

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica curriculum Didattico

**INTRODUZIONE DI COORDINATE  
NEI PIANI AFFINI**

Tesi di Laurea Magistrale in Algebra e Geometria

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
Regonati Francesco

**Presentata da:**  
Alessandra Iannuzzi

III Sessione  
Anno Accademico 2016-2017

# Introduzione

L'argomento intorno a cui abbiamo sviluppato l'elaborato è il classico problema della coordinatizzazione, affrontato nell'ambito dei piani affini. Possiamo esporre la questione nei seguenti termini: dato un piano affine sintetico sotto quali ipotesi sintetiche possiamo costruire un piano affine su un corpo, ad esso isomorfo?

Abbiamo presentato un'esposizione di tale problema e di una sua soluzione. Abbiamo esposto le ipotesi sotto forma di validità di teoremi di chiusura, sotto forma di esistenza di particolari collineazioni o di alcune loro specifiche proprietà ed abbiamo esplicitato l'equivalenza tra queste ipotesi. I teoremi di chiusura non valgono in un piano affine qualunque, ma vengono denominati con il nome di teoremi in quanto in geometria euclidea sono dei teoremi<sup>1</sup>. Il risultato a cui si arriva è l'equivalenza in ogni piano affine desarguesiano tra il punto di vista sintetico ed analitico.

Storicamente nel 1899 Hilbert nella sua opera *Grundlagen der Geometrie* descrisse tra l'altro l'introduzione delle coordinate, il metodo da lui usato è conosciuto con il nome di calcolo dei segmenti di Hilbert. Il primo teorema di coordinatizzazione è il teorema di Veblen-Young (1910) nell'ambito degli spazi proiettivi. Questa parte della matematica ebbe un notevole sviluppo, un testo di riferimento è *Linear Algebra and Projective Geometry* di Reinhold Baer del 1952. L'impostazione attuale del problema di coordinatizzazione dei piani affini è stata fortemente influenzata ad Emil Artin, che espose quest'ar-

---

<sup>1</sup>I teoremi di chiusura hanno una formulazione affine ed una proiettiva, in geometria proiettiva assumono una formulazione più essenziale rispetto a quella affine.

gomento durante le lezioni di Fondamenti di Geometria tenute presso la New York University nel 1955. L'approccio di Artin si basa sull'uso diretto delle collineazioni, piuttosto che sull'uso dei teoremi di chiusura.

Il lavoro risultante ha la seguente struttura. Il primo capitolo è dedicato ad una presentazione dei piani affini; oltre agli assiomi sintetici di piano affine ed alla deduzione di alcune proprietà, abbiamo descritto l'esempio/modello di un piano affine su un corpo, in particolare abbiamo considerato il corpo dei quaternioni. Inoltre abbiamo approfondito la combinatoria elementare del caso finito. Il secondo capitolo è dedicato ai teoremi di chiusura, in particolare alle versioni affini del teorema di Desargues, del teorema di Pappo ed alle loro forme deboli. Qui abbiamo verificato che un piano affine in coordinate su un corpo (campo) è un piano desarguesiano (pappiano). Inoltre dopo aver descritto le interdipendenze tra i teoremi di chiusura abbiamo esposto l'esempio del piano non desarguesiano di Moulton e l'esempio del piano non pappiano sui quaternioni. Il terzo capitolo è dedicato al gruppo delle collineazioni di un piano affine, in particolare vengono considerate traslazioni, dilatazioni ed affinità assiali. Abbiamo descritto le relazioni tra l'esistenza o certe proprietà delle collineazioni considerate e la validità dei vari teoremi di chiusura. Infine nell'ultimo capitolo abbiamo esposto la soluzione al problema della coordinatizzazione, esplicitamente: il concetto di piano affine desarguesiano (pappiano) determina la medesima entità geometrica di quella determinata dal concetto di piano affine coordinatizzato su un corpo (campo).

Inizialmente la nostra attenzione era indirizzata verso i numeri costruibili; andando a cercare le basi, le ipotesi che consentissero di unire la geometria e l'algebra abbiamo incontrato quest'affascinante parte della matematica che si occupa dell'introduzione delle coordinate. La prima questione che ci siamo posti è stata voler comprendere cosa ha permesso il passaggio da un piano come struttura d'incidenza ad un piano come struttura algebrica costruita su un corpo o su un campo. Il riferimento principale per il nostro lavoro è stato il

libro *Fundamentals of Mathematics, Volume II, Geometry*<sup>2</sup> [6], in particolare il capitolo 3 *Affine and Projective Planes*. Andando a cercare degli sviluppi recenti abbiamo incontrato il libro *Affine and Projective Geometry* di M. K. Bennet [5], testo a scopo didattico indirizzato a studenti di matematica. Dopo aver letto l'articolo di Artin [1], abbiamo trovato l'articolo di Bartolozzi e Oliveri [4], che ripercorre il lavoro di Artin esponendo una soluzione al problema della coordinatizzazione usando il modello di piano di traslazione di J. Andr .

---

<sup>2</sup>Oltre questo volume ce ne sono altri due dedicati rispettivamente all'algebra ed all'analisi. Ciascun capitolo   stato scritto da almeno due matematici, un ricercatore universitario ed un insegnante con una lunga esperienza nel sistema educativo tedesco, ed ha una ricca bibliografia di riferimento.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Piani Affini</b>	<b>1</b>
1.1 Piani Affini . . . . .	1
1.2 Esempi . . . . .	3
1.2.1 Piano affine su un corpo . . . . .	3
1.2.2 Esempi nel caso infinito . . . . .	5
1.2.3 Il caso finito . . . . .	6
<b>2 Teoremi di chiusura</b>	<b>13</b>
2.1 Teoremi di Desargues e di Pappo . . . . .	13
2.2 Il teorema delle forbici e $D^*$ . . . . .	18
<b>3 Collineazioni</b>	<b>25</b>
3.1 Collineazioni . . . . .	25
3.2 Le collineazioni ed i teoremi di chiusura . . . . .	33
<b>4 Coordinatizzazione</b>	<b>35</b>
4.1 Teorema di coordinatizzazione . . . . .	35
4.2 Rappresentazione di affinità . . . . .	40
<b>A I quaternioni</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>



# Elenco delle figure

2.1	Configurazione di Desargues . . . . .	14
2.2	Configurazione di Pappo . . . . .	14
2.3	Configurazioni di (d) e (p) . . . . .	15
2.4	Piano affine non desarguesiano . . . . .	18
2.5	Configurazione di (S) . . . . .	19
2.6	Configurazione di (D*) . . . . .	19
2.7	Interdipendenza dei teoremi di chiusura . . . . .	20



# Capitolo 1

## Piani Affini

### 1.1 Piani Affini

Siano  $\mathfrak{P}$  e  $\mathfrak{G}$  due insiemi, chiamiamo gli elementi del primo *punti* e quelli del secondo *rette*. Sia  $I$  una relazione detta d'incidenza tra gli elementi dei due insiemi espressa nel seguente modo *il punto  $P$  è incidente con la retta  $g$* , in simboli  $PIg$ . Equivalentemente possiamo esprimere la relazione nel seguente modo *la retta  $g$  è incidente con il punto  $P$* , in simboli  $gIP$ . Possiamo dire che  $P$  giace su  $g$  o che  $g$  passa attraverso  $P$ .

**Definizione 1.1.** Due rette  $g, h$  si dicono *parallele*,  $g\parallel h$ , se  $g = h$  o  $g$  e  $h$  non sono entrambe incidenti con alcun punto.

Consideriamo i seguenti assiomi:

**A1** Per ogni coppia di punti distinti  $P$  e  $Q$  esiste esattamente una retta incidente con entrambi.

**A2** Per ogni retta  $g$  e per ogni punto  $P$  esiste esattamente una retta parallela a  $g$  e incidente con  $P$ .

**A3** Esistono almeno tre punti non incidenti con una stessa retta.

**Definizione 1.2.** La terna  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$  è detta *piano affine* se valgono **A1**, **A2**, **A3**.

Vediamo alcune definizioni.

- ⊛ Tre punti incidenti con la stessa retta sono detti *collineari*.
- ⊛ Tre rette incidenti con lo stesso punto sono dette *copuntuali*.
- ⊛ Un *triangolo* è un insieme di tre punti non collineari e delle tre rette congiungenti ogni coppia di punti, queste sono dette *lati* del triangolo.
- ⊛ Un *n-angolo* è un insieme di  $n$  punti tre a tre non collineari, e  $n$  rette dette lati che possono essere ordinati in una sequenza punto-retta-...-punto-retta,  $P_1, g_1, P_2, g_2, \dots, P_n, g_n$ , tali che  $P_i I g_i, g_{i-1}$  per  $i = 2, \dots, n - 1$  e  $P_1 I g_1, g_n$

Consideriamo due punti  $P$  e  $Q$  con  $P \neq Q$  ed una retta  $g$ . Se  $g I P, Q$  chiamiamo  $g$  retta congiungente  $P$  e  $Q$  e la indichiamo con  $(P, Q)$  o con  $(Q, P)$ . Invece ora consideriamo due rette  $h, g$  ed un punto  $P$ . Se  $P I h, g$ , con  $h \neq g$ ,  $P$  è detta intersezione di  $g$  e  $h$  e diciamo che  $g$  e  $h$  si intersecano.

**Lemma 1.1.1.** *Due rette non parallele si intersecano esattamente in un punto.*

*Dimostrazione.* Siano  $g$  ed  $h$  le due rette, per ipotesi  $g \neq h$ . Quindi esiste almeno un punto  $P$  incidente ad entrambe. Se ci fosse un altro punto incidente ad entrambe per **A1** avremmo  $g = h$ . □

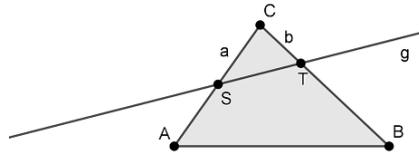
**Lemma 1.1.2.** *Il parallelismo è una relazione di equivalenza.*

*Dimostrazione.* La riflessività e la simmetria seguono direttamente dalla definizione. Dimostriamo la transitività. Consideriamo tre rette tali che  $g \parallel h$  e  $h \parallel r$ . Possono non avere punti in comune, quindi sono parallele. Possono essere entrambe incidenti con un punto  $P$ , essendo parallele ad  $h$  abbiamo  $g = r$ . □

**Lemma 1.1.3.** *Se la retta  $g$  interseca la retta  $h$  allora ogni retta  $r$  parallela a  $g$  interseca anche  $h$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $g$  non è parallela ad  $h$ , se  $g \parallel r$  e  $r \parallel h$  per il lemma precedente avremmo  $g \parallel h$ . Quindi  $r$  non è parallela ad  $h$ .  $\square$

**Lemma 1.1.4.** *Su ogni retta giacciono almeno due punti.*



*Dimostrazione.* Siano  $A, B$  e  $C$  tre punti non collineari. Esistono per **A3** e formano un triangolo con coppie di lati non paralleli. Consideriamo una retta  $g$  distinta dai lati del triangolo, essa non è parallela almeno a due di questi. Chiamiamo  $(A, C) = a$ ,  $(C, B) = b$  e  $T \perp b, g$ ,  $S \perp a, g$ .

Se  $S \neq T$  abbiamo la tesi.

Se  $S = T$ , per il lemma 1.1.1  $S = C$  e  $C \perp g$ . Da  $B$  tracciamo la parallela  $d$  ad  $a$ , questa interseca  $g$  esattamente in un punto  $R$ . Se  $R = C$  si avrebbe  $C \perp a, d$ , quindi  $d = a$  per **A2**. In particolare  $A, B$  e  $C$  risulterebbero collineari.  $\square$

## 1.2 Esempi

### 1.2.1 Piano affine su un corpo

Consideriamo un corpo  $\mathbb{K}$  e costruiamo il piano affine  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$ . Prima di tutto osserviamo che  $\mathbb{K}^2$  è uno spazio vettoriale destro sul corpo  $\mathbb{K}$ . Denotiamo gli elementi di  $\mathbb{K}^2$  con il nome di punti, in altre parole  $\mathfrak{P} = \mathbb{K}^2$  ed un punto è un oggetto del tipo  $P = (x, y)$  con  $x, y \in \mathbb{K}$ . Denotiamo con il nome retta ciascun laterale di ciascun sottospazio monodimensionale di  $\mathbb{K}^2$ , cioè un oggetto del tipo  $g = A + \langle B \rangle$  con  $A, B$  vettori,  $\langle B \rangle \neq 0$ ,  $\langle B \rangle$  sottospazio generato da  $B$ . Una retta è un insieme di punti. Prendiamo come relazione d'incidenza l'appartenenza, esplicitamente il punto  $P$  in  $\mathbb{K}^2$  è incidente alla retta  $g = A + \langle B \rangle$  se e sole se  $P = A + Bu$  per qualche  $u$  in  $\mathbb{K}$ . In questo

caso parliamo di *piano affine in coordinate sul corpo*  $\mathbb{K}$  e lo indichiamo con  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$ .

*Osservazione 1.* Due rette  $A + \langle B \rangle, C + \langle D \rangle$  sono parallele se e sole se  $\langle B \rangle = \langle D \rangle$ .

*Infatti*

Se  $\langle B \rangle = \langle D \rangle$  le due rette sono laterali di uno stesso sottospazio, dunque sono coincidenti o non hanno punti in comune.

Se  $\langle B \rangle \neq \langle D \rangle$  anche i due laterali  $A + \langle B \rangle, C + \langle D \rangle$  sono distinti. Ora  $B, D$  sono dei generatori di  $\mathbb{K}^2$  quindi per qualche  $u, v \in \mathbb{K}$  abbiamo  $A - C = Bu - Dv$ , allora  $A + Bu = C + Dv \in A + \langle B \rangle, C + \langle D \rangle$ . Abbiamo trovato un punto incidente con entrambe le rette e queste non sono parallele.

Dimostriamo che  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  è un piano affine, cioè valgono **A1**, **A2**, **A3**.

**A1** Consideriamo due punti distinti  $P, Q$  in  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$ . Abbiamo che  $P - Q$  è diverso dal vettore nullo e possiamo scrivere  $P = Q + (P - Q)1, Q = Q + (P - Q)0$ . Da quanto scritto segue che i punti  $P, Q$  sono incidenti con la retta  $Q + \langle P - Q \rangle$ . Supponiamo ci sia anche un'altra retta incidente con  $P, Q$ , sia  $A + \langle B \rangle$ .  $P, Q \in A + \langle B \rangle$  abbiamo  $A + \langle B \rangle = Q + \langle B \rangle = P + \langle B \rangle$ . Quindi  $P - Q \in \langle B \rangle$ , cioè  $\langle P - Q \rangle = \langle B \rangle$ . Abbiamo trovato che  $A + \langle B \rangle = Q + \langle P - Q \rangle$ .

**A2** Consideriamo un punto  $P$  e una retta  $A + \langle B \rangle$ . La retta incidente con  $P$  e parallela ad  $A + \langle B \rangle$  è  $P + \langle B \rangle$ , e questa è l'unica. Supponiamo ce ne sia un'altra, sia  $C + \langle D \rangle$ . Per l'osservazione precedente  $\langle D \rangle = \langle B \rangle$ , inoltre  $C + \langle D \rangle = P + \langle D \rangle$  in quanto  $P \in C + \langle D \rangle$ . Abbiamo trovato che  $C + \langle D \rangle = P + \langle B \rangle$ .

**A3** I punti  $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$  sono non collineari.

Per quanto riguarda le rette possiamo riferirci a queste in vari modi:

- Per  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \neq (0, 0)$ , la retta  $A + \langle B \rangle$  è l'insieme dei punti  $l = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid x = a_1 + b_1u, y = a_2 + b_2u, \text{ con } u \in \mathbb{K}\}$ ;
- $l = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid ax + by = c\}$  con  $a, b, c \in \mathbb{K}, (a, b) \neq (0, 0)$ ;
- $l = \{(c, y) \mid y \in \mathbb{K}\}$  con  $c \in \mathbb{K}$ , possiamo indicare questa retta con  $[c]$ ;  
 $l = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid y = mx + b\}$  con  $m, b \in \mathbb{K}$ , possiamo indicare questa retta con  $[m, b]$ .

*Osservazione 2.* Essendo le rette laterali di sottospazi destri, nell'equazione parametrica il parametro deve stare a destra, e ciò ha per corrispettivo che nelle equazioni cartesiane i coefficienti devono stare a sinistra.

*Osservazione 3.* La discussione di un'equazione lineare su un corpo o su un campo è la solita. Siano  $[m, q], [m', q']$  due rette abbiamo:

- i) non hanno punti in comune se e sole se  $m = m'$  e  $q \neq q'$ ;
- ii) sono coincidenti se e sole se  $m = m'$  e  $q = q'$ ;
- iii) si intersecano in un punto se e sole se  $m \neq m'$ .

Due rette del tipo  $[k], [k']$  sono coincidenti per  $k = k'$ , altrimenti non hanno punti in comune. Due rette del tipo  $[m, q], [k]$  sono incidenti nel punto  $(mk, q)$ .

Considerando il campo  $\mathbb{R}$  otteniamo il familiare piano in coordinate reale. Vediamo alcune esempi sia nel caso finito sia nel caso infinito.

### 1.2.2 Esempi nel caso infinito

★ *Piano in coordinate su  $\mathbb{R}$*

L'insieme dei punti è  $\mathfrak{P} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ . Una retta è un oggetto del tipo  $l = \{(x, y) \mid ax + by = c\}$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $l \in \mathfrak{G}$ .

★ *Piano in coordinate sui quaternioni*

Indichiamo con  $\mathbb{H}$  il corpo dei quaternioni. L'insieme dei punti è  $\mathfrak{P} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{H}\} = \mathbb{H}^2$ .

Una retta è un oggetto del tipo: se  $c \in \mathbb{H}$ ,  $l = \{(c, y) | y \in \mathbb{H}\}$ ; se  $a, b \in \mathbb{H}$ ,  $l = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 | y = ax + b\}$ .

Così come è stato definito un piano affine su un corpo, si può definire un piano su un anello. In generale questi non sono piani affini, vediamo un esempio.

★ *Piano su  $\mathbb{Z}$*

In questo caso, dove consideriamo un piano su un anello, le rette sono i laterali di ogni sottogruppo ciclico di  $\mathbb{Z}$ . Il piano  $\mathbb{Z}^2$  non è un piano affine.

*Infatti* Consideriamo le seguenti rette  $g = (0, 0) + \langle(2, 0)\rangle$  e  $r = (0, 0) + \langle(1, 0)\rangle$ . Entrambe sono incidenti, ad esempio, con i punti  $(2, 0), (4, 0)$  ma  $g$  non è incidente con  $(1, 0)$ , quindi le due rette sono distinte e cade **A1**.

### 1.2.3 Il caso finito

Prima di vedere alcuni esempi, osserviamo che per **A3** esistono almeno tre punti e tre rette in un piano affine. Consideriamo due di questi punti e la retta incidente con entrambi, per **A2** esiste (ed è unica) la retta per il terzo punto e parallela a questa. Per il lemma 1.1.4 su ogni retta giacciono almeno due punti. Quindi esiste un quarto punto, distinto dai precedenti. Inoltre per ogni coppia di punti esiste esattamente una retta incidente con essi, dunque considerando quattro punti abbiamo sei rette.

★ *Il più piccolo piano affine*

Il più piccolo modello di piano affine  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$  si ha considerando come insieme di punti un insieme di ordine 4, sia  $\mathfrak{P} = \{A, B, C, D\}$ ; come insieme delle rette l'insieme dei sottoinsiemi di ordine due, sia

$\mathfrak{G} = \{a, b, c, d, e, f\}$  dove ogni retta è un sottoinsieme di  $\mathfrak{P}$  con due elementi; come relazione d'incidenza l'appartenenza di un punto ad una retta, in altre parole un punto è incidente con una retta quando appartiene a tale retta. La seguente tabella mostra l'incidenza dei vari punti con le rette.

	a	b	c	d	e	f
A	x			x	x	
B	x	x				x
C		x	x		x	
D			x	x		x

Ogni retta è incidente con due punti e possiamo suddividere le sei rette in tre insiemi di rette parallele, esplicitamente  $a \parallel c, e \parallel f, d \parallel b$ .

★ *Piano in coordinate su  $\mathbb{Z}_2$*

Possiamo considerare l'esempio precedente nel piano in coordinate su  $\mathbb{Z}_2$ . L'insieme dei punti è  $\mathfrak{P} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} = (\mathbb{Z}_2)^2$ . Le rette sono gli insiemi delle soluzioni delle seguenti equazioni lineari  $ax + by = c$  in  $x, y$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_2$  con  $(a, b) \neq (0, 0)$ , dunque l'insieme delle rette è  $\mathfrak{G} = \{x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, x + y = 0, x + y = 1\}$ , dove scriviamo un'equazione lineare per intendere l'insieme delle soluzioni.

Le rette sono i sottoinsieme di  $(\mathbb{Z}_2)^2$  i cui elementi soddisfano le varie equazioni. In questo caso come detto precedentemente ogni retta contiene due punti, ad esempio  $x = 0$  è incidente con  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$ .

*Osservazione 4.* Scrivendo  $x = 0$  intendiamo l'insieme dei punti  $\{(0, y) | y \in \mathbb{Z}_2\} = \{(0, 0), (0, 1)\}$ , scrivendo  $x + y = 1$  intendiamo  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_2^2 | x + y = 1\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

★ *Piano affine con nove punti e dodici rette*

Il piano affine  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$  dove  $\mathfrak{P} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$  e

$\mathfrak{G} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n\}$  sono incidenti tra loro secondo la seguente tabella:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n
A	x	x	x	x								
B	x				x	x	x					
C	x							x	x	x		
D			x			x		x			x	
E		x					x		x		x	
F				x	x					x	x	
G			x		x				x			x
H				x			x	x				x
I		x				x				x		x

Ogni retta contiene tre punti, inoltre possiamo suddividere l'insieme delle rette  $\mathfrak{G}$  in quattro insiemi ognuno formato da tre rette tra loro parallele.

★ *Piano in coordinate su  $\mathbb{Z}_3$*

L'insieme dei punti è  $\mathfrak{P} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$ .

L'insieme delle rette è  $\mathfrak{G} = \{x = 0, x = 1, x = 2, y = 0, y = 1, y = 2, x + y = 0, x + y = 1, x + y = 2, x + 2y = 0, x + 2y = 1, x + 2y = 2\}$

**Proposizione 1.2.1.** *Tutte le rette in un medesimo piano affine  $\mathfrak{A}$  hanno lo stesso numero di punti.*

*Dimostrazione.* Consideriamo due rette  $r, s \in \mathfrak{A}$ , vogliamo costruire una biiezione tra  $r$  e  $s$ .

Essendo  $r$  distinta da  $s$  esistono un punto  $A$  appartenente ad  $r$  ma non ad  $s$  ed un punto  $B$  appartenente ad  $s$  ma non a  $r$ , iniziamo costruendo una funzione che ad  $A$  associa  $B$ . La retta  $(A, B)$  è univocamente determinata per **A1**. Per ogni altro punto di  $r$  troviamo la sua immagine tracciando la

parallela da tale punto alla retta  $(A, B)$ , la parallela è univocamente determinata per **A2** ed interseca  $s$  per il lemma 1.1.3. Abbiamo che questa funzione è ben definita. Inoltre è iniettiva per l'unicità della retta parallela passante per un punto e parallela ad una retta data, è suriettiva perchè per ogni punto immagine di  $s$  posso trovare la propria controimmagine tracciando la parallela ad  $(A, B)$  per tale punto.  $\square$

*Osservazione 5.* La proposizione precedente vale sia nel caso finito che infinito.

**Definizione 1.3.** Un piano affine finito si dice di ordine  $n$  se ogni retta ha  $n$  punti.

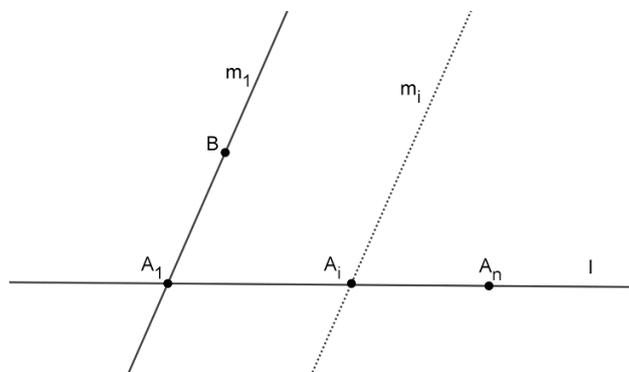
Le relazioni tra numero di punti su una retta, numero di rette nel piano, numero di fasci di rette parallele sono espresse dal seguente teorema.

**Teorema 1.2.2.** *Sia  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$  un piano affine di ordine  $n$ , si ha:*

- i)  $\mathfrak{P}$  ha esattamente  $n^2$  punti;*
- ii) ogni punto è incidente con  $n + 1$  rette;*
- iii) ogni fascio di rette parallele contiene  $n$  rette;*
- iv) il numero totale delle rette nel piano è  $n(n + 1)$ ;*
- v) il numero totale di fasci di rette parallele è  $n + 1$ .*

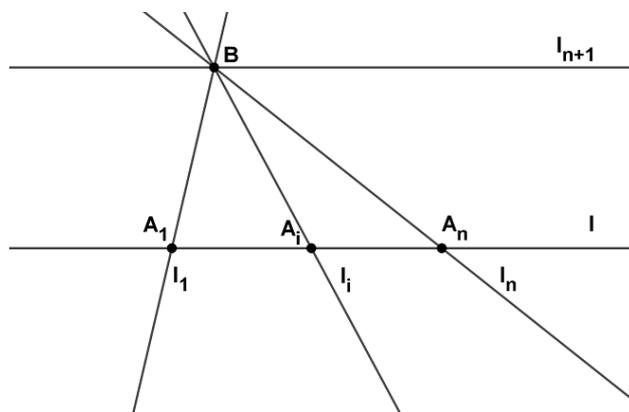
*Dimostrazione.* i) Consideriamo una retta  $l$  e chiamiamo i suoi punti  $A_1, \dots, A_n$ , poi consideriamo un punto  $B$  diverso da  $A_1, \dots, A_n$ . Chiamiamo  $m_1$  la retta incidente con  $B$  e  $A_1$ ,  $m_i$  la parallela per  $A_i$  a  $m_1$ . Ogni  $m_i$  ha  $n$  punti, in tutto sono  $n$  e non hanno punti in comune tra loro.

Sia  $P$  un punto qualunque del piano, possiamo avere due possibilità:  $P$  è incidente con  $m_1$ , altrimenti  $P$  è incidente con una retta parallela a  $m_1$ . Nel secondo caso dovendo intersecare  $l$  sarà incidente con uno degli  $A_i$ , quindi la retta è una delle  $m_i$ .



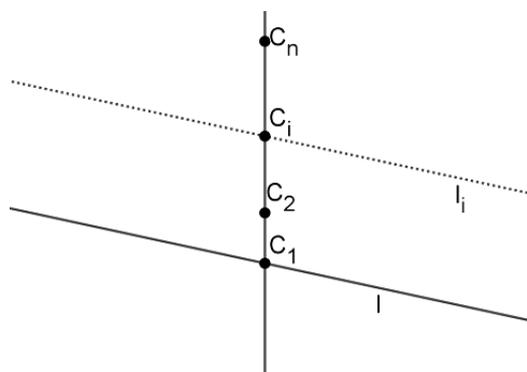
Quindi ogni punto del piano è un punto di una delle rette  $m_i$ , i punti in tutto sono  $n^2$ .

- ii) Sia  $l = \{A_1, \dots, A_n\}$  una retta e  $B$  punto qualunque diverso da ogni  $A_i$ . Chiamiamo  $l_i$  la retta incidente con  $B$ ,  $A_i$  e  $l_{n+1}$  la retta per  $B$  parallela ad  $l$ , queste sono  $n + 1$  e tutte distinte tra loro.



Per qualsiasi altra retta per  $B$  abbiamo due possibilità: interseca  $l$ , quindi è una delle  $l_i$ ; altrimenti è parallela ad  $l$  ed è  $l_{n+1}$ .

- iii) Consideriamo una retta qualsiasi  $l$ , un punto  $C_1$  incidente con  $l$  ed un punto  $C_2$  non incidente con  $l$ . Possiamo indicare i punti della retta incidente con  $C_1$ ,  $C_2$  con  $C_1, \dots, C_n$ ; la retta parallela ad  $l$  per  $C_i$  con  $l_i$  per  $i = 2, \dots, n$ . Queste rette sono  $n - 1$  e tutte distinte.



Consideriamo una retta  $h$  qualsiasi parallela ad  $l$ , allora  $h$  deve intersecare la retta per  $C_1$ ,  $C_2$  ed il punto d'intersezione sarà uno dei  $C_i$ , quindi  $h = l_i$  per qualche  $i$ .

- iv) Consideriamo  $B$  un punto qualsiasi e  $l_1, \dots, l_{n+1}$  le  $n+1$  rette incidenti con  $B$ . Ogni retta è in un fascio, ogni fascio è formato da  $n$  rette. In tutto sono  $n(n+1)$  rette.

Consideriamo una retta qualunque  $m$ , abbiamo due possibilità:  $B$  è incidente con  $m$ , quindi  $m$  è una delle  $l_i$ ; altrimenti  $B$  è incidente con una retta parallela ad  $m$  ed anche in questo caso l'abbiamo già contata.

- v) Abbiamo dimostrato che le rette sono  $n(n+1)$  ed in ogni fascio ci sono  $n$  rette, quindi il numero di fasci di rette parallele è  $n+1$ .

□



## Capitolo 2

### Teoremi di chiusura

#### 2.1 Teoremi di Desargues e di Pappo

Consideriamo due asserzioni le quali giocano un ruolo fondamentale nell'introduzione delle coordinate su un piano affine, ma non valgono in un piano affine qualunque. Entrambe vengono denominate con il nome di teoremi in quanto in geometria euclidea sono dei teoremi.

**Teorema 2.1.1.** (*Teorema di Desargues*) *Se i vertici corrispondenti di due triangoli si trovano su tre rette copuntuali, nessuno di questi incidente con più di una delle tre rette, ed i lati corrispondenti in due coppie sono paralleli allora anche i lati corrispondenti nella terza coppia sono paralleli.*

*Siano  $a, b, c$  tre rette distinte e copuntuali in un punto  $O$ ;  $A, A'$   $I_a$  e diversi da  $O$ ;  $B, B'$   $I_b$  e diversi da  $O$ ;  $C, C'$   $I_c$  e diversi da  $O$  tali che  $(A, B) \parallel (A', B')$ ,  $(A, C) \parallel (A', C')$ . Allora  $(C, B) \parallel (C', B')$ .*

**Teorema 2.1.2.** (*Teorema di Pappo*) *Dato un esagono con i vertici che giacciono alternatamente su due rette e nessuno di questi incidente con entrambe le rette, se i lati opposti in due coppie sono paralleli allora anche i lati opposti nella terza coppia sono paralleli.*

*Siano  $p, q$  due rette distinte;  $P_i$   $I_p$  e non incidenti con  $q$  per  $i = 1, 2, 3$ ;*

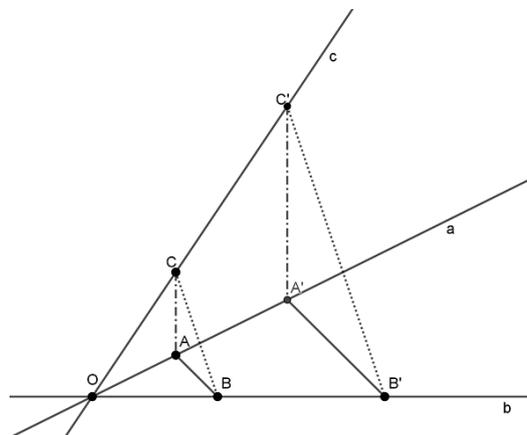


Figura 2.1: Configurazione di Desargues

$Q_i$   $I$   $q$  e non incidenti con  $p$  per  $i = 1, 2, 3$  tali che  $(P_1, Q_2) \parallel (P_2, Q_1)$ ,  $(P_1, Q_3) \parallel (P_3, Q_1)$ . Allora  $(P_2, Q_3) \parallel (P_3, Q_2)$ .

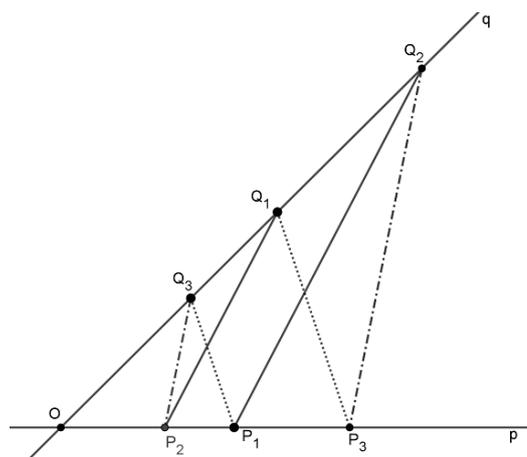


Figura 2.2: Configurazione di Pappo

In entrambi i casi chiamiamo le rette su cui giacciono i vertici *rette di supporto della configurazione*. Nel seguito indicheremo i due teoremi con  $(D)$  e  $(P)$ . Nel caso sia valido  $(D)$  il piano affine è detto di Desargues/desarguesiano e la configurazione è detta di Desargues, nel caso sia valido  $(P)$  il piano affine è detto di Pappo/pappiano e la configurazione è detta di Pappo.

Quando le rette di supporto nelle configurazioni sono parallele parliamo di piccolo teorema di Desargues e piccolo teorema di Pappo, indichiamo questi con  $(d)$  e  $(p)$ . Un piano affine in cui vale  $(d)$  è detto *microdesarguesiano*.

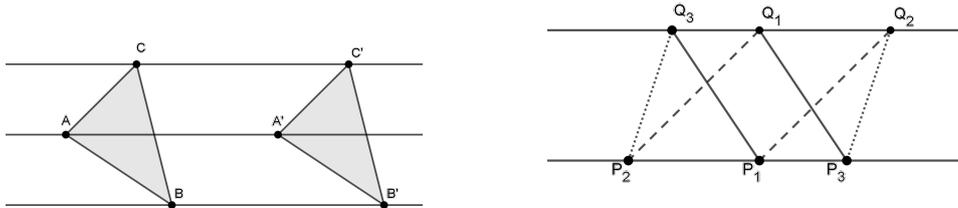
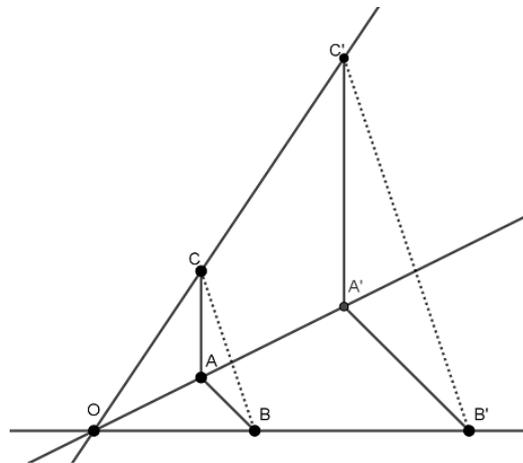


Figura 2.3: Configurazioni di  $(d)$  e  $(p)$

**Teorema 2.1.3.** *Sia  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  un piano affine in coordinate su un corpo  $\mathbb{K}$ ,  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  è un piano di Desargues.*



*Dimostrazione.* Tracciamo tre rette copuntuali per un punto, sia  $O$ , e su ognuna fissiamo tre punti, in modo da formare due triangoli  $BAC$ ,  $A'B'C'$  con due coppie di lati paralleli,  $(A, C) \parallel (A', C')$  e  $(A, B) \parallel (A', B')$ .

- Per ipotesi  $O, C, C'$  sono collineari, quindi i vettori  $C - O$ ,  $C' - O$  sono proporzionali e possiamo scrivere  $C - O = k(C' - O)$  per qualche  $k \in \mathbb{K}$ .

- Per ipotesi  $O, A, A'$  sono collineari, quindi i vettori  $A - O, A' - O$  sono proporzionali e possiamo scrivere  $A - O = h(A' - O)$  per qualche  $h \in \mathbb{K}$ .
- Per ipotesi  $O, B, B'$  sono collineari, quindi i vettori  $B - O, B' - O$  sono proporzionali e possiamo scrivere  $B - O = g(B' - O)$  per qualche  $g \in \mathbb{K}$ .

Abbiamo  $C - A = k(C' - O) - h(A' - O)$ . Per ipotesi  $C - A \parallel C' - A'$ , per qualche  $\alpha \in \mathbb{K}$  possiamo scrivere  $C - A = \alpha(C' - A')$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} k(C' - O) - h(A' - O) &= \alpha(C' - A') \\ (k - \alpha)(C' - O) + (-h + \alpha)(A' - O) &= 0 \\ h = k = \alpha &\text{ essendo } C' - O, A' - O \text{ vettori linearmente indipendenti.} \end{aligned}$$

Da  $(A, B) \parallel (A', B')$  troviamo che  $g = h$ . Quindi  $g = h = k$ , in particolare  $h = g$  in altre parole  $(C, B) \parallel (C', B')$ .  $\square$

**Teorema 2.1.4.** *Sia  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  un piano affine in coordinate su un campo  $\mathbb{K}$ ,  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  è un piano di Pappo.*

*Dimostrazione.* Distinguiamo due casi:

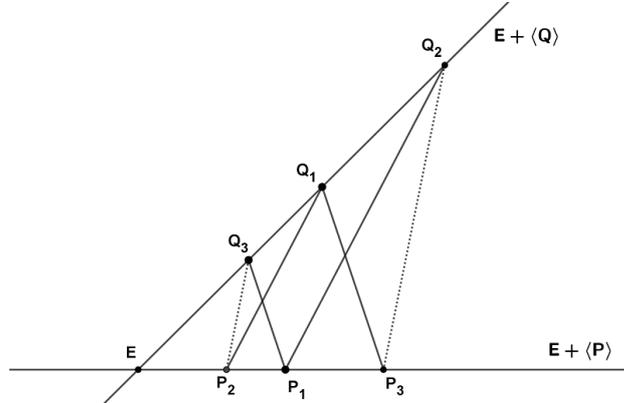
- caso 1: le rette di supporto sono entrambe incidenti in un punto;
- caso 2: le rette di supporto sono distinte e parallele.

(caso 1) Consideriamo due rette distinte  $E + \langle P \rangle, E + \langle Q \rangle$  con  $E$  qualunque e  $P, Q$  linearmente indipendenti.

Costruiamo un esagono  $P_1Q_2P_3Q_1P_2Q_3$  nel seguente modo: prendiamo sei punti  $P_i = E + a_iP$  per  $i = 1, 2, 3$  e  $Q_i = E + b_iQ$  per  $i = 1, 2, 3$  con  $a_i, b_i$  scalari non nulli tali che  $(P_1, Q_2) \parallel (Q_1, P_2)$  e  $(P_1, Q_3) \parallel (Q_1, P_3)$ . Vogliamo dimostrare che  $(P_2, Q_3) \parallel (Q_2, P_3)$ .

Iniziamo osservando che un generatore dello spazio direttore della retta  $(P_1, Q_2)$  è dato da  $P_1 - Q_2 = (E + a_1P) - (E + b_2Q) = a_1P - b_2Q$ . Un generatore dello spazio direttore della retta  $(Q_1, P_2)$  è dato da

$$Q_1 - P_2 = (E + b_1Q) - (E + a_2P) = b_1Q - a_2P.$$



L'ipotesi  $(P_1, Q_2) \parallel (Q_1, P_2)$  vuol dire che esiste uno scalare  $k$  (non nullo) tale che  $a_1 = -ka_2$ ,  $-b_2 = kb_1$ , ciò capita se e solo se vale la relazione  $a_1a_2^{-1} = b_2b_1^{-1}$ . Analogamente da  $(P_2, Q_3) \parallel (Q_2, P_3)$  otteniamo che  $a_1a_3^{-1} = b_3b_1^{-1}$ .

Dalle due relazioni trovate, usando la commutatività del campo  $\mathbb{K}$ , otteniamo la relazione  $a_3a_2^{-1} = b_2b_3^{-1}$  che equivale alla tesi  $(P_2, Q_3) \parallel (Q_2, P_3)$ .

(caso 2) Consideriamo due rette distinte e parallele  $E + \langle R \rangle, F + \langle R \rangle$  con  $E, F$  qualunque. Costruiamo un esagono  $P_1Q_2P_3Q_1P_2Q_3$  nel modo precedente, con  $P_i = E + a_iR$  per  $i = 1, 2, 3$  e  $Q_i = F + b_iR$  per  $i = 1, 2, 3$  con  $a_i, b_i$  scalari non nulli. Osserviamo che un generatore dello spazio direttore della retta  $(P_1, Q_2)$  è dato da  $P_1 - Q_2 = (E + a_1R) - (F + b_2R) = (a_1 - b_2)R - (E - F)$ , un generatore dello spazio direttore della retta  $(Q_1, P_2)$  è dato da  $P_2 - Q_1 = (a_2 - b_1)R - (E - F)$ . Da  $(P_1, Q_2) \parallel (Q_1, P_2)$  abbiamo  $a_1 - b_2 = a_2 - b_1$ . Analogamente da  $(P_1, Q_3) \parallel (Q_1, P_3)$  otteniamo che  $a_1 - b_3 = a_3 - b_1$ . Dalle due relazioni trovate otteniamo  $a_3 - b_2 = a_2 - b_3$ , che equivale alla tesi  $(P_2, Q_3) \parallel (Q_2, P_3)$ .

□

**Esempio 2.1.** (*Piano di Moulton*) Consideriamo un insieme di punti dato da  $\mathfrak{P} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ . Consideriamo come rette per  $c, m \leq 0, b \in \mathbb{R}$  i seguenti oggetti  $[c], [m, b]$ ; per  $m > 0$   $[m, b] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx + b \text{ per } y \geq 0, y = 2(mx + b) \text{ per } y < 0\}$ . Infine un punto  $P = (x, y)$  è incidente

con  $[c]$  se e solo se  $x = c$ ; per  $m \leq 0$  o  $m > 0, y > 0$   $P = (x, y)$  è incidente con  $[m, b]$  se e solo se  $y = mx + b$ , altrimenti  $y = 2(mx + b)$ . Si verifica che questa struttura è un piano affine, ma non è desarguesiano.

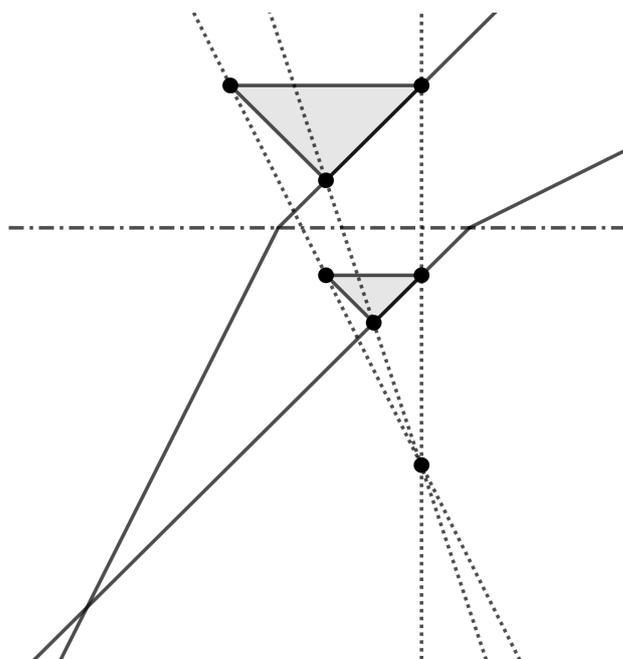


Figura 2.4: Piano affine non desarguesiano

## 2.2 Il teorema delle forbici e $D^*$

**Teorema 2.2.1.** (*Teorema delle forbici*) *Se i vertici corrispondenti di due quadrangoli si trovano alternatamente su due rette, nessun vertice incidente con entrambe le rette, ed i lati corrispondenti in tre coppie sono paralleli allora anche i lati corrispondenti nella quarta coppia sono paralleli.*

*Siano  $g, h$  due rette distinte;  $P_i, Q_i$   $I h$  e non incidenti con  $g$  per  $i = 1, 3$ ;  $P_i, Q_i$   $I g$  e non incidenti con  $h$  per  $i = 2, 4$  tali che  $(P_1, P_2) \parallel (Q_1, Q_2)$ ,  $(P_2, P_3) \parallel (Q_2, Q_3)$ ,  $(P_3, P_4) \parallel (Q_3, Q_4)$ . Allora  $(P_1, P_4) \parallel (Q_1, Q_4)$ .*

Anche in questo caso chiamiamo le rette su cui giacciono i vertici *rette di supporto della configurazione*. Quando le rette di supporto nelle configu-

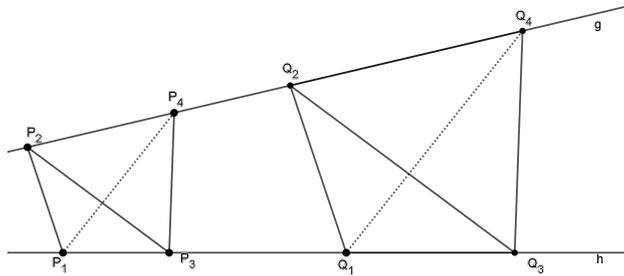
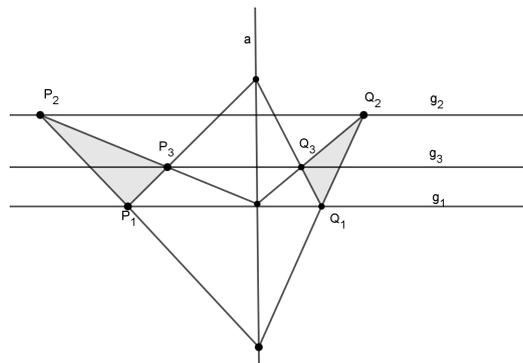


Figura 2.5: Configurazione di (S)

razioni sono parallele parliamo di piccolo teorema delle forbici, indichiamo questi rispettivamente con  $(S)$  e  $(s)$ , in quanto inglese il teorema prende il nome di *scissors theorem*.

**Teorema 2.2.2.** ( $D^*$ ) *Se i vertici di due triangoli giacciono su tre rette parallele distinte, allora o esiste una retta, detta asse della figura, tale che ogni coppia di lati corrispondenti appartiene allo stesso fascio dell'asse o i lati corrispondenti dei due triangoli sono paralleli.*

Figura 2.6: Configurazione di ( $D^*$ )

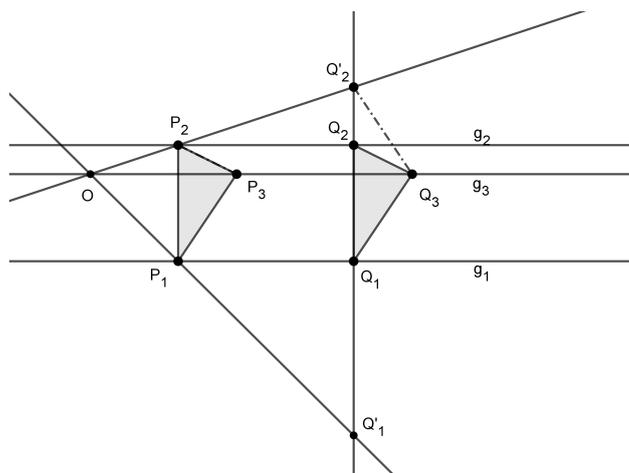
I teoremi di chiusura sono legati tra loro secondo lo schema Figura 2.7. In base alla validità o meno dei teoremi parliamo di piano di Pappo, piano di

$$\begin{array}{c}
 (P) \\
 \Downarrow \\
 (D^*) \Leftrightarrow (D) \Leftrightarrow (S) \\
 \Downarrow \\
 (p) \Leftarrow (d) \Rightarrow (s)
 \end{array}$$

Figura 2.7: Interdipendenza dei teoremi di chiusura

Desargues, piano microdesarguesiano. In particolare in un piano di Pappo valgono tutti i teoremi di chiusura. Vediamo la dimostrazione di alcune delle precedenti implicazioni. Iniziamo osservando che  $(p)$ ,  $(s)$  sono casi particolari di  $(P)$ ,  $(S)$  rispettivamente, questo non accade per  $(d)$  e  $(D)$ .

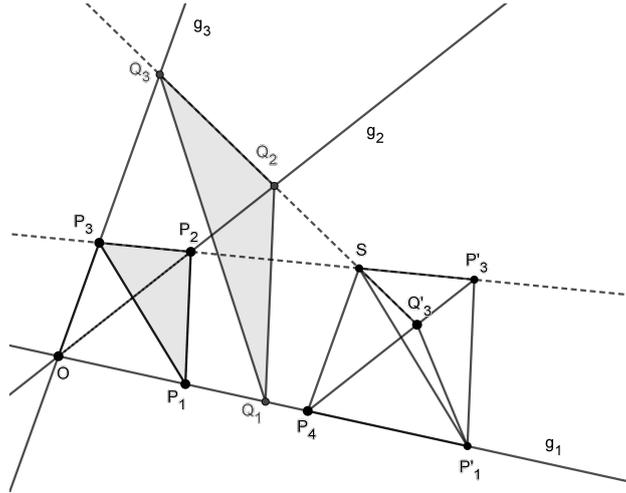
**Teorema 2.2.3.**  $(D) \Rightarrow (d)$



*Dimostrazione.* Supponiamo siano valide le ipotesi di  $(d)$ , siano  $g_1, g_2, g_3$  le rette di supporto della configurazione,  $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$  i due triangoli dove i vertici  $P_i, Q_i$  sono incidenti con  $g_i$  per  $i = 1, 2, 3$ ,  $(P_1, P_2) \parallel (Q_1, Q_2)$  e  $(P_1, P_3) \parallel (Q_1, Q_3)$ . Vogliamo dimostrare che  $(P_2, P_3) \parallel (Q_2, Q_3)$ . Se  $P_1 = Q_1$  segue la tesi dagli assiomi. Supponiamo  $P_1 \neq Q_1$ . Ora la retta parallela a  $(P_2, P_3)$  per  $Q_3$  interseca  $(Q_1, Q_2)$  in un punto  $Q'_2$ , per il lemma 1.1.3. Se  $Q_2 = Q'_2$  abbiamo la tesi. Altrimenti, sempre per il medesimo lemma,  $(Q'_2, P_2)$  interseca  $g_3$  in un punto  $O$  e  $(O, P_1)$  interseca  $(Q_1, Q_2)$  in un punto

$Q'_1$ . Possiamo applicare  $(D)$  ai triangoli  $P_1P_2P_3, Q'_1, Q'_2Q_3$ , quindi  $(P_1, P_3) \parallel (Q'_1, Q_3)$  ma anche  $(P_1, P_3) \parallel (Q_1, Q_3)$ , in contraddizione con **A2**.  $\square$

**Teorema 2.2.4.**  $(S) \Rightarrow (D)$

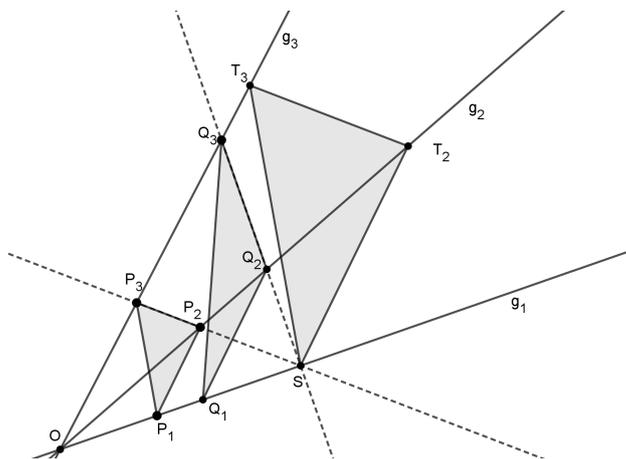


*Dimostrazione.* Supponiamo siano valide le ipotesi di  $(D)$ : siano  $g_1, g_2, g_3$  le rette di supporto della configurazione copuntuali in  $O, P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$  i due triangoli dove i vertici  $P_i, Q_i$  sono incidenti con  $g_i$  per  $i = 1, 2, 3$ ,  $(P_1, P_2) \parallel (Q_1, Q_2)$  e  $(P_1, P_3) \parallel (Q_1, Q_3)$ . Vogliamo dimostrare che  $(P_2, P_3) \parallel (Q_2, Q_3)$ , supponiamo  $P_3 \neq Q_3$ .

Per quanto riguarda  $(P_2, P_3)$  e  $(Q_2, Q_3)$  abbiamo tre possibilità: sono parallele, si intersecano in un punto  $S$  non incidente con  $g_1$ , si intersecano in un punto  $S$  incidente con  $g_1$ .

Supponiamo  $(P_2, P_3), (Q_2, Q_3) \not\parallel$  e  $S$  non incidente con  $g_1$ . Sia  $P_4$  l'intersezione di  $g_1$  con la parallela a  $g_3$  per  $S$ , sia  $P'_1$  l'intersezione di  $g_1$  con la parallela a  $(P_1, P_3)$  per  $S$ , sia  $P'_3$  l'intersezione di  $(P_2, P_3)$  con la parallela a  $g_2$  per  $P_4$ , sia  $Q'_3$  l'intersezione di  $(Q_2, Q_3)$  con  $(P_4, P'_3)$ . Applicando  $(S)$  alle seguenti coppie di quadrangoli  $OP_2P_1P_3, P_4P'_3P'_1S$  e  $OQ_2Q_1Q_3, P_4Q'_3P'_1S$  otteniamo  $(P_1, P_2) \parallel (P'_1, P'_3)$  e  $(Q_1, Q_2) \parallel (P'_1, Q'_3)$ . Quindi  $(P'_1, P'_3) \parallel (P'_1, Q'_3)$ , cioè  $(P'_1, P'_3) = (P'_1, Q'_3)$ , quindi  $P'_3 = Q'_3$  e  $(P_2, P_3) = (Q_2, Q_3)$ , in contraddizione con l'assunzione  $(P_2, P_3) \not\parallel (Q_2, Q_3)$ .

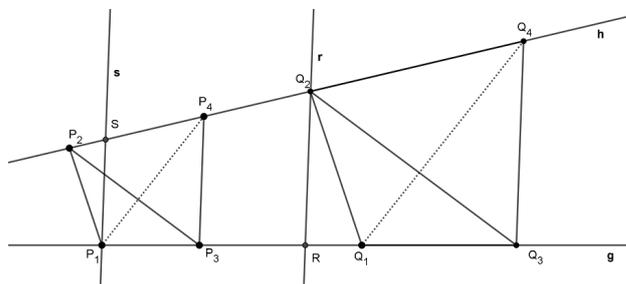
A questo punto sono rimaste solo due possibilità: sono parallele, si intersecano in un punto  $S$  incidente con  $g_1$ . Dimostriamo che non è possibile  $SIg_1$ . Supponiamo che  $SIg_1$ . Sia  $T_3$  il punto di intersezione di  $g_3$  e la parallela a



$(P_1, P_3)$  per  $S$ , sia  $T_2$  il punto di intersezione di  $g_2$  e la parallela a  $(P_1, P_2)$  per  $S$ . Consideriamo i triangoli  $P_1P_2P_3$ ,  $ST_2T_3$ :  $(P_2, P_3)$ ,  $(T_2, T_3)$  non si intersecano su  $g_1$  quindi  $(P_2, P_3) \parallel (T_2, T_3)$ . Consideriamo i triangoli  $Q_1Q_2Q_3$ ,  $ST_2T_3$  otteniamo che  $(Q_2, Q_3) \parallel (T_2, T_3)$ . Dunque  $(P_2, P_3) \parallel (Q_2, Q_3)$ , ma avevamo supposto che  $SI(P_2, P_3), (Q_2, Q_3)$ .

Quindi l'unica possibilità rimasta è  $(P_2, P_3) \parallel (Q_2, Q_3)$ .  $\square$

**Teorema 2.2.5.**  $(P) \Rightarrow (S)$



*Dimostrazione.* Supponiamo siano valide le ipotesi di  $(S)$ , siano  $h, g$  le rette di supporto della configurazione,  $P_1P_2P_3P_4, Q_1Q_2Q_3Q_4$  i due quadrangoli con  $P_i, Q_i$  incidenti con  $g$ , non con  $h$  per  $i = 1, 3$  e  $P_j, Q_j$  incidenti con  $h$ , non con

$g$  per  $j = 2, 4$ ,  $(P_1, P_2) \parallel (Q_1, Q_2)$ ,  $(P_2, P_3) \parallel (Q_2, Q_3)$ ,  $(P_3, P_4) \parallel (Q_3, Q_4)$ .

Vogliamo dimostrare che  $(P_1, P_4) \parallel (Q_1, Q_4)$ .

Consideriamo la retta parallela a  $(P_3, P_4)$  per  $Q_2$ , sia  $r$ , questa interseca  $g$  in  $R$ . Dimostriamo che  $R$  non è incidente con  $h$ .

Supponiamo  $RIh$ .  $Q_2 \neq R$  perchè  $Q_2$  non è incidente con  $g$

$RIh, r$  e anche  $Q_2Ih, r$  quindi  $h = r$  quindi  $(P_3, P_4) \parallel h$  e per **A2**

$(P_3, P_4) = h$  quindi  $P_3Ih$ , controipotesi.

Consideriamo la retta parallela a  $(P_3, P_4)$  per  $P_1$ , sia  $s$ , questa interseca  $h$  in  $R$ . Si dimostra come sopra che  $S$  non è incidente con  $g$ .

Abbiamo  $P_1, R, Q_1$  non incidenti con  $h$ ,  $P_2, S, Q_2$  non incidenti con  $g$ ,  $(P_1, P_2) \parallel (Q_1, Q_2)$ ,  $(P_1, S) \parallel (R, Q_2)$ , possiamo applicare  $(P)$  sull'esagono  $P_2RQ_2Q_1SP_1$  e otteniamo  $(P_2, R) \parallel (Q_1, S)$ . Applicando  $(P)$  sull'esagono  $P_3P_2RQ_2Q_3P_4$  otteniamo  $(P_2, R) \parallel (P_4, Q_3)$  e infine applicando  $(P)$  sull'esagono  $P_4P_1SQ_1Q_4Q_3$  e otteniamo  $(P_1, P_4) \parallel (Q_1, Q_4)$ , cioè la tesi.  $\square$

Quindi possiamo concludere che in ogni piano affine in cui vale  $(P)$  vale anche  $(D)$ .

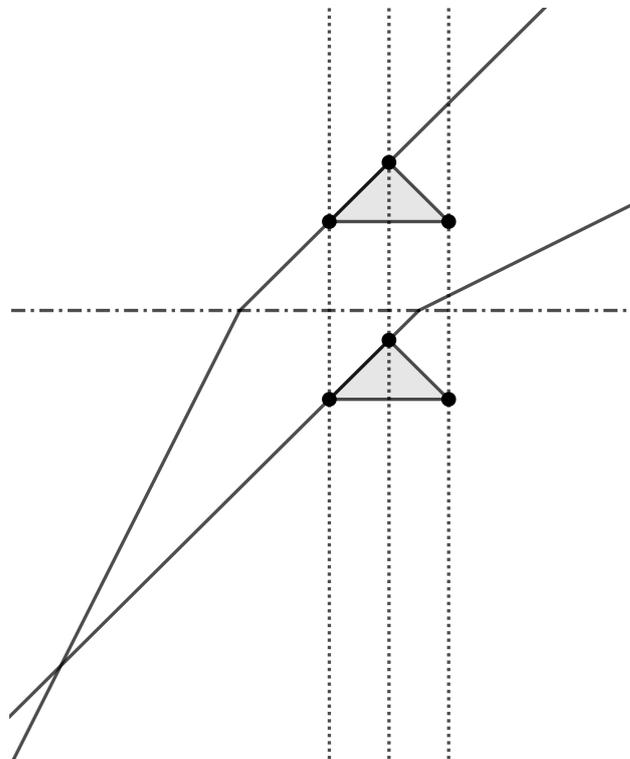
**Esempio 2.2.** (*Piano affine in cui non vale  $(P)$* )

Consideriamo piano affine in coordinate sul corpo  $\mathbb{H}$ , mettiamoci nelle ipotesi di  $(P)$  e verifichiamo che non vale la tesi del teorema di  $(P)$ .

Prendiamo due rette di supporto della configurazione copuntuali in  $(0, 0)$ , costruiamo l'esagono  $P_1Q_2P_3Q_1P_2Q_3$  con  $P_1 = (j, 0)$ ,  $P_2 = (i, 0)$ ,  $P_3 = (ji, 0)$  e  $Q_1 = (0, i)$ ,  $Q_2 = (0, j)$ ,  $Q_3 = (0, 1)$ . Ora  $(P_2, Q_1)$  e  $(P_1, Q_2)$  sono parallele, in quanto un generatore dello spazio direttore per entrambe è  $(-1, 1)$ . Inoltre  $(P_1, Q_3)$  e  $(P_3, Q_1)$  sono parallele, in quanto un generatore dello spazio direttore per entrambe è  $(-j, 1)$ . Tuttavia  $(P_3, Q_2)$  e  $(P_2, Q_3)$  non sono parallele, in quanto un generatore dello spazio direttore per  $(P_3, Q_2)$  è  $(i, 1)$  ed un generatore dello spazio direttore per  $(P_2, Q_3)$  è  $(-i, 1)$ . Quindi sebbene le ipotesi del teorema di Pappo siano soddisfatte questo non vale.  $\mathfrak{A}(\mathbb{H})$  è un piano di Desargues ma non di Pappo.

**Esempio 2.3.** (*Piano affine in cui non vale (d)*)

Nel piano di Moulton non vale neanche (d).



# Capitolo 3

## Collineazioni

### 3.1 Collineazioni

Nel seguito del capitolo indicheremo l'immagine di un elemento  $a$  tramite una funzione  $f$  scrivendo a sinistra l'elemento ed a destra la funzione,  $af$ . Coerentemente con questo la scrittura  $fg$  denoterà una composizione di funzioni in cui prima è applicata  $f$  e dopo  $g$ .

Un *isomorfismo* tra due piani affini  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$  e  $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{G}', I')$  è dato da due funzioni biettive  $f_1 : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ ,  $f_2 : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}'$  tali che, con  $P \in \mathfrak{P}$ ,  $r \in \mathfrak{G}$ ,  $Pf_1I'rf_2$  se e solo se  $P I r$ . In tal caso i piani  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{A}'$  si dicono isomorfi.

*Osservazione 6.* La definizione precedente è ridondante in quanto supponendo valga  $P I r$  allora  $Pf_1I'rf_2$ , possiamo dimostrare che  $Pf_1I'rf_2$  implica  $P I r$ .

*Infatti.* Consideriamo una retta  $r$  ed un punto  $P$  non incidente ad  $r$ . Poi prendiamo una retta  $s$  per  $P$  che interseca  $r$  in un punto  $R$ . Essendo  $R I r$  abbiamo  $Rf_1 I rf_2$ . Essendo  $R I s$  abbiamo  $Rf_1 I sf_2$  ed essendo  $P I s$  abbiamo  $Pf_1 I sf_2$ . Se anche  $Pf_1$  fosse incidente con  $rf_2$  avremmo  $rf_2 = sf_2$ , essendo  $r \neq s$   $f_2$  non sarebbe una biezione. Abbiamo dimostrato che se  $P$  non è incidente con  $r$  allora  $Pf_1$  non è incidente con  $rf_2$ .

**Definizione 3.1.** Un isomorfismo da un piano affine  $\mathfrak{A}$  in se stesso è detto *collineazione* di  $\mathfrak{A}$ .

Dalle definizioni precedenti segue direttamente:

**Teorema 3.1.1.** *L'insieme delle collineazioni di un piano affine forma un gruppo rispetto alla composizione.*

**Lemma 3.1.2.** *Una collineazione manda rette parallele in rette parallele.*

*Dimostrazione.* Consideriamo una collineazione  $\alpha$ , due rette parallele  $r, s$  e supponiamo che le rette  $r\alpha, s\alpha$  non lo siano. Ci sarebbe un punto  $P$  incidente con entrambe,  $P \in r\alpha, s\alpha$ , quindi  $P\alpha^{-1} \in r, s$ .  $\square$

Nel seguito consideriamo un piano affine  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$  ed una sua collineazione  $\alpha$ .

**Definizione 3.2.** Un punto  $P$  è detto *punto unito* di  $\alpha$  se  $P\alpha = P$ .

Una retta  $r$  è detta *retta unita* di  $\alpha$  se  $r\alpha = r$ .

Sia  $\mathcal{P}$  l'insieme di tutti i punti uniti di  $\alpha$ , sia  $\mathcal{G}$  l'insieme di tutte le rette unite di  $\alpha$ , allora  $\mathfrak{F}(\alpha) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$  è detta *configurazione unita* di  $\alpha$ .

*Osservazione 7.* Dati due punti uniti, la retta congiungente tali punti è una retta unita. Date due rette unite incidenti tra loro, il punto d'intersezione è un punto unito.

**Lemma 3.1.3.** *Sia  $\mathfrak{F}(\alpha) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$  la configurazione unita di una collineazione  $\alpha$ , dove  $\mathcal{P}$  è l'insieme dei punti uniti di  $\alpha$ ,  $\mathcal{G}$  è l'insieme delle rette unite di  $\alpha$ . Allora in  $\mathfrak{F}(\alpha)$  valgono **A1, A2**.*

*Dimostrazione.* Verifichiamo la validità di **A1, A2** in  $\mathfrak{F}(\alpha)$ . Per quanto riguarda l'unicità segue direttamente dalla validità di **A1, A2** in  $\mathfrak{A}$ .

**A1** Segue dall'osservazione precedente, dati due punti uniti esiste una retta unita incidente con entrambi.

**A2** Consideriamo una retta unita  $r$  e un punto unito  $B$  non incidente con  $r$ , esiste  $h \in \mathfrak{G}$  per  $B$  parallela ad  $r$ . Abbiamo  $h\alpha \perp B\alpha = B$  e  $h\alpha \parallel r\alpha = r$  per il lemma 3.1.2. Quindi  $h, h\alpha \parallel r$  e  $B \perp h, h\alpha$  per **A2** in  $\mathfrak{A}$   $h = h\alpha$ . Dunque  $h$  è una parallela ad  $r$  per  $B$  in  $\mathfrak{F}(\alpha)$ .

□

**Definizione 3.3.** Una traccia di  $\alpha$  per il punto  $P$  è una retta che passa per  $P$  e  $P\alpha$ .

*Osservazione 8.* Ogni retta unita è una traccia, questo segue direttamente dalla definizione di traccia.

**Definizione 3.4.** Una collineazione  $\tau$  di  $\mathfrak{A}$  è una traslazione se  $t \parallel t\tau$  per tutte le rette  $t$  ed, esclusa l'identità, non ha punti uniti.

Una traccia di  $\tau$  per il punto  $P$  è una retta che passa per  $P$  e  $P\tau$ .

**Lemma 3.1.4.** *Le tracce di una traslazione sono tutte e sole le sue rette unite.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che ogni traccia di  $\tau$  è una sua retta unita, visto che l'altra implicazione vale per ogni collineazione. Consideriamo una traccia  $t$  di  $\tau$  per un punto  $P$ , abbiamo  $P, P\tau \perp t$ . Inoltre  $P\tau \perp t, t\tau$  e  $t \parallel t\tau$  quindi  $t = t\tau$ , cioè  $t$  è una retta unita. □

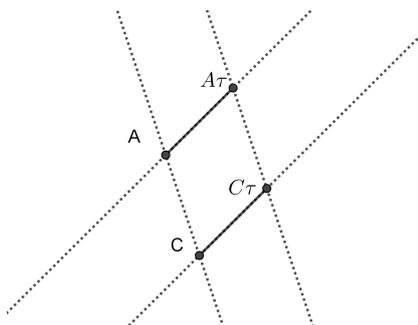
**Lemma 3.1.5.** *Sia  $\tau$  una traslazione diversa dall'identità. Le tracce di  $\tau$  formano un fascio di rette parallele.*

*Dimostrazione.* La configurazione unita di  $\tau$ ,  $\mathfrak{F}(\tau)$ , contiene solo rette perchè  $\tau$  è diversa dall'identità e quindi non ha punti uniti. Esiste almeno una retta unita (ovvio perchè le tracce ci sono sempre). Per l'osservazione 7 le tracce non possono intersecarsi in quanto  $\tau$  non ha punti uniti, quindi formano un fascio di rette parallele. □

**Definizione 3.5.** Sia  $\tau$  una traslazione diversa dall'identità e sia  $\Pi$  il fascio di rette parallele formato dalle tracce di  $\tau$ , allora  $\tau$  è detta traslazione nella direzione di  $\Pi$ .

Se  $t$  è una retta del fascio  $\Pi$  si dice che  $\tau$  è una traslazione nella direzione  $t$  ed il fascio si può indicare con  $\Pi_t$ . Nel caso  $\tau$  sia l'identità  $\tau$  è una traslazione in ogni direzione.

**Lemma 3.1.6.** *Siano  $A, B$  due punti in  $\mathfrak{A}$ , esiste al più una traslazione  $\tau$  tale che  $B = A\tau$ .*



*Dimostrazione.* Se  $A = B$  questo è un punto unito di  $\tau$ , quindi l'unica traslazione è l'identità.

Se  $A \neq B$  consideriamo un punto  $C$  non incidente con la retta  $(A, B)$ . Per ogni traslazione  $\tau$  tali che  $B = A\tau$  abbiamo che  $C\tau$  è univocamente determinato, in quanto è l'intersezione tra la retta per  $B$  parallela ad  $(A, C)$ , perchè per la definizione di traslazione  $(A, C) \parallel (A, C)\tau$ , e la retta per  $C$  parallela ad  $(A, A\tau)$ , perchè  $\tau$  deve essere una traslazione nella direzione di  $(A, B)$ . Se  $CI(A, B)$  possiamo ricondurci al caso precedente.  $\square$

Nel seguito data una retta  $g$  indichiamo con  $T(g)$  l'insieme di tutte le traslazioni aventi direzione  $g$ .

**Teorema 3.1.7.** *L'insieme  $T$  di tutte le traslazioni di  $\mathfrak{A}$  forma un gruppo, e anche l'insieme  $T(g)$  di tutte le traslazioni aventi una direzione fissata  $g$  forma un gruppo.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $T$  è un sottogruppo del gruppo delle collineazioni, cioè che date due traslazioni  $\tau', \tau$  si ha  $\tau'\tau^{-1}$  è una traslazione. Dimostriamo che:

- i)* per ciascuna retta  $g$  abbiamo che  $g \parallel g\tau'\tau^{-1}$ . Questo segue dal fatto che  $\tau, \tau'$  sono traslazioni usando la proprietà transitiva del parallelismo;
- ii)* se  $P$  è un punto unito di  $\tau'\tau^{-1}$  allora  $\tau'\tau^{-1}$  è l'identità. Supponiamo che  $P$  sia un punto unito di  $\tau'\tau^{-1}$ ,  $P = P\tau'\tau^{-1}$ ,  $P\tau = P\tau'$  quindi per il lemma 3.1.6  $\tau = \tau'$ , cioè  $\tau'\tau^{-1}$  è l'identità.

Dimostriamo che  $T(g)$  è un gruppo. Per i lemmi 3.1.4, 3.1.5 basta dimostrare che  $g\tau'\tau^{-1} = g$  per  $\tau', \tau^{-1} \in T(g)$ . Abbiamo che  $g = g\tau'$ ,  $g = g\tau$  quindi  $g\tau^{-1} = g$  e dunque  $g\tau'\tau^{-1} = g$ .  $\square$

Dati una retta unita  $t$  e due punti distinti  $A, B$  tali che  $(A, B) \parallel t$  non è detto che esista una traslazione  $\tau$  nella direzione di  $t$  che manda  $A$  in  $B$ , cioè  $B = A\tau$ .

**Definizione 3.6.** Il gruppo delle traslazioni nella direzione di  $g$ ,  $T(g)$ , si dice *linearmente transitivo* se per ogni coppia di punti  $A, B$  con  $(A, B) \parallel g$  esiste una traslazione  $\tau$  in  $T(g)$  tali che  $B = A\tau$ .

**Lemma 3.1.8.** *Se  $\alpha$  è una collineazione e  $\tau$  una traslazione nella direzione di  $g$  allora  $\alpha^{-1}\tau\alpha$  è una traslazione nella direzione di  $g\alpha$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che data una retta  $t$  si ottiene  $t \parallel t\alpha^{-1}\tau\alpha$ .

Abbiamo  $t\alpha^{-1} \parallel (t\alpha^{-1})\tau$

$$t = t\alpha^{-1}\alpha$$

$t \parallel ((t\alpha^{-1})\tau)\alpha$  per il lemma 3.1.2, quindi

$$t \parallel t\alpha^{-1}\tau\alpha.$$

Dimostriamo che se  $P$  è un punto unito per  $\alpha^{-1}\tau\alpha$  è l'identità. Se  $P$  è un punto unito per  $\alpha^{-1}\tau\alpha$  abbiamo che  $P = P\alpha^{-1}\tau\alpha$ ,  $P\alpha^{-1} = P\alpha^{-1}\tau$ . Per il lemma 3.1.6  $\tau$  è l'identità.

Mostriamo infine che  $\alpha^{-1}\tau\alpha \in T(g\alpha)$ . Infatti  $(g\alpha)\alpha^{-1}\tau\alpha = g\tau\alpha = g\alpha$ .  $\square$

**Teorema 3.1.9.** *Se esistono due traslazioni diverse dall'identità e in due direzioni distinte, allora il gruppo delle traslazioni  $T$  è abeliano.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che se  $\tau, \tau'$  sono due traslazioni in direzioni distinte allora  $\tau\tau' = \tau'\tau$ .

Siano  $\tau \in T(g), \tau' \in T(g')$  con  $g \nparallel g'$ ,

$\tau'^{-1}\tau\tau' \in T(g)$  per il lemma precedente

$\tau^{-1}(\tau'^{-1}\tau\tau') \in T(g)$  perchè  $T(g)$  è un gruppo.

Analogamente si dimostra che  $(\tau^{-1}\tau'^{-1}\tau)\tau' \in T(g')$ . Quindi  $\tau^{-1}\tau'^{-1}\tau\tau' \in T(g), T(g')$  e  $g \nparallel g'$ , allora  $\tau^{-1}\tau'^{-1}\tau\tau'$  è l'identità, cioè  $\tau\tau' = \tau'\tau$ .

Dimostriamo che se  $\tau, \tau'$  sono due traslazioni nella stessa direzione allora  $\tau\tau' = \tau'\tau$ . Ora  $\tau, \tau' \in T(g)$  e  $\tau'' \in T(g'')$  con  $g'' \nparallel g$ , la quale esiste per ipotesi. Abbiamo che  $\tau'\tau'' \notin T(g)$  e usando quanto dimostrato sopra  $(\tau\tau')\tau'' = \tau(\tau'\tau'') = (\tau'\tau'')\tau = \tau'(\tau''\tau) = \tau'(\tau\tau'') = (\tau'\tau)\tau''$ , cioè  $\tau\tau' = \tau'\tau$ .  $\square$

**Definizione 3.7.** Una collineazione  $\delta$  di  $\mathfrak{A}$  è detta dilatazione se  $g \parallel g\delta$  per tutte le rette  $g$  ed ha almeno un punto unito.

Una traccia di  $\delta$  per il punto  $P$  è una retta che passa per  $P$  e  $P\delta$  e si dimostra che:

**Lemma 3.1.10.** *Le tracce di una dilatazione sono tutte e sole le sue rette unite.*

**Lemma 3.1.11.** *Una dilatazione  $\delta$ , diversa dall'identità, ha esattamente un punto unito.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\delta$  abbia due punti uniti  $O, O'$ . Ogni retta per  $O$  è una retta unita, in quanto è una traccia. Dall'osservazione 7 abbiamo che: la retta  $(O, O')$  è una retta unita; ogni punto  $P$  non incidente con  $(O, O')$  è unito, essendo intersezione delle rette unite  $(O, P)$  e  $(O', P)$ ; allo stesso modo si prova che ogni punto di  $(O, O')$  è unito. Quindi  $\delta$  è l'identità.  $\square$

$\mathfrak{F}(\delta)$ , la configurazione unita di una dilatazione  $\delta$  distinta dall'identità, è formata dal punto unito  $O$  e dalle rette del fascio proprio per  $O$ .

**Teorema 3.1.12.** *L'insieme delle dilatazioni con il medesimo punto fisso  $O$ ,  $D(O)$ , forma un gruppo.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $D(O)$  è un sottogruppo del gruppo delle collineazioni, cioè che date due dilatazioni  $\delta', \delta \in D(O)$  si ha che  $\delta'\delta^{-1}$  è una dilatazione con punto unito  $O$ . Dimostriamo che:

- i)* per ciascuna retta  $g$  abbiamo che  $g \parallel g\delta'\delta^{-1}$ , questo si dimostra come nel caso delle traslazioni;
- ii)*  $O$  è un punto unito di  $\delta'\delta^{-1}$ . Infatti  $O\delta'\delta^{-1} = O\delta^{-1} = O$ .

□

**Lemma 3.1.13.** *Sia  $D(O)$  il gruppo delle dilatazioni con punto unito  $O$ , siano  $A, B$  due punti distinti da  $O$ . Allora esiste al più una dilatazione  $\delta \in D(O)$  tali che  $B = A\delta$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo ci siano due dilatazioni  $\delta, \delta' \in D(O)$  tali che  $B = A\delta$  e  $B = A\delta'$ . Abbiamo che  $A\delta' = A\delta$  quindi  $A\delta'\delta^{-1} = A$ . Dunque  $\delta'\delta^{-1} \in D(O)$  e fissa il punto  $A$  distinto da  $O$ , quindi per il lemma 3.1.11  $\delta'\delta^{-1}$  è l'identità. Dunque  $\delta = \delta'$ . □

Dati tre punti  $A, B, O$  con  $A, B \neq O$  e collineari con  $O$  non è detto esista una dilatazione  $\delta \in D(O)$  tale che  $B = A\delta$ .

**Definizione 3.8.** Il gruppo della dilatazioni con punto unito  $O$ ,  $D(O)$ , è detto *linearmente transitivo* se per ogni coppia di punti  $A, B$ , distinti da  $O$  e collineari con  $O$ , esiste una dilatazione  $\delta$  in  $D(O)$  tali che  $B = A\delta$ .

**Definizione 3.9.** Una collineazione  $\alpha$  di  $\mathfrak{A}$  è detta *affinità assiale* con asse  $a$  se  $a$  è una retta di punti uniti.

*Osservazione 9.* Se  $\alpha$  è un'affinità assiale con asse  $a$  distinta dall'identità, i punti uniti sono tutti e soli i punti dell'asse.

*Infatti*

Dimostriamo che se  $P$  non incidente con l'asse è unito allora  $\alpha$  è l'identità. Supponiamo ci sia  $P$  punto unito non incidente con l'asse. Il fascio proprio di rette per  $P$  è un fascio di rette unite, compresa la retta parallela ad  $a$  per

$P$ . Consideriamo una retta  $b$  non parallela ad  $a$ , questa passa per un punto incidente con  $a$  ed è parallela ad una retta del fascio per  $P$  quindi è unita. Dunque tutte le rette non parallele ad  $a$  sono unite. Un punto non sull'asse essendo intersezione di due rette non parallele ad  $a$ , quindi unite, è unito. Dunque tutti i punti di  $\mathfrak{A}$  sono uniti, cioè  $\alpha$  è l'identità.

Una traccia di  $\alpha$  per un punto  $P$  non incidente con  $a$  è una retta che passa per  $P$  e  $P\alpha$ .

**Lemma 3.1.14.** *Le tracce di un'affinità assiale con asse  $a$  e l'asse  $a$  sono tutte e sole le sue rette unite.*

*Dimostrazione.* Se  $\alpha$  è l'identità ogni retta è unita. Supponiamo che  $\alpha$  non sia l'identità, sia  $g = (P, P\alpha)$  una traccia. Supponiamo  $g \not\parallel a$ , quindi  $g$  interseca  $a$  in un punto unito, sia  $A$ . Abbiamo  $P\alpha \in g\alpha, g$  e  $A \in g, g\alpha$ . Siccome  $A \neq P\alpha$  quindi  $g = g\alpha$ . Supponiamo  $g \parallel a$ . Abbiamo  $g\alpha \parallel a\alpha = a$  e  $g, g\alpha \in P\alpha$  quindi  $g = g\alpha$ .  $\square$

**Lemma 3.1.15.** *Sia  $\alpha$  un'affinità assiale con asse  $a$ , sia  $\mathfrak{F}(\alpha) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$  la configurazione unita di  $\alpha$ , allora  $\mathfrak{P}$  è l'insieme dei punti di  $a$  e  $\mathcal{G}$  contiene un fascio di rette parallele ed  $a$ .*

Se  $z$  è una retta del fascio del lemma sopra  $\alpha$  è detta affinità assiale con asse  $a$  nella direzione  $z$ .

**Teorema 3.1.16.** *L'insieme  $A(a)$  delle affinità assiali con asse  $a$  forma un gruppo, ed anche l'insieme delle affinità assiali con asse  $a$  in  $A(a)$  nella direzione  $z$ ,  $A(z, a)$ , forma un gruppo.*

**Definizione 3.10.** Il gruppo delle affinità assiali con asse  $a$  nella direzione  $z$ ,  $A(z, a)$ , si dice *linearmente transitivo* se per ogni coppia di punti  $A, B$  non incidenti con  $a$  e  $(A, B) \parallel z$  esiste un'affinità assiale  $\alpha \in A(z, a)$  tale che  $B = A\alpha$ .

**Lemma 3.1.17.** *Siano  $\alpha$  un'affinità assiale con asse  $a$  ed  $A$  un punto non incidente con  $a$ .  $\alpha$  è univocamente determinata da  $A$  e dalla sua immagine  $A\alpha$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo ci siano  $\alpha, \alpha'$  due affinità assiali con asse  $a$  tali che  $A\alpha = A\alpha'$ . Abbiamo  $A = A\alpha'\alpha^{-1}$ , cioè  $A$  è un punto unito di  $\alpha'\alpha^{-1}$ . Per ipotesi  $A$  non è incidente con l'asse  $a$ , quindi  $\alpha'\alpha^{-1}$  è l'identità, cioè  $\alpha' = \alpha$ .  $\square$

## 3.2 Le collineazioni ed i teoremi di chiusura

Abbiamo visto che in un piano affine qualunque non sempre valgono i teoremi di chiusura e non sempre dati due punti distinti esiste una collineazione dei tipi considerati precedentemente che porta uno nell'altro. Enunciamo le relazioni che legano la validità dei vari teoremi di chiusura con l'esistenza o con alcune caratteristiche dei gruppi di collineazioni incontrati precedentemente.

**Teorema 3.2.1.** *In un piano affine,  $(D)$  vale per ogni configurazione con rette di supporto copuntuali in un punto  $O$  se e solo se  $D(O)$  è linearmente transitivo.  $(d)$  vale per ogni configurazione con rette di supporto parallele ad una retta  $g$  se e solo se  $T(g)$  è linearmente transitivo.*

**Teorema 3.2.2.** *In un piano affine,  $(P)$  vale per ogni configurazione con rette di supporto copuntuali in un punto  $O$  se e solo se il gruppo linearmente transitivo  $D(O)$  è abeliano.  $(p)$  vale per ogni configurazione con rette di supporto parallele ad una retta  $g$  se e solo se il gruppo linearmente transitivo  $T(g)$  è abeliano.*

**Teorema 3.2.3.** *In un piano affine,  $(D^*)$  vale per ogni configurazione con asse  $a$  e rette di supporto parallele ad una retta  $z$  se e solo se il gruppo  $A(z, a)$  è linearmente transitivo.*



# Capitolo 4

## Coordinatizzazione

### 4.1 Teorema di coordinatizzazione

**Teorema 4.1.1.** *Ogni piano affine desarguesiano  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$  è isomorfo al piano affine in coordinate  $\mathfrak{A}(\mathbb{K}) = (\mathcal{U}, \mathcal{G}, \in)$  su un corpo  $\mathbb{K}$ .*

*Dimostrazione.* 1° parte: costruzione del corpo.

Sia  $\mathfrak{A}$  un piano affine desarguesiano. Consideriamo due punti distinti  $A, E$  in  $\mathfrak{A}$ , chiamiamo  $x$  la retta  $(O, E)$  e  $\mathbb{K}$  l'insieme dei punti di  $x$ . Per ogni punto  $A$  in  $x$  esiste esattamente una traslazione che porta  $O$  in  $A$ , sia  $\tau_A$  in  $T(x)$ . Per ogni punto  $C \neq O$  esiste esattamente una dilatazione in  $D(O)$  che porta  $E$  in  $C$ , sia  $\delta_C$ .

Definiamo un'operazione di somma ed una di prodotto in  $\mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned} A + B &= O\tau_A\tau_B = A\tau_B \quad \forall A, B \text{ in } \mathbb{K} \\ A \cdot B &= E\delta_A\delta_B = A\delta_B \quad \forall A, B \neq O \text{ in } \mathbb{K} \\ A \cdot O &= O \cdot A = O \end{aligned} \tag{4.1}$$

Da queste definizioni segue direttamente:

$$\begin{aligned} \tau_{A+B} &= \tau_A\tau_B \quad \forall A, B \text{ in } \mathbb{K} \\ \delta_{A \cdot B} &= \delta_A\delta_B \quad \forall A, B \neq O \text{ in } \mathbb{K} \end{aligned}$$

Dimostriamo che  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  è un corpo. Indichiamo  $\mathbb{K}$  con  $\mathbb{K}(\mathfrak{A})$ .

Abbiamo che  $(\mathbb{K}, +)$  è isomorfo al gruppo abeliano delle traslazioni nella direzione  $x$ ,  $T(x)$ , e  $(\mathbb{K} \setminus \{O\}, \cdot)$  è isomorfo al gruppo delle dilatazioni  $D(O)$ .

Dobbiamo dimostrare che valgono le due proprietà distributive.

Sia  $y$  un'arbitraria retta per  $O$ . Consideriamo un'affinità assiale con asse  $y$  nella direzione  $x$ , sia  $\alpha$  in  $A(x, y)$ . Per il lemma 3.1.8  $\alpha^{-1}\tau_A\alpha$  è una traslazione in  $T(x\alpha)$ , inoltre  $O\alpha^{-1}\tau_A\alpha = O\tau_A\alpha = A\alpha = O\tau_{A\alpha}$ . Dunque

$$\alpha^{-1}\tau_A\alpha = \tau_{A\alpha} \quad \text{per } A \text{ in } \mathbb{K} \quad (4.2)$$

Per il teorema 3.2.3 ed il lemma 3.1.14  $\forall A \neq O$  in  $\mathbb{K}$  esiste esattamente un'affinità assiale  $\alpha$  in  $A(x, y)$  tale che  $E\alpha = A$ , sia  $\alpha_A$ . Consideriamo  $\delta$  in  $D(O)$ . Ora  $O\alpha^{-1}\delta\alpha = O\delta\alpha = O\alpha = O$ , quindi  $\alpha^{-1}\delta\alpha$  è una dilatazione in  $D(O)$ . Consideriamo un punto  $F \neq O$  su  $y$  abbiamo  $F\alpha^{-1}\delta\alpha = F\delta\alpha = F\delta$ . Quindi per il lemma 3.1.13  $\alpha^{-1}\delta\alpha = \delta$ , cioè

$$\delta\alpha = \alpha\delta \quad (4.3)$$

per ogni  $\alpha$  in  $A(x, y)$  e per ogni  $\delta$  in  $D(O)$ . Abbiamo  $A\alpha_B = \delta_A\alpha_B = \alpha_B\delta_A = B \cdot A$  per  $A, B \neq O$ . Per  $A = O$  abbiamo  $A\alpha_B = B \cdot A$ . Usando (4.2) otteniamo

$$\alpha_B^{-1}\tau_A\alpha_B = \tau_{BA} \quad \text{con } B \neq O \quad (4.4)$$

Consideriamo  $\delta_B$  in  $D(O)$ .  $\delta_B^{-1}\tau_A\delta_B$  è una traslazione essendo il sottogruppo delle traslazioni un sottogruppo normale rispetto al gruppo delle collineazioni. Inoltre  $O\delta_B^{-1}\tau_A\delta_B = O\tau_A\delta_B = A\delta_B = A \cdot B$  e  $O\tau_{A \cdot B} = A \cdot B$ . Dunque abbiamo

$$\delta_B^{-1}\tau_A\delta_B = \tau_{AB} \quad \text{con } B \neq O, A \text{ in } \mathbb{K} \quad (4.5)$$

Per  $C \neq O$ , usando quanto dimostrato sopra ed in particolare (4.4) e (4.5), abbiamo:

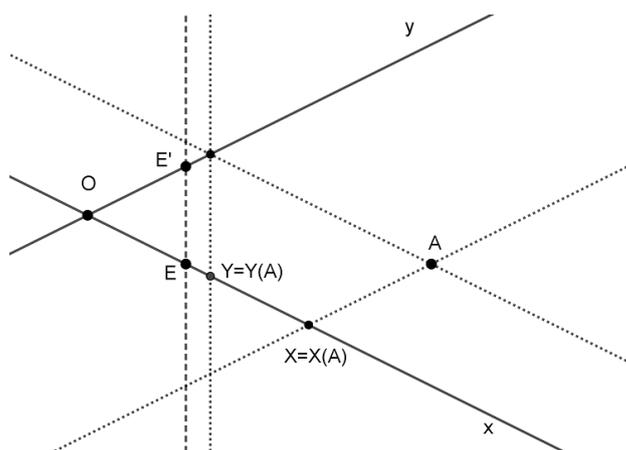
$$\begin{aligned} C(A+B) &= (A+B)\alpha_C = (A\tau_B)\alpha_C = A\alpha_C\tau_{CB} = (CA)\tau_{CB} = CA + CB, \\ (A+B)C &= (A+B)\delta_C = (A\tau_B)\delta_C = A\delta_C\tau_{BC} = (AC)\tau_{BC} = AC + BC. \end{aligned}$$

Le due leggi valgono anche per  $C = O$ . Abbiamo dimostrato che  $\mathbb{K}$  è un corpo.

2° parte: introduzione delle coordinate.

Nella seconda parte della dimostrazione costruiremo un isomorfismo  $\phi$  dal piano affine  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$  al piano affine in coordinate sul corpo  $\mathfrak{A}(\mathbb{K}) = (\mathcal{U}, \mathcal{G}, \in)$ , dove  $\mathcal{U} = \mathbb{K}^2$ .

**Coordinatizzazione dei punti.** Consideriamo un punto  $A$  in  $\mathfrak{A}$  ed a questo vogliamo assegnare un elemento di  $\mathbb{K}^2$ , cioè una coppia  $[X, Y]$ <sup>1</sup> con  $X, Y$  in  $\mathbb{K}(\mathfrak{A})$ . Procediamo nel seguente modo. Prendiamo un punto  $E'$  non incidente



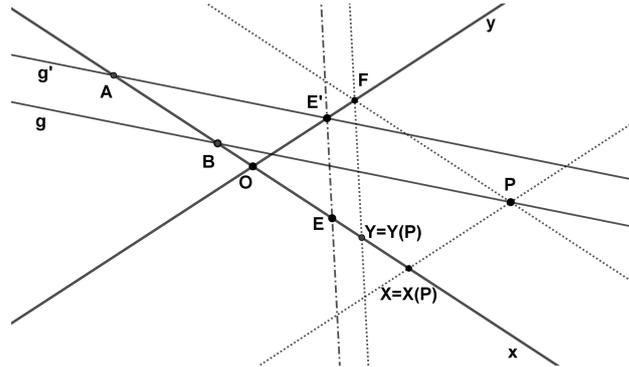
con  $x = (O, E)$  e chiamiamo  $y$  la retta  $(O, E')$ .

- ◇ Da  $A$  tracciamo la parallela ad  $y$ , questa interseca  $x$  in un punto, sia  $X = X(A)$ .
- ◇ Da  $A$  tracciamo la parallela ad  $x$ , questa interseca  $y$  in un certo punto, da questo tracciamo la parallela ad  $(E, E')$ , questa interseca  $x$  in un punto, sia  $Y = Y(A)$ .

Abbiamo che  $A\phi = [X, Y]$ , quindi  $\phi$  è una applicazione biettiva tra i punti in  $\mathfrak{A}$ , cioè gli elementi di  $\mathfrak{P}$ , e gli elementi di  $\mathbb{K}^2$ .

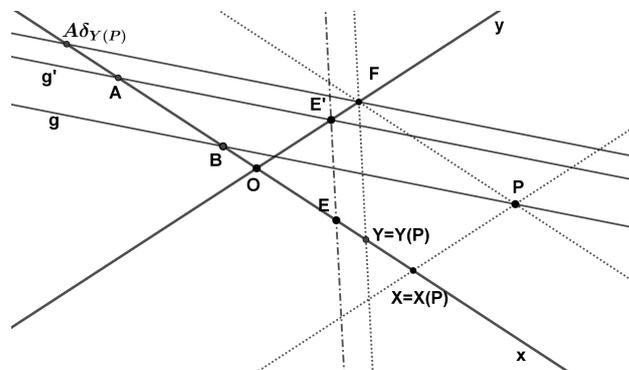
<sup>1</sup> $(X, Y)$  denota la retta per i punti  $X, Y$ ,  $[X, Y]$  denota la coppia ordinata

Coordinatizzazione delle rette. Per quanto riguarda le rette procediamo nel seguente modo. Consideriamo il caso in cui  $g \not\parallel x$ . La retta  $g$  interseca  $x$  nel



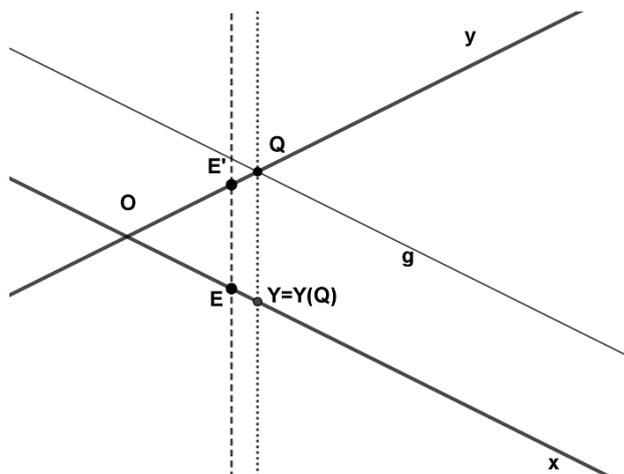
punto  $B$ . Da  $E'$  tracciamo la parallela a  $g$ , sia  $g'$ , che interseca  $x$  nel punto  $A$ . Consideriamo un punto  $P$  su  $g$ ,  $P \neq B$  e  $X = X(P), Y = Y(P)$ . Sia  $F$  il punto d'intersezione tra  $y$  e la parallela ad  $x$  per  $P$ . Consideriamo la dilatazione  $\delta_{Y(P)}$  abbiamo che  $Y(P) = E\delta_{Y(P)}$ ,  $F = E'\delta_{Y(P)}$  e manda  $A$  in  $A\delta_{Y(P)}$ . Consideriamo la traslazione  $\tau_{X(P)}$  abbiamo che  $X(P) = O\tau_{X(P)}$ ,  $P = F\tau_{X(P)}$  e  $B = A\delta_{Y(P)}\tau_{X(P)}$ . Dunque otteniamo  $A\delta_Y\tau_X = B$ , dalle definizioni (4.1) abbiamo  $AY\tau_X = B$  ed infine

$$AY + X = B \quad (4.6)$$



Dato un punto  $P$  su  $g$ , abbiamo provato che  $X(P)$  e  $Y(P)$  soddisfano l'equazione lineare (4.6) in  $X, Y$ . Denotiamo  $X(P), Y(P)$  con il nome di coordinate di  $P$ .

Consideriamo il caso in cui  $g \parallel x$ . La retta  $g$  interseca  $y$  in un punto  $Q$



con  $Y(Q) = C$ ,  $C$  in  $\mathbb{K}$ . Un punto  $P$  è incidente con  $g$  se e solo se  $Y(P) = C$ . In questo caso i punti su  $g$  soddisfano l'equazione lineare

$$Y = C \quad (4.7)$$

Estendiamo  $\phi$  nel seguente modo.

$g\phi = \overline{A} + \langle \overline{B} \rangle$  con

\* caso (4.6)  $\overline{A} = [B, O]$  e  $\overline{B} = [-A, E]$ ;

\* caso (4.7)  $\overline{A} = [O, C]$  e  $\overline{B} = [E, O]$ .

Allora abbiamo che  $P \in g$  se e solo se  $P\phi \in g\phi$ .

Con questo si conclude la dimostrazione, avendo dimostrato che  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  sono isomorfi.  $\square$

**Corollario 4.1.2.** *Se  $\mathfrak{A}$  è un piano di Pappo allora  $\mathbb{K}(\mathfrak{A})$  è un campo.*

*Dimostrazione.* Dalla validità di (P) segue che  $D(O)$  è abeliano, siccome  $\mathbb{K} \setminus \{O\}$  è isomorfo a  $D(O)$  abbiamo che la moltiplicazione in  $\mathbb{K}$  è commutativa.  $\square$

## 4.2 Rappresentazione di affinità

**Definizione 4.1.** Un'affinità di un piano affine  $\mathfrak{A}$  è una collineazione di  $\mathfrak{A}$  ottenuta componendo affinità assiali.

**Teorema 4.2.1.** *In un piano affine in cui ogni gruppo  $A(z, a)$  è linearmente transitivo, dati due triangoli non degeneri esiste un'affinità che porta un triangolo nell'altro, cioè i vertici di uno nei vertici corrispondenti dell'altro.*

**Teorema 4.2.2.** *Sia  $\mathfrak{A}(\mathbb{K}) = (U, G, \in)$  piano affine in coordinate su un corpo  $\mathbb{K}$ , sia  $\lambda$  un'applicazione lineare invertibile da  $U$  in  $U$  e  $C$  un elemento di  $U$ . Sia  $\alpha$  una funzione definita nel seguente modo*

$$X\alpha = X\lambda + C \quad X \text{ in } U$$

$$(A + \langle B \rangle)\alpha = A\alpha + \langle B\lambda \rangle \quad B \neq O, A \text{ in } U \quad (4.8)$$

Allora  $\alpha$  è un'affinità di  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$ .

Per ogni affinità  $\alpha$  di  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  esistono  $\lambda$ , applicazione lineare da  $U$  in  $U$ , e  $C$ , elemento di  $U$ , che soddisfano (4.8).

*Dimostrazione.* Dimostriamo che:

- i)*  $\alpha$ , definita in (4.8), è una collineazione di  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$ ;
- ii)* l'insieme  $\mathcal{L}$  delle collineazioni  $\alpha$ , definite da (4.8), forma un gruppo;
- iii)* dati due triangoli non degeneri,  $P_1P_2P_3$  e  $Q_1Q_2Q_3$ , esiste al più una collineazione  $\alpha$  in  $\mathcal{L}$  tali che  $Q_i = P_i\alpha$  per  $i = 1, 2, 3$ ;
- iv)* ogni affinità assiale  $\alpha$  di  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  è un elemento di  $\mathcal{L}$ ;
- v)* ogni affinità  $\alpha$  di  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  è un elemento di  $\mathcal{L}$ .

*i)* Dimostriamo che  $X \in A + \langle B \rangle$  implica  $X\alpha \in (A + \langle B \rangle)\alpha$ , in quanto da (4.8) segue direttamente che  $\alpha$  è una biezione da  $U$  in  $U$  e da  $G$  in  $G$ .

Consideriamo  $X \in A + \langle B \rangle$ , per qualche  $u$  in  $\mathbb{K}$  possiamo scrivere  $X = A + Bu$  e per (4.8)  $X\alpha = X\lambda + C$ . Abbiamo che  $X\alpha = A\lambda + (B\lambda)u + C = A\alpha + (B\lambda)u$ ,

cioè  $X\alpha \in (A + \langle B \rangle)\alpha$ .

*ii)* Consideriamo  $\alpha, \alpha'$  in  $\mathcal{L}$  dimostriamo che  $\alpha'\alpha^{-1}$  sta in  $\mathcal{L}$ .

Per i punti abbiamo:  $X\alpha'\alpha^{-1} = (X\lambda' + C')\alpha^{-1} = X(\lambda'\lambda^{-1}) + (C' - C)\lambda^{-1}$ . Per le rette abbiamo:  $(A + \langle B \rangle)\alpha'\alpha^{-1} = (A\alpha' + \langle B\lambda' \rangle)\alpha^{-1} = A\alpha'\alpha^{-1} + \langle B(\lambda'\lambda^{-1}) \rangle$ .

*iii)* Supponiamo ci siano due collineazioni  $\alpha, \alpha'$  in  $\mathcal{L}$  tali che  $Q_i = P_i\alpha$ ,  $Q_i = P_i\alpha'$  per  $i = 1, 2, 3$ . Siano  $\lambda, \lambda'$  le rispettive applicazioni lineari e  $C, C'$  i rispettivi elementi in  $U$ . Abbiamo  $(P_2 - P_1)\lambda = P_2\alpha - C - (P_1\alpha - C) = Q_2 - Q_1 = P_2\alpha' - P_1\alpha' = (P_2 - P_1)\lambda'$ . Analogamente  $(P_3 - P_1)\lambda = (P_3 - P_1)\lambda'$ . I vettori  $P_2 - P_1, P_3 - P_1$  formano una base di  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  e  $\lambda, \lambda'$  assumono gli stessi valori su questi. Dunque possiamo concludere che  $\lambda = \lambda'$ . Inoltre  $C = P_1\alpha - P_1\lambda = P_1\alpha' - P_1\lambda' = C'$ . Possiamo concludere che  $\alpha = \alpha'$ .

*iv)* Consideriamo  $\alpha$  un'affinità assiale con asse  $\hat{A} + \langle \hat{B} \rangle$  e  $P\alpha = Q$  con  $P$  non sull'asse. Ora  $P - \hat{A}, \hat{B}$  e  $Q - \hat{A}, \hat{B}$  sono coppie di vettori linearmente indipendenti. Quindi esiste un'applicazione lineare  $\lambda$  tale che  $(P - \hat{A})\lambda = Q - \hat{A}$  e  $\hat{B}\lambda = \hat{B}$ . Consideriamo  $\hat{\alpha}$  in  $\mathcal{L}$  di parametri  $\lambda$  e  $C = \hat{A} - \hat{A}\lambda$ , otteniamo che  $X\hat{\alpha} = X$  per ogni punto sull'asse di  $\alpha$  e  $P\hat{\alpha} = Q$ . Quindi per il lemma 3.1.17  $\hat{\alpha} = \alpha$ .

*v)* Segue da *ii), iv)*.

Consideriamo  $\alpha$  in  $\mathcal{L}$  che porta un triangolo non degenere in un triangolo non degenere. Per il teorema precedente esiste un'affinità  $\alpha'$  in  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  che fa lo stesso. Per *v)*  $\alpha'$  sta in  $\mathcal{L}$ , per *iii)*  $\alpha' = \alpha$ . Dunque il gruppo delle affinità di  $\mathfrak{A}(\mathbb{K})$  coincide con il gruppo  $\mathcal{L}$ .  $\square$

Da questo teorema segue che dato un punto  $X$  ed un'affinità  $\alpha$  la rappresentazione in coordinate di  $X\alpha$  è la solita. Esplicitamente  $X = (x, y)$ ,  $X\alpha = (x^*, y^*)$ ,  $C = (c_1, c_2)$ ,  $\lambda$  definita dalla matrice  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1$$

$$y^* = a_2x + b_2y + c_2$$

con  $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$

*Osservazione 10.* Chiedere che dati due triangoli non degeneri esista un'unica un'affinità che porta un triangolo nell'altro equivale a chiedere che se un'affinità fissa tre punti allora questa è l'identità.

*Infatti.* Consideriamo due triangoli  $P_1P_2P_3$  e  $Q_1Q_2Q_3$  e due affinità  $\alpha$  e  $\alpha'$  tali che  $Q_i = P_i\alpha$ ,  $Q_i = P_i\alpha'$  per  $i = 1, 2, 3$ . In altre parole  $P_i\alpha'\alpha^{-1} = P_i$  per  $i = 1, 2, 3$ . Dimostrare che  $\alpha = \alpha'$  equivale a dimostrare che  $\alpha'\alpha^{-1}$  è l'identità, cioè  $P_1, P_2, P_3$  sono fissati.

*Osservazione 11.* Una collineazione qualunque che fissa tre punti non è detto sia l'identità.

Consideriamo il piano affine in coordinate sul campo  $\mathbb{C}$ , sia  $\mathfrak{A}(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^2, G, \in)$ . Costruiamo  $f_1, f_2$  nel seguente modo:

$$\star f_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, f_1(P) = \bar{P} \text{ dove } \bar{P} \text{ indica il coniugato del punto } P$$

$$\star f_2 : G \rightarrow G, f_2(A + \langle B \rangle) = \bar{A} + \langle \bar{B} \rangle, \text{ dove } \bar{A} + \langle \bar{B} \rangle \text{ indica il coniugato della retta } A + \langle B \rangle.$$

Si dimostra che questa è una collineazione di  $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ . Fissa tre punti, in quanto fissa tutto il piano in coordinate su  $\mathbb{R}$  ma ovviamente non è l'identità.

# Appendice A

## I quaternioni

Sia  $\mathbb{H}$  lo spazio vettoriale reale delle combinazioni lineari formali dei simboli  $1, i, j, k$  con le ovvie operazioni di somma e moltiplicazione per scalare. Consideriamo su  $\mathbb{H}$  il prodotto definito estendendo per bilinearità il prodotto tra  $1, i, j, k$  dato dalla seguente tabella:

$\cdot$	$1$	$i$	$j$	$k$
$1$	$1$	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	$-1$	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	$-1$	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	$-1$

Tale prodotto verifica la proprietà distributiva destra e la proprietà distributiva sinistra. Inoltre si dimostra che è associativo. Dunque si verifica che  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  è un anello con unità. Inoltre, in analogia al caso dei complessi ogni elemento ha un coniugato, consideriamo  $a + ib + jc + kd$  il suo coniugato è  $a - ib - jc - kd$ . Di ogni elemento possiamo calcolare il modulo, consideriamo  $h = a + ib + jc + kd$  il suo modulo è  $\sqrt{h\bar{h}}$ . Possiamo provare facilmente che dato  $h = a + ib + jc + kd$  con  $a, b, c, d$  non tutti nulli  $h \frac{\bar{h}}{|h|^2} = 1$  cioè ogni elemento diverso da 0 ha un inverso. I quaternioni  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  formano un corpo non commutativo, in quanto il prodotto non è commutativo, ad esempio  $ij = k$  e  $ji = -k$ .

Risulta che i piani in coordinate destro e sinistro sui quaternioni sono diversi.

# Bibliografia

- [1] ARTIN E. (1940) -*Coordinates in affine geometry*. Rep. Math. Colloquium (2),**2**, 15-20.
- [2] ARTIN E. (1957) -*Geometric Algebra*. New-York-London: Interscience.
- [3] BAER R. (1952) -*Linear Algebra and Projective Geometry*. Academic Press Inc.
- [4] BARTOLOZZI R. & OLIVERI U. (1994) -*Riflessioni su alcuni contributi dati da Emil Artin nei fondamenti della geometria: il problema della coordinatizzazione*. Rivista di matematica pura ed applicata, **15**, 81-96.
- [5] BENNET M. K. (1995) -*Affine and Projective Geometry*. John Wiley and Sons, Inc.
- [6] LINGENBERG R. & BAUER A. (1974) -*Affine and Projective Planes*, In: The MIT Press (Ed.) *Fundamentals of Mathematics*, volume II. Cambridge, Massachusetts, and London, England.
- [7] VEBLEN O. & YOUNG J.W. (1910) -*Projective Geometry*. Boston Ginn.