)\varphi|_G(t_{-na}) = \varphi|_G(g) = r_s$, si ripresenta quindi la situazione della possibilità 3. Se $m = 2n+1$ è dispari, cioè $2c = (2n+1)a$, l'elemento $g' = t_{-na}g = t_{c-na}r_\ell$ è la glissoriflessione $\gamma_{\ell,c-na}$ e $(g')^2 = t_a$. Quindi t_a può essere visto come $(g')^2$, quindi il gruppo G è ciclico infinito generato da g', cioè $G = \langle g' \rangle$.

- Sia $P_G = D_2 = \langle \rho_\pi, r_\ell \rangle$. Sia $r_{\ell'} = \rho_\pi r_\ell$ l'altra riflessione di P_G, dove ℓ' è una retta ortogonale a ℓ, per la Proposizione 2.3.1. Siano g e g' due elementi di G, tali che $\varphi(g) = r_\ell$ e $\varphi(g') = r_{\ell'}$. Analogamente a quanto dimostrato in precedenza ci sono due possibili direzioni per gli assi di riflessione: una lungo il vettore a e l'altra ortogonale ad a, mentre per gli assi di glissoriflessione è possibile solo la direzione lungo a; ne segue che una tra g e g' è una riflessione. Si hanno pertanto altri due casi:

  - `Caso 6.` g e g' sono due riflessioni, G è isomorfo al prodotto semidiretto di $\mathbb{Z}$ e D_2;
  - `Caso 7.` g è una riflessione e g' una glissoriflessione, G è generato da una glissoriflessione e una riflessione.

□

Analizziamo ora in dettaglio i sette gruppi di fregi. Vengono identificati con la notazione cristallografica, dove:

1. il primo numero è sempre una **p**;
2. il secondo simbolo può essere una **m** se è presente una riflessione avente asse con vettore di direzione ortogonale al vettore di traslazione, **1** se è assente;
3. il terzo simbolo può essere una **m** in presenza di una riflessione con asse con vettore di direzione il vettore di traslazione, una **a** in presenza di una glissoriflessione con asse con vettore di direzione il vettore di traslazione, o **1** se sono assenti sia l'una che l'altra;

4. l'ultimo simbolo può essere un **2** se è presente una rotazione di angolo π o un **1** se è assente.

Riassumendo si ottiene la seguente tabella.

<table>
<tr><td colspan="7">Riflessione</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sì</td><td colspan="4">No</td></tr>
<tr><td colspan="3">Rotazione</td><td colspan="4">Rotazione</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si</td><td>No</td><td colspan="2">No</td><td>Si</td><td>No</td></tr>
<tr><td>Riflessione</td><td>Glissorifl.</td><td>Niente</td><td>Riflessione</td><td>Glissorifl.</td><td colspan="2">Niente</td></tr>
<tr><td>pmm2</td><td>pma2</td><td>pm11</td><td>p1m1</td><td>p1a1</td><td>p112</td><td>p111</td></tr>
</table>

p111 *G è generato dalla traslazione t_a: $G = \langle t_a \rangle$.*

p112 *G è generato dalla traslazione t_a e dalla rotazione $\rho_{A,\pi}$: $G = \langle t_a, \rho_{A,\pi} \rangle$.*

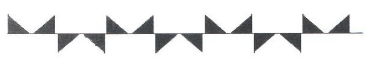
p1m1 *G è generato dalla traslazione t_a e dalla riflessione r_ℓ, dove ℓ è una retta il cui vettore di direzione è a: $G = \langle t_a, r_\ell \rangle$.*

p1a1 *G è generato dalla glissoriflessione g' con asse avente a come vettore di direzione: $G = \langle g' \rangle$.*

pm11 *G è generato dalla traslazione t_a e dalla riflessione r_ℓ, dove ℓ è una retta il cui vettore di direzione è ortogonale ad a: $G = \langle t_a, r_\ell \rangle$.*

pmm2 *G è generato dalla traslazione t_a e dalle riflessioni r_ℓ e $r_{\ell'}$, dove ℓ è una retta il cui vettore di direzione è a, mentre ℓ' è una retta il cui vettore di direzione è ortogonale ad a: $G = \langle t_a, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.*

pma2 *G è generato dalla riflessione r_ℓ, dove ℓ è una retta il cui vettore di direzione è ortogonale ad a, e dalla glissoriflessione g di asse una retta con a come vettore riflessione: $G = \langle r_\ell, g \rangle$.*



2.7 I Gruppi Cristallografici Piani

Definizione 2.22. Un punto P del piano è detto n-centro per un gruppo G di isometrie se le rotazioni appartenenti a G di centro P formano un gruppo ciclico finito C_n con $n > 1$. Siano F una figura del piano e P un n-centro per il gruppo delle simmetrie di F, allora P è detto n-centro o centro di simmetria per la figura F.
In particolare si ha:

1. 2-centro se la rotazione è di π;
2. 3-centro se la rotazione è di $\frac{2\pi}{3}$;
3. 4-centro se la rotazione è di $\frac{\pi}{2}$;
4. 6-centro se la rotazione è di $\frac{\pi}{3}$.

Definizione 2.23. Una retta ℓ del piano è detta asse per un gruppo G di isometrie se la riflessione r_ℓ appartiene a G. Siano F una figura del piano e ℓ un asse per il gruppo delle simmetrie di F, allora ℓ è detto asse di simmetria per la figura F.

Definizione 2.24. Sia G un gruppo cristallografico piano e siano a, b vettori generatori del suo gruppo delle traslazioni. Una cella unitaria per G rispetto al punto $P \in \mathbb{E}$ è il parallelogramma di vertici P, $Q = t_a(P)$, $R = t_{a+b}(P)$, $S = t_b(P)$. Chiameremo nodi i punti $G(P)$ dell'orbita di P. Chiaramente i vertici della cella unitaria sono nodi.
Le celle unitarie vengono dette primitive se non contengono nodi al loro interno, centrate se hanno un nodo al loro interno.

La cella unitaria può essere a seconda della forma:

1. obliqua, se $||a|| \neq ||b||$ e a non è ortogonale a b, presenta simmetrie di traslazioni e simmetrie di rotazione di ordine 1 e 2;
2. rettangolare, se $||a|| \neq ||b||$ e a è ortogonale a b, presenta simmetrie traslazionali, rotazioni di ordine 2 e riflessioni;
3. quadrata, se $||a|| = ||b||$ e a è ortogonale a b, presenta simmetrie traslazionali, rotazioni di ordine 2 e 4 e riflessioni;
4. rombica, se $||a|| = ||b||$ e a non è ortogonale a b. In tal caso la cella unitaria è formata da rombi con angoli di $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, presenta simmetrie traslazionali, rotazioni di ordine 2, 3 e 6, riflessioni e glissoriflessioni.

Teorema 2.7.1. *I gruppi cristallografici piani sono, a meno di isomorfismi, diciassette.*

Dimostrazione. $L_G = \{ma+nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, dove a e b sono vettori linearmente indipendenti, è il gruppo delle traslazioni, mentre P_G è il gruppo puntuale che può essere uguale a C_k oppure D_k, dove $k = 1, 2, 3, 4, 6$. Esaminiamo i vari casi separatamente.

- `Caso 1.` Se $P_G = C_1$, allora G coincide con il gruppo delle traslazioni definite dai vettori di L_G, quindi G è costituito solo da infinite traslazioni e $G = \langle t_a, t_b \rangle$.
- Se $P_G = D_1$, allora G contiene una isometria inversa g e l'asse di g ha due possibilità:
  - essere parallelo alla diagonale di una cella unitaria obliqua per G, generata da due vettori a, b di uguale lunghezza;
  - essere parallelo al lato di una cella unitaria rettangolare per G.

  Vediamo le due possibilità più nello specifico.
  `Caso 2.` Sia l'asse di g parallelo alla diagonale di una cella unitaria obliqua per G, generata da due vettori a, b di uguale lunghezza. Poniamo $g = t_{q(a+b)}r_\ell$, dove $q \in \mathbb{R}$ e la retta ℓ ha direzione $a + b$. Poichè $g^2 = t_{q(a+b)}r_\ell t_{q(a+b)}r_\ell = t_{2q(a+b)} \in G$, si ha che $2q(a + b) \in L_G$, cioè $2q \in \mathbb{Z}$. Ne segue che G contiene anche la composizione $g' = t_{-2qb}t_{q(a+b)}r_\ell = t_{q(a-b)}r_\ell$ che è una riflessione. A meno di comporre g con una traslazione della forma $t_{m(a+b)}$, $m \in \mathbb{Z}$, si può supporre $q = 0$, allora $g' = g = r_\ell$, oppure $q = \frac{1}{2}$, allora $g = t_{(a+b)/2}r_\ell$ è una glissoriflessione non banale e $g' = r_{\ell'}$ ha asse di riflessione ℓ' parallelo ad ℓ che dista $||a - b||/4$ da ℓ. Non è possibile che $t_{(a+b)/2}r_\ell$ e r_ℓ stiano entrambi in G, perchè si avrebbe $\frac{(a+b)}{2} \in L_G$ e questo è assurdo. Riassumendo se $q = 0$ si ha $G = \langle t_a, t_b, r_\ell \rangle$, se $q = \frac{1}{2}$, $g = t_b r_{\ell'}$ quindi $G = \langle t_a, t_b, r_{\ell'} \rangle$ e ci sono glissoriflessioni non banali. Si osservi che per $q = 0$ una glissoriflessione non banale è $t_b r_\ell = \gamma_{s(a+b)/2}$, dove s è una retta parallela ad ℓ che dista $||a - b||/4$ da ℓ. Si può concludere che in entrambi i casi G contiene infinite riflessioni e glissoriflessioni con assi paralleli, alternati e spaziati di $\|a-b\|/4$, quindi $G = \langle t_a, t_b, r_{\ell'} \rangle$, dove ℓ ha direzione $a+b$.
  Sia l'asse di g parallelo al lato di una cella unitaria rettangolare per G. Il reticolo di G è generato da due vettori ortogonali a, b e poniamo $g = t_{qa}r_\ell$, dove $q \in \mathbb{R}$ e ℓ ha direzione a. Non è possibile che esista $g' = t_{rb}r_s \in G$ con s parallela a b, dato che in G non esistono rotazioni. Poichè $g^2 = (t_{qa}r_\ell)^2 = t_{2qa} \in G$, seguendo un ragionamento analogo a

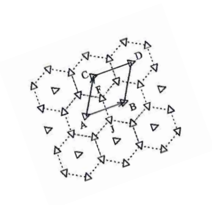
quello precedente si hanno due possibilità:
`Caso 3.` Se $q = 1$, allora $G = \langle t_a, t_b, r_\ell \rangle$;
`Caso 4.` Se $q = \frac{1}{2}$ allora $G = \langle t_a, t_b, t_{1/2a} r_{\ell'} \rangle$.
Se la cella unitaria per G è un quadrato, G non può avere entrambe le riflessioni o glissoriflessioni di assi paralleli al lato ed alla diagonale del quadrato, perchè G non contiene rotazioni.

- `Caso 5.` Se $P_G = C_2$, allora G contiene una isometria $t_c \rho_{A,\pi}$ che è una rotazione di angolo π intorno a qualche punto A. Siano $a,\ b$ i generatori di L_G e siano $\rho_{M,\pi} = t_a \rho_{A,\pi},\ \rho_{N,\pi} = t_b \rho_{A,\pi},\ \rho_{E,\pi} = \rho_{N,\pi} \rho_{A,\pi} \rho_{M,\pi}$, dove i punti $M,\ N$ sono i punti medi dei lati della cella unitaria per G ed E è il baricentro della cella unitaria. Quindi se D è un 2-centro con distanza minima da A, e se D sta nella cella unitaria rispetto ad A, si ha che $D = M, N, E$. Quindi $G = \langle t_a, t_b, \rho_{A,\pi} \rangle$.

- Se $P_G = D_2$.
  - Reticolo rombico. `Caso 6.` Dall'analisi fatta per $P_G = D_1$ segue che G contiene una riflessione r_ℓ con asse avente direzione $a + b$ e, poichè i centri di simmetria di G sono tutti 2-centri, deve contenere anche una riflessione $r_{\ell'}$ con asse avente direzione $a - b$, inoltre gli assi delle due riflessioni si devono intersecare in un 2-centro. Pertanto $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.
  - Reticolo rettangolare. Sempre per l'analisi fatta per $P_G = D_1$ segue che G contiene due movimenti della forma $t_{pa} r_\ell$ e $t_{qb} r_{\ell'}$, dove $p,\ q = 1$ oppure $\frac{1}{2}$ e $\ell,\ \ell'$ hanno direzione rispettivamente a e b. Pertanto si hanno tre casi a seconda dei valori assunti da p e q:
    * `Caso 7.` $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$;
    * `Caso 8.` $G = \langle t_a, t_b, t_{a/2} r_\ell, r_{\ell'} \rangle$;
    * `Caso 9.` $G = \langle t_a, t_b, t_{a/2} r_\ell, t_{b/2} r_{\ell'} \rangle$.

  Se la cella unitaria è quadrata ci si può ricondurre a uno dei casi precedenti.

- `Caso 10.` Se $P_G = C_3$ allora G contiene una rotazione di angolo $\frac{2\pi}{3}$ intorno a qualche punto A.

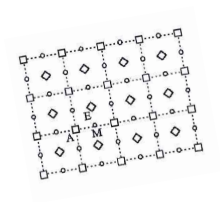


Si ha che A è il baricentro di un esagono regolare i cui vertici sono 3-centri. Tutti i centri di simmetria per G sono determinati da A e da uno dei 2-centri più vicini ad A. Pertanto si ha $G = \langle t_a, t_b, \rho_{A,2\pi/3} \rangle$.

- Se $P_G = D_3$, poichè il reticolo di G è rombico essendo generato da due vettori di uguale lunghezza, per quanto dimostrato per $P_G = D_1$ segue che G contiene una riflessione r_ℓ con asse avente direzione parallela ad una diagonale di una cella unitaria per G. Si presentano due casi:

  - `Caso 11.` ℓ è parallela alla diagonale minore: i centri di G sono tutti 3-centri, G contiene anche due riflessioni con assi aventi direzione a e b. Pertanto si ha $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$, dove ℓ' è una retta di direzione a;

  - `Caso 12.` ℓ è parallela alla diagonale maggiore: G contiene anche due riflessioni con assi aventi direzione $2b - a$ e $b - 2a$. Quindi $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$, dove ℓ' è una retta di direzione $2b - a$.

- `Caso 13.` Se $P_G = C_4$, allora G contiene una rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno a qualche punto A.
  Il centro di simmetria più vicino ad A è un 2-centro M, ed A è il baricentro di un quadrato i cui vertici sono 4-centri e i cui lati sono bisecati da 2-centri. Tutti i centri di simmetria per G sono determinati da A ed M.
  
  Pertanto si ha $G = \langle t_a, t_b, \rho_{A,\pi/2} \rangle$.

- Se $P_G = D_4$, poichè il reticolo di G è rombico, per quanto dimostrato per $P_G = D_1$ segue che G contiene una riflessione r_ℓ con asse avente direzione parallela ad una diagonale di una cella unitaria per G. Inoltre G contiene anche una isometria inversa $t_{qa} r_{\ell'}$ dove ℓ' ha direzione a e $q = 0$ oppure $\frac{1}{2}$. Pertanto a seconda del valore assunto da q si hanno due casi:

  - `Caso 14.` $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$;

  - `Caso 15.` $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, t_{a/2} r_{\ell'} \rangle$.

- `Caso 16.` Se $P_G = C_6$, allora G contiene una rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ intorno a qualche punto A.
  
  Il centro di simmetria più vicino ad A è un 2-centro M, ed A è il baricentro di un esagono regolare i cui vertici sono 3-centri e i cui lati sono bisecati da 2-centri. Tutti i centri di simmetria per G sono determinati da A e M.
  Pertanto si ha $G = \langle t_a, t_b, \rho_{A,\pi/3} \rangle$.

- `Caso 17.` Se $P_G = D_6$, da quanto detto per $P_G = D_3$ segue che G contiene una riflessione r_ℓ con asse parallelo alla diagonale di una cella unitaria rombica per G. Poichè G contiene una rotazione di ordine sei, allora contiene anche le riflessioni con assi aventi direzioni a, b, $a+b$, $2b-a$, $b-2a$. Si ha così $G = \langle t_a, t_b, \rho_{A,\pi/3,r_\ell}\rangle$.

$\square$

Analizziamo ora in dettaglio i diciassette gruppi cristallografici piani. Vengono identificati con la notazione cristallografica, dove:

1. il primo simbolo si riferisce alla cella del reticolo, **p** se questa è primitiva, **c** se è centrata;

2. il secondo simbolo indica il massimo ordine di una rotazione presente in G, può essere quindi 1, 2, 3, 4 o 6;

3. il terzo simbolo può essere una **m**, se è presente una riflessione **g** se è presente una glissoriflessione aventi asse con vettore di direzione ortogonale all'asse x_1, **1** in assenza di entrambe;

4. il quarto simbolo può essere **m**, in presenza di una riflessione, **n** in presenza di una glissoriflessione, **1** in assenza di entrambe aventi asse con vettore di direzione formante un angolo α con l'asse x_1, dove α dipende dal secondo simbolo che identifica il gruppo e che come detto sopra può assumere i valori 1, 2, 3, 4, 6. Precisamente:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & se\ n = 1,2 \\ \frac{\pi}{4} & se\ n = 4 \\ \frac{\pi}{3} & se\ n = 3,6. \end{cases}$$

Si possono riassumere i 17 gruppi cristallografici nella tabella seguente, con le relative abbreviazioni.

Solo traslazione o rotazione				
p111 = p1	**p211 = p2**	**p311 = p3**	**p411 = p4**	**p611 = p6**
Rotazione e riflessione				
p1m1 = pm **c1m1 = cm**	**p2mm = pmm** **c2mm = cmm**	**p3m1** **p31m**	**p4mm = p4m**	**p6mm = p6m**
Rotazione e glissoriflessione				
p1g1 = pg	**p2gg = pgg**			
Rotazione, riflessione e glissoriflessione				
	p2mg = pmg		**p4gm= p4g**	

p1 o p111

La cella unitaria è obliqua. Questo gruppo è generato solo da traslazioni, si ha $G = \langle t_a, t_b \rangle$.

p2 o p211

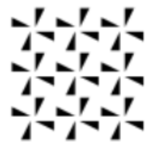
La cella unitaria è obliqua. Il gruppo è generato da traslazioni e da rotazioni di angolo π *si ha* $G = \langle t_a, t_b, \rho_{A,\pi} \rangle$.

p3 o p311

La cella unitaria è rombica. È generato da traslazioni e rotazioni di angolo $\frac{2\pi}{3}$, *si ha* $G = \langle t_a, t_b, \rho_{2\pi/3} \rangle$.

p4 o p411

La cella unitaria è quadrata. Questo gruppo è generato da traslazioni e da rotazioni di angolo $\frac{\pi}{2}$ *si ha* $G = \langle t_a, t_b, \rho_{A,\pi/2} \rangle$.

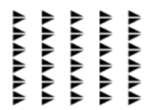


p6 o p611

La cella unitaria è rombica, questo gruppo è generato da traslazioni e rotazioni di angolo $\frac{\pi}{3}$, *si ha* $G = \langle t_a, t_b, \rho_{\pi/3} \rangle$.

pm o p1m1

La cella unitaria è rettangolare. Questo gruppo è generato da traslazioni e dalla riflessione di retta ℓ, *si ha* $G = \langle t_a, t_b, r_\ell \rangle$.

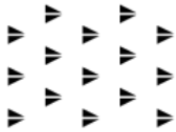


pg o p1g1

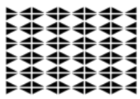
La cella unitaria è rettangolare. Il gruppo presenta traslazioni e glissoriflessioni di retta ℓ , *si ha* $G = \langle t_a, t_b, t_{a/2} r_\ell \rangle$.

cm o c1m1

La cella unitaria è rombica e il gruppo è generato da traslazioni, dalla riflessione e dalla glissoriflessione di retta ℓ, *si ha* $G = \langle t_a, t_b, t_{a/2} r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.



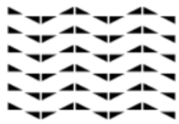
pmm o p2mm



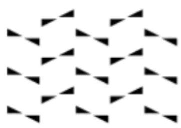
La cella unitaria è rettangolare. Questo gruppo è generato da traslazioni, rotazioni di angolo $\frac{\pi}{2}$, *e da due riflessioni lungo le rette* ℓ, ℓ', *si ha* $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.

pmg o p2mg

La cella unitaria è rettangolare e il gruppo è generato da traslazioni, da rotazioni di angolo $\frac{\pi}{2}$, *dalla riflessione e dalla glissoriflessione di rette* ℓ, ℓ', *si ha* $G = \langle t_a, t_b, t_{a/2} r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.



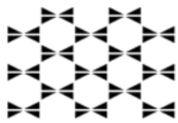
pgg o p2gg



La cella unitaria è rettangolare. Questo gruppo è generato da traslazioni, rotazioni di angolo $\frac{\pi}{2}$, *e da due glissoriflessioni lungo le rette* ℓ, ℓ', *si ha* $G = \langle t_a, t_b, t_{a/2} r_\ell, t_{b/2} r_{\ell'} \rangle$.

cmm o c2mm

La cella unitaria è rombica. Il gruppo è presenta traslazioni, due rotazioni di angolo $\frac{\pi}{2}$, *due riflessione e due glissoriflessione di rette* ℓ, ℓ', *si ha* $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.



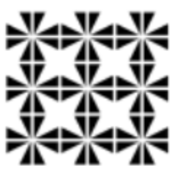
p31m

La cella unitaria è rombica, si ha che il gruppo è formato da traslazioni, tre rotazioni di angolo $\frac{2\pi}{3}$, *riflessioni e glissoriflessioni, si ha* $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.

p3m1

La cella unitaria è rombica, si ha che il gruppo è formato da traslazioni, tre rotazioni di angolo $\frac{\pi}{3}$, *riflessioni e glissoriflessioni, si ha* $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.

p4m o p4mm



La cella unitaria è quadrata. Questo gruppo presenta traslazioni, rotazioni di angolo $\frac{\pi}{2}$, *riflessioni e glissoriflessioni si ha* $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$.

p4g o p4gm *La cella unitaria è quadrata, il gruppo è generato da traslazioni, da rotazioni di angolo $\frac{\pi}{2}$, riflessioni e glissoriflessioni si ha* $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, t_{a/2} r_{\ell'} \rangle$.

p6m o p6mm

La cella unitaria è rombica, si ha che il gruppo è formato da traslazioni, rotazioni di angolo $\frac{\pi}{6}$, riflessioni e glissoriflession, si ha $G = \langle t_a, t_b, r_\ell, r_{\ell'} \rangle$

2.8 Gruppi cristallografici dell'Alhambra

Come abbiamo visto ad inizio capitolo le decorazioni utilizzate nell'Alhambra sono il frutto della cultura e del metodo di lavoro arabo: divieto di rappresentare Allah e la natura e ricerca di nuove idee e pratiche attraverso l'esercio libero. E' notevole quindi osservare che in tali decorazioni, realizzate secoli prima che fosse ottenuta la classificazione dei gruppi cristallografici, si possano ritrovare tutti e 17 i gruppi cristallografici.
La classificazione completa dei gruppi cristallografici sembra che sia stata effettuata per la prima volta nel 1891 da Evgraf Fédorov, in un articolo della società mineralogica russa, poi ripetuta in ambito matematico e resa nota da Paul Niggli e George Pólya nel 1924[2].
Nel Palazzo dei Comares dell'Alhambra sono presenti il gruppo p1, dove a causa dei colori l'unica simmetria è data dalle traslazioni, e il gruppo cmm, rappresentati in Figura 2.1.

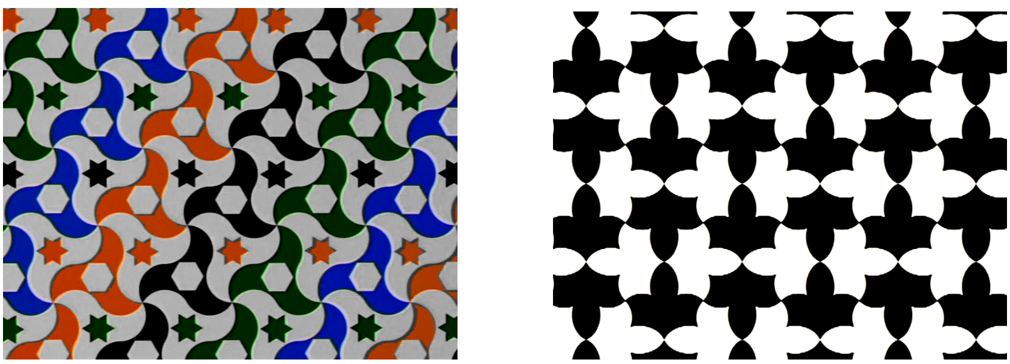


Figura 2.1: p1, cmm.

[2] Si veda la pagina web *http://matematica-old.unibocconi.it/betti/simmetrie/simmetria08.htm.*

In alcune decorazioni del complesso Nazarì dell'Alhambra sono presenti i gruppi p2, p4, p6m, pmm, rappresentati in Figura 2.2.

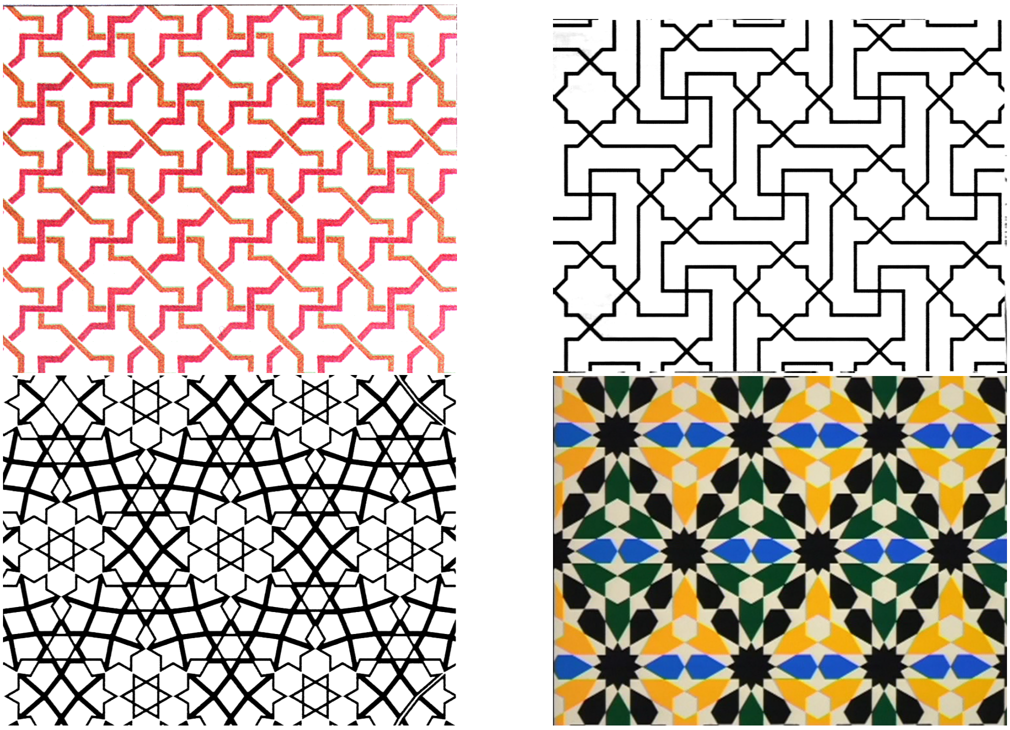


Figura 2.2: p2, p4, p6m, pmmg.

Nella Torre della Cutiva dell'Alhambra sono presenti i gruppi p4g, p4m, rappresentati in Figura 2.3.

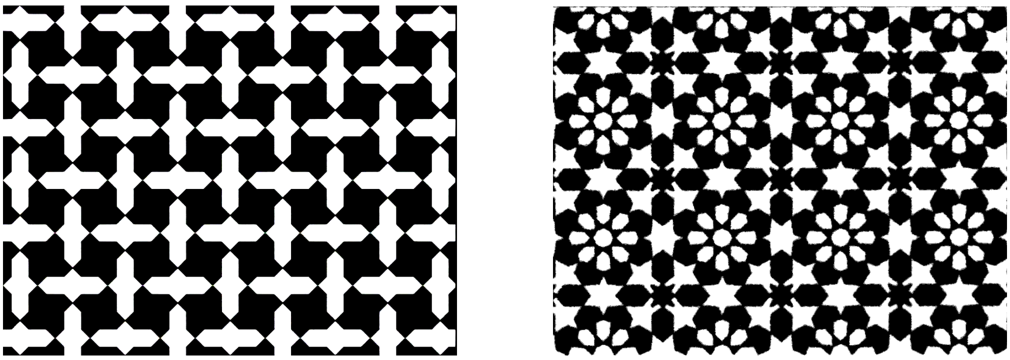


Figura 2.3: p4g, p4m.

Tra le deccorazioni del Palazzo dei Leoni dell'Alhambra sono presenti i gruppo p3m1, cm, pm, p3, in rappresentati Figura 2.4.

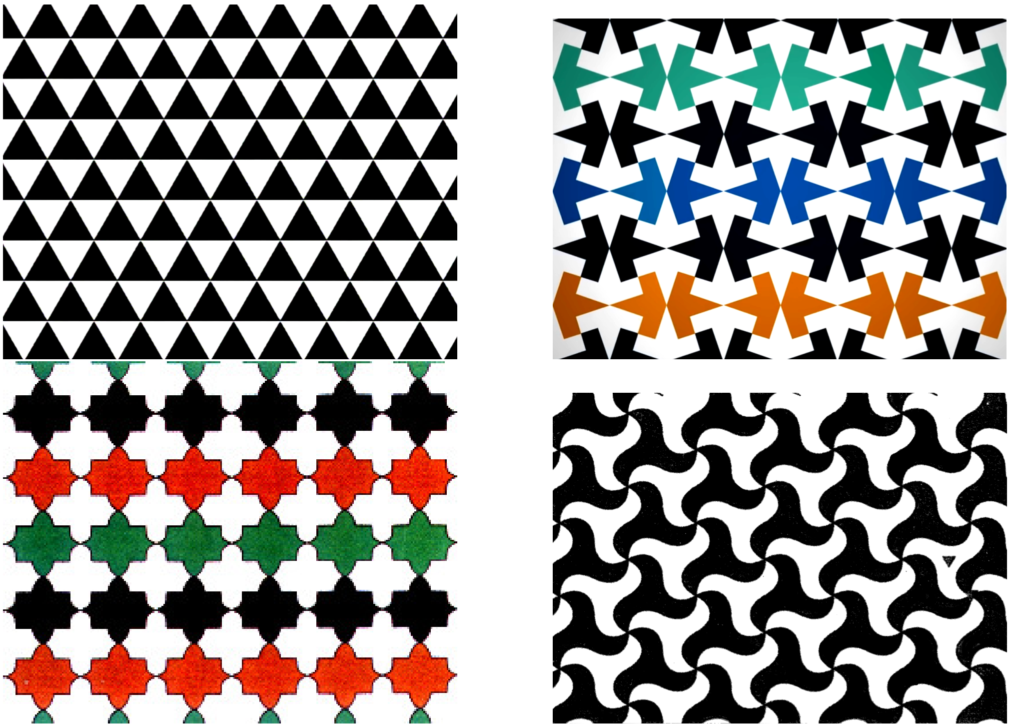


Figura 2.4: p3m1, cm, pm, p3.

Sulle decorazioni delle colonne del Palazzo dei Comares e del Palazzo dei Leoni dell'Alhambra è presente il gruppo pmg, mentre nella Sala dei re dell'Alhambra è presente il gruppo p6, rappresentati in Figura 2.5.

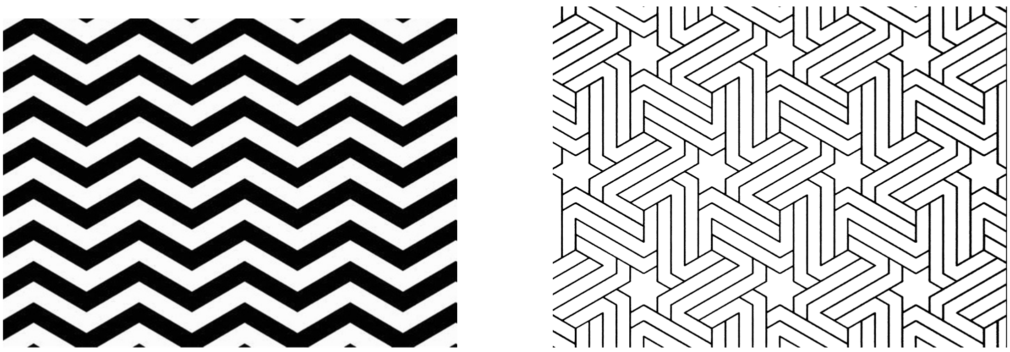


Figura 2.5: pmg, p6.

Sulla Porta del vino dell'Alhambra sono presenti i gruppi p31m, pgg, pg, rappresentati in Figura 2.6.

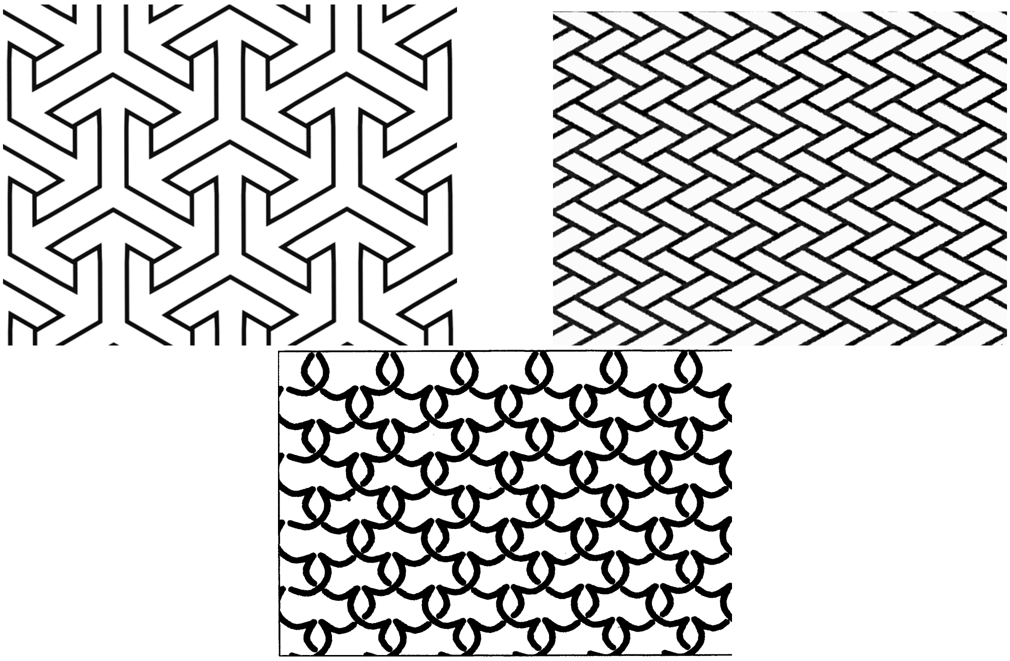


Figura 2.6: p31m, pgg, pg.

Capitolo 3

Progetto didattico

In questo capitolo ho proposto un progetto didattico in vista di un viaggio di istruzione all'Alhambra, del quale ho approfondito la lezione sugli argomenti matematici. Ho descritto inoltre l'esperienza che ho realizzato in aula sulla matematica presente nell'Alhambra.

3.1 Introduzione al progetto didattico

Il progetto didattico è un percorso educativo che punta alla costruzione e alla scoperta dei saperi. Ha una durata variabile, può coinvolgere alcuni mesi o l'intero anno scolastico, e il suo svolgimento è parallelo a quello dalle unità didattiche. Il suo contenuto spesso è connesso alla vita quotidiana o all'osservazione della realtà e coinvolge più discipline. Soddisfa quindi le richieste delle Indicazioni Nazionali per i Licei e delle Linee Guide per gli Istituti Tecnici e Professionali riguardo al creare connessioni interdisciplinari.
Privilegia la dimensione della produzione su quella della riproduzione: si punta sulla costruzione delle conoscenze, in questo processo l'errore è un passo necessario e motivo di crescita. Si vuole far vivere all'allievo esperienze dove possa attivare competenze valide non solo nell'ambiente scolastico, ma in diverse situazioni della vita.
Ha tra gli obiettivi sviluppare competenze sia convergenti, come l'analisi e la sintesi, che divergenti, come creatività, intuizione e invenzione. Spesso fa uso della dimensione ludica, così da stimolare l'approccio creativo al sapere. Attività ricreative si rivelano utili per un intervento attivo da parte degli studenti nella propria formazione.
Individualizzazione e personalizzazione sono fondamentali nell'organizzazione del progetto didattico. L'individualizzazione è una pratica didattica che serve a garantire che le competenze fondamentali del curriculum siano rag-

giunte da tutti, eventualmente diversificando i percorsi d'insegnamento. L'obiettivo è quindi che tutti abbiano delle conoscenze di base, considerate necessarie per la formazione della persona. Il percorso per arrivare a questa meta deve essere diversificato in base all'individuo, dato che non tutti gli studenti arrivano alla comprensione di un concetto in maniera identica. La personalizzazione invece ha lo scopo di valorizzare e sviluppare i talenti personali di ognuno, puntando sugli interessi personali. Gli obiettivi in questo caso sono quindi diversi da persona a persona, così come i percorsi.
Il lavoro dello studente, durante il progetto didattico, si sviluppa in tre fasi:

1. una prima in cui viene stimolato dal docente, raccoglie informazioni, osserva;

2. una seconda in cui formula ipotesi, lavora in gruppo, svolge il compito;

3. un'ultima in cui, riflettendo sul lavoro svolto, trae le conclusioni e matura competenze utilizzabili in altri campi.

Il progetto didattico fornisce interessanti occasioni di formazione personale e approfondimento su vari argomenti. Lo studente può mettersi in discussione e capire cosa davvero lo interessi. Si creano inoltre possibilità di confronto tra pari, specialmente attraverso le attività di gruppo, dove lo studente deve affrontare discussioni con gli altri e scendere a compromessi. Il progetto didattico fornisce anche un'opportunità per sperimentare la progettazione, utile in adolescenza, età in cui si allarga la prospettiva temporale e si iniziano a fare programmi a lungo termine. È quindi importante per la formazione di una responsabilità civica, in un'ottica in cui la scuola promuove partecipazione e cittadinanza attiva e si apre al territorio. Aiuta così a sviluppare diverse competenze chiave di cittadinanza presenti in [20]. Tra queste troviamo:

1. progettare: elaborare e realizzare progetti riguardanti lo sviluppo delle proprie attività di studio e di lavoro;

2. collaborare e partecipare: interagire in gruppo, comprendendo i diversi punti di vista, valorizzando le proprie e le altrui capacità, gestendo le conflittualità, contribuendo alla realizzazione delle attività collettive;

3. agire in modo autonomo e responsabile: inserirsi nella vita sociale e far valere al suo interno i propri diritti e bisogni riconoscendo quelli altrui;

4. risolvere problemi: affrontare situazioni problematiche costruendo e verificando ipotesi, individuando le fonti e le risorse adeguate, raccogliendo e valutando i dati, proponendo soluzioni;

5. individuare collegamenti e relazioni: trovare relazioni tra fenomeni, eventi, concetti, anche in ambiti disciplinari diversi e lontani nello spazio e nel tempo;

6. comunicare: esprimere concetti e procedure mediante diversi supporti.

Per questi motivi credo che il progetto didattico sia un'attività interessante e utile da proporre nelle classi, nonchè stimolante.

3.2 Progetto didattico: La mia Alhambra

Ho realizzato un progetto didattico in previsione di un'uscita didattica in Spagna, durante la quale si visiterà l'Alhambra di Granada. L'Alhambra, come visto nel capitolo precedente, è un palazzo arabo ricco di storia e cultura, che inoltre ha ispirato artisti internazionali, come W. Irving, autore americano, ed M. C. Escher, pittore olandese. L'interesse che l'Alhambra suscita tocca più discipline.
Il progetto è stato pensato per gli studenti di una scuola secondaria di secondo grado nel secondo anno del primo biennio, dato che gli argomenti affrontati riguardano un periodo storico studiato verso la fine del primo biennio e poichè in questo modo gli allievi si conoscono già da almeno un anno. Le materie che vengono coinvolte sono presenti nei Licei, però con alcune modifiche il progetto può essere adattato anche in Istituti Tecnici e Professionali.
Le classi quinte sono maggiormente adatte alle attività, dato il livello di riflessione richiesto, ma tale progetto si adatta anche nelle altre.
Il progetto didattico è stato elaborato utilizzando lo schema in[1].

Titolo: La mia Alhambra.

Compito: Preparazione a gruppi di una guida digitale o cartacea di presentazione dell'Alhambra.

Ambiti disciplinari di riferimento: Storia, Letteratura, Inglese, Diritto, Religione, Filosofia, Storia dell'arte, Matematica.

Ambienti utilizzati: Aula con supporti multimediali, laboratorio di informatica, Alhambra, casa.

Obiettivi:
1. Imparare a raccogliere, selezionare ed utilizzare le fonti e le informazioni tratti da testi letterari, artistici e scientifici utili all'attività di ricerca.

[1] Guerra Luigi, *"Modelli operativi per il Progetto Didattico"*, reperibile alla pagina web *https://elearning-cds.unibo.it/mod/imscp/view.php?id=53246*.

2. Elaborare, progettare, definire strategie d'azione, organizzare, sviluppare le attività.
3. Individuare e rappresentare collegamenti e relazioni tra eventi e concetti di diverse discipline, cogliendo analogie e differenze.
4. Effettuare confronti tra diversi popoli in un'ottica interculturale, riconoscendo i tratti peculiari e comuni.
5. Analizzare la situazione da un punto di vista storico e valorizzare il patrimonio artistico.
6. Trovare occasioni per approfondire secondo i propri interessi e attitudini.
7. Sviluppare una riflessione personale.
8. Interagire, coordinarsi e confrontarsi in gruppo.
9. Ideare e strutturare un prodotto finale.
10. Rappresentare il risultato finale tramite un'esposizione.

Sviluppo delle attività:
`Fase 1.` Lezione introduttiva al progetto e al viaggio di istruzione: vengono definite le tempistiche e lo sviluppo delle attività successive. (1 ora)
`Fase 2.` Approfondimento di Storia: analizzare l'espansione dell'impero arabo, dalla fondazione della religione musulmana fino alla sua caduta e alla conquista cristiana dell'impero arabo in Andalusia a opera di Isabella I di Castilla e Fernando II d'Aragona.
`Fase 3.` Approfondimento di Lingua Inglese: confrontare le opere e lo stile dello scrittore americano Washington Irving (New York, 1783 – New York, 1859) con quelli di autori inglesi contemporanei, come George G. Byron (Londra, 1788 – Missolungi, 1824) o Mary Shelley (Londra, 1797 – Londra, 1851).
`Fase 4.` Approfondimento di Letteratura Italiana: lettura di brani dal libro di W. Irving, *Racconti dell'Alhambra*, e confronti con alcuni testi del romanticismo italiano: Ugo Foscolo (Zante, 1778 – Turnham Green, 1827), Alessandro Manzoni (Milano, 1785 – Milano, 1873), Giacomo Leopardi (Recanati, 1798 – Napoli, 1837).
`Fase 5.` Approfondimento di Diritto: lezione sulle forme di governo, attuali e passate in Italia, Spagna e in alcuni paesi arabi.
`Fase 6.` Approfondimento di Religione e Filosofia: analisi della cultura araba e della religione musulmana.
`Fase 7.` Approfondimento di Storia dell'Arte: lezione sulle decorazioni dell'Alhambra e sugli artisti che ha ispirato, come M.C. Escher, e confronto con i mosaici italiani di Ravenna.
`Fase 8.` Approfondimento di Matematica: cenno sulle conoscenze matematiche del mondo arabo e sulla matematica presente nei mosaici dell'Alhambra utilizzando un approccio etnomatematico.

Ognuno degli approfondimenti disciplinari, descritti nelle fasi dalla 2 alla 8, avrà una durata di circa 2 o 3 ore a discrezione del docente.
`Fase 9`. Viaggio d'istruzione.
`Fase 10`. Formazione dei gruppi, formati ognuno da 3 o 4 studenti, da parte degli stessi allievi. Inizio dei lavori per la stesura di una guida, che metta in risalto la multidisciplinarietà legata all'Alhambra e approfondisca gli aspetti considerati più interessanti tra quelli esposti negli approfondimenti proposti dai docenti. Questa fase sarà svolta in parte in classe, occupando circa 2 ore, e in parte a casa.
`Fase 11`. Esposizione dei lavori, con ausilio di supporti cartacei, come cartelloni, o digitali, come filmati, PowerPoint, etc. Ogni gruppo esporrà il proprio lavoro per circa 20 minuti.

Tempi: Da ottobre a marzo, secondo la scansione indicativa della tabella.

Ottobre				Novembre				Dic.		Gennaio			Febbraio				Marzo			
F.1																				
	F. 2																			
			F. 3																	
					F. 4															
							F. 5													
									F. 6											
											F. 7									
													F. 8							
																F. 9				
																		F.10		
																				F.11

Criteri di valutazione:
1. Capacità di collaborare e confrontarsi.
2. Partecipazione e assunzione di responsabilità nel gruppo.
3. Capacità di individuare le fonti e raccogliere le informazioni utili.
4. Capacità di individuare collegamenti e relazioni, analogie e differenze.
5. Capacità di pianificare e strutturare il lavoro.
6. Capacità di passare dall'idea alla realizzazione.
7. Originalità della produzione finale.
8. Capacità di esporre davanti a un pubblico in maniera chiara ed esaustiva.
9. Capacità di creare una composizione finale completa e valida.

La valutazione del progetto sarà in parte formativa e in parte sommativa.

La valutazione formativa sarà basata principalmente sulla partecipazione in aula, sulla responsabilità, sulle capacità di riflessione, sulla collaborazione dimostrata durante i lavori di gruppo e sulla valutazione dei compiti assegnati durante gli approfondimenti. Sarà quindi oggetto di valutazione quanto osservato in aula, considerando i miglioramenti nel corso del progetto.
Mentre la valutazione sommativa riguarderà principalmente il prodotto finale, in base alla validità e alla completezza del risultato, alla chiarezza ed esaustività dell'esposizione e all'originalità del lavoro.

3.3 Fase 8: Progettazione della lezione matematica sui gruppi cristallografici piani

Ho sviluppato la lezione di matematica, partendo dall'osservazione dei mosaici presenti nell'Alhambra di Granada. Ho strutturato la lezione utilizzando un approccio etnomatematico: ho introdotto un concetto matematico partendo da aspetti culturali e artistici. In questo modo è stato possibile fornire stimoli e fare riflessioni sulla matematica, sulla cultura e sulla diversità. Trattandosi dell'ultimo approfondimento disciplinare, vengono date per scontate la conoscenza dalla storia dell'impero arabo durante il quale venne costruita e abitata l'Alhambra e informazioni sull'arte geometrica presente al suo interno. Nelle Indicazioni Nazionali per i Licei la nascita e la diffusione dell'Islam sono parte del programma di Storia del primo biennio, mentre non è prevista la trattazione dell'arte araba in Storia dell'Arte. Si propone quindi un'attività di gruppo partendo da immagini dei mosaici, così da prendere confidenza con il concetto matematico di simmetria, utile per introdurre un concetto matematico nuovo, che non è presente nella indicazioni ministeriali: il concetto di gruppo matematico. Questa struttura della lezione fornisce lo spunto per introdurre l'etnomatematica e quindi una visione diversa della matematica rispetto a quella solitamente presentata a lezione. L'intenzione è di mostrare come i concetti culturali possano essere collegati ad aspetti culturali. Come visto nel primo capitolo in alcune culture la matematica è vista come imprescendibile da aspetti culturali quali la religione, l'arte e le forme di potere.
Inoltre l'attività vuole creare occasioni di riflessione sui motivi per cui si sviluppa la conoscenza matematica, ad esempio per l'esigenza di descrivere la realtà in maniera condivisa. Questa lezione, fornendo un'occasione per parlare del collegamento tra matematica e cultura, vuole portare a una riflessione sulla natura della matematica: i concetti matematici sono già presenti in natura e vengono scoperti o vengono creati dall'uomo?

Gli obiettivi degli studenti di questa lezione sono:

1. lavorare in gruppo;
2. capire il nuovo un concetto matematico introdotto;
3. riflettere sui possibili collegamenti tra matematica e realtà o matematica e altre discipline;
4. riflettere sul significato di matematica, di cultura e di diversità.

L'intenzione del docente, oltre quella di introdurre un nuovo concetto matematico, non è di dare delle risposte sulla natura della matematica, ma quella di creare degli stimoli di riflessione.
Ho strutturato la lezione con le attività e tempi di attuazione mostrati di seguito.

1. Ripercorrere le tappe principali della storia dell'Alhambra mostrando i mosaici attraverso un video o delle foto, circa 5 minuti. Questa parte ha lo scopo di ripassare gli approfondimenti di Storia e Storia dell'Arte.
2. Primo lavoro di gruppo: data un'immagine formata da quattro riquadri, di cui ognuno è una tassellazione e in cui in ognuno sono presenti delle simmetrie, definire cos'è una tassellazione e cos'è una simmetria, dare circa 10 minuti per rispondere ad entrambi i quesiti.
3. Analizzare insieme le risposte date dai gruppi, circa 10 minuti.
4. Definire i concetti matematici di tasselazione e di simmetria, per circa 15 minuti.

   Definizione 3.1. Una *tassellazione* del piano è una collezione $\mathcal{F} = \{P_i : i \in I\}$ di poligoni P_i, detti tasselli o facce, tali che:

   - $\bigcup_{i \in I} P_i = \mathbb{R}^2$;
   - se $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ allora l'intersezione è data da un vertice o da uno spigolo comune;
   - se v è un vertice di una faccia $\mathcal{F}$ allora v è vertice di un numero finito di facce di $\mathcal{F}$.

   Altrimenti si può fornire una definizione meno formale: le tassellazioni sono i modi di ricoprire completamente piano, quindi senza lasciare spazi vuoti, con delle figure ripetute, senza sovrapposizioni.
   Si possono quindi introdurre, a discrezione del docente, le definizioni di tassellazione regolare e uniforme, mostrando anche alcune immagini.

Definizione 3.2. Una tassellazione si dice *regolare* se tutte le facce sono poligoni regolari cogruenti tra loro.
Una tassellazione si dice *uniforme* se tutte le sue facce sono poligoni regolari, non necessariamente uguali tra loro.

Si può anche dimostrare che le uniche tassellazioni regolari del piano hanno per facce triangoli equilateri, quadrati ed esagoni.

Definizione 3.3. Una *simmetria* di una figura geometrica è un movimento rigido che lascia la figura invariata.
Per *movimento rigido* si intende una corrispondenza biunivoca di punti del piano che mantenga invariate le distanze: non cambiano le lunghezze dei segmenti né le ampiezze degli angoli.

Il concetto di movimento rigido è presente nelle Indicazioni Nazionali dei Licei nel programma del primo biennio, mentre non compare il concetto matematico di tassellazione.

5. Secondo lavoro di gruppo: data a ogni gruppo un'immagine di un mosaico presente nell'Alhambra in due copie, una su foglio normale e una su lucido, trovare le simmetrie, circa 20 minuti.

6. Introduzione del concetto di gruppo, partendo dalle simmetrie di un mosaico dell'Alhambra con l'operazione di composizione.

   Definizione 3.4. Un gruppo è un insieme G munito di un operazione binaria $\times$, che associa ad ogni coppia di elementi a, b di G un elemento $a \times b$ di G, per cui valgono:

   (a) Proprietà associativa: (a×b)×c=a×(b×c), $\forall$ a, b, c $\in G$;
   (b) Esistenza dell'elemento neutro: $\exists$ e $\in G$ t. c. a×e=e×a=a, $\forall$ a $\in G$;
   (c) Esistenza dell'inverso: $\forall$ a $\in G$ $\exists$ a', t. c. a×a'=e.

   Il gruppo si indica con $(G, \times)$.

   Si possono inoltre richiamare altri esempi di gruppo come l'insieme degli interi con l'operazione di somma, circa 10 minuti.

7. Breve spiegazione sui gruppi cristallografici e introduzione dell'etnomatematica, con esempi, circa 15 minuti.

8. Discussione con i ragazzi sul ruolo della cultura nella formazione del pensiero matematico, circa 10 minuti.

3.4 Fase 8: Realizzazione in aula

La Fase 8, descritta nella sezione precedente, è stata proposta come un approfondimento di due ore in quattro classi del Liceo Statale E. Medi di Villafranca di Verona. Prima e dopo l'attività vera e propria sono stati somministrati agli studenti due qustionari aventi l'obiettivo di indagare le idee degli studenti riguardo al rapporto tra matematica e realtà e la loro soddifazione rispetto all'attività. Tali questionari saranno analizzati nel Capitolo 4. L'attività proposta, non essendo inserita all'interno di un progetto didattico, non è completamente in linea con quella descritta nella sezione precedente, ma ne condivide i tratti principali. Tra le modifiche che ho apportato ho introdotto la storia dell'impero arabo e ho descritto l'Alhambra e l'arte geometrica in essa presente.
Le finalità che mi ero prefissata erano:

1. motivare l'interesse dei ragazzi verso approfondimenti matematici;
2. proporre un approccio nuovo alla matematica, in cui partendo da un contesto storico e culturale si giunga a definire concetti matematici;
3. avviare una riflessione sul rapporto tra matematica e cultura;
4. fornire nuovi stimoli di riflessione ai ragazzi sulla natura della matematica.

3.4.1 Descrizioni delle classi

Ho realizzato l'attività nelle seguenti quattro classi.

2B La classe è dell'indirizzo Scientifico Cambridge International, si tratta di un Liceo scientifico con un offerta formativa in cui sono previsti un maggior numero di ore di Inglese e l'insegnamento di *Biology*, lezioni di biologia completamente in lingua inglese.
La classe è formata da 24 alunni, tredici femmine e undici maschi, tra cui un ragazzo adottato proveniente dal Nepal, una ragazza di origini brasiliane, due studenti di origini rumene e un ragazzo svizzero, che ha affrontato gli ordini scolastici precedenti in Svizzera.
È presente una ragazza certificata con disturbo specifico dell'apprendimento (DSA).
In aula si nota interesse elevato e costante, la partecipazione è attiva, il comportamento è corretto e rispettoso. I ragazzi tra di loro sono collaborativi e tutti ben integrati.

2C La classe, del Liceo Scientifico, è formata da 29 studenti, tredici femmine

e sedici maschi, tra cui un ragazzo di origine rumene.
Due ragazzi hanno la certificazione DSA e uno la certificazione con programmazione differenziata (PEI).
Nel complesso si nota attenzione e discreta partecipazione, il comportamento è corretto e rispettoso. I ragazzi tra di loro sono nel complesso collaborativi, nonostante alcuni di loro siano meno integrati.

3A La classe, che segue l'indirizzo Scientifico Cambridge International, è formata da dieci alunni, cinque femmine e cinque maschi, tra cui un ragazzo di origini croate.
Durante le lezioni l'interesse e la partecipazione sono elevate e costanti, la classe interviene in maniera attiva e stimolante, il comportamento è corretto e rispettoso. I ragazzi tra di loro sono molto collaborativi e uniti.

5B La classe è dell'indirizzo Scientifico Cambridge International. È formata da ventisei studenti, quattordici femmine e dodici maschi, tra cui un ragazzo di origini indiane e un ragazzo ripetente.
Durante le lezioni l'interesse e la partecipazione da parte degli studenti sono elevate e costanti, la classe interviene in maniera attiva, il comportamento è corretto e rispettoso. I ragazzi tra di loro sono collaborativi.

3.4.2 Introduzione

Ho proposto nelle quattro classi un approfondimento sulle connessioni tra matematica e cultura, basandomi sui gruppi cristallografici presenti nell'Alhambra di Granada. Ho utilizzato un approccio etnomatematico, cioè sono partita presentando aspetti storici e culturali per poi a arrivare a concetti matematici. Ho fatto ricorso a metodologie didattiche che facessero leva sulla creatività e la produzione di conoscenza, attraverso il lavoro cooperativo e l'apprendimento per scoperta.
In ognuna delle quattro classi è stata realizzato un intervento in aula con il supporto della lavagna interattiva multimediale.
In precedenza le docenti di matematica delle classi avevano presentato il progetto in linee generali, anticipando che ci sarebbe stata un'attività a gruppi. L'attività risultava quindi innovativa sia per le metodologie didattiche, quali l'uso di strumenti multimediali, pratiche di gruppo e lezione dialogata, alle quali gli studenti non erano abituati, sia per i contenuti proposti.
Vediamo in dettaglio l'articolazione della lezione.
Ho iniziato la lezione introducendo le attività delle successive due ore con il supporto di slide che avevo preparato in precedenza, riportante in Figura 3.1.

Per motivare l'interesse ho mostrato la fotografia dell'Alhambra (Figura 3.2),

Figura 3.1: Slide di introduzione.

fornendo alcune informazioni storiche sull'origine del complesso architettonico e sulla sua collocazione geografica.

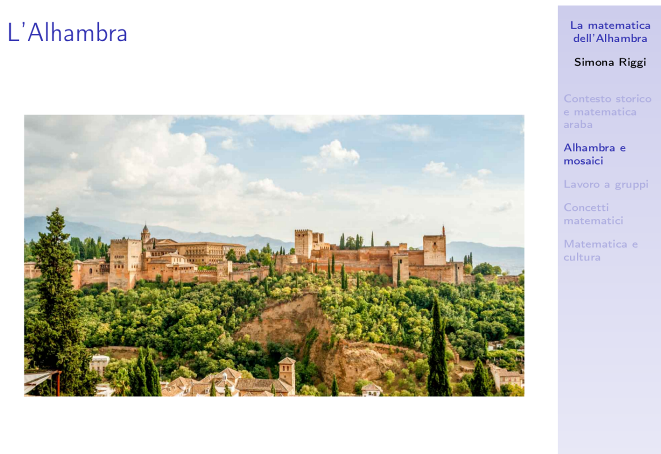


Figura 3.2: Immagine dell'Alhambra.

La presenza di un edificio arabo in Spagna mi ha permesso di fare collegamenti con altre discipline, come la storia. Ho così mostrato la cartina che si vede in Figura 3.3, per fornire dei cenni sulle tappe principali della storia dell'impero arabo.

Figura 3.3: Cartina impero arabo.

Utilizzando le slide in Figura 3.4 ho evidenziato la crescita culturale promossa dall'impero arabo nei territori conquistati, concentrandomi sull'evoluzione nell'ambito matematico. In particolare ho esposto alcuni interessanti risultati ottenuti da al-Khuwarizmi nell'algebra. In un momento di crisi del mondo occidentale, gli arabi hanno saputo raccogliere il sapere delle popolazioni conquistate per poi produrre nuove conoscenze. Ho inoltre dato delle informazioni sulla fine di questo periodo e sulla distruzione di numerosi testi arabi da parte dei popoli conquistatori.

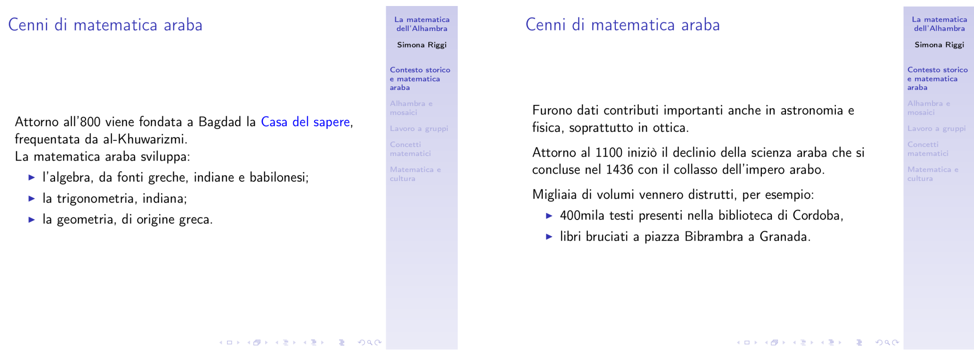


Figura 3.4: Slide sulla matematica araba.

Dopo questa introduzione ho riportato l'attenzione degli studenti nuovamente sull'Alhambra e sull'arte che vi è presente, mostrando gli interni dell'Alhambra in Figura 3.5. Ho riportato inoltre alcuni esempi di artisti che sono stati ispirati da questo monumento, come M.C.Escher e W. Irving.

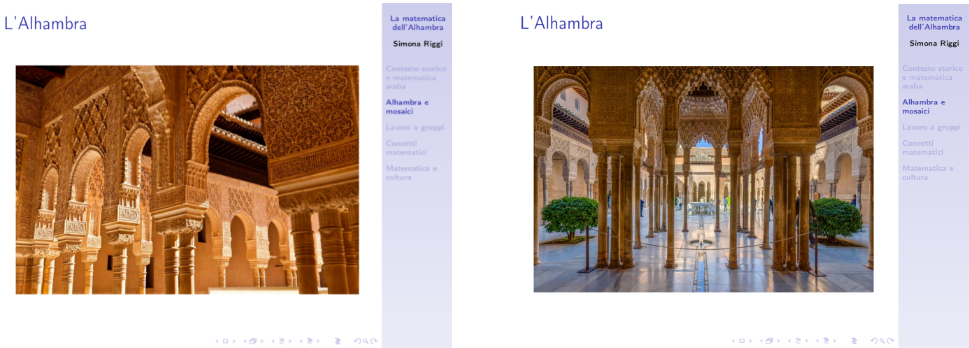


Figura 3.5: Alhambra.

Questa prima parte è durata in media quindici minuti, con tempistiche leggermente diverse nelle quattro classi, dovute al numero di interventi degli studenti. Tutte le classi hanno ascoltato con rispetto e attenzione. Ogni tanto ho sollecitato gli interventi, chiedendo ai ragazzi cosa già sapessero dai loro studi precedenti. Le classi 2C e 3A si sono mostrate più attive e partecipi.
Ho concluso questa prima parte introduttiva mostrando un video della durata di circa tre minuti sui mosaici presenti nell'Alhambra, intitolato *Mosaicos de la Alhambra*[2], in cui vengono presentati in modo dinamico i mosaici in Figura 3.6.

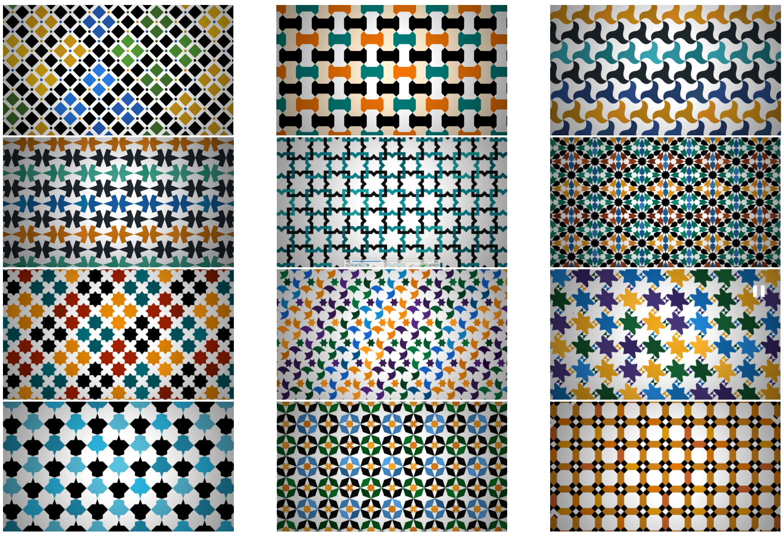
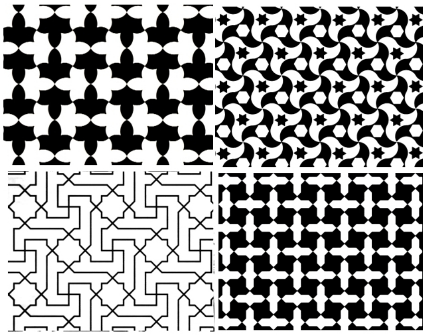


Figura 3.6: Mosaici presenti nel video.

[2] Il video si può reperire alla pagina web *https://www.youtube.com/watch?v=CoJ6u8trLvg#action=share.*

3.4.3 Attività di gruppo e di scoperta

Ho quindi proposto ai ragazzi un'attività strutturata in due momenti, da svolgere in piccoli gruppi formati da duo o tre persone. Nella prima parte opportunamente stimolati gli studenti dovevano giungere a delle definizioni, nel secondo momento dovevano scoprire le simmetrie presenti in un immagine, attraverso una serie di tentativi da fare in gruppo. Per svolgere la prima attività ho dato ad ogni gruppo una fotocopia che riporta l'immagine presente a lato, in cui sono presenti quattro riquadri, ognuno è una tasselazione e in ognuno sono presenti più simmetrie. Ho quindi chiesto di osservare le riproduzioni e cercare di fornire definizioni generali di tassellazione e di simmetria.



Dopo aver consegnato ad ogni gruppo una scheda con la consegna ho lasciato 10 minuti di tempo per rispondere alle due domande seguenti.

1. Cos'è una tassellazione?
2. Cos'è una simmetria?

Mentre l'esercizio proposto veniva eseguito ho girato tra i banchi, per rispondere a richieste di chiarimenti, che sono state molto rare. La maggior parte dei gruppi, in ogni classe, ha concluso l'attività prima dello scadere del tempo, solo pochi gruppi sono stati sollecitati a rispettare la tempistica. I gruppi hanno lavorato in maniera collaborativa e matura in ognuna delle quattro classi.
Conclusa questa attività ho proposto ai gruppi di leggere le proprie definizioni. Per quanto riguarda la definizione di tassellazione la descrizione prevalente è quella di modalità per incastrare figure, per lo più geometriche, in una superficie, secondo una struttura precisa, senza lasciare spazi vuoti. Tra le risposte infatti compaiono le frasi: *"Ripetizione di strutture geometriche posizionate secondo regole precise, volte ad incastrarsi tra di loro, senza lasciare spazi vuoti"*, *"Tecnica che prevede la ripetizione di una o più figure geometriche accostate fra loro, secondo un ordine preciso"*, *"Disporre delle figure geometriche, in modo ordinato e continuo, senza lasciare spazi vuoti"*.
Le questioni che si sono rivelati motivo di discussione hanno riguardato la forma dei tasselli, cioè se questi debbano necessariamente essere poligoni regolari, e l'eventuale ammissione di spazi vuoti.
Per quanto riguarda la definizione di simmetria, tutti i gruppi hanno dato

una descrizione di riflessione anzichè dare la definizione corretta. Esempi di alcune risposte sono: *"Tracciare una linea che divida una figura in due parti speculari, una rispetto all'altra", "Sistema di due o più figure poste a specchio rispetto a un asse di simmetria".* Ho fornito quindi le definizioni in Figura 3.7, ripassando il concetto di movimento rigido e fatto notare come simmetria e riflessione non siano sinonimi, dato che anche traslazioni, rotazioni e glissoriflessioni possano essere simmetrie.

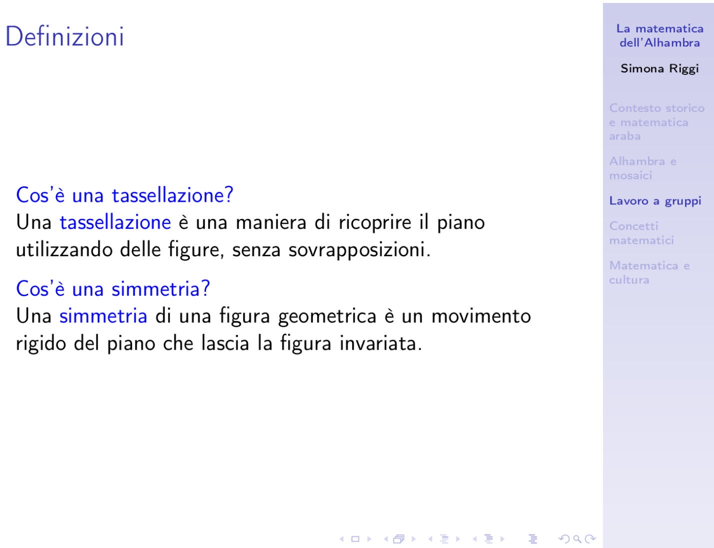


Figura 3.7: Slide con definizioni.

Questa parte di parte di confronto tra definizioni e di spiegazione dei concetti è durata poco più di 10 minuti.

Nella seconda parte dell'attività di gruppo ho distribuito ad ogni gruppo due copie di un'immagine rappresentante una porzione di un determinato mosaico, scelto tra quelli in Figura 3.8, una copia su foglio normale e l'altra su lucido. Con questi strumenti ho chiesto di identificare le simmetrie presenti nel mosaico. Questa attività ha impegnato gli studenti per circa 20 minuti. Mentre passavo tra i banchi mi sono state rivolte più domande, sia sulla definizione di simmetria sia sulla correttezza dei risultati trovati. Più gruppi hanno evidenziato difficoltà nel definire la rotazione, cioè sia nell'identificare i centri di rotazione e sia nel trovare l'ampiezza dell'angolo. Inoltre in più casi è stato necessario suggerire strategie per identificare tutte le simmetrie. I ragazzi si sono rivelati anche in questa parte dell'esercizio collaborativi e tendenzialmente concentrati nell'attività. In quinta i ragazzi si sono mostrati più restii a fare domande.

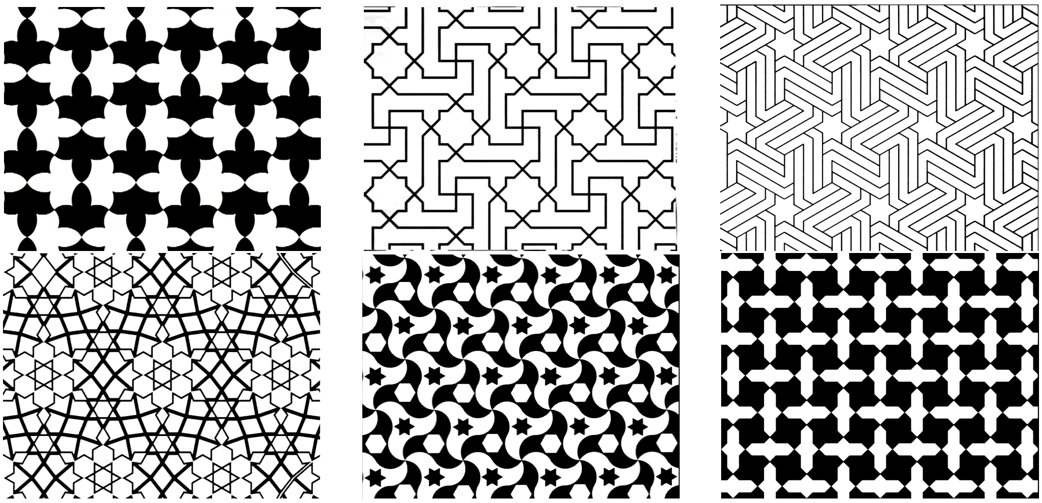


Figura 3.8: Esercizio in aula.

Alla fine dei venti minuti, quasi tutti i gruppi avevano trovato tutte le simmetrie, anche se spesso guidati dai suggerimenti. Particolarmente interessante è stato il caso di un ragazzo di 2C che per dimostrare la presenza di una rotazione di 90° ha fatto uso di due riflessioni perpendicolari.
Dopo aver condiviso i risultati del lavoro di gruppo ho ritenuto utile mostrare in maniera esaustiva le soluzioni dell'esercizio proposto facendo vedere un video di circa sette minuti tratto da [8]. Nella parte di video proiettata in classe vengono mostrate le simmetrie presenti nei sei mosaici in Figura 3.8.

3.4.4 Concetti matematici

Le attività precedenti, più pratiche e divulgative, hanno avuto lo scopo di motivare l'attenzione e l'interesse degli studenti, oltre che far prendere loro confidenza con il concetto di simmetria. Attraverso il laboratorio proposto i diversi gruppi hanno scoperto alcune proprietà riguardanti le simmetrie e la composizione di simmetrie. A questo punto ho introdotto un nuovo concetto matematico, il Gruppo, utilizzando la slide in Figura 3.9.

Per prima cosa è stato indispensabile far notare agli studenti che l'insieme di riferimento è formato da simmetrie, quindi da movimenti, mentre gli insiemi che hanno visto durante il corso di studi precedente erano formati da numeri o da punti. Inoltre ho definito la composizione di due simmetrie come ciò che si ottiene applicando una simmetria di seguito all'altra. Ho quindi spiegato punto per punto le proprietà soddisfate dall'insieme delle simmetrie con l'operazione di composizione, definendo quindi il gruppo come la struttura

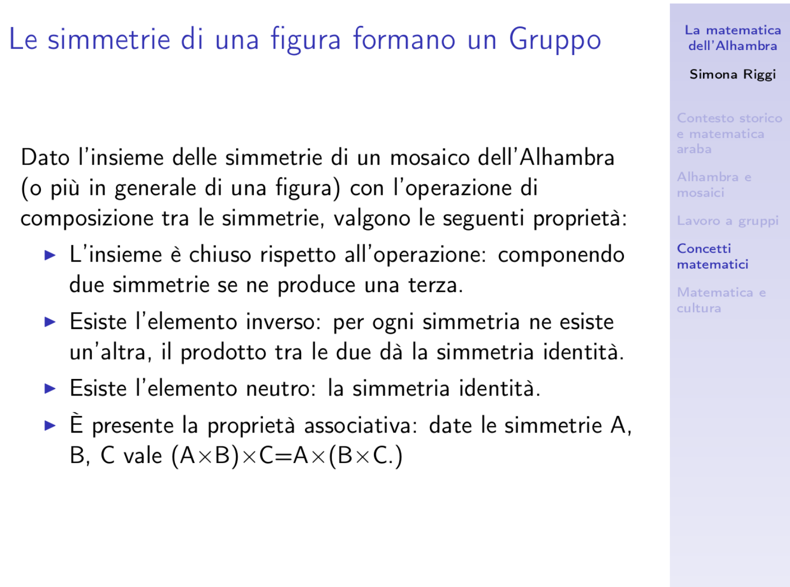


Figura 3.9: Slide sul concetto di Gruppo.

matematica formata da un insieme e un'operazione per cui valgono le proprietà elencate in Figura 3.9.
Questa spiegazione ha richiesto l'uso della lezione frontale, in cui ho proposto concetti matematici astratti facendo continui riferimenti all'attività pratica svolta precedentemente dai ragazzi. Per fornire nuovi esempi di gruppi ho chiesto alla classe di analizzare se queste proprietà fossero valide anche anche per l'insieme dei numeri interi con l'operazione di somma, l'insieme dei numeri interi con l'operazione di moltiplicazione, l'insieme dei numeri razionali con l'operazione di moltiplicazione, l'insieme dei numeri razionali, meno lo zero, con l'operazione di moltiplicazione. In tutte le classi alcuni ragazzi hanno risposto correttamente e hanno colto le analogie tra i diversi esempi. A questa parte sono stati dedicati circa 15 minuti.

3.4.5 Etnomatematica

A questo punto ho proposto alla classe una riflessione sulle attività realizzate. È stato introdotto un concetto matematico, quello di gruppo, attraverso un'attività pratica. È stato fornito un esempio di come la cultura possa stimolare l'astrazione del pensiero matematico.
Ho quindi suggerito una riflessione agli studenti sul processo che porta alla costruzione dei concetti matematici: si parte dall'osservazione della realtà e si cercano strategie per descriverla. Ho inoltre fatto notare come talvolta

l'uomo faccia uso della matematica per creare armonia e bellezza, come nell'arte geometrica presente in numerosi monumenti arabi, di cui l'Alhambra è un esempio.
Ho poi posto l'accento su una particolarità dell'Alhambra. Dati alcuni mosaici di questo palazzo e considerato per ognuno di essi l'insieme delle simmetrie, con l'operazione di composizione, questi formano dei particolari gruppi: i gruppi cristallografici piani. In particolare tra i mosaici dell'Alhambra ci sono diciasette diversi gruppi cristallografici. La cosa sorprendente è che esiste un teorema che dimostra che i gruppi cristallografici sono esattamente diciasette, si veda il Teorema 2.7.1. Gli arabi hanno quindi rappresentato tutti i gruppi cristallografici senza conoscere il concetto matematico di gruppo. La ricerca geometrica che li ha portati alla realizzazione di questi mosaici non è stata sviluppata per motivi matematici, ma artistici e religiosi: si volevano decorare i monumenti rispettando il comando presente nel Corano di non raffigurare nè Allah nè la natura.

Con queste considerazioni ho introdotto l'etnomatematica, utilizzando le slide in Figura 3.10.

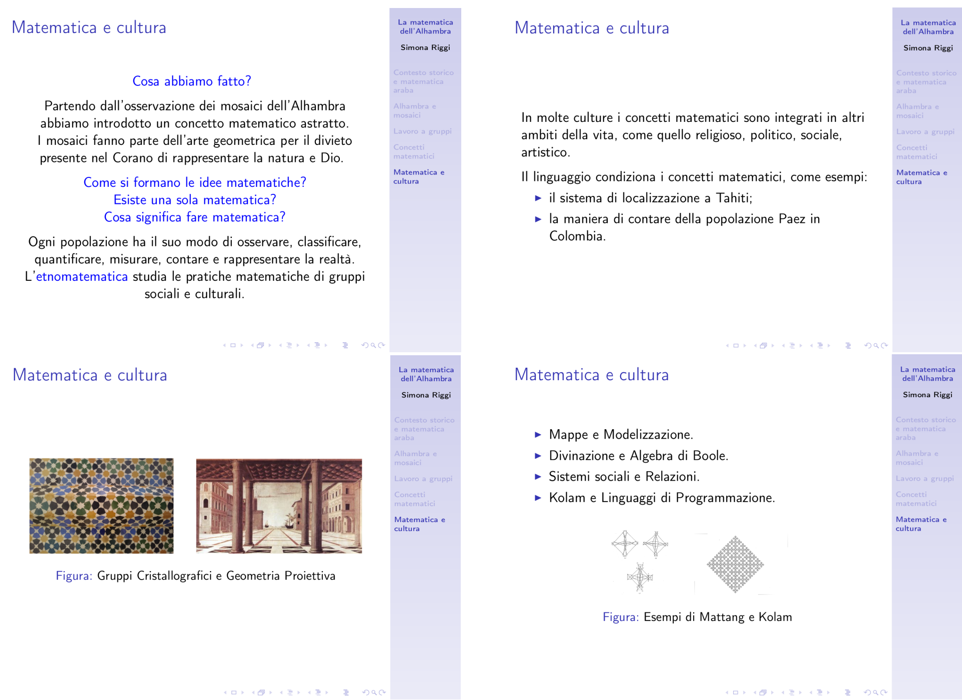


Figura 3.10: Slide sull'etnomatematica.

Partendo da considerazioni su quanto esaminato, ho posto delle domande

sulla natura della matematica e sulla sua origine. Ho quindi spostato l'attenzione su cosa siano le pratiche matematiche. Queste comprendono attività come misurare, contare, muoversi nello spazio, rappresentare la realtà. Queste pratiche sono legate alla cultura dei gruppi sociali, che possono essere popolazioni etniche, ma anche ad esempio gruppi di artigiani o di studenti.
Un altro esempio che ho proposto di connessione tra arte e matematica è quello tra le tecniche pittoriche del XV secolo, che utilizzano la prospettiva per rappresentare paesaggi e città, e i concetti matematici della geometria proiettiva.
Ho fornito alcuni casi di studi etnomatematici, descritti nella Sezione 1.2. Ho scelto di fornire più esempi, differenti tra loro sia a livello geografico che per la matematica presente, per poter fornire un panorama ampio di ricerca etnomatematica.
Ho infine dato un cenno alle due visioni della matematica, una che parte dal presupposto che i concetti matematici siano presenti in natura e sia compito dell'uomo scoprirli, l'altra che sia l'uomo a costruirli partendo dall'osservazione della realtà.
Questa parte è durata circa 20 minuti, in ogni classe i ragazzi hanno mostrato interesse e rispetto. Gli studenti di 3A e 5B si sono mostrati maggiormente interessati, volendo conoscere più esempi e soddisfare diverse curiosità.

3.4.6 Conclusioni

Complessivamente, come si evince dal questionario finale (vedi Capitolo 4), gli studenti si sono mostrati interessati agli argomenti trattati. L'attenzione è stata elevata durante tutta la lezione, anche se la partecipazione in certi momenti è stata limitata. Infatti spesso i ragazzi hanno mostrato delle resistenze a esporre dubbi o a rispondere alle domande che gli rivolgevo. Il dialogo è stato scarso, soprattutto nelle classe quinta. Questo può essere conseguenza del fatto che gli studenti non siano abituati a lezioni interattive e temano il giudizio dei compagni e del docente.
Un elemento di novità è dato dai laboratori proposti, infatti questi puntavano sulla produzione di conoscenze e non sulla loro riproduzione. Solitamente gli esercizi scolastici si eseguono seguendo delle regole precedentemente esposte dall'insegnante. Nella attività che ho proposto invece lo studente è stato in un primo momento guidato, però doveva trovare le soluzioni utilizzando creatività e intuizione. Questi esercizi prevedono uno sforzo differente e in certi versi maggiore rispetto a quello a cui sono solitamente abituati. In questo modo si voleva attivare l'attenzione degli studenti, per evitare che assistessero passivamente alla lezione.

L'approfondimento proposto ha presentato quindi diversi elementi di originalità: le metodologie innovative utilizzate, il contenuto proposto e l'approccio etnomatematico alla disciplina. Ciò ha contribuito a rendere interessante ed efficace l'attività svolta.
Il lavoro presentato utilizza un'impostazione che più in generale può rivelarsi utile al docente nel presentare nuovi argomenti in classe oppure per sviluppare approfondimenti che forniscano stimoli di riflessione sul significato di matematica.

Capitolo 4

Indagine sull'idea di matematica propria degli studenti

In questo capitolo ho esaminato le concezioni degli studenti sulla matematica, in particolare riguardo alla sua natura e al rapporto tra matematica e cultura, attraverso l'analisi di due questionari che ho somministrato in aula. Dopo un'introduzione in cui ho riportato alcuni risultati di ricerca in questo campo, ho mostrato i risultati dei questionari per trarre le conclusioni sull'idea di matematica degli studenti.

4.1 Introduzione

Le concezioni costituiscono le basi su cui ogni individuo costruisce le proprie conoscenze. Hanno una forte influenza sulla persona, infatti condizionano le percezioni di un individuo riguardo le situazioni che lo coinvolgono e il modo in cui interpreta gli avvenimenti. Condizionano inoltre la scelta delle azioni e la propensione di agire in un determinato modo.
In generale le concezioni si riferiscono a percezioni, supposizioni, ideologie, filosofie e caratteristiche che il soggetto attribuisce a una materia o a un argomento. Riguardano quindi l'idea che ha la persona riguardo a un determinato tema. Ma influenzano anche la formazione dei saperi e i comportamenti della persona. Si tratta delle basi su cui si costruiscono le idee e i pensieri, da cui poi nascono diverse visioni riguardo determinati argomenti o temi.
In [16] vengono descritte come *"configurazioni cognitivo e affettive a cui il lettore attribuisce un valore di verità, per esempio verità empirica, validità, applicabilità"*. Toccano più livelli, sia quello cognitivo, che quelli emotivi, affettivi, motivazionali. La sfera cognitiva è caratterizzante delle conoscenze, con cui a volte le concezioni vengono confuse. Le concezioni costituiscono

idee di base su cui le conoscenze si sviluppano. La frase sopraccitata inoltre sottolinea che le concezioni sono considerate vere dal soggetto che le possiede. Le concezioni si sviluppano nella persona nel corso della sua vita, influenzate da esperienze scolastiche e quotidiane. Sono profondamente radicate negli studenti, difficili da modificare, ma solitamente nel percorso di crescita dell'individuo si trasformano ed evolvono, in seguito a stimoli di vario genere.
Avere concezioni è una caratteristica di ogni persona, sia degli studenti che dei docenti. L'insegnante influenza attraverso le proprie spiegazioni le visioni degli studenti. Determinate concezioni portano il docente a utilizzare metodi di insegnamenti in linea con la propria visione. Cambiamenti di metodi portano a cambiamenti di visioni. In [12] gli autori sostengono che gli studenti hanno quattro possibli concezioni di matematica:

1. è una scienza esatta, che da assiomi di base si sviluppa per deduzione;

2. è un insieme di termini, regole e formule;

3. è una scienza caratterizzata da processi di *problem-solving* e dalla scoperta di strutture e regole;

4. è una scienza presente nella società e nella vita, serve a risolvere problemi quotidiani e a rappresentare la realtà.

Gli autori sottolineano come i primi due punti si riferiscano ad un'idea di matematica statica, mentre gli ultimi due ad un'idea dinamica di matematica. Ovviamente tali concezioni non sono referibili solo agli studenti, possono essere proprie, ad esempio, anche dei docenti e chiaramente l'approccio didattico che l'insegnante utilizza è fortemente influenzato dalla concezione che possiede della materia. I docenti che hanno una concezione statica tendono a utilizzare un'impostazione più ripetitiva, mentre quelli che hanno una concezione dinamica tendono a non utilizzare un solo metodo e a proporre esercizi che prevedono più metodi risolutivi.
In [13] si pone l'attenzione sulla contrapposizione tra visione platonica e costruttivista della matematica. L'autore evidenzia come per alcuni studenti la matematica sia un insieme di conoscenze che esiste a prescindere dall'uomo, questa visione viene chiamata platonica, mentre per altri si tratta di una costruzione umana.
Da un punto di vista didattico, indagare le concezioni degli studenti è molto importante, come detto in [21] *"Le concezioni di cosa la matematica sia e le relative idee di come si sviluppi negli aspetti della vita sembra costituire la chiave di interpretare i modi degli studenti di viversi la realtà in classe"*.
Le concezioni sulla matematica che posseggono gli studenti si possono riferire

a più dimensioni, emotiva, epistemologica, didattica. Abbiamo deciso di indagare quella epistemologica, in particolare analizzare le concezioni riguardo la natura della matematica e il rapporto tra matematica e cultura.
Ovviamente non è facile osservare e definire le concezioni e le convinzioni effettive degli studenti. Il modo migliore è quello di osservare l'atteggiamento e gli interventi che effettuano in aula in un lungo arco temporale. Non essendo possibile questo abbiamo somministrato due questionari, uno iniziale e uno dopo aver proposto una lezione che ha tra i suoi obiettivi quello di stimolare una riflessione sulla natura della matematica.

4.2 Primo questionario

Il primo questionario somministrato è stato compilato dagli studenti su supporto cartaceo, in aula, in circa quindici minuti. Le domande sono state le seguenti.

1. Secondo te cos'è la matematica?
2. Scrivi tre parole (aggettivi/verbi/sostantivi) che associ all'idea di matematica.
3. Da cosa ha origine secondo te?
4. Lo sviluppo della matematica è collegato, secondo te, ad avvenimenti storici e culturali? Perchè?
5. **"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne quali è scritto. Egli è scritto in linguaggio matematico, e i caratteri son triangolo, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberito."**
   Cosa significano secondo te queste parole di Galileo Galilei? Sei d'accordo?
6. Utilizzi la matematica nella tua vita quotidiana? Se sì, quando?
7. Pensi di poter creare connessioni interdisciplinari con la matematica? Se sì, con che materie? Puoi scrivere qualche esempio?

Hanno risposto 87 ragazzi: 24 studenti di 2B, 29 di 2C, 8 di 3A e 26 di 5B.
Vediamo ora un'analisi dei risultati.

Le risposte alla `domanda 1` sono state molto differenti tra loro, alcune parecchio pensate, altre più improvvisate.
Quasi tutte le risposte hanno la struttura *"La matematica è (1) che (2)"*, in Tabella 4.1 sono riportati i sostantivi utilizzati al posto di (1) e in Tabella 4.2 le caratteristiche inserite al posto di (2).

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Scienza	2	3	1	7	**13**
Strumento	2	3	//	//	**5**
Disciplina	7	10	//	9	**26**
Linguaggio	3	1	//	4	**8**
Altro (qualcosa,ciò...)	10	12	7	6	**35**
Totale	**24**	**29**	**8**	**26**	**87**

Tabella 4.1: Risposte domanda 1.

Osservando i dati riportati in Tabella 4.1, si nota che le risposte più frequenti sono quelle in cui la matematica è classificata come una disciplina oppure ne è descritto il ruolo senza definirla.
Per quanto riguarda i risultati riporti in Tabella 4.2, bisogna considerare che spesso le risposte date possono toccare più aspetti, per esempio una ragazza di 2B definisce la matematica come *"qualcosa che studia i numeri e le forme"* oppure molto studenti, soprattutto in 2C, la definiscono solo come *"una materia scolastica"*. Per questo il totale delle risposte riportate in Tabella 4.2 è differente da 87.

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Utilità pratica	8	7	//	4	**19**
Astrazione	1	//	2	1	**4**
Descrivere/capire l'universo	4	6	2	9	**21**
Base delle scienze	1	2	1	3	**7**
Lavorare con i numeri	7	8	3	8	**26**
Studio delle forme	1	//	//	1	**2**
Modo per ragionare	2	2	1	2	**7**
Trovare stabilità/ ordine	1	2	1	1	**5**
Totale	**25**	**27**	**10**	**29**	**91**

Tabella 4.2: Risposte domanda 1.

Una studentessa scrive *"La matematica è una sorta di "mondo astratto",*

prodotto dal pensiero", ma in realtà pochissimi pongono l'accento sull'astrazione. Questi risultati possono essere dovuti al fatto che, data per scontata l'astrattezza, la tendenza degli ultimi anni da parte di libri di testo e docenti sia quella di enfatizzare l'utilità pratica.
Circa un quarto degli studenti sottolinea l'utilità pratica: alcuni ragazzi scrivono *"La matematica è uno strumento per risolvere i vari aspetti della vita quotidiana", "È una disciplina scolastica utilizzabile nella vita di tutti i giorni", "È la scienza che mette in relazione tra loro i numeri con leggi e teoremi, per capire alcuni aspetti della vita quotidiana"*.
Un altro aspetto che viene messo alla luce è legato alla rappresentazione e descrizione dell'universo: *"Grazie alla matematica è possibile capire meglio il mondo", "È un linguaggio per interpretare in modo differente un fenomeno considerando specifiche caratteristiche"*.
Alcuni studenti considerano l'aspetto legato al ragionamento, tra le risposte compaiono: *"È un'opportunità, un modo per riflettere, per ingegnarsi e trovare soluzioni, meglio se non scontate", "È una scienza che comprende varie branche (logica, criptografia, statistica...) che fanno imparare alla mente come ragionare, le danno un metodo"*. Notiamo quindi aspetti che rimandano a concezioni legate a una dimensione dinamica, in particolare riguardo l'utilità pratica, la rappresentazione dell'universo e l'utilizzo di strutture utili nel *problem-solving.*
Ritroviamo anche una concezione di matematica statica, legata soprattutto all'utilizzo dei numeri e di procedure. In tutte le classi circa un terzo degli studenti associa la matematica all'uso dei numeri: *"La matematica è uno strumento sviluppato nel corso degli anni per permettere di effettuare i conti con precisione", "È un insieme di numeri e regole"*. È significativo che non ci siano differenze legate all'età: anche tra i ragazzi di quinta l'idea di matematica è ancorata a un'immagine limitata all'aritmentica. Veramente in pochi contemplano l'aspetto geometrico: solo due persone considerano lo studio delle forme.
Uno studente di 5B scrive che quello che caratterizza la matematica è la metodologia che utilizza: *"La matematica è una scienza che procede attraverso teoremi e dimostrazioni"*.
Viene inoltre sottolineato il bisogno di ordine e stabilità, uno studente scrive: *"È una materia, ma anche una filosofia di pensiero, che aiuta a mettere ordine, semplificare la realtà"*.
Una ragazza di 2C scrive: *"Secondo me la matematica è uno strumento per il quale puoi esprimere concetti che a parole non potrai mai fare, è libertà di esprimere tutto"*.

Le parole utilizzate per rispondere alla `domanda 2` sono state molto varie:

complessità, costanza, semplificare, studio, utilità, perfezione, soddisfazione, problemi, incognite, esercizi, risolvere, difficile, rigidità, astrazione, linguaggio, fantasia, infinito, universale, mente, uguaglianza, certezza, rassicurante, statistica, misura, quantità. Le ricorrenti sono riportate in Tabella 4.3.

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Numeri	8	11	2	4	**25**
Calcoli	3	10	2	4	**19**
Ordine	6	2	2	1	**11**
Complessità	3	//	1	6	**10**
Precisione	2	1	4	7	**14**
Ragionare	6	2	//	5	**13**
Logica	5	1	//	5	**11**
Impegno	4	7	1	1	**13**

Tabella 4.3: Risposte più ricorrenti alla domanda 2.

Dall'analisi delle risposte date a questa domanda si nota come la matematica susciti molte impressioni, a volta in contrasto, come semplicità e complessità, o fantasia e rigidità. Vengono utilizzate sia parole che rimandano a emozioni e sia parole oggettive: la matematica rimanda a più sfere, sia emotiva, come l'ansia per l'interrogazione o fatica durante gli esercizi, che cognitiva, legata alla logica, al ragionamento e alle formule.
Le parole più ricorrenti sono numeri e calcoli, che di nuovo restituiscono un'immagine prevalentemente legata all'aritmetica e all'algebra e una concezione di matematica per lo più statica. Ritornano spesso anche parole legate all'astrazione.
Analizzando le risposte che interessano la sfera più emotiva la percezione principale è legata alle difficoltà e all'impegno, alla precisione e all'ordine.
La parola "ordine" ricorre spesso anche nelle risposte date ad altre domande: *"La matematica è il modo che tutti noi usiamo per poter mettere un ordine alle cose e dire le quantità"*, *"È uno strumento fondamentale che ci permette di determinare l'ordine che governa i fenomeni"*.
Una parola che, invece, pur ricorrendo spesso nelle risposte alle altre domande, non compare tra le risposte alla domanda 2 è "controllo". Due studenti scrivono *"Ha origine dalla necessità di tenere sotto controllo ciò che ci circonda: dagli scambi allo studio dei fenomeni naturali..."*, *"Ha origine dal bisogno di dare un valore a qualcosa e quindi di poterlo avere sotto controllo"*.

Le risposte date alla `domanda 3` sono riportate in Tabella 4.4.

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Esigenze quotidiane	7	13	1	7	**28**
Ordinare	4	3	//	//	**7**
Misurare	//	2	//	2	**4**
Commercio	3	1	1	8	**13**
Edilizia	1	//	//	1	**2**
Per controllare	1	2	//	2	**5**
Trovare armonia e perfezione	3	2	//	1	**6**
Capire/descrivere il mondo	5	6	6	3	**20**
Altro	//	1	//	1	**2**
Totale	**24**	**29**	**8**	**26**	**87**

Tabella 4.4: Risposte domanda 3.

Le risposte più frequenti sono quelle in cui gli intervistati scrivono che le esigenze pratiche hanno dato origine alla matematica: *"La matematica ha origine da problemi della vita quotidiana"*.
Inoltre circa un sesto degli intervistati considera fondamentali le attività commerciali: *"Ha origine dalla necessità degli antichi di commerciare"*.
Per un numero consistente di persone la matematica nasce per capire e descrivere il mondo: *"La matematica ha origine dalla necessità dell'uomo di vedere il mondo in maniera più razionale"*, *"Ha origine dalla ricerca dell'uomo di trovare spiegazioni alla realtà che lo circonda"*.
Alcuni alunni vedono l'origine della matematica legata a esigenze della mente e del pensiero, per creare ordine e armonia e per esigenze di controllo, ma anche *"Ha origine dal bisogno/desiderio di scoperta"*.
Interessanti sono le risposte di due studenti: per un ragazzo di seconda è determinante l'esigenza di quantificare il tempo, mentre uno studente di quinta scrive: *"La matematica nasce dal bisogno di uniformare il pensiero scientifico in un linguaggio unico"*.
Da queste risposte si deduce come per la maggior parte degli studenti esiste un legame tra matematica e cultura.

In Tabella 4.5 sono riportate le risposte alla `domanda 4`. 84 studenti su 87 riconoscono l'esistenza di un legame tra lo sviluppo della matematica e gli avvenimenti storici e culturali, ma solo 58 giustificano la loro affermazione.

	2B	2C	3A	5B	**Tot**
La matematica ha portato allo sviluppo	3	7	1	3	**18**
La matematica ha favorito scambi	2	2	1	3	**8**
Per le guerre è necessaria la matematica	3	2	1	3	**9**
La storia porta a nuove domande	5	5	//	2	**12**
Periodi che la razionalità è più importante	1	//	3	1	**5**
Conquiste portano a una matematica unica	//	1	//	1	**2**
Altro	3	//	//	1	**4**
Senza giustificazioni	7	10	2	7	**26**
Non ci sono collegamenti	//	2	//	1	**3**
Totale	**24**	**29**	**8**	**26**	**87**

Tabella 4.5: Risposte domanda 4.

Gli studenti vedono complessivamente connessioni tra cultura e matematica, addirittura alcuni studenti di 2C parlano di proporzionalità diretta: *"Con le scoperte storiche e culturali bisogna stare al passo con la matematica, come una proporzionalità diretta: all'aumentare degli avvenimenti storici e culturali devono aumentare anche le conoscenze matematiche".*
Si nota come una parte consistente di studenti veda la matematica come causa di cambiamento, mentre altri notino come gli avvenimenti storici portino a nuovi quesiti. Le influenze sono quindi reciproche:

$$\text{Matematica} \Longleftrightarrow \text{Avvenimenti Storici.}$$

Una visione interessante è che le conquiste e le integrazioni di popolazioni uniformino la cultura, così come la matematica, due studentesse scrivono: *"Tutti i popoli vissuti in precedenza avevano il loro modo di fare matematica, ma con il tempo hanno unito idee e supposizioni creando così uno strumento per capire e spiegare le cose", "Durante i periodi di espansione le diverse popolazioni sono venute a contatto con altri popoli e scambiare le proprie idee".*
Una ragazza fornisce una risposta interessante: *"Avvenimenti storici e matematica sono collegati, tutto è un'operazione, un calcolo, un'immagine".*
Tra i tre alunni che non vedono un legame, solo due argomentano la loro risposta insistendo soprattutto sull'astrattezza: *"I concetti astratti si sviluppano indipendentemente dalla cultura", "La matematica è scollegata dal tempo siccome è basata sull'astrazione e quindi gli avvenimenti che ruotano attorno a questa materia svolgono un ruolo di aneddoti".*

La `domanda 5` è quella che ha avuto più problemi di interpretazione: alcune risposte sono poco coerenti o incomplete, soprattutto nella parte di riflessione personale. Ad esempio: *"Significa che per conoscere la matematica*

bisogna prima di tutto capirla", "La matematica può essere un mondo nel quale qualcuno si immedesima, trova la propria strada e si sente a proprio agio", "Significa che la matematica ha un alfabeto a parte che va studiato e capito".
Nonostante questi problemi, le risposte date hanno contribuito a mostrare l'immagine di matematica degli studenti: per quasi la totalità è uno strumento indispensabile per la descrizione della realtà. Spesso si sottolinea l'utilità della matematica nel semplificare la realtà e nel capire fenomeni più complessi. Tra gli intervistati quattro scrivono esplicitamente che la matematica è la base dell'universo.
Di nuovo torna il legame tra matematica e realtà, in particolare la matematica è vista come uno strumento indispensabile per la rappresentazione del mondo.

Le risposte alla `domanda 6` hanno messo in luce come tutti gli studenti abbiano consapevolezza che nella vita quotidiana si faccia uso di matematica. Soprattutto per questioni legate:

- al denaro (46 persone),
- alla cucina (21 persone),
- agli orari (16 persone).

Inoltre gli studenti hanno parlato di probabilità, percentuali, organizzazione di tempo e vacanze, scommesse, sport e hobby di vario tipo come cantare, suonare e modellismo.
La maggior parte degli studenti considera solo aspetti di calcolo, solitamente elementare, legati alle quattro operazioni e alle percentuali.
Viene messo in luce solo in un caso che la matematica fornisce un metodo di ragionamento che si può utilizzare nella quotidianità nella risoluzione di problemi: *"Quando ripeto un ragionamento visto a lezione".*
Non compaiono riferimenti espliciti allo studio dello spazio e alla geometria.

Per quanto riguarda la `domanda 7`, quattro persone rispondono che la matematica è troppo astratta per creare connessioni interdisciplinari. L'analisi delle altre risposte è riportata in Tabella 4.6.

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Materie scientifiche	24	26	7	26	**83**
Filosofia	//	2	2	12	**16**
Storia	3	5	3	3	**14**
Arte	4	5	1	3	**13**
Italiano	6	3	//	6	**15**
Lingue	1	//	//	4	**5**
Disegno tecnico	3	8	//	//	**11**
Informatica	//	//	//	4	**4**
Musica	2	//	4	1	**7**
Ed. Fisica	//	1	1	1	**3**
Economia	//	//	1	2	**3**
Diritto	1	//	//	//	**1**
Geografia	2	1	//	//	**3**
Religione	2	1	//	//	**3**
Religione	2	//	1	1	**4**

Tabella 4.6: Risposte domanda 7.

Come scrive uno studente *"La matematica dà impostazioni che si riflettono su altre materie".* Infatti sono state trovate connessioni con molte discipline. La quasi totalità ha fatto riferimento alla fisica e ad altre materie scientifiche, collegamenti spesso visti nel corso delle lezioni. Per quanto riguarda invece le altre discipline, alcuni esempi riportati sono:

- Storia: trattare la matematica degli antichi egizi, greci e degli arabi;
- Filosofia: approfondire la visione matematica di certi filosofi o concetti come l'infinito;
- Religione: vedere come analogie nella Bibbia di numeri che hanno un significato particolare, per esempio i numeri 3 e 7, inoltre entrambe le discipline tentano di rispondere a domande sulla realtà;
- Italiano: notare come la metrica e la ricerca di figure retoriche utilizzino strutture matematiche.

4.3 Secondo Questionario

Il secondo questionario è stato somministrato alle classi dopo aver svolto l'attività descritta nella Sezione 3.4. È stato compilato dagli studenti su supporto cartaceo, in aula, in circa quindici minuti. È stato somministrato per ricevere commenti sulla lezione e indagare le concezioni degli studenti, in particolare rispetto ad una visione platonica o costruttivista della matematica. Le domande sono state le seguenti.

1. Quale aspetto della lezione ti è sembrato più interessante?
2. Quale meno?
3. La visione della matematica presentata a lezione rispecchia il tuo punto di vista?
4. Secondo te i concetti matematici si scoprono o si costruiscono?
5. Scrivi i tuoi commenti e le tue critiche riguardo alla lezione.

In totale hanno risposto 78 studenti, 22 di 2B, 26 di 2C, 6 di 3A, 24 di 5B. L'attività è stata proposta durante la settimana della cultura, pertanto alcuni ragazzi erano coinvolti in altre attività.

Ho riassunto le risposte alla `domanda 1` in Tabella 4.7. Spesso nelle risposte erano presenti più aspetti, per questo il numero totale di risposte presente in tabella non corrisponde al numero degli studenti.

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Etnomatematica	10	12	3	11	**36**
Lavori di gruppo	7	8	//	6	**21**
Nei mosaici c'è matematica	3	6	2	4	**15**
Mosaici e Palazzo	4	3	1	5	**13**
Introduzione storica	2	1	1	//	**4**
Matematica araba	1	//	//	1	**2**
17 gruppi cristallografici	//	//	1	1	**2**
Le 2 visioni di matematica	//	2	//	//	**2**
Tassellazioni	//	2	//	//	**2**
Video	1	//	//	1	**2**
Matematica	1	//	//	2	**3**
Interdiscilinarietà	//	//	1	3	**4**
Totale	**28**	**34**	**9**	**34**	**106**

Tabella 4.7: Risposte domanda 1.

Tutti gli aspetti della lezione sono stati citati. Quelli legati all'etnomatematica e alle connessioni tra matematica e cultura sono stati quelli più segnalati, circa la metà degli studenti che ha compilato il test sottolinea questo aspetto.

Tra le risposte date dai ragazzi troviamo: *"Ho apprezzato la fusione di matematica, arte e storia"*, *"La parte sulla matematica nelle differenti culture, un argomento originale di cui non avevo mai sentito parlare, ma sono state date informazioni utili e interessanti"*.
L'attività di gruppo è stata apprezzata da circa un terzo degli studenti, un ragazzo scrive: *"Il poter mettere in pratica utilizzando i mosaici credo aiuti molto la comprensione della lezione"*.
Inoltre anche la scoperta che nei mosaici ci sia della matematica e la parte introduttiva in particolare sull'Alhambra e sui mosaici hanno interessanto parecchi ragazzi, uno studente scrive: *"La concretizzazione di concetti matematici in un'opera come l'Alhambra, di interesse artistico e culturale"*.

In Tabella 4.8 sono riportate le risposte alla `domanda 2`.

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Storia	7	6	1	7	**21**
Storia dell'Alhambra	1	1	//	//	**2**
Matematica araba	1	1	//	1	**3**
Primo lavoro di gruppo	//	4	1	//	**5**
Secondo lavoro di gruppo	2	1	//	1	**4**
Simmetria e tassellazione	2	2	//	//	**4**
Esempi di etnomatematica	1	//	2	1	**4**
Video	2	1	//	1	**4**
Matematica	2	2	//	5	**9**
Niente interessante	//	1	//	//	**1**
Tutto interessante	4	7	2	8	**21**
Totale	**22**	**26**	**6**	**24**	**78**

Tabella 4.8: Risposte domanda 2.

Uno studente si è mostrato completamente insoddisfatto, mentre un numero consistente di studenti, più di un quarto del totale, afferma di aver apprezzato totalmente la lezione.
La parte che è sembrata meno interessante è stata l'introduzione, nonostante quattro studenti riconoscano l'importanza del suo ruolo, uno studente di 2B scrive: *"La spiegazione del contesto storico, che però è necessaria e non andrebbe omessa"*. Questo argomento non può essere trascurato, poichè è il punto di inizio delle riflessioni che vengono proposte in seguito. Può però essere reso più stimolante cercando un coinvolgimento degli studenti.
Il secondo argomento meno apprezzato è stato quello sui concetti matematici, come espresso da circa un nono degli studenti, due studenti scrivono: *"La*

spiegazione abbastanza distante dalle nostre conoscenze", "Il trasferimento ai concetti matematici era interessante, ma abbastanza complesso".
Inoltre una ragazza scrive: *"Lezione interessante, ma mi sarei focalizzata maggiormente sul passaggio dai mosaici al concetto matematico".*
Due studenti motivano che non gli è piaciuta la prima attività di gruppo a causa della consegna di trovare la definizione senza che fossero fornite particolari indicazioni: *"Mi è piaciuto meno il primo lavoro di gruppo per il fatto che abbiamo dovuto trovare noi le soluzioni".* Questa osservazione sembra evidenziare l'abitudine a riprodurre le conoscenze e non a produrle.
Tenere in considerazione questi punti è importante per poter effettuare miglioramenti, senza però snaturare la lezione nè renderla troppo banale.

Le risposte alla `domanda 3` sono riportate in Tabella 4.9. In aula è stato precisato che la domanda si riferisce alla presenza della matematica in contesti diversi da quello scolastico. Questa domanda indaga quindi le concezioni degli studenti sul rapporto tra matematica e realtà.

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Sì	16	13	1	6	**36**
No	2	5	2	2	**11**
In parte	3	4	2	4	**13**
Non lo so	//	2	//	6	**8**
Riflessione	1	2	1	6	**10**
Totale	**22**	**26**	**6**	**24**	**78**

Tabella 4.9: Risposte domanda 3.

Nella voce Riflessione in tabella ho riportato le risposte dei ragazzi che affermano non saprebbero dare una risposta e hanno bisogno di tempo per riflettere: circa un ottavo degli studenti afferma quindi di non aver mai pensato a questo assunto e che questa lezione fornisca uno stimolo di riflessione. Ad esempio una ragazza di seconda afferma: *"Si tratta di argomenti che non avevo mai esplorato e non avevo mai considerato le varie applicazioni presentate".*
Un numero consistente di ragazzi è d'accordo con l'idea di matematica emersa dalla lezione, una ragazza scrive: *"Sì, secondo me la matematica è più che svolgere semplici esercizi".* Le classi che hanno aderito maggiormente a questa idea sono le seconde, mentre in quinta la maggioranza degli studenti afferma di non essere in grado di decidere o che la lezione è stata la prima occasione che gli ha dato modo di riflettere sulla questione. La sicurezza dei ragazzi di seconda fa pensare a un entusiasmo legato alla lezione, che sembra essere stata apprezzata, più che a un pensiero davvero cosciente e maturo.

Alcuni ragazzi che hanno risposto no hanno commentato dicendo che fanno fatica vedere la matematica all'infuori di un contesto scolastico, scrivono per esempio: *"Non proprio, poichè la mia visione della matematica non è applicata o almeno a scuola non la applichiamo"*, *"Non rispecchia il mio punto di vista perchè per adesso noi ragazzi vediamo la matematica solo come un'altra delle tante materie"*.
Tra le risposte degli studenti che si trovano d'accordo solo in parte troviamo: *"Credo che la matematica possa essere vista da diversi punti di vista, oggi ne è stato analizzato uno dei tanti"*, *"In parte, essendo ancora solo una studentessa del Liceo vedo la matematica come qualcosa di tanto teorico, ma in realtà sono consapevole che è una materia che si collega a tanti aspetti culturali, artistici e quotidiani"*. In questi casi si nota come la concezione di matematica possa subire evoluzioni e cambiare.

Le risposte alla `domanda 4` sono riportate in Tabella 4.10. Le risposte date a questa domanda permettono di indare sulla presenza di una concezione platonica o costruttivista della matematica negli studenti.

	2B	2C	3A	5B	**Totale**
Scoprono	11	12	1	11	**35**
Costruiscono	10	11	3	6	**30**
Entrambi	1	2	1	5	**9**
Non lo so	//	1	//	1	**2**
Si intuiscono	//	//	1	1	**2**
Totale	**22**	**26**	**6**	**24**	**78**

Tabella 4.10: Risposte domanda 4.

Non c'è una differenza significativa tra il numero di studenti che pensano che la matematica si scopra e il numero di studenti che pensa che la matematica si costruisca.
Tra le risposte a sostegno del fatto che i concetti matematici si scoprano troviamo: *"Si scoprono osservando il mondo naturale"*, *"Secondo me sta tutto in un progetto della natura, quindi si scoprono e si applicano"*.
Il numero dei ragazzi che pensano che i concetti matematici vengano costruiti è leggermente minore, uno studente scrive: *"Secondo me si costruiscono, perchè sono cose che non esisterebbero se qualcuno con i suoi ragionamenti non gli desse vita"*.
Un ottavo degli studenti scrive che valgono entrambe, motivando così: *"Secondo me un po' e un po', attorno a cose scoperte si costruiscono concetti matematici"*, *"I concetti matematici più semplici si possono scoprire dal-*

l'osservazione del mondo, mentre i concetti più avanzati vengono costruiti astrattamente", *"Entrambi, perchè per scoprirli bisogna fare qualcosa e quindi costruire"*.
Per due studenti il fulcro della nascita dei concetti matematici è l'intuizione, una ragazza motiva: *"Penso che si intuiscano, magari osservando la realtà e le relazioni tra oggetti, ma poi vanno costruiti"*. Questa visione lascia una doppia interpretazione sulla natura della matematica: si intuiscono concetti già presenti in natura o dato che c'è l'azione della mente di intuire i concetti rimangono solo a livello mentale?
Solo due studenti non hanno un idea in proposito.

Per quanto riguarda le risposte date alla `domanda 5`, alcuni ragazzi non hanno lasciato i propri commenti, mentre altri hanno sottolineato più punti. Un numero cosistente di studenti, più della metà, commenta che la lezione è stata interessante, soprattutto in 2B e in 5B.
Alcuni studenti scrivono che è stata ben organizzata ed è stato apprezzato l'aspetto multidisciplinare.
Viene inoltre sottolineato da alcuni che la lezione ha dato una visione della matematica differente. Due studenti scrivono: *"È stato interessante vedere come la matematica sia presente nella vita quotidiana e come venga utilizzata per spiegare situazioni della cultura. È stato anche interessante vedere come in un monumento storico fossero già presenti conoscenze che sono state scoperte solo in seguito"*, *"Personalmente l'ambito matematico non mi appartiene e non mi affascina, ma è stato davvero molto interessante scoprire come culture diverse utilizzano la matematica. Penso che contestualizzata in ambito artistico-culturale sia molto più concreta e facile da comprendere"*.
Alcuni studenti hanno ribadito che hanno apprezzato le attività di gruppo e l'utilità di mettere in pratica, uno studente scrive: *"Molto interessante e coinvolgente il lavoro di gruppo e l'applicazione matematica di quest'ultimo"*.
In generale gli studenti dichiarano che la lezione è stata coinvolgente.
Tra i suggerimenti alcuni studenti chiedono maggiori esempi di etnomatematica, uno studente scrive: *"È stato molto interessante scoprire i diversi tipi di utilizzo della matematica nelle varie culture, sarebbe stato bello approfondire maggiormente l'argomento dei diversi sistemi di localizzazione e delle cartine geografiche"*.
Due studenti di 2B sono interessati ad approfondire l'aspetto architettonico dell'Alhambra. Questa parte avendo un'importanza relativa per la lezione credo che debba essere solo accennata, si possono in caso fornire agli studenti fonti su cui informarsi.
Alcuni studenti chiedono di semplificare la spiegazione dei concetti matematici. Scrivono: *"Secondo me la lezione è stata presentata bene, l'unica*

difficoltà erano certi concetti che vanno spiegati in modo più semplice possibile", "Non mi è piaciuto non avere le basi per comprendere alcuni concetti e aver ricevuto solo delle nozioni generali a riguardo, però è stato interessante vedere la matematica in relazione alla cultura e come non mi era mai stata presentata".

4.4 Conclusioni

Dall'analisi delle risposte date ai questionari emergono vari aspetti delle concezioni degli studenti sulla matematica. Il primo questionario indaga soprattutto sul confronto tra matematica statica e matematica dinamica, mentre il secondo investiga prevalentemente sulla presenza tra i ragazzi di una visione platonica o costruttivista.
L'idea che affiora da alcune risposte date è in parte collegata all'uso dei numeri e alle operazioni, questo aspetto è tipico di una visione più statica della matematica. Nonostante ciò in alcune risposte date alla prima domanda riscontriamo anche visioni più dinamiche. Infatti spesso viene fatto riferimento all'utilità di questa disciplina nella descrizione della realtà, nella risoluzione di problemi pratici e come opportunità per imparare a ragionare. Inoltre anche dall'analisi delle risposte date alla domanda cinque del primo questionario è emerso che per la maggior parte degli studenti la matematica è uno strumento indispensabile per la rappresentazione dell'universo.
Sono presenti quindi concezioni legate sia ad una visione statica che ad una dinamica della materia, senza differenze tra le classi. È difficile definire quale concezione sia più forte, nelle risposte date ad alcune domande sembra prevalere l'immagine di una matematica statica, mentre in altre l'idea che emerge maggiormente è quella dinamica.
Interessante è la risposta data da una ragazza nel secondo questionario riguardo la relazione tra matematica e altri contesti: *"A primo impatto penso ai numeri, però sono consapevole che la matematica non sia solo quello, ma è presente anche nella natura".* In questo caso si nota una concezione statica della matematica, ma emerge che tale visione possa evolvere verso una concezione più dinamica. È inoltre possibile trovare casi di studenti che presentino caratteristiche attribuibili ad entrambe le concezioni.
Dalle risposte date al primo questionario si deduce inoltre che gli studenti considerano questa scienza presente nella vita quotidiana, nonostante nel momento in cui gli si chiede di produrre esempi riescano solo a darne di banali o molto elementari, come somme di denaro o punteggi del calcio. Emerge quindi che si tratta di una disciplina che loro sperimentano e vivono perlopiù in maniera astratta, come si deduce dalle parole usate per rispondere alla

seconda domanda, però che riconoscono strettamente collegata alla realtà.
I ragazzi mettono inoltre in evidenza aspetti interdisciplinari della matematica fornendo diverse possibili connessioni. Affiora quindi l'immagine di una disciplina che possa contribuire ad arricchire e approfondire anche altre materie.
Dalle risposte date alle domande tre e quattro del primo questionario, si nota come la maggioranza dei ragazzi veda connessioni tra la matematica e la cultura e come queste si influenzino mutualmente. Alcuni studenti scrivono: *"Senza la matematica non sarebbe stato possibile commerciare", "Durante la guerra fredda vennero migliorati numerosi aspetti matematici per sentirsi meglio di altri".*
Invece alla domanda tre del secondo questionario, in cui si chiede se la matematica è presente in diversi aspetti culturali, circa metà è d'accordo, mentre un numero poco minore risponde che non ha idea o che ci sta riflettendo.
Prima del secondo questionario è stata proposta una lezione per stimolare riflessioni sulla natura della matematica. Scopo di questo non era spingere gli studenti a cambiare il proprio punto di vista, ma creare stimoli e occasioni di riflessione. È importante proporre nuove domande agli studenti, così da accendere il desiderio di approfondire determinate questioni. Dal dubbio nasce la curiosità, fondamentale per raggiungere nuove conoscenze. Da alcune risposte date si deduce che la lezione proposta abbia fornito stimoli di riflessione. Ad esempio una ragazza scrive: *"Fino ad ora non ci avevo mai pensato, ma questa lezione mi ha aperto la mente a una visione della matematica più ampia".*
Per indagare se tra i ragazzi prevale una concezione sulla matematica di tipo platonico oppure costruttivista si sono rivelate importanti le risposte date alla quarta domanda del secondo questionario. Le due concezioni sono presenti in percentuali quasi uguali tra gli intervistati, un numero leggermente maggiore ha optato per la visione platonica. In questo caso gli indecisi sono stati molto pochi, solo 2 su 78. Interessante notare che alcuni ragazzi presentano entrambe le visioni, questo può essere dovuto al fatto che si trovano in una fase di evoluzione.
Il secondo questionario inoltre si è proposto di raccogliere dei commenti sulla lezione. Dalle risposte date alle domande uno, due e cinque è emerso che la lezione nel complesso è stata apprezzata. Tra i commenti compaiono: *"La lezione è stata interessante e ha dato un punto di vista sulla matematica trascurato nel normale programma scolastico", "La lezione è stata molto interessante e coinvolgente, anche per la scelta dell'argomento originale che non prevedeva solo unicamente matematica ma anche arte, e per i lavori di gruppo".* Alcuni aspetti sono stati considerati più interessanti, mentre altri meno.
È importante che il docente utilizzi lezioni in grado di motivare l'interesse

verso la materia al fine di stimolare gli studenti e migliorare la qualità del lavoro in aula. Infatti studenti motivati prestano maggiore attenzione durante le spiegazioni.
Dalla compilazione di questi questionari risulta che la matematica è vista in parte come una disciplina strettamente scolastica e connessa al calcolo e ai numeri, in parte come una materia che ha origine dalla cultura, da cui è continuamente influenzata e che in alcuni casi influenza, come per le nuove tecnologie. Spesso gli studenti non hanno un'idea nitida su questa disciplina e concezioni differenti sembrano convivere nella stessa persona. Inoltre riflessioni sulla natura della matematica non sono oggetto di dibattito tra gli adolescenti, devono quindi essere stimolate dagli insegnanti. Crediamo che approfondimenti come quello realizzato durante questo lavoro di tesi possano fornire utili stimoli di riflessione agli studenti sui concetti di matematica e cultura.

Bibliografia

[1] Armstrong Mark Anthony, *Groups and Symmetry*, Springer-Verlang, New York, 1980.

[2] Artin Micheal, *Algebra*, Bollati Boringhieri, Torino, 1997.

[3] Ascher Marcia, *Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*, CRC Press, Boca Raton, 1994.

[4] Ascher Marcia, *Etnomatematica, esplorare concetti in culture diverse*, Bollati Boringhieri, Torino, 2007.

[5] Barton Bill, *The Language of Mathematics*, Springer, Berlino, 2008.

[6] Blanco Alvarez Hilbert, *Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio*, RLE, **Vol.1**, (2008), 21-25.

[7] Boyer Carl Benjamin, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, Milano, 1976.

[8] Costa Gonzalez Antonio Felix, *Arabescos y geometria*, Graficas Marcar, Madrid, 2006.

[9] D'Ambrosio Ubiratan, *Las bases conceptuales del programa Etnomatematica*, RLE, **Vol.7**, (2014), 100-107.

[10] D'Amore Bruno, *Arte e matematica*, Edizioni Dedalo, Bari, 2015.

[11] Dedò Maria, *Forme: simmetria e topologia*, Zanichelli/Decibel, Padova, 1999.

[12] Felbrich Ana, Muller Christiane, Blomeke Sigrid, *Epistemological beliefs concerning the nature of mathematics among teacher educators and teacher education students*, (2008), ZDM, **Vol.40**, (2008), 40, 763-776.

[13] Garegae Kgomotso Gertrude, *Teachers' professed beliefs about the nature of mathematics, its teaching and learning: inconsistencies among data from different instrument*, POME, **Vol 30**, (2016), 1-18.

[14] Higuera Acevedo Clara Lucia, *Concepcion Matematica Indigena en la Amazonia Colombiana*, RLE, **Vol.1**, (2008), 12-20.

[15] Hilber David & Cohn-Vossen Stefan, *Geometria intuitiva*, Bollati Boringhieri, Torino, 1972.

[16] Mabb Jurgen & Schlogmann Wolfagang, *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education*, Sense Publishers, Rotterdam, 2009.

[17] Martin George Edward , *Transformation Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[18] Martinón Cejas Antonio, *Las dimensiones politicas y educacionales de la Etnomatematica, Las matematicas del siglo XX*, Dialnet, Città del Messico, 2000.

[19] Milton Rosa, D'Ambrosio Ubiratan, Clark Orey Daniel, Shirley Lawrence, V.Alangui Wilfredo, Palhares Pedro, Gavarrete Maria Elena, *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program*, ICME13, Springer, Berlino, 2016.

[20] Ministero della Pubblica Istruzione, *"Il nuovo obbligo di istruzione: cosa cambia?"*, Agenziascuola, Firenze, 2007.

[21] Presmeg Norma, *Belifs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices*, in: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (eds) Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?. Mathematics Education Library, Springer, Dordrecht, 2002.

[22] Sernesi Edoardo, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1990.

[23] Stromoney Gift, Rani Siromoney, Kamala Krithivasan, *Abstract families of matrices and picture languages*, Comput.Gr.Image Process, **Vol.1**, (1972), 284-307.

[24] Weyl Hermann, *La simmetria*, Feltrinelli, Milano, 1981.

[25] Zaslavsky Claudia, *Africa Counts: number and pattern in African culture*, Prindle Weber & Scmidt, Boston, 1973.

Ringraziamenti

Un ringraziamento speciale alla Prof.ssa Alessia Cattabriga, che mi ha sostenuto e accompagnato in questi mesi e mi ha aiutato a scoprire le potenzialità della didattica della matematica.
Vorrei ringraziare inoltre la Prof.ssa Veronica Albanese, che mi ha aperto le porte dell'etnomatematica, e la Prof.ssa Manuela Fabbri, che mi ha supportato per il progetto didattico.
Infine un grazie alla mia famiglia, ad Antonio e a tutti gli amici, sempre vicini nonostante la distanza.