

Alma Mater Studiorum Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia
Dipartimento di Fisica e Astronomia

EMISSIONE DI CORPO NERO E APPLICAZIONI ASTROFISICHE

Tesi di laurea

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Candidato:
Marco Donati

Sessione IV
Anno Accademico 2016/2017

Indice

Introduzione	1
1 Il Corpo Nero	2
1.1 Definizione	2
1.1.1 Teorema di Kirchhoff	2
1.2 Leggi Empiriche	3
1.2.1 Legge dello spostamento di Wien	3
1.2.2 Legge di Stefan-Boltzmann	4
1.3 L'idea di Planck	4
1.3.1 Determinazione dello Spettro di Corpo Nero	4
1.3.2 Approssimazioni	6
1.4 Approccio classico di Rayleigh e Jeans	8
1.4.1 La quantizzazione dell'Energia	8
2 Applicazioni astrofisiche	12
2.1 Le stelle	12
2.2 La radiazione cosmica di fondo (CMB)	14
A Premessa Termodinamica	15
Bibliografia	17

Introduzione

Il presente elaborato si propone di illustrare un modello teorico di radiazione termica, quello di Corpo Nero, descrivendo i passi che permisero di definirne le proprietà. Successivamente vengono analizzati alcuni oggetti astrofisici ai quali tale modello può essere applicato.

Nel primo capitolo studieremo l'evoluzione del concetto teorico di Corpo Nero: si parte dal teorema di Kirchhoff, che dimostra come all'interno del modello, si stabilisca un ben definito spettro di energia elettromagnetica e, a seguire, si svolge una breve analisi di due leggi empiriche (Stefan-Boltzmann, Wien); segue l'ipotesi di Corpo Nero di Planck che permette di determinarne lo spettro illustrando, poi, le approssimazioni di Rayleigh-Jeans e di Wien, la prima utilizzabile per i fotoni a bassa energia, la seconda per i fotoni ad alta energia. Successivamente si passa alla determinazione dello spettro di Corpo Nero in una visione classica con l'approccio di Rayleigh-Jeans, corretta pochi anni dopo dalla visione quantistica, con la determinazione dello spettro di Planck che mostra come la radiazione elettromagnetica viene emessa per mezzo di pacchetti di energia discreti, detti quanti, garantendo una soluzione al problema della "catastrofe ultravioletta" in cui si incorre con l'approccio classico. Il capitolo si conclude constatando che la legge appena ricavata verifica le suddette leggi empiriche.

Nel secondo capitolo viene affrontato il tema della radiazione termica di alcuni corpi astrofisici, analizzando l'emissione di Corpo Nero delle stelle e cercando di fornire una descrizione dettagliata sulla radiazione cosmica di fondo (CMB).

Capitolo 1

Il Corpo Nero

1.1 Definizione

Definiamo Corpo Nero un oggetto fisico ideale che permette a tutta la radiazione incidente di attraversarlo, senza alcuna riflessione¹ e trasmissione, assorbendo la radiazione completamente². Quest'ultima viene assorbita dalle pareti che, viste come oscillatori armonici eccitati, a loro volta emetteranno energia. Una volta raggiunta una temperatura di equilibrio (T) tra radiazione e pareti, operato un buco sul corpo, tale da non perturbare sensibilmente il sistema, se ne osserva la radiazione uscente.

Il problema di come l'energia elettromagnetica (e.m.) potesse trasformarsi in calore e viceversa, ovvero, di come la radiazione elettromagnetica potesse raggiungere un equilibrio termico, sul genere di quello realizzato dalle particelle di un gas, rappresentò un punto cardine della Fisica sul finire del XIX secolo.

Innanzitutto fu necessario introdurre e analizzare due quantità fondamentali: il potere assorbente di un corpo alla frequenza ν e alla temperatura T

$$P_{ass}(\nu, T) = \frac{\text{potenza e.m. assorbita}}{\text{potenza e.m. incidente}}$$

e il potere emissivo $P_{em}(\nu, T)$ che rappresenta la potenza emessa dal corpo per unità di superficie, a data frequenza ν e temperatura T .

1.1.1 Teorema di Kirchhoff

Nel 1860 Gustav Kirchhoff, osservando le righe nere presenti negli spettri solari, ipotizzò che un corpo è in grado di assorbire la radiazione che emette. Egli dimostrò che ad una data temperatura e ad una data frequenza (o lunghezza d'onda, secondo la relazione $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ³) il rapporto tra P_{em} e P_{ass} è lo stesso per tutti i corpi, ossia il raggiungimento dell'equilibrio termico di due corpi posti a contatto tra loro è possibile se e solo se da tale rapporto ne risulti una funzione universale $f(\nu, T)$,

¹Da qui deriva il nome "nero"

²Nel nostro caso una radiazione *assorbita* significa che la sua energia entra a far parte dell'energia *termica* del corpo.

³Dove c rappresenta la velocità della luce, di intensità: $c=3 \cdot 10^{10}$ cm/s

indipendente dalla natura stessa dei corpi:

$$\frac{P_{em}}{P_{ass}} = f(\nu, T)$$

Kirchhoff definì il Corpo Nero un corpo di potere assorbente pari a 1 ($P_{ass}=1$) indipendentemente da frequenza ν e temperatura T . Ne deriva che, nel nostro caso, la funzione $f(\nu, T)$ è proprio il potere emissivo P_{em} del corpo e che quindi all'equilibrio termico è impossibile emettere termicamente più energia di un Corpo Nero.

1.2 Leggi Empiriche

Prima della determinazione dello spettro di Corpo Nero, si riportano due leggi empiriche ottenute da osservazioni sperimentali. Nel tentativo di giustificare tali leggi, quella di Stefan-Boltzmann e quella di Wien, si fanno considerazioni di tipo "classico", basate sulla meccanica newtoniana e sull'elettromagnetismo. Rayleigh e Jeans provarono a descrivere l'andamento dello spettro ricadendo però in un fenomeno che fu denominato "catastrofe ultravioletta" in contrasto con le osservazioni. Nel 1900, Max Planck ipotizzò che la radiazione elettromagnetica potesse essere emessa da oscillatori armonici presenti sulle pareti della cavità per mezzo di pacchetti di Energia in quantità discrete detti quanti ⁴ riuscendo a dare una soddisfacente spiegazione alle suddette leggi empiriche.

1.2.1 Legge dello spostamento di Wien

La legge di Wien mette in evidenza come la densità di Energia di un Corpo Nero emessa in funzione della lunghezza d'onda λ ad una data temperatura, presenti un massimo caratteristico che si sposta, al variare di T .

Nel 1893 Wilhelm Wien dimostrò che la densità di Energia della radiazione elettromagnetica contenuta in una cavità isoterma è data dalla relazione:

$$u(\nu, T) = \nu^3 f(\nu, T)$$

Da cui riuscì a ottenere la legge di spostamento del picco di emissione $I(\lambda)$:

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{\alpha}{T}} \qquad \alpha = 0,29 cmK$$

Inoltre:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\nu_{max}}{T} = 5,88 \cdot 10^{10} s^{-1} K^{-1}}$$

Come è mostrato in dettaglio nel seguito di questa trattazione, la legge di Wien rappresentò un'evidenza sperimentale della validità del modello di Planck, in contrasto col modello di Rayleigh-Jeans che non prevede alcuna presenza di massimi nello spettro.

⁴Questa ipotesi creò le basi per lo sviluppo di una nuova teoria che influenzò la Fisica del '900 ovvero la Meccanica Quantistica

1.2.2 Legge di Stefan-Boltzmann

Nel 1879, il fisico Josef Stefan scoprì che la radianza spettrale $R(\nu, T)$, integrata su tutto lo spettro di frequenze, ossia l' Energia erogata per unità di superficie ed unità di tempo, è uguale alla quarta potenza della temperatura T a meno di una costante (σ):

$$R(T) = \int_0^{+\infty} R(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{erg}{cm^2 s K^4}$$

Questa legge venne dimostrata teoricamente da Ludwig Boltzmann nel 1884 (da cui *Legge di Stefan-Boltzmann*)

1.3 L'idea di Planck

L'idea alla base del modello sviluppato da Karl Ernst Ludwig Marx Planck, all'inizio del '900, fu l'introduzione di oscillatori armonici che costituissero le pareti di una cavità isoterma in grado di scambiare Energia con l'ambiente per mezzo della radiazione elettromagnetica: ciò era consentito dal fatto che la radiazione di Corpo Nero è indipendente dal materiale di cui è costituita la cavità⁵. Come già detto in precedenza, attraverso un processo di irreversibilità, qualora gli oscillatori avessero raggiunto l'equilibrio con la radiazione, quella sarebbe stata la radiazione di Corpo Nero.

1.3.1 Determinazione dello Spettro di Corpo Nero

L'Energia elettromagnetica, nel vuoto, è trasportata da onde piane monocromatiche di vettore d'onda \vec{k} , alla velocità della luce c ; la frequenza angolare associata alle onde è $\omega(k) = c|\vec{k}|$. Definiti \vec{E} campo elettrico e \vec{B} campo magnetico, nel piano di propagazione dell'onda, essi rappresentano la posizione e l'impulso di un oscillatore armonico lineare. Conseguentemente, dalla relazione:

$$E_{e.m.} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} [|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2] dr$$

si noti che tale Energia corrisponde alla somma delle Energie di N oscillatori armonici lineari, espressa dall'Hamiltoniana:

$$\mathcal{H}_{tot} = \sum_i h_i^{osc} = \sum_i \left(\frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{q^2}{2} \right)$$

Gli oscillatori presenti sono sistemi canonici che scambiano solo ed esclusivamente calore con la cavità. Basandoci su quanto detto nell'appendice A, l' *Energia libera di Helmholtz* (Φ), per gli oscillatori, coincide con quella determinata con la statistica di Bose-Einstein⁶. Preso $\beta = \frac{1}{kT}$ ⁷:

$$\Phi_{BE} = kT g_{int} \int_0^{\infty} g(\epsilon) \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \quad \Phi_{osc} = kT \int_0^{\infty} g_{osc} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) d\omega$$

⁵Dimostrazione in Appendice A.

⁶A meno di un costante (E_0) che rappresenta l'*Energia di punto zero*.

⁷Dove k è la costante di Boltzmann : $k = 1,38 \cdot 10^{-16} erg K^{-1}$.

$$\Phi_{BE} = \Phi_{osc} \longleftrightarrow \epsilon = \hbar\omega; \quad g_{int}g(\epsilon) = \frac{g_{osc}(\omega)}{\hbar} \quad 8$$

Le considerazioni fatte avvengono in un regime di stazionarietà nel quale si assume la condizione di risonanza, imponendo che le onde elettromagnetiche si annullino in corrispondenza della superficie della regione Ω in analisi. Tale condizione dipenderebbe dalla forma e dal volume V della cavità, ma grazie all'assunzione del Limite Termodinamico **LT**, per il quale $V \rightarrow \infty$ (ed anche $N \rightarrow \infty$), si può utilizzare una cavità di forma cubica di lato L , come mostrato in Figura (1.1). Considerata una lunghezza d'onda λ , le condizioni di risonanza per un vettore d'onda \vec{k} sono:

$$\frac{k_a}{k}L = n_a \frac{\lambda}{2} \quad n_a = 0, 1, 2 \dots \quad a = x, y, z$$

La condizione di risonanza rispetto alle frequenze ν , secondo la relazione $\nu = \frac{c}{\lambda}$, si ottiene dall'equazione precedente elevando ambo i membri al quadrato e sommando sulle tre componenti cartesiane:

$$\nu^2(\vec{n}) = \frac{c^2}{4L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Nel **LT** in cui il volume V diverge, la differenza che intercorre tra una frequenza risonante e quelle contigue tende a zero: si può quindi introdurre il *Limite del Continuo LC* e calcolare il numero di onde $N_{onde}(\nu)$ risonanti con frequenza minore di ν , come il volume dell'ottante sferico positivo di raggio $2L\nu/c$:

$$N_{onde}(\nu) = \frac{1}{8} \int_{n < \frac{2L\nu}{c}} d\vec{n} = \frac{4\pi V}{3c^3} \nu^3$$

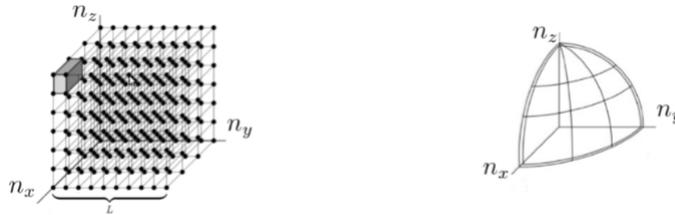


Figura 1.1: Cavità cubica di lato L (sinistra); ottante sferico positivo (destra)

La condizione di risonanza precedentemente scritta determina, difatti, una superficie sferica, della quale bisogna considerare solo la parte con $n_a \geq 0$ ⁹. La densità di oscillatori corrispondenti alle onde risonanti con la superficie è:

$$g_{osc}(\nu) = 2g_{onde}(\nu) = 2 \frac{dN_{onde}}{d\nu} = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3}$$

Inserendo quest'ultima equazione all'interno della *Energia Libera di Helmholtz* del Corpo Nero, precedentemente formulata, per unità di volume:

$$\frac{\Phi_{CN}}{V} = kT \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) d\nu =$$

⁸Dove g rappresenta la molteplicità degli stati energetici.

⁹Da cui il fattore $\frac{1}{8}$.

Il suddetto integrale può essere risolto attraverso una sostituzione:

$$x = \beta h\nu; \beta h d\nu = dx \Rightarrow \frac{\Phi_{CN}}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = -\frac{8\pi^5 (kT)^4}{45 c^3 h^3}$$

Si può, dunque, calcolare l'Energia per unità di volume per mezzo della relazione generale¹⁰ $E = \frac{\partial(\beta\Phi)}{\partial\beta}$:

$$\varepsilon_{CN} = \frac{E_{CN}}{V} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{\beta h\nu} - 1)}}_{u(\nu, T)} d\nu = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 c^3 h^3}$$

Infine, dalla densità di Energia specifica per la radiazione $u(\nu, T)$, si può determinare la **Funzione di Planck** o **Planckiana** che identifica lo Spettro di Corpo Nero:

$$I(\nu, T) \equiv P_{em}^{CN} = \frac{c}{4} u(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

$I(\nu, T)d\nu$ esprime la quantità di Energia emessa, avente frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$, nell'unità di supercie ed angolo solido e nell'unità di tempo. Analogamente, è possibile esprimere la suddetta funzione in funzione della lunghezza d'onda λ , ponendo attenzione al fatto che la quantità da considerare, nel cambiamento di variabili, è la $I(\nu, T)d\nu$ e non la $I(\nu, T)$. Infatti:

$$\rightarrow I(\nu, T)d\nu = I(\lambda, T)d\lambda \leftarrow$$

$$I(\nu, T) \neq I(\lambda, T)$$

Ricordando dunque la relazione $\nu = c/\lambda$, che lega la frequenza e la lunghezza d'onda, si ottiene:

$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1}$$

La Formula di Planck è ottenuta dall'ipotesi che un oscillatore lineare scambi solo ed esclusivamente Energia in quantità discrete $h\nu$.

1.3.2 Approssimazioni

Una volta ricavata la legge di Planck, è possibile illustrare due approssimazioni: una nel regime di bassa Energia (Rayleigh-Jeans), l'altra nel regime di alta Energia (Wien).

¹⁰Dalla denizione di Energia Libera di Helmholtz, $\Phi = E-TS$, con E Energia, T Temperatura, S Entropia del sistema considerato.

Approssimazione di Rayleigh-Jeans

Posta la condizione di bassa Energia ($h\nu \ll kT$) sulla Legge di Planck, applicando la serie di Taylor¹¹, si ottiene:

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu}$$
$$\Rightarrow I_{RJ}(\nu, T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

Approssimazione di Wien

Viceversa, posta la condizione di alta Energia ($h\nu \gg kT$), si ottiene:

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$$
$$\Rightarrow I_W(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

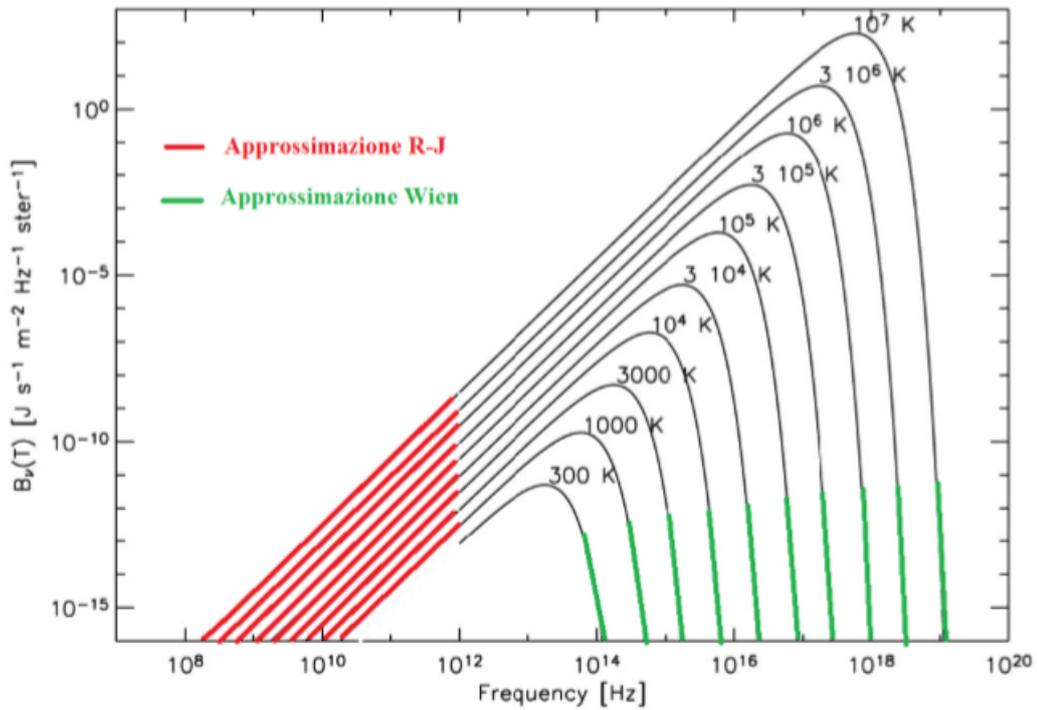


Figura 1.2: Spettro di Corpo Nero con approssimazioni di Rayleigh Jeans e di Wien

¹¹Tale che: $e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}$

1.4 Approccio classico di Rayleigh e Jeans

I tentativi per giustificare teoricamente le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien e la forma di $I(\lambda)$ furono svariati. Tra essi spicca quello di Rayleigh e Jeans i quali, basandosi sui principi della fisica newtoniana e dell'elettromagnetismo classico proposero una legge per l'intensità di luce ($I(\lambda) \propto T/\lambda^4$), ma il problema fondamentale di tale relazione è che, sebbene presenti un perfetto accordo con i dati sperimentali a grandi lunghezze d'onda, diverge per piccoli valori di questa, prevedendo quindi un'enorme emissione in corrispondenza della regione ultravioletta e dei raggi X.

Per ottenere la densità di Energia $u(\nu)$ cercata dai due fisici, bisogna moltiplicare la densità di modi di vibrazione permessi $2N_{onde}(\nu)$ (ottenuto precedentemente) per il valor medio dell'Energia di un oscillatore armonico. Per determinare $\bar{\varepsilon}$ si può far uso della procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann:

$$f(\varepsilon) = Ce^{\beta\varepsilon}$$

Questa funzione dà la probabilità che un oscillatore del nostro ensemble abbia energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = kT$$

Il risultato ottenuto è quanto previsto dal *Teorema di Equipartizione dell'Energia*, che afferma che ogni addendo dell'Hamiltoniana che contiene un parametro Lagrangiano o un momento coniugato al quadrato contribuisce all'Energia totale con un termine $kT/2$. Grazie a questo risultato è possibile scrivere la densità di energia:

$$u(\nu)d\nu = \frac{dN_{onde}}{V} \bar{\varepsilon} = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

ed esprimendo quest'ultima relazione in funzione della lunghezza d'onda λ , si ottiene la **Legge di Rayleigh-Jeans**

$$u(\lambda) = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4}$$

Si nota subito che la formula diverge quando $\lambda \rightarrow 0$, ricadendo nella già menzionata catastrofe ultravioletta.

1.4.1 La quantizzazione dell'Energia

Planck all'inizio del '900 comprese che, se lo spettro di Energia delle onde elettromagnetiche non fosse stato continuo, ma discreto, il problema concernente il Corpo Nero avrebbe avuto accordo con i dati sperimentali: egli ipotizzò che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo in pacchetti discreti, denominati *quanti*, e che, per ogni frequenza ν , potessero trasportare una precisa Energia $\varepsilon = h\nu$ ¹², con h costante universale. L'emissione quindi ad una frequenza assegnata può essere solo:

$$\varepsilon_n = n\varepsilon = nh\nu$$

¹²Con h costante di Planck, pari a: $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{erg}\cdot\text{s}$

Ciò comporta una riformulazione del calcolo del valor medio dell'Energia degli oscillatori:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon e^{-\beta \varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon_n} =$$

$$-\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n = -\frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \quad ^{13}$$

Ciò porta al risultato

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \Rightarrow \quad u(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Passando all'espressione in funzione di λ , si ottiene la Legge di Planck per l'intensità dello spettro di Corpo Nero:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

A garantire l'accordo con i dati provenienti dagli esperimenti è il valore della **Costante di Planck**.

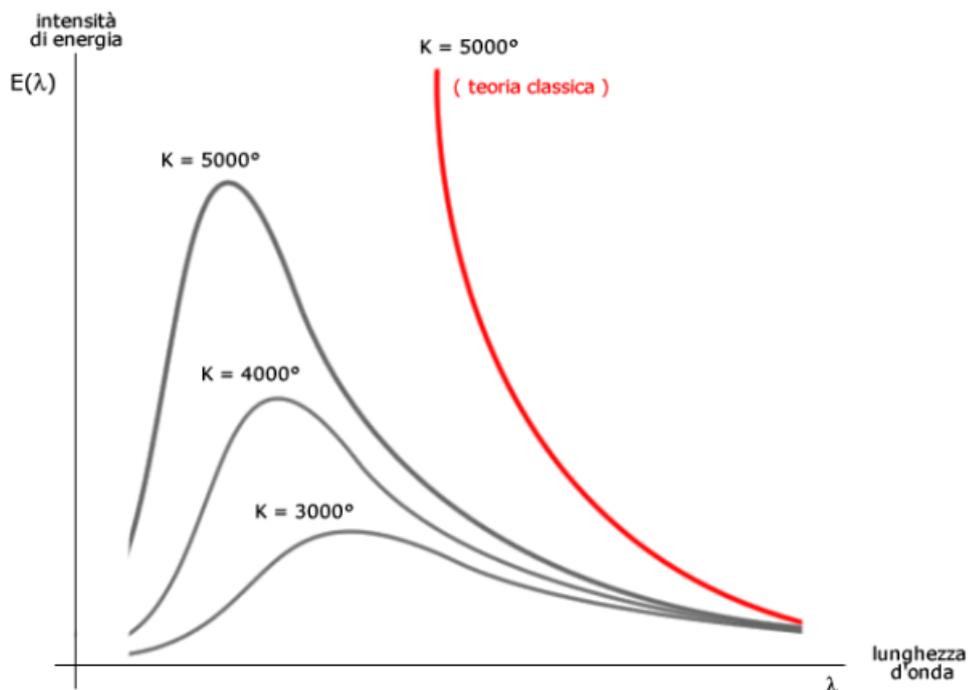


Figura 1.3: Andamento della Planckiana e la funzione ricavata da Rayleigh e Jeans

In conclusione non solo si dà ragione ai dati sperimentali dello spettro di Corpo Nero, ma si possono giustificare le leggi empiriche di Stefan Boltzmann e di Wien.

¹³Nell'ultimo passaggio si è usata la risommissione della serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

Legge di Stefan Boltzmann

Integrando quanto trovato, per le frequenze:

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Posto per semplicità $a = \frac{8\pi h}{c^3}$ e $b = \frac{h}{kT}$

$$\begin{aligned} u(T) &= a \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{b\nu} - 1} = a \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 e^{-b\nu}}{1 - e^{-b\nu}} d\nu = a \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-b\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-b\nu})^n \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-bn\nu} d\nu = -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3}{d(bn)^3} \int_0^{\infty} e^{-bn\nu} d\nu = -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3}{d(bn)^3} \frac{1}{bn} \\ u(T) &= \frac{6a}{b^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4 \quad 14 \end{aligned}$$

che rispecchia quanto detto dalla legge di Stefan-Boltzmann. Inoltre inserendo i valori numerici di h, k, c si ottiene proprio il valore misurato sperimentalmente della costante σ .

Legge di spostamento di Wien

Ponendo $\alpha = 8\pi hc$ e $\gamma = \frac{hc}{kT}$ si può riscrivere la legge di Planck nella forma

$$u(\lambda, T) = \frac{\alpha}{\lambda^5} (e^{\frac{\gamma}{\lambda}} - 1)^{-1}$$

Per trovare i massimi e minimi della funzione, bisogna analizzare gli zeri della derivata:

$$\frac{du}{d\lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda^6} (e^x - 1)^{-1} \left(5 - \frac{x e^x}{e^x - 1} \right) = 0$$

Dove $x = \frac{\gamma}{\lambda}$. La soluzione dell'equazione :

$$5(e^x - 1) = x e^x$$

Vista la Figura(1.4), si nota subito che la sua soluzione è diversa da 0¹⁵. Questo ci permette di scrivere:

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{kx_0} = cost. \longrightarrow \lambda_{max} = \frac{cost.}{T}$$

Anche qui la sostituzione dei valori numerici delle costanti universali ci dà un valore della costante di Wien in perfetto accordo col valore empirico.

¹⁴Ove nell'ultimo passaggio si usata la seguente uguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

¹⁵Trovando un valore pari a $x_0 \approx 4,96$.

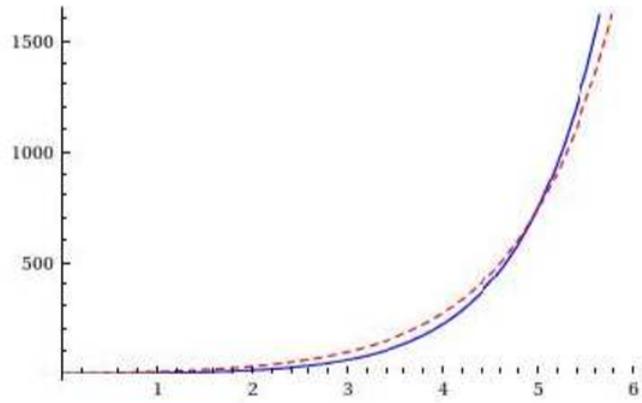


Figura 1.4: Funzioni xe^x (curva continua blu) e $5(e^x-1)$ (curva tratteggiata rossa)

Dunque l'ipotesi di Planck spiega con successo tutti i fenomeni relativi alla radiazione di Corpo Nero, ma per fare ciò si è dovuta accettare una ipotesi che non ha riscontro nella descrizione classica della radiazione da cariche oscillanti e cioè che l'energia venga emessa tramite un numero intero di pacchetti che a una data frequenza sono tutti uguali.

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

2.1 Le stelle

Le stelle possono essere approssimate a Corpi Neri, in quanto le uniche onde elettromagnetiche che non vengono assorbite dalla loro superficie sono quelle aventi una lunghezza d'onda di dimensione pari o maggiore del diametro della stella stessa. Osservando la costellazione di Orione, è possibile notare la netta differenza di colore tra Betelgeuse e Rigel. Le due stelle infatti hanno una Temperatura superficiale molto diversa: la prima $\sim 3600K$, la seconda $\sim 13000K$. La radiazione elettromagnetica che viene studiata e che determina lo spettro osservato proviene dagli strati più esterni dell'atmosfera stellare: al variare della temperatura dei suddetti strati, cambiano le caratteristiche degli spettri stessi. Inoltre dalla loro analisi, è possibile ottenere un notevole numero di ulteriori informazioni, come il colore e gli elementi che compongono l'atmosfera stellare.



Figura 2.1: Costellazione di Orione

Classificazione spettrale

Una stella può essere approssimata ad una sfera di raggio R e superficie $S = 4\pi R^2$, da cui, per la legge di Stefan-Boltzmann :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

Poichè le stelle non sono dei Corpi Neri perfetti, la temperatura T_e è definita temperatura effettiva, ossia la temperatura che avrebbe la superficie della stella se realmente emettesse come un Corpo Nero. Dalla relazione si comprende che due stelle aventi medesima temperatura effettiva, possano avere luminosità del tutto differenti, variandone il raggio. Sapendo la relazione per il flusso ($F = \frac{L}{4\pi D^2}$ ¹) può essere determinato il flusso superficiale della stella in funzione di T_e :

$$F_{sup} = \sigma T_e^4$$

¹La variabile D indica la distanza rispetto al centro della stella.

Nell'analisi spettrale, lo stato di ionizzazione della fotosfera è determinante: oltre allo spostamento del picco descritto dalla legge di Wien, la temperatura determina la comparsa di righe di assorbimento dovute agli ioni degli elementi costituenti la stella. La presenza di tali righe, che identificano la composizione chimica della stella, rappresenta la più evidente differenza dello spettro da quello ideale di Corpo Nero: esse infatti sottraggono radiazione al continuo. In alcuni casi si verifica che le righe di assorbimento dei metalli sono talmente fitte da generare una considerevole diminuzione dell'intensità nel continuo, effetto denominato *line blanketing*.

La classificazione spettrale alla quale oggi si fa riferimento è quella di Yerkes: in essa, in relazione alla temperatura superficiale T_e , compaiono le classi spettrali di Harvard **O, B, A, F, G, K, M** (con temperature comprese tra $T(\mathbf{M}) < 3500K$ e $T(\mathbf{O}) > 28000K$ e colorazioni apparenti dall'arancione-rosso [M] al blu [O]) mentre, in relazione alla luminosità, le classi vanno da 0 a VII in ordine decrescente di luminosità (con valori di *Magnitudine assoluta*² tra -15 e +20).

Se si analizza la radiazione solare, si ottiene la curva del potere emissivo alle varie lunghezze d'onda. Proprio nell'approssimazione di Corpo Nero, la temperatura superficiale del Sole può essere ricavata indirettamente dalla curva tramite la valutazione del picco dell'intensità dello spettro di emissione. Questo è situato nella regione verde (all'interno del range del Visibile), più precisamente a 5030\AA . Dalla legge dello spostamento di Wien si ottiene:

$$T_{\odot} = \frac{\alpha}{\lambda_{max}} = \frac{0,29}{5,03 \cdot 10^{-5}} \approx 5800K$$

Invece, per quanto riguarda la luminosità, sapendo che il raggio solare $R_{\odot} \simeq 7 \cdot 10^{10}\text{cm}$ allora:

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \simeq 4 \cdot 10^{33} \frac{\text{erg}}{\text{s}}$$

Verificando che il Sole si tratta di una stella di classe spettrale G2 V.

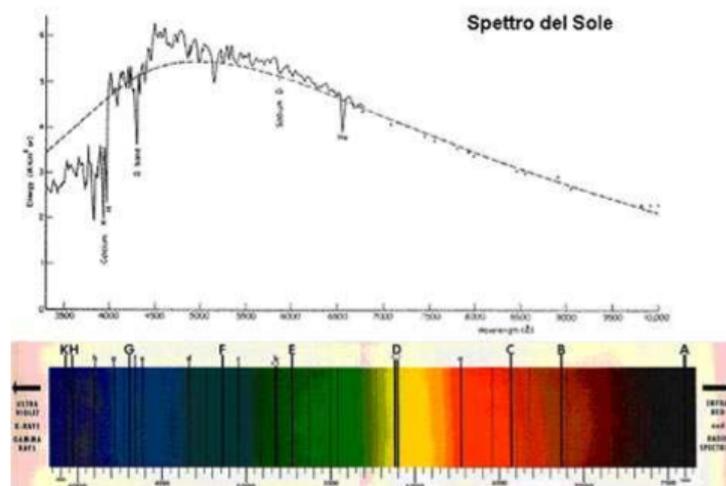


Figura 2.2: Spettro del Sole

²Definita la Magnitudine assoluta come la magnitudine apparente di una stella se fosse a 10 parsec di distanza (parsec= $3 \cdot 10^{18}\text{cm}$): $M = -2,5 \log(\frac{L}{10^{pc}})$

2.2 La radiazione cosmica di fondo (CMB)

L'esempio più preciso di Corpo Nero trovato in natura è quello della radiazione cosmica di fondo (Cosmic Microwave Background Radiation). Si tratta della radiazione elettromagnetica fossile prodotta dal Big Bang che permea l'universo. Essa fu scoperta nel 1965, in maniera del tutto casuale, dagli ingegneri Arno Penzias e Robert Wilson, per la quale vinsero entrambi il Premio Nobel per la Fisica nel 1979. La curva della distribuzione spettrale della CMB non presenta distorsioni rispetto a quella del Corpo Nero, la sovrappone esattamente. Ciò venne ulteriormente dimostrato dalle misure del satellite COBE (COsmic Background Explorer) che venne lanciato nel 1991 fuori atmosfera, eliminando così le aberrazioni dovute all'assorbimento atmosferico. Le misure ottenute mostravano uno spettro molto vicino alla distribuzione planckiana con temperatura $T = (2,728 \pm 0,004)$ K. Le misure precise della radiazione cosmica di fondo sono fondamentali per la cosmologia poichè qualsiasi modello proposto dell'universo deve essere in grado di spiegare questa radiazione. Come già esposto precedentemente la CMB presenta uno spettro termico di Corpo Nero ad una temperatura di $T_{CMB} \approx 2,725$ K ed utilizzando la legge di Wien, si può calcolare dove cade il picco di emissione. Quest'ultimo si trova nella zona delle microonde alla frequenza $\nu_{max} = 16,2$ GHz, corrispondenti ad una lunghezza d'onda $\lambda_{max} = 1,9$ mm.

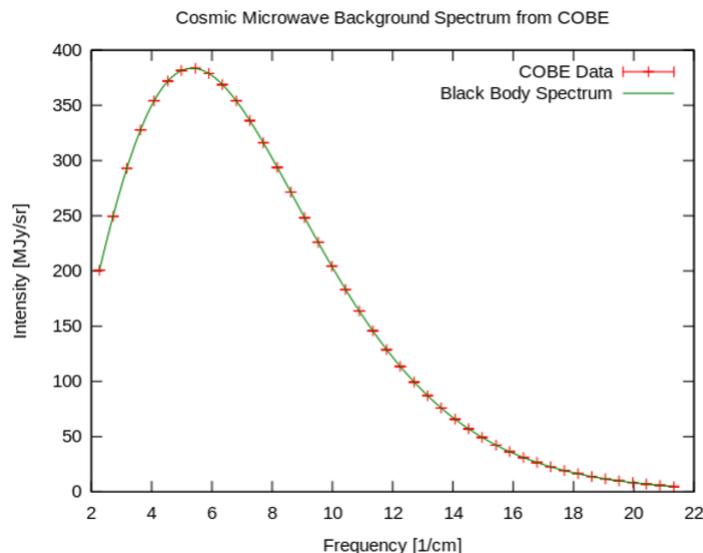


Figura 2.3: Dati COBE sovrapposti allo spettro di Corpo Nero

L'emissione è pressochè uniforme in tutte le direzioni, e mostra un andamento corrispondente a quello che si otterrebbe da un gas molto caldo e quasi uniforme che si espande fino alle attuali dimensioni dell'universo. In particolare, la distribuzione spaziale dell'energia dello spettro contiene piccole anisotropie, o fluttuazioni, che variano con la dimensione della regione in esame.

Appendice A

Premessa Termodinamica

Attraverso una generale trattazione termodinamica e considerando che i fotoni non abbiano massa, possono essere derivate alcune importanti proprietà della radiazione di Corpo Nero. Come già stato anticipato, l'unico modo per raggiungere l'equilibrio termodinamico è quello di assorbire e rimettere fotoni, i quali sono bosoni di spin unitario trattabili attraverso la Statistica di Bose-Einstein. I fotoni non hanno massa e quindi possono essere creati e distrutti dalle pareti della cavità in numero arbitrario, ricordando che è vietata l'interazione tra i fotoni stessi. Di conseguenza il numero di fotoni non si conserva. Questo significa che il potenziale chimico $\mu = 0$, ovvero la variazione di energia interna subita dal sistema causata dall'aggiunta (o rimozione) di un sotto-sistema, a entropia e volume costanti, è nulla. Il numero di fotoni dipende dalla temperatura, quindi si "aggiusterà" all'equilibrio alla temperatura T . Un'altra importante proprietà riguarda la funzione universale $I(\nu, T)$. Essa è indipendente dalle caratteristiche della cavità e dipende esclusivamente dalla temperatura. A dimostrazione di ciò, si considerino due cavità aperte di forma arbitraria alla stessa temperatura T , separate da un filtro che permette il passaggio di una singola frequenza ν . Se $I(\nu) \neq I'(\nu)$, l'energia fluirà spontaneamente tra le due cavità. Ma, avendo queste ultime la stessa temperatura, viene violato il secondo principio della termodinamica. Quindi si ha la relazione $I(\nu) = I(\nu, T)$. $I(\nu)$ non dipende dunque dalle proprietà della cavità e segue inoltre il corollario secondo cui essa è anche isotropica.

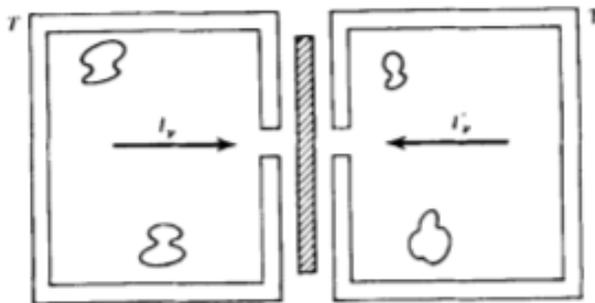


Figura A.1: 2 Corpi Neri a temperatura T , separati da un filtro

Bibliografia

- [1] D. Dallacasa, *Processi di Radiazione e MHD.* (dispense), Università degli Studi di Bologna (2017)
- [2] L. Ferrari, *I Fondamenti della Termodinamica Statistica.*(dispense), Università degli Studi di Bologna(2016)
- [3] F. R. Ferraro, *Astrofisica Stellare.*(dispense), Università degli Studi di Bologna(2016)
- [4] F. Ravanini, *Istituzioni di Fisica Teorica.*(dispense), Università degli Studi di Bologna(2016)
- [5] George B.Rybicki and Alan P.Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics.* John Wiley and Sons (1979)
- [6] C. Fanti, R. Fanti, *Una finestra sull'Universo Invisibile.*(dispense), 2012.