

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**EQUAZIONI MATRICIALI  
NELLA DISCRETIZZAZIONE  
DEL PROBLEMA DI POISSON**

Tesi di Laurea in Analisi Numerica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
VALERIA SIMONCINI

Presentata da:  
ROBERTA LORENZI

Correlatore:  
Chiar.mo Prof.  
ERMANNANO LANCONELLI

Sessione III  
Anno Accademico 2016 - 2017



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 Funzione di Green . . . . .	2
1.3 Funzione di Green per le palle euclidee . . . . .	10
1.4 Soluzione di Perron-Wiener del problema di Dirichlet . . . . .	14
1.5 Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson . . . . .	19
<b>2 Discretizzazione del Problema di Poisson</b>	<b>27</b>
2.1 Coordinate polari . . . . .	29
2.2 Condizioni al bordo . . . . .	34
2.3 Equazione di Sylvester di piccole dimensioni . . . . .	37
2.4 Forma di Kronecker associata a $(T_1 + \Phi_1 B_1)\mathbf{U} + \mathbf{U}T_2 = \tilde{F}$ . . . . .	39
2.5 Nuove trasformazioni . . . . .	40
2.6 Risultati numerici . . . . .	48
<b>Appendice A Codici Matlab</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>



# Introduzione

Questo elaborato presenta due parti che riflettono due obiettivi principali: fornire una teoria esaustiva che dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione classica del Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson e risolvere numericamente il problema di Poisson definito su domini semplicemente connessi. Pertanto la tesi è organizzata nel modo seguente:

nel primo capitolo si studia il Problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace. In particolare si mostra l'esistenza di una soluzione generalizzata con il metodo di Perron, si danno criteri geometrici sul dominio che consentano di verificare quando la soluzione di Perron è soluzione classica del problema. Infine si studiano i Potenziali Newtoniani e si mostra come questi ultimi, insieme con i precedenti risultati, consentano di risolvere il Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson, su domini con frontiera Lipschitziana.

Il secondo capitolo, invece, si apre con lo studio dell'equazione di Sylvester  $T_1\mathbf{U} + \mathbf{U}T_2 = F$  in cui  $T_1$ ,  $T_2 = T_1^T$  sono le matrici dei coefficienti,  $F$  è il termine noto e  $\mathbf{U}$  è la matrice incognita, da determinare. Tale equazione matriciale lineare è generata dalla discretizzazione, mediante le differenze finite, del problema di Poisson definito sul dominio quadrato unitario.

Successivamente si è studiato il problema di Poisson definito su una regione fisica, cioè su un dominio che si assume semplicemente connesso. Per eliminare le complicazioni dovute alla forma della regione fisica, è utile trasformare questi domini in domini più semplici, generalmente rettangolari, che dipendono dai parametri presenti nella regione fisica. Mediante un'ulteriore trasformazione, precisamente mediante una traslazione dei parametri, è possibile trasformare qualsiasi dominio rettangolare nello spazio logico  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Grazie a questa traslazione, le trasformazioni sono definite sullo stesso dominio adimensionale e si riesce ad automatizzare la procedura di costruzione del dominio di qualsiasi trasformazione. Di conseguenza, l'equazione di Poisson verrà trasformata in equazioni differenziali che daranno origine ad equazioni matriciali di Sylvester nella forma  $A\mathbf{X} + \mathbf{X}B = C$ , dove  $A$  e  $B$  tengono conto anche di eventuali termini del prim'ordine dell'equazione differenziale trasformata.

Infine si è analizzato l'algoritmo di Bartels e Stewart che risolve numericamente un'equazione di Sylvester di piccole e medie dimensioni.

Nella presentazione degli argomenti ci siamo riferiti principalmente ai testi indicati in bibliografia.



# Capitolo 1

## Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

### 1.1 Introduzione

Consideriamo il *Problema di Dirichlet* per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}, \quad (1.1)$$

dove  $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$  è l'operatore di Laplace in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e  $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ .

Una *soluzione classica* del problema (1.1) è una funzione

$$u \in \mathcal{H}(\Omega)$$

tale che

$$\lim_{x \rightarrow y} u(x) = \varphi(y) \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Equivalentemente, poichè  $\varphi$  è continua su  $\partial\Omega$ ,  $u$  è una soluzione classica di (1.1) se

$$u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

#### Notazione

$\mathcal{H}(\Omega)$  è l'insieme delle funzioni armoniche in  $\Omega$ , cioè è l'insieme delle funzioni due volte continuamente differenziabili tali che  $\Delta u \equiv 0$  in  $\Omega$ .

L'unicità della soluzione del Problema di Dirichlet (1.1) segue dal Principio del massimo debole, invece studieremo l'esistenza di tale soluzione nel paragrafo 1.4.

**Teorema 1.1.1 (Principio del massimo debole).** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ . Allora:*

- i. se  $u \leq 0$  su  $\partial\Omega$ , allora  $u \leq 0$  in  $\Omega$ ;*

- ii.  $\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega;$
- iii.  $\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$

La dimostrazione di questo teorema verrà riportata nel paragrafo 1.2.

**Teorema 1.1.2.** *Siano  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  soluzioni del Problema di Dirichlet (1.1). Allora*

$$u_1 \equiv u_2.$$

*Dimostrazione.* Sia  $u := u_1 - u_2$ , allora  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  e

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega} = \varphi - \varphi = 0 \end{cases} .$$

Pertanto, per il Principio del massimo debole, si ha  $u = 0$  in  $\Omega$ , cioè

$$u_1 = u_2 \text{ in } \Omega.$$

□

## 1.2 Funzione di Green

La funzione di Green permette di rappresentare una funzione  $u$  in un aperto in termini di  $\Delta u$  e del valore di  $u$  al bordo.

Supponiamo che per ogni  $x \in \Omega$  esista una funzione  $h_x \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  tale che

$$\begin{cases} \Delta h_x = 0 & \text{in } \Omega \\ h_x(y) = \Gamma(x - y) \quad \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

dove  $\Gamma$  è la *soluzione fondamentale* dell'operatore di Laplace. La soluzione fondamentale con polo nell'origine dell'operatore di Laplace è

$$\Gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} & \text{se } n = 2 \\ \frac{C_n}{|x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \quad (1.3)$$

dove  $C_n = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}$  e  $\omega_n$  è la misura di Lebesgue della palla  $B(0, 1)$ .

La funzione

$$G : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad G(x, y) := \Gamma(x - y) - h_x(y)$$

si chiama *funzione di Green* di  $\Omega$ .

Premettiamo alcuni teoremi. Per le dimostrazioni dei risultati qui soltanto enunciati rinviamo alla monografia [1].

Dal Teorema della divergenza si ricava l'Identità di Green:

**Identità di Green.** Siano  $u, v \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ . Allora

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (1.4)$$

Se scegliamo  $v = v(y) := \Gamma(x - y)$ , dall'identità precedente segue la Formula di rappresentazione:

**Teorema 1.2.1 (Formula di rappresentazione).** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , e sia  $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ . Allora, per ogni  $x \in \Omega$ , si ha*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{\Omega} v\Delta u dy \quad (1.5)$$

dove  $v = v(y) := \Gamma(x - y)$ .

Vediamo adesso come diventa la Formula di rappresentazione (1.5) se consideriamo un aperto a simmetria sferica:

**Teorema 1.2.2 (Formula di superficie di Poisson-Jensen).** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\bar{B}(x_0, r) \subseteq \Omega$ . Sia poi  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ . Allora*

$$u(x_0) = m_r(u)(x_0) - n_r(\Delta u)(x_0), \quad (1.6)$$

dove

$$m_r(u)(x_0) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\sigma(x) = \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\sigma(x)$$

e

$$n_r(\Delta u)(x_0) := \int_{B(x_0, r)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(r))\Delta u(x) dx.$$

*Dimostrazione.* Poichè  $B(x_0, r)$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e  $u \in C^2(\overline{B(x_0, r)}, \mathbb{R})$ , allora, per la Formula di rappresentazione (1.5) risulta

$$u(x_0) = \int_{\partial B(x_0, r)} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{B(x_0, r)} v \Delta u \, dx \quad (1.7)$$

dove  $v(x) = \Gamma(x - x_0) = \Gamma(|x - x_0|)$ .

Vediamo come si può scrivere il termine

$$\int_{\partial B(x_0, r)} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma = \int_{\partial B(x_0, r)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\partial B(x_0, r)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

della formula (1.7).

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x_0, r)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma &= \int_{\partial B(x_0, r)} \Gamma(\underbrace{|x - x_0|}_{=r}) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \Gamma(r) \int_{\partial B(x_0, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \\ &= \Gamma(r) \int_{B(x_0, r)} \Delta u \, dx \end{aligned} \quad (1.8)$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che se scegliamo  $v \equiv 1$  nell'Identità di Green (1.4), risulta  $\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$ ).

D'altra parte,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = C_n(2 - n)|x - x_0|^{1-n}.$$

Allora,

$$\begin{aligned} - \int_{\partial B(x_0, r)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma &= - \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) C_n(2 - n) \underbrace{|x - x_0|^{1-n}}_{=r} d\sigma(x) = \\ &= C_n(n - 2)r^{1-n} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\sigma(x) = \\ &= \frac{1}{n(n - 2)\omega_n} (n - 2)r^{1-n} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\sigma(x) = \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\sigma(x) = \\ &= \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\sigma(x). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Pertanto, inserendo le formule (1.8) e (1.9) nella formula (1.7) si ottiene

$$u(x_0) = \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) d\sigma(x) - \int_{B(x_0, r)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(r)) \Delta u(x) \, dx.$$

□

Come corollario del teorema precedente abbiamo:

**Teorema 1.2.3 (Formula di media di superficie di Gauss).** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ , cioè sia  $u$  tale che  $\Delta u = 0$ . Allora*

$$u(x_0) = m_r(u)(x_0)$$

per ogni  $x_0 \in \Omega$  e  $r > 0$  tali che  $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$ .

Ricaviamo ora una formula di volume di tipo Poisson-Jensen:

**Teorema 1.2.4 (Formula di volume di Poisson-Jensen).** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$ . Sia poi  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ . Allora*

$$u(x_0) = M_r(u)(x_0) - N_r(\Delta u)(x_0), \quad (1.10)$$

dove

$$M_r(u)(x_0) := \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x_0, r)} u(x) dx = \int_{B(x_0, r)} u(x) dx$$

e

$$N_r(\Delta u)(x_0) := \frac{n}{r^n} \int_0^r \rho^{n-1} \left( \int_{B(x_0, \rho)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(\rho)) \Delta u(x) dx \right) d\rho.$$

*Dimostrazione.* Poichè per ipotesi  $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$ , allora, se  $0 < \rho < r$ , anche  $\overline{B(x_0, \rho)} \subseteq \Omega$ . Allora, la Formula di Poisson-Jensen di superficie (1.6) diventa

$$\begin{aligned} u(x_0) &= m_\rho(u)(x_0) - n_\rho(\Delta u)(x_0) = \\ &= \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) d\sigma(x) - \int_{B(x_0, \rho)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(\rho)) \Delta u(x) dx. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri per  $\rho^{n-1}$ :

$$\rho^{n-1} u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) d\sigma(x) - \rho^{n-1} \int_{B(x_0, \rho)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(\rho)) \Delta u(x) dx.$$

Infine integriamo rispetto a  $\rho$  su  $]0, r[$ :

$$\begin{aligned} \int_0^r \rho^{n-1} u(x_0) d\rho &= \frac{1}{n\omega_n} \int_0^r \left( \int_{\partial B(x_0, \rho)} u(x) d\sigma(x) \right) d\rho \\ &\quad - \int_0^r \rho^{n-1} \left( \int_{B(x_0, \rho)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(\rho)) \Delta u(x) dx \right) d\rho. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\rho^n}{n} \right]_0^r u(x_0) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{B(x_0, r)} u(x) dx \\ &\quad - \int_0^r \rho^{n-1} \left( \int_{B(x_0, \rho)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(\rho)) \Delta u(x) dx \right) d\rho, \end{aligned}$$

cioè

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x_0, r)} u(x) dx - \frac{n}{r^n} \int_0^r \rho^{n-1} \left( \int_{B(x_0, \rho)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(\rho)) \Delta u(x) dx \right) d\rho.$$

□

Anche in questo caso, come corollario del teorema precedente si ha:

**Teorema 1.2.5 (Formola di media di volume di Gauss).** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ , cioè sia  $u$  tale che  $\Delta u = 0$ . Allora*

$$u(x_0) = M_r(u)(x_0) \tag{1.11}$$

per ogni  $x_0 \in \Omega$  e  $r > 0$  tali che  $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$ .

Una conseguenza della Formola di media di volume è il Principio del massimo forte.

**Teorema 1.2.6 (Principio del massimo forte).** *Sia  $\Omega$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Supponiamo che esista  $x_0 \in \Omega$  tale che*

$$u(x_0) = \max_{\Omega} u.$$

Allora  $u \equiv u(x_0)$  in  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\Omega_{x_0} = \{x \in \Omega \mid u(x) = u(x_0)\}.$$

Evidentemente,  $\Omega_{x_0} \neq \emptyset$  e  $\Omega_{x_0}$  è chiuso in  $\Omega$ . Dimostriamo che  $\Omega_{x_0}$  è aperto. In questo modo, poichè  $\Omega$  è connesso e  $\Omega_{x_0}$  è aperto, chiuso e non vuoto, ne verrà che  $\Omega_{x_0} = \Omega$ . In altri termini,  $u(x) = u(x_0) \forall x \in \Omega$ .

Per dimostrare che  $\Omega_{x_0}$  è aperto bisogna fare vedere che ogni punto di  $\Omega_{x_0}$  è interno a  $\Omega_{x_0}$ . Sia dunque  $y \in \Omega_{x_0}$  e poichè  $\Omega_{x_0} \subseteq \Omega$ , allora  $y \in \Omega$ . Inoltre  $\Omega$  è aperto per ipotesi, perciò esiste  $r > 0$  tale che  $\overline{B(y, r)} \subseteq \Omega$  e  $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Allora possiamo applicare la Formola di media di volume (1.11) sulla palla  $B(y, r)$ :

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(y, r)} u(z) dz.$$

Questo implica

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(y, r)} u(z) dz - u(y) = 0,$$

cioè

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(y, r)} (u(z) - u(y)) dz = 0. \tag{1.12}$$

Poichè  $y \in \Omega_{x_0}$ , allora  $u(y) = u(x_0)$  e per ipotesi  $u(x_0) = \max_{\Omega} u$ . Segue che  $u(y) = \max_{\Omega} u$ , perciò  $u(z) - u(y) \leq 0$ .

Però  $\int_{B(y,r)} (u(z) - u(y)) dz = 0$  in (1.12), allora  $u(z) - u(y) = 0$  quasi dappertutto. Ma  $u(z) - u(y)$  è continua, perciò  $u(z) - u(y) = 0 \forall z \in B(y, r)$ .

Quindi  $u(z) = u(y) = u(x_0) \forall z \in B(y, r)$ , cioè tutti gli  $z \in B(y, r)$  sono punti di  $\Omega_{x_0}$ , perciò  $B(y, r) \subseteq \Omega_{x_0}$ . Pertanto  $\Omega_{x_0}$  è aperto.  $\square$

Dal Principio del massimo forte segue il Principio del massimo debole che abbiamo enunciato nel paragrafo 1.1. Pertanto adesso possiamo dimostrare il Teorema 1.1.1:

*Dimostrazione. i.* Poichè per ipotesi la funzione  $u$  è continua e  $\bar{\Omega}$  è compatto, allora, per il Teorema di Weierstrass, esiste  $x_0 \in \bar{\Omega}$  tale che  $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ .

Se  $x_0 \in \partial\Omega$ , poichè per ipotesi  $u \leq 0$  su  $\partial\Omega$ , allora  $u(x_0) \leq 0$ . Ne viene  $\max_{\bar{\Omega}} u \leq 0$ , allora  $u \leq 0$  in  $\Omega$ .

Se invece  $x_0 \in \Omega$ , la funzione  $u$  prende il massimo all'interno di  $\Omega$ . Allora, per il Principio del massimo forte,  $u \equiv u(x_0)$  in  $\Omega_{x_0}$  dove  $\Omega_{x_0}$  è la componente connessa di  $\Omega$  contenente  $x_0$ . Poichè  $u$  è continua fino al bordo, allora  $u = u(x_0)$  su  $\partial\Omega_{x_0} \subseteq \partial\Omega$ . Inoltre per ipotesi  $u \leq 0$  sul bordo, quindi  $u(x_0) \leq 0$ , cioè  $\max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0) \leq 0$ , perciò  $u \leq 0$  in  $\Omega$ .

*ii.* Poniamo  $m = \min_{\partial\Omega} u$  e  $M = \max_{\partial\Omega} u$ . Allora  $m - u$  è armonica in  $\Omega$ , continua in  $\bar{\Omega}$  e  $m - u \leq 0$  su  $\partial\Omega$ . Allora, per il punto *i.*,  $m - u \leq 0$  in  $\Omega$ . Quindi  $u \geq m$  in  $\Omega$ , cioè  $u \geq \min_{\partial\Omega} u$ .

Analogamente, prendendo  $u - M$  si ottiene  $u \leq \max_{\partial\Omega} u$ .

*iii.* Nel punto *ii.* abbiamo dimostrato che

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad \forall x \in \Omega,$$

cioè  $\forall x \in \bar{\Omega}$ . Però anche  $-u$  è armonica, perciò

$$-u(x) \leq \max_{\partial\Omega} (-u) \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Perciò  $|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \forall x \in \bar{\Omega}$ , quindi

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Però non può valere la disuguaglianza stretta perchè in generale  $\max_{\partial\Omega} |u| \leq \max_{\Omega} |u|$ ,  
perciò

$$\max_{\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

□

Un'altra conseguenza della Formula di media di volume è la Disuguaglianza di Harnack.

**Teorema 1.2.7 (Disuguaglianza di Harnack).** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $B(x_0, r)$  tale che  $B(x_0, 4r) \subseteq \Omega$ . Allora esiste una costante  $C > 0$ , dipendente solo da  $n$ , tale che per ogni  $u \in \mathcal{H}(\Omega)$  con  $u \geq 0$ , si ha*

$$\sup_{B(x_0, r)} u \leq C \inf_{B(x_0, r)} u.$$

In particolare,  $C = 3^n$ .

*Dimostrazione.* Sia  $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ ,  $u \geq 0$  e sia  $B(x_0, 4r) \subseteq \Omega$ . Siano poi  $x, y \in B(x_0, r)$ . Poichè  $x \in B(x_0, r)$ , allora  $B(x, r) \subseteq B(x_0, 2r) \subseteq B(x_0, 4r)$ , perciò  $B(x, r) \subseteq \Omega$ . Dunque possiamo scrivere la Formula di media di volume (1.11):

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x, r)} u(z) dz \leq \\ &\leq (u \geq 0 \text{ e } B(x, r) \subseteq B(y, 3r)) \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(y, 3r)} u(z) dz = \\ &= 3^n \frac{1}{\omega_n (3r)^n} \int_{B(y, 3r)} u(z) dz = \\ &= 3^n u(y). \end{aligned}$$

In conclusione,

$$u(x) \leq 3^n u(y) \quad \forall x, y \in B(x_0, r).$$

Poichè la disuguaglianza precedente vale per ogni  $x$  e  $y$ , allora vale anche per l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $u$ , cioè

$$\sup_{B(x_0, r)} u \leq 3^n \inf_{B(x_0, r)} u.$$

□

Estendiamo la Disuguaglianza di Harnack ad una geometria della palla meno rigida.

**Teorema 1.2.8 (Disuguaglianza di Harnack non invariante).** *Sia  $\Omega$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $K \subset\subset \Omega$ . Allora esiste una costante  $C = C(\Omega, K, n) > 0$  tale che*

$$\sup_K u \leq C \inf_K u \quad \forall u \in \mathcal{H}(\Omega), \quad u \geq 0.$$

La dimostrazione di questo teorema segue dal teorema precedente usando un argomento di ricoprimento.

Adesso possiamo scrivere la formula di rappresentazione di  $u$  in termini del suo valore al bordo e del suo laplaciano.

**Teorema 1.2.9.** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e supponiamo che abbia una funzione di Green  $G(x, y)$ . Allora, per ogni  $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ ,*

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) \right) u(y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy \quad \forall x \in \Omega \quad (1.13)$$

dove  $\nu_y$  è la normale esterna.

*Dimostrazione.* Per ipotesi, le funzioni  $u, h_x \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ . Allora possiamo applicare l'Identità di Green (1.4) alla coppia di funzioni  $u$  e  $h_x$ :

$$\int_{\Omega} (u \Delta h_x - h_x \Delta u) dy = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial h_x}{\partial \nu} - h_x \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (1.14)$$

Nel sistema (1.2) abbiamo supposto che  $\Delta h_x = 0$  in  $\Omega$ , quindi  $\int_{\Omega} u \Delta h_x dy = 0$  (in (1.14)).

Portiamo ora tutti i termini della formula (1.14) a destra dell'uguale:

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial h_x}{\partial \nu} - h_x \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Omega} h_x \Delta u dy. \quad (1.15)$$

Infine sommiamo membro a membro le formule (1.5) e (1.15) ricordando che  $h_x(y) = \Gamma(x - y) = v(y)$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{\Omega} v \Delta u dy + \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial h_x}{\partial \nu} - \underbrace{h_x}_{=v} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Omega} h_x \Delta u dy = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( -u \frac{\partial v}{\partial \nu} + u \frac{\partial h_x}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Omega} \Delta u (-v + h_x) dy = \\ &= - \int_{\partial\Omega} u \underbrace{\left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} - \frac{\partial h_x}{\partial \nu} \right)}_{=\frac{\partial G}{\partial \nu}} d\sigma - \int_{\Omega} \Delta u \underbrace{(\Gamma - h_x)}_{=G} dy = \\ &= - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) \right) u(y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy. \end{aligned}$$

□

Ci sono casi particolari in cui si riesce a costruire  $G(x, y)$  in termini espliciti, ad esempio sulle palle euclidee.

### 1.3 Funzione di Green per le palle euclidee

Grazie alla mappa di inversione, sulle palle euclidee di  $\mathbb{R}^n$  centrate nell'origine si riesce a costruire la funzione  $h_x$ . Di conseguenza, sulle palle  $B(0, R)$  esiste la funzione di Green.

Costruiamo la mappa di inversione: prendiamo un punto  $x \in B(0, R)$ ,  $x \neq 0$  e una semiretta che esce dall'origine di  $B(0, R)$  passante per  $x$ . Sulla semiretta prendiamo un punto  $\bar{x}$ : è l'inversione di  $x$  rispetto alla palla  $B(0, R)$ . Il punto  $\bar{x}$  è tale che  $|x||\bar{x}| = R^2$ . Inoltre, poichè  $\bar{x}$  sta sulla retta uscente dall'origine e passante per  $x$ , allora  $\bar{x} = tx$  con  $t > 0$ . Quindi  $|x| t |x| = R^2$ , perciò  $t = \left(\frac{R}{|x|}\right)^2$ .

Dunque, la *mappa di inversione* riguardo  $\partial B(0, R)$  è definita come

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{x} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^2 x.$$

Se  $x \in B(0, R)$ ,  $x \neq 0$ , allora  $\bar{x} \notin B(0, R)$ . Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \bar{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow 0} x = +\infty.$$

Se  $x \in \partial B(0, R)$  si ha  $|x| = R$ , perciò  $\bar{x} = x$ , cioè sul bordo della palla, l'inversione coincide con l'identità. Quindi anche  $\bar{x}$  sta sul bordo.

Infine, la mappa di inversione  $x \mapsto \bar{x}$  verifica la seguente proprietà fondamentale:

$$\frac{|x - y|}{|\bar{x} - y|} = \frac{|x|}{R} \quad \forall y \in \partial B(0, R), \quad \forall x \in B(0, R) \setminus \{0\}, \quad (1.16)$$

cioè  $\frac{|x-y|}{|\bar{x}-y|}$  è indipendente da  $y$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \frac{|x - y|^2}{|\bar{x} - y|^2} &= \frac{|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle}{|\bar{x}|^2 + |y|^2 - 2\langle \bar{x}, y \rangle} = \\ &= (\text{poichè } y \in \partial B(0, R), \text{ allora } |y| = R) \quad \frac{|x|^2 + R^2 - 2\langle x, y \rangle}{\left(\frac{R}{|x|}\right)^4 |x|^2 + R^2 - 2\langle x, y \rangle \left(\frac{R}{|x|}\right)^2} = \\ &= \frac{|x|^2 + R^2 - 2\langle x, y \rangle}{\left(\frac{R}{|x|}\right)^2 \left(\frac{R^2}{|x|^2} |x|^2 + R^2 \frac{|x|^2}{R^2} - 2\langle x, y \rangle\right)} = \\ &= \left(\frac{|x|}{R}\right)^2 \frac{|x|^2 + R^2 - 2\langle x, y \rangle}{R^2 + |x|^2 - 2\langle x, y \rangle} = \\ &= \left(\frac{|x|}{R}\right)^2. \end{aligned}$$

□

Grazie all'uguaglianza (1.16) si riesce a costruire una funzione armonica  $h_x$  tale che al bordo assume il valore della soluzione fondamentale. Infatti l'uguaglianza (1.16) si può riscrivere come

$$|x - y| = |\bar{x} - y| \frac{|x|}{R} \quad \forall y \in \partial B(0, R).$$

Inoltre, per  $n \geq 3$ , la soluzione fondamentale è  $\Gamma = C_n \frac{1}{|x|^{n-2}}$ , cioè dipende solo da  $|x|$ . Allora poniamo

$$\Gamma(x - y) = \Gamma\left(\left(\bar{x} - y\right) \frac{|x|}{R}\right) \quad \forall y \in \partial B(0, R).$$

Ora,

$$\Gamma\left(\left(\bar{x} - y\right) \frac{|x|}{R}\right) = \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n} \Gamma(\bar{x} - y)$$

è armonica in  $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ . Se  $x \in B(0, R)$ , allora  $\bar{x} \notin B(0, R)$ , perciò  $\Gamma\left(\left(\bar{x} - y\right) \frac{|x|}{R}\right)$  è armonica in  $\overline{B(0, R)}$  perchè  $\overline{B(0, R)}$  è contenuta nel complementare di  $\{\bar{x}\}$ . Quindi  $\Gamma\left(\left(\bar{x} - y\right) \frac{|x|}{R}\right)$  è una funzione armonica che coincide con  $\Gamma(x - y)$ , perciò,  $\forall x \in B(0, R)$ ,  $x \neq 0$ , definiamo

$$h_x(y) := \Gamma\left(\left(\bar{x} - y\right) \frac{|x|}{R}\right), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}.$$

Pertanto la funzione di Green per la palla  $B(0, R)$  è

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \Gamma(x - y) - h_x(y) = \Gamma(x - y) - \Gamma\left(\left(\bar{x} - y\right) \frac{|x|}{R}\right) = \\ &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \left( \frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \frac{1}{\left(R^2 + \left(\frac{|x||y|}{R}\right)^2 - 2\langle x, y \rangle\right)^{\frac{n-2}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Poichè  $h_x(y) = \Gamma(x - y) \quad \forall y \in \partial B(0, R)$ , allora  $G(x, y) = 0 \quad \forall y \in \partial B(0, R)$ .

Inoltre, la formula (1.17) è simmetrica rispetto a  $x$  e  $y$ , cioè  $G(x, y) = G(y, x)$ . Pertanto  $G(x, y)$  è armonica sia rispetto a  $x$  sia rispetto a  $y$ .

Poichè abbiamo definito la mappa di inversione per  $x \neq 0$ , allora la formula (1.17) vale per  $x \neq 0$ .

Vediamo ora il caso  $x = 0$ . Poniamo  $h_x(y) = h_0(y)$  e consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \Delta h_0 = 0 & \text{in } B(0, R) \\ h_0(y) = \Gamma(-y) = \Gamma(y) & \forall y \in \partial B(0, R) \end{cases} .$$

Poichè la soluzione fondamentale è  $\Gamma(y) = C_n \frac{1}{|y|^{n-2}}$  e  $|y| = R \quad \forall y \in \partial B(0, R)$ , allora

$$h_0(y) = \Gamma(y) = C_n \frac{1}{R^{n-2}} \quad \forall y \in \partial B(0, R),$$

cioè  $h_0(y)$  è costante su  $\partial B(0, R)$ . Dunque, per il Principio del massimo debole (Teorema 1.1.1),  $h_0(y)$  è costante anche all'interno di  $B(0, R)$ . Inoltre le costanti sono armoniche, perciò  $h_0(y)$  è armonica in  $B(0, R)$ .

Pertanto, la funzione di Green è

$$G(0, y) = \Gamma(y) - h_0(y) = C_n \left( \frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right). \quad (1.18)$$

Se nella formula (1.17) sostituiamo  $x = 0$ , otteniamo la formula (1.18). In definitiva, la formula (1.17) contiene anche il caso  $x = 0$ .

Se  $\Delta u = 0$  in  $B(0, R)$ , dalla formula (1.13) si ricava:

$$u(x) = - \int_{\partial B(0, R)} \left( \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) \right) u(y) d\sigma(y), \quad \text{con } u \in \mathcal{H}(B(0, R)) \cap C^2(\overline{B(0, R)}).$$

Per ogni  $x \in B(0, R)$  e  $y \in \partial B(0, R)$  si definisce il *nucleo di Poisson* di  $B(0, R)$ :

$$P_R(x, y) := - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y).$$

Con un calcolo esplicito si trova:

$$P_R(x, y) = \frac{1}{n\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n}.$$

Dunque, con il nucleo di Poisson si ha una formula di rappresentazione per tutte le funzioni armoniche in  $B(0, R)$  e continue fino alla chiusura di  $B(0, R)$ .

Con il nucleo di Poisson possiamo risolvere il Problema di Dirichlet (1.1) su ogni palla euclidea. Infatti abbiamo il seguente teorema:

**Teorema 1.3.1.** *Sia  $B(x_0, R)$  la palla euclidea centrata in  $x_0$  e con raggio  $R > 0$ . Sia  $\varphi \in C(\partial B(x_0, R), \mathbb{R})$ . Allora la funzione*

$$u(x) = \int_{\partial B(x_0, R)} P_R(x - x_0, y - x_0) \varphi(y) d\sigma(y), \quad x \in B(x_0, R), \quad (1.19)$$

*è armonica in  $B(x_0, R)$  e soddisfa*

$$\lim_{x \rightarrow y_0} u(x) = \varphi(y_0) \quad \forall y_0 \in \partial B(x_0, R).$$

*Dimostrazione.* Per semplicità di notazione, dimostriamo il teorema nel caso  $x_0 = 0$ . In questo modo, la formula (1.19) diventa

$$u(x) = \int_{\partial B(0,R)} P_R(x,y) \varphi(y) d\sigma(y), \quad x \in B(0,R). \quad (1.20)$$

La regolarità di  $P_R$  permette di derivare sotto il segno di integrale. Inoltre, ricordando che  $x \mapsto P_R(x,y)$  è armonica per ogni fissato  $y \in \partial B(0,R)$ , otteniamo

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B(0,R)} \underbrace{\Delta_x P_R(x,y)}_{=0} \varphi(y) d\sigma(y) = 0, \quad \forall x \in B(0,R).$$

Pertanto  $u$  è armonica in  $B(0,R)$ .

Fissiamo ora  $y_0 \in \partial B(0,R)$  e dimostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow y_0} u(x) = \varphi(y_0) \quad \forall y_0 \in \partial B(0,R).$$

Innanzitutto, la Formula di rappresentazione (1.13) equivale a

$$u(x) = \int_{\partial B(0,R)} P_R(x,y) u(y) d\sigma(y) - \int_{B(0,R)} G(x,y) \Delta u(y) dy, \quad \forall x \in B(0,R)$$

e per ogni  $u \in C^2(\overline{B(0,R)}, \mathbb{R})$ . In particolare, se  $u \equiv 1$ , si ottiene

$$\int_{\partial B(0,R)} P_R(x,y) d\sigma(y) = 1 \quad \forall x \in B(0,R). \quad (1.21)$$

Sottraendo  $\varphi(y_0)$  in entrambi i membri di (1.20) e tenendo presente la formula (1.21), si ottiene, per ogni  $x \in B(0,R)$ ,

$$u(x) - \varphi(y_0) = \int_{\partial B(0,R)} P_R(x,y) (\varphi(y) - \varphi(y_0)) d\sigma(y).$$

Fissiamo ora  $\delta > 0$  e scriviamo

$$\begin{aligned} u(x) - \varphi(y_0) &= \int_{\partial B(0,R) \cap \{|y-y_0| \leq \delta\}} P_R(x,y) (\varphi(y) - \varphi(y_0)) d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\partial B(0,R) \cap \{|y-y_0| \geq \delta\}} P_R(x,y) (\varphi(y) - \varphi(y_0)) d\sigma(y) = \\ &:= I(\delta) + J(\delta). \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} |I(\delta)| &\leq \sup_{|y-y_0| \leq \delta} |\varphi(y) - \varphi(y_0)| \int_{\partial B(0,R) \cap \{|y-y_0| \leq \delta\}} P_R(x,y) d\sigma(y) \leq \\ &\leq (\text{per la formula (1.21)}) \sup_{|y-y_0| \leq \delta} |\varphi(y) - \varphi(y_0)|. \end{aligned}$$

D'altra parte, se  $x \in B(0, R)$  e  $|x - y_0| < \frac{\delta}{2}$ , per ogni  $y \in \partial B(0, R)$ ,  $|y - y_0| \geq \delta$ , si ha

$$|x - y| \geq |y_0 - y| - |y_0 - x| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Allora

$$P_R(x, y) = \frac{1}{n\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \leq \frac{1}{n\omega_n R} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n (R^2 - |x|^2)$$

per ogni  $y \in \partial B(0, R)$ ,  $|y - y_0| \geq \delta$  e per ogni  $x \in B(0, R)$ ,  $|x - y_0| < \frac{\delta}{2}$ . Di conseguenza,

$$\limsup_{x \rightarrow y_0} |J(\delta)| \leq 2 \sup_{\partial B(0, R)} |\varphi| R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \limsup_{x \rightarrow y_0} (R^2 - |x|^2) = 0.$$

Segue che

$$\limsup_{x \rightarrow y_0} |u(x) - \varphi(y_0)| = \limsup_{x \rightarrow y_0} |I(\delta)| + \underbrace{\limsup_{x \rightarrow y_0} |J(\delta)|}_{\leq 0} \leq \sup_{|y - y_0| < \delta} |\varphi(y) - \varphi(y_0)| \quad \forall \delta > 0.$$

Poichè  $\varphi$  è una funzione continua, allora  $\sup_{|y - y_0| < \delta} |\varphi(y) - \varphi(y_0)| \rightarrow 0$  per  $\delta \rightarrow 0$ .

Allora

$$\limsup_{x \rightarrow y_0} |u(x) - \varphi(y_0)| = 0,$$

perciò

$$\lim_{x \rightarrow y_0} u(x) = \varphi(y_0) \quad \forall y_0 \in \partial B(0, R).$$

□

## 1.4 Soluzione di Perron-Wiener del problema di Dirichlet

In questo paragrafo studiamo l'esistenza della soluzione del Problema di Dirichlet (1.1).

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che  $n = 1$ , allora  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ .  $\Delta u = 0$  se e solo se  $u'' = 0$ , cioè le funzioni armoniche sono le funzioni affini. Quindi la soluzione  $u$  è una funzione affine che assume i valori assegnati al bordo. Cioè se  $\Omega = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$ , la soluzione  $u$  è una retta nel piano  $\mathbb{R}^2$  con estremi nei punti  $(a, \varphi(a))$  e  $(b, \varphi(b))$ .

Una funzione affine può essere vista come inviluppo inferiore delle funzioni concave maggiori uguali del dato al bordo e può essere vista anche come inviluppo superiore delle funzioni convesse minori uguali del dato al bordo.

**Definizione 1.1 (Funzioni superarmoniche).** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .  $u$  è superarmonica in  $\Omega$  se:

i.  $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$

ii. per ogni  $x \in \Omega$ , esiste  $r_x > 0$  tale che  $B(x, r_x) \subseteq \Omega$  e

$$u(x) \geq M_r(u)(x) \quad \forall r \in ]0, r_x[.$$

La Formula di volume di Poisson-Jensen (1.10) implica che una funzione  $u \in C^2(\Omega)$  è superarmonica se e solo se  $\Delta u \leq 0$  in  $\Omega$ .

Analogamente,

**Definizione 1.2 (Funzioni subarmoniche).** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .  $u$  è subarmonica in  $\Omega$  se:

i.  $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$

ii. per ogni  $x \in \Omega$ , esiste  $r_x > 0$  tale che  $B(x, r_x) \subseteq \Omega$  e

$$u(x) \leq M_r(u)(x) \quad \forall r \in ]0, r_x[$$

La Formula di volume di Poisson-Jensen (1.10) implica che una funzione  $u \in C^2(\Omega)$  è subarmonica se e solo se  $\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$ .

Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e consideriamo la funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ . Poniamo:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega &= \text{insieme delle superfunzioni} \\ &:= \{u \text{ superarmoniche in } \Omega \mid \liminf_{x \rightarrow y} u(x) \geq \varphi(y) \quad \forall y \in \partial\Omega\} \end{aligned}$$

e

$$\underline{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega := \{u \text{ subarmoniche in } \Omega \mid \limsup_{x \rightarrow y} u(x) \leq \varphi(y) \quad \forall y \in \partial\Omega\}$$

$H_\varphi^\Omega$  è, per definizione, la *soluzione generalizzata di Perron-Wiener* del Problema di Dirichlet (1.1).

**Teorema 1.4.1 (Teorema di Perron-Wiener).** Per ogni  $\Omega$  aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e per ogni funzione  $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$  risulta

$$H_\varphi^\Omega = \inf_{u \in \bar{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega} u = \sup_{u \in \underline{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega} u \quad \text{e } H_\varphi^\Omega \text{ è armonica in } \Omega.$$

*Osservazione 1.* Se  $u_\varphi \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  è una soluzione classica di (1.1), allora  $u_\varphi = H_\varphi^\Omega$ . Infatti:  $u_\varphi$  è soluzione classica del Problema di Dirichlet (1.1) se e solo se

$$u_\varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \text{ tale che } \Delta u_\varphi = 0, \quad u_\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

In particolare,  $u_\varphi$  è superarmonica e subarmonica, perciò

$$u_\varphi \in \bar{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega \cap \underline{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega.$$

Pertanto,

$$\inf_{u \in \bar{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega} u \leq u_\varphi \leq \sup_{u \in \underline{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega} u, \quad (1.22)$$

cioè  $\inf_{u \in \bar{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega} u \leq \sup_{u \in \underline{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega} u$ . Poichè la disuguaglianza opposta è sempre vera, allora le disuguaglianze in (1.22) sono tutte uguaglianze, perciò

$$H_\varphi^\Omega = \inf_{u \in \bar{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega} u = \sup_{u \in \underline{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega} u = u_\varphi.$$

Però il Problema di Dirichlet (1.1) non è sempre risolubile, precisamente esistono aperti limitati sui quali il problema (1.1) non ha soluzione.

**Esempio 1.4.1 (Controesempio di Zaremba).** Sia  $\Omega := B(0, 1) \setminus \{0\}$  (cioè  $\Omega$  è un aperto limitato) e  $\partial\Omega = \partial B(0, 1) \cup \{0\}$ .

Sia

$$\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| = 1, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Chiaramente  $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ .

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che il Problema di Dirichlet (1.1) abbia una soluzione  $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ .

Poichè  $\varphi(x) \geq 0$ , allora anche il dato al bordo  $u|_{\partial\Omega} \geq 0$ . Quindi, per il Principio del massimo debole (Teorema 1.1.1),  $u \geq 0$  in  $\Omega$ , perciò  $H_\varphi^\Omega \geq 0$ .

Per ogni  $\epsilon > 0$ , poniamo

$$u_\epsilon(x) = \epsilon \left( \frac{1}{|x|^{n-2}} - 1 \right), \quad x \in \Omega,$$

è armonica fuori dall'origine, ma l'origine non appartiene a  $\Omega$ , quindi  $u_\epsilon$  è armonica in  $\Omega$ .

Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow y} u_\epsilon(x) = 0 \quad \forall y \in \partial\Omega, |y| = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_\epsilon(x) = +\infty.$$

Allora  $u_\epsilon \in \bar{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega$ . Di conseguenza,

$$\liminf_{x \rightarrow y} (u_\epsilon(x) - u(x)) \geq 0 \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Dunque, per il Principio del massimo debole,  $u_\epsilon - u \geq 0$  in  $\Omega$ , cioè  $u \leq u_\epsilon$  in  $\Omega \quad \forall \epsilon > 0$ . Quindi

$$H_\varphi^\Omega(x) \leq u_\epsilon(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Mandando  $\epsilon$  a 0 otteniamo  $H_\varphi^\Omega \leq 0$  in  $\Omega$ . Però avevamo detto che  $H_\varphi^\Omega \geq 0$ , perciò

$$H_\varphi^\Omega = 0 \text{ in } \Omega.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow 0 \in \partial\Omega} H_\varphi^\Omega(x) = 0 \neq \varphi(0) = 1.$$

Pertanto  $u$  non risolve il Problema di Dirichlet (1.1) e in generale *non possiamo aspettarci che*  $H_\varphi^\Omega(x) \rightarrow \varphi(y)$  per  $x \rightarrow y$ , per ogni  $y \in \partial\Omega$ .

Studiamo allora il comportamento della soluzione di Perron-Wiener  $H_\varphi^\Omega$  sul bordo di  $\Omega$ . Diamo la seguente definizione:

**Definizione 1.3 (Punto  $\Delta$  - regolare).** Un punto  $y \in \partial\Omega$  è detto  $\Delta$  - regolare per  $\Omega$  se

$$\lim_{x \rightarrow y} H_\varphi^\Omega(x) = \varphi(y) \quad \forall \varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}).$$

### Notazione

L'insieme dei punti  $\Delta$  - regolari si indica con  $\partial_r\Omega$ .

**Esempio 1.4.2.** Sia  $\Omega := B(0, 1) \setminus \{0\}$  l'insieme di Zaremba dell'esempio 1.4.1. In quell'esempio avevamo dimostrato che  $0 \notin \partial_r\Omega$ . Si dimostra che

$$\partial_r\Omega = \{y : |y| = 1\}.$$

**Teorema 1.4.2.** *Il Problema di Dirichlet (1.1) ha una soluzione classica per ogni  $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$  se e solo se ogni punto di  $\partial\Omega$  è  $\Delta$  - regolare.*

La ricerca dei punti  $\Delta$  - regolari si basa sulla seguente definizione.

**Definizione 1.4 (Funzione  $\Delta$  - barriera).** Sia  $y \in \partial\Omega$ . Una funzione  $b$  è detta una  $\Delta$  - barriera per  $\Omega$  in  $y$  se esiste un intorno  $V$  di  $y$  tale che

- i.  $b$  è superarmonica in  $\Omega \cap V$ ;

- ii.  $\inf\{b(x) \mid x \in \Omega \cap V, |x - y| \geq \delta\} > 0$  per ogni  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo;
- iii.  $\lim_{x \rightarrow y} b(x) = 0$ .

Dunque abbiamo il seguente teorema:

**Teorema 1.4.3 (Teorema di Bouligand).** *Il punto  $y \in \partial\Omega$  è  $\Delta$  - regolare per  $\Omega$  se e solo se esiste una funzione  $\Delta$  - barriera per  $\Omega$  in  $y$ .*

Pertanto il comportamento al bordo della soluzione di Perron-Wiener dipende dall'esistenza delle funzioni barriera.

**Definizione 1.5 (Proprietà della palla esterna).** Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $y \in \partial\Omega$ . Si dice che  $\Omega$  ha la proprietà della palla esterna in  $y$  se esiste  $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tale che

$$\overline{B(y + \nu, |\nu|)} \cap \bar{\Omega} = \{y\}.$$

Ebbene

**Teorema 1.4.4 (Teorema di Poincarè).** *Se  $\Omega$  ha la proprietà della palla esterna in un punto  $y \in \partial\Omega$ , allora  $y$  è  $\Delta$  - regolare.*

*Dimostrazione.* Sia  $B = B(y + \nu, |\nu|)$  tale che  $\bar{B} \cap \bar{\Omega} = \{y\}$ . Allora, posto  $z = y + \nu$  e  $r = |\nu|$ , la funzione

$$b(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{|x-z|}\right)^{n-2} & \text{se } n \geq 3, \\ \log \frac{|x-z|}{r} & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

è una barriera per  $\Omega$  in  $y$ . Pertanto, per il Teorema di Bouligand, il punto  $y$  è  $\Delta$  - regolare.  $\square$

Se  $\partial\Omega$  è di classe  $C^2$ , allora ogni punto di  $\partial\Omega$  ha la proprietà della palla tangente esternamente. Quindi, grazie al Teorema di Poincarè e al Teorema 1.4.2, su ogni aperto limitato con frontiera  $C^2$ , il Problema di Dirichlet (1.1) è risolubile per ogni dato al bordo continuo.

Questo risultato si può migliorare sensibilmente. Infatti se  $\partial\Omega$  è Lipschitziana, allora ogni punto di  $\Omega$  è  $\Delta$  - regolare.

Questo segue da un Teorema di Zaremba che afferma questo:

**Teorema 1.4.5 (Teorema di Zaremba).** *Se  $\Omega$  ha la proprietà del cono esterno in un punto  $y \in \partial\Omega$ , allora  $y$  è  $\Delta$  - regolare per  $\Omega$ .*

Gli aperti con frontiera Lipschitziana hanno la proprietà del cono esterno in ogni punto della loro frontiera. Dunque ogni punto di  $\Omega$  è  $\Delta$  - regolare.

## 1.5 Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

Consideriamo il *Problema di Dirichlet non omogeneo*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}, \quad (1.23)$$

dove  $\Delta u = f$  è l'equazione di Poisson e  $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Supponiamo che ogni punto di  $\partial\Omega$  sia  $\Delta$  - regolare. Supponiamo inoltre che  $f$  sia limitata in  $\Omega$  e *localmente Hölderiana*, cioè

$$\exists \alpha > 0 \text{ tale che } \forall K \subset\subset \Omega, \text{ allora } \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

Allora, se  $\Gamma$  è la soluzione fondamentale di  $\Delta$ , la funzione

$$w = -\Gamma * f \quad \left( w(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(x - y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \right) \quad (1.24)$$

ha le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} w &\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ w &\in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \Delta w = f \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Queste due proprietà seguono dai due lemmi sottostanti:

**Lemma 1.5.1.** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $f$  limitata e integrabile in  $\Omega$  e sia  $w$  definita in (1.24). Allora  $w \in C^1(\bar{\Omega})$  e per ogni  $x \in \Omega$ ,*

$$D_i w(x) = \int_{\Omega} D_i \Gamma(x - y) f(y) dy.$$

*Dimostrazione.* Per prima cosa calcoliamo la derivata della soluzione fondamentale:

$$\begin{aligned} D_i \Gamma(x - y) &= (\text{usiamo la formula (1.3)}) \quad D_i (C_n |x - y|^{2-n}) = C_n (2 - n) |x - y|^{1-n} \frac{x_i - y_i}{|x - y|} = \\ &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} (2 - n) |x - y|^{1-n} \frac{x_i - y_i}{|x - y|} = \\ &= \frac{1}{n\omega_n} |x - y|^{1-n} \frac{x_i - y_i}{|x - y|}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Perciò

$$|D_i \Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{n\omega_n} |x-y|^{1-n}, \quad (1.26)$$

cioè  $D_i \Gamma(x-y)$  è localmente integrabile. Inoltre, per ipotesi,  $f$  è limitata, perciò la funzione

$$v(x) = \int_{\Omega} D_i \Gamma(x-y) f(y) dy$$

è ben definita.

Per mostrare che  $v = D_i w$ , fissiamo una funzione  $\eta \in C^1(\mathbb{R})$  tale che

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \eta' \leq 2, \quad \eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 1 \\ 1 & \text{per } t \geq 2 \end{cases}.$$

Definiamo

$$w_\epsilon(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) f(y) dy, \quad w_\epsilon \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Poichè  $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  e  $\eta$  è limitata, è possibile maggiorare la funzione  $\Gamma(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)$  con una funzione sommabile. Inoltre  $f$  è integrabile per ipotesi, perciò per il Teorema della convergenza dominata,

$$D_i w_\epsilon(x) = \int_{\Omega} D_i \left( \Gamma(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) \right) f(y) dy$$

è ben definito.

$$\begin{aligned} v(x) - D_i w_\epsilon(x) &= \int_{\Omega} D_i \Gamma(x-y) f(y) dy - \int_{\Omega} D_i \left[ \Gamma(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) \right] f(y) dy = \\ &= \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} D_i \left\{ \left[ 1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) \right] \Gamma(x-y) \right\} f(y) dy. \end{aligned}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} |v(x) - D_i w_\epsilon(x)| &\leq (f \text{ è limitata}) \sup |f| \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} \left| D_i \left\{ \left[ 1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) \right] \Gamma(x-y) \right\} \right| dy \leq \\ &\leq \sup |f| \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} \left( |D_i \Gamma(x-y)| + \left| D_i \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) \Gamma(x-y) \right| \right) dy \leq \\ &\leq (\text{perchè } D_i \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) = \underbrace{\eta'\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)}_{\leq 2} \underbrace{\frac{x_i - y_i}{|x-y|}}_{\leq 1} \frac{1}{\epsilon} \leq \frac{2}{\epsilon}) \\ &\sup |f| \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} \left( |D_i \Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon} |\Gamma(x-y)| \right) dy. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora  $\int_{|x-y|\leq 2\epsilon} (|D_i\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon}|\Gamma(x-y)|) dy$  nei casi in cui  $n \geq 3$  e  $n = 2$ .

Se  $n \geq 3$ , usando le formule (1.3) e (1.26), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|\leq 2\epsilon} |D_i\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon}|\Gamma(x-y)| dy &\leq \int_{|x-y|\leq 2\epsilon} \frac{1}{n\omega_n} |x-y|^{1-n} dy + \int_{|x-y|\leq 2\epsilon} \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x-y|^{2-n} dy = \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_{B(x,2\epsilon)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B(x,2\epsilon)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy = \\
&= (\text{coordinate polari}) \quad \frac{1}{n\omega_n} \int_x^{2\epsilon} \left( \int_{|x-y|=\rho} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} d\sigma(y) \right) d\rho \\
&+ \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_x^{2\epsilon} \left( \int_{|x-y|=\rho} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} d\sigma(y) \right) d\rho = \\
&= (\text{lo jacobiano della trasformazione } \mathbb{R}^n \ni y \mapsto x+y, x \in \mathbb{R}^n \text{ fissato, è uguale a } \\
&1 \text{ e questa trasformazione muta l'insieme } \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| \leq 2\epsilon\} \text{ nell'insieme } \\
&\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq 2\epsilon\}) : \\
&\frac{1}{n\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \left( \int_{|y|=\rho} \frac{1}{|y|^{n-1}} d\sigma(y) \right) d\rho + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \left( \int_{|y|=\rho} \frac{1}{|y|^{n-2}} d\sigma(y) \right) d\rho = \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho^{n-1}} \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \right) d\rho + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho^{n-2}} \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \right) d\rho = \\
&= \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \right) \text{ è l'area della superficie sferica} : \\
&\frac{1}{n\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho^{n-1}} n\omega_n \rho^{n-1} d\rho + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho^{n-2}} n\omega_n \rho^{n-1} d\rho = \\
&= 2\epsilon + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n-2} \int_0^{2\epsilon} \rho d\rho = \\
&= 2\epsilon + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n-2} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{2\epsilon} = \\
&= 2\epsilon + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n-2} \frac{4\epsilon^2}{2} = \\
&= \frac{2\epsilon(n-2) + 4\epsilon}{n-2} = \\
&= \frac{2\epsilon n}{n-2}.
\end{aligned}$$

Sia ora  $n=2$ :

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|\leq 2\epsilon} |D_i\Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon} |\Gamma(x-y)| dy &\leq \int_{|x-y|\leq 2\epsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x-y|} dy + \int_{|x-y|\leq 2\epsilon} \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,2\epsilon)} \frac{1}{|x-y|} dy - \frac{1}{\epsilon\pi} \int_{B(x,2\epsilon)} \log |x-y| dy = \\
&= (\text{coordinate polari}) \quad \frac{1}{2\pi} \int_x^{2\epsilon} \left( \int_{|x-y|=\rho} \frac{1}{|x-y|} d\sigma(y) \right) d\rho \\
&\quad - \frac{1}{\epsilon\pi} \int_x^{2\epsilon} \left( \int_{|x-y|=\rho} \log |x-y| d\sigma(y) \right) d\rho = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\epsilon} \left( \int_{|y|=\rho} \frac{1}{|y|} d\sigma(y) \right) d\rho - \frac{1}{\epsilon\pi} \int_0^{2\epsilon} \left( \int_{|y|=\rho} \log |y| d\sigma(y) \right) d\rho = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho} \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \right) d\rho - \frac{1}{\epsilon\pi} \int_0^{2\epsilon} \log |\rho| \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \right) d\rho = \\
&= \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \right) \text{ è l'area della superficie sferica, in questo caso è la} \\
&\text{lunghezza della circonferenza) :} \\
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho} 2\pi\rho d\rho - \frac{1}{\epsilon\pi} \int_0^{2\epsilon} \log |\rho| 2\pi\rho d\rho = \\
&= 2\epsilon - \frac{2}{\epsilon} \int_0^{2\epsilon} \log |\rho| \rho d\rho = \\
&= 2\epsilon - \frac{2}{\epsilon} \left( \left[ \frac{\rho^2}{2} \log |\rho| \right]_0^{2\epsilon} - \int_x^{2\epsilon} \frac{\rho^2}{2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) = \\
&= 2\epsilon - \frac{2}{\epsilon} \left( \frac{4\epsilon^2}{2} \log |2\epsilon| - \frac{1}{2} \int_0^{2\epsilon} \rho d\rho \right) = \\
&= 2\epsilon - \frac{2}{\epsilon} \left( 2\epsilon^2 \log |2\epsilon| - \frac{1}{2} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{2\epsilon} \right) = \\
&= 2\epsilon - \frac{2}{\epsilon} \left( 2\epsilon^2 \log |2\epsilon| - \frac{4\epsilon^2}{4} \right) = \\
&= 2\epsilon - 4\epsilon \log |2\epsilon| + 2\epsilon = \\
&= 4\epsilon(1 - \log |2\epsilon|).
\end{aligned}$$

Quindi,

$$|v(x) - D_i w_\epsilon(x)| \leq \sup |f| \begin{cases} \frac{2\epsilon n}{n-2} & \text{per } n \geq 3 \\ 4\epsilon(1 - \log |2\epsilon|) & \text{per } n = 2. \end{cases}$$

In definitiva,  $w_\epsilon$  converge uniformemente a  $w$  per  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $D_i w_\epsilon$  converge uniformemente a  $v$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Perciò  $w \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $D_i w(x) = v = \int_\Omega D_i \Gamma(x-y) f(y) dy$ .  $\square$

**Lemma 1.5.2.** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $f$  una funzione continua, limitata e localmente Hölderiana (con esponente  $\alpha \leq 1$ ) in  $\Omega$  e sia  $w$  definita in (1.24). Allora  $w \in C^2(\Omega)$ ,  $\Delta w = f$  in  $\Omega$  e per ogni  $x \in \Omega$ ,*

$$D_{ij}w(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)d\sigma(y), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.27)$$

dove  $\Omega_0$  è ogni dominio contenente  $\Omega$  per cui vale il Teorema della divergenza e  $f$  si estende con la funzione nulla fuori da  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Per la formula (1.26) si ha  $|D_i\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n}$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} D_{ij}\Gamma(x-y) &= (\text{usiamo la formula (1.25)}) \quad D_j \left( \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \right) = \\ &= \frac{1}{n\omega_n}(1-n)|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} + \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n} \frac{-(x_i - y_i) \frac{x_i - y_i}{|x-y|}}{|x-y|^2} = \\ &= \frac{1}{n\omega_n}(1-n)|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} + \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n} \frac{-(x_i - y_i)^2}{|x-y|^3} = \\ &= \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} - \frac{n}{n\omega_n}|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} - \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} = \\ &= \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} - \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} - \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} = \\ &= \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$|D_{ij}\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n}. \quad (1.28)$$

Inoltre, per ipotesi,  $f$  è localmente Hölderiana, perciò la funzione

$$u(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)d\sigma(y)$$

è ben definita.

Poniamo  $v = D_i w$  e per  $\epsilon > 0$  definiamo

$$v_\epsilon(x) = \int_{\Omega} D_i\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) f(y) dy, \quad v_\epsilon \in C^1(\Omega),$$

dove  $\eta$  è la funzione introdotta nel lemma precedente.

$$\begin{aligned}
D_j v_\epsilon(x) &= \int_{\bar{\Omega}} D_j \left\{ D_i \Gamma(x-y) \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right\} f(y) dy = \\
&= (\bar{\Omega} \subset \Omega_0 \text{ e } f \equiv 0 \text{ in } \Omega_0 \setminus \Omega) \\
&\int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i \Gamma(x-y) \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right\} (f(y) - f(x)) dy \\
&+ f(x) \int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_{x_i} \Gamma(x-y) \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right\} dy = \\
&= \int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i \Gamma(x-y) \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right\} (f(y) - f(x)) dy \\
&- f(x) \int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_{y_i} \Gamma(x-y) \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right\} dy = \\
&= (\text{se } x \in \Omega \text{ e } y \in \partial \Omega, \text{ allora } |x-y| \geq \delta, \text{ perciò } \frac{|x-y|}{\epsilon} \geq \frac{\delta}{\epsilon} \geq 2 \text{ se } \epsilon < \frac{\delta}{2}. \text{ Dunque} \\
&\eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) = 1) : \\
&\int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i \Gamma(x-y) \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right\} (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\Omega_0} D_j (D_i \Gamma(x-y)) dy = \\
&= (\text{Formula di integrazione per parti}) \\
&\int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i \Gamma(x-y) \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right\} (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial \Omega_0} D_i \Gamma(x-y) \nu_j(y) dy.
\end{aligned}$$

Sottraiamo:

$$\begin{aligned}
|u(x) - D_j v_\epsilon(x)| &= \left| \int_{\Omega_0} D_{ij} \Gamma(x-y) (f(y) - f(x)) dy \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega_0} D_j \left\{ D_i \Gamma(x-y) \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right\} (f(y) - f(x)) dy \right| = \\
&= \left| \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} D_j \left\{ \left[ 1 - \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right] D_i \Gamma(x-y) \right\} (f(y) - f(x)) dy \right| = \\
&= \left| \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} D_j \left\{ \left[ 1 - \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \right] D_i \Gamma(x-y) \right\} \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^\alpha} |x-y|^\alpha dy \right| \leq \\
&\leq (f \text{ è Hölderiana}) \\
&\underbrace{\sup \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^\alpha}}_{:= [f]_{\alpha;x}} \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} \left\{ \left| D_{ij} \Gamma(x-y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - D_j \eta \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right) D_i \Gamma(x-y) \right| \right\} |x-y|^\alpha dy \leq \\
&\leq [f]_{\alpha;x} \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} \left\{ |D_{ij} \Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon} |D_i \Gamma(x-y)| \right\} |x-y|^\alpha dy \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\text{per le formule (1.28) e (1.26)}) \\
&[f]_{\alpha;x} \int_{|x-y|\leq 2\epsilon} \left\{ \frac{1}{\omega_n} |x-y|^{-n} + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n\omega_n} |x-y|^{1-n} \right\} |x-y|^\alpha dy = \\
&= [f]_{\alpha;x} \left( \int_{B(x,2\epsilon)} \frac{1}{\omega_n} |x-y|^{-n} |x-y|^\alpha dy + \int_{B(x,2\epsilon)} \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n\omega_n} |x-y|^{1-n} |x-y|^\alpha dy \right) = \\
&= (\text{coordinate polari}) \quad [f]_{\alpha;x} \left[ \frac{1}{\omega_n} \int_x^{2\epsilon} \left( \int_{|x-y|=\rho} \frac{1}{|x-y|^n} |x-y|^\alpha d\sigma(y) \right) d\rho \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n\omega_n} \int_x^{2\epsilon} \left( \int_{|x-y|=\rho} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |x-y|^\alpha d\sigma(y) \right) d\rho \right] = \\
&= [f]_{\alpha;x} \left[ \frac{1}{\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \left( \int_{|y|=\rho} \frac{1}{|y|^n} |y|^\alpha d\sigma(y) \right) d\rho + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \left( \int_{|y|=\rho} \frac{1}{|y|^{n-1}} |y|^\alpha d\sigma(y) \right) d\rho \right] = \\
&= [f]_{\alpha;x} \left[ \frac{1}{\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho^n} \rho^\alpha \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \right) d\rho + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho^{n-1}} \rho^\alpha \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \right) d\rho \right] = \\
&= \left( \int_{|y|=\rho} d\sigma(y) \text{ è l'area della superficie sferica} \right) : \\
&[f]_{\alpha;x} \left[ \frac{1}{\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho^n} \rho^\alpha n\omega_n \rho^{n-1} d\rho + \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{n\omega_n} \int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\rho^{n-1}} \rho^\alpha n\omega_n \rho^{n-1} d\rho \right] = \\
&= [f]_{\alpha;x} \left[ \int_0^{2\epsilon} \rho^{\alpha-1} n d\rho + \frac{2}{\epsilon} \int_0^{2\epsilon} \rho^\alpha d\rho \right] = \\
&= [f]_{\alpha;x} \left( \left[ \frac{\rho^\alpha}{\alpha} \right]_0^{2\epsilon} n + \frac{2}{\epsilon} \left[ \frac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^{2\epsilon} \right) = \\
&= [f]_{\alpha;x} \left( \frac{(2\epsilon)^\alpha}{\alpha} n + \frac{2}{\epsilon} \frac{(2\epsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) = \\
&= [f]_{\alpha;x} \left( \frac{(2\epsilon)^\alpha}{\alpha} n + \frac{2}{\epsilon} \frac{(2\epsilon)^\alpha 2\epsilon}{\alpha+1} \right) = \\
&= [f]_{\alpha;x} \left( (2\epsilon)^\alpha \left( \frac{n}{\alpha} + \frac{4}{\alpha+1} \right) \right)
\end{aligned}$$

prendendo  $\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ .

Di conseguenza,  $D_j v_\epsilon$  converge ad  $u$  uniformemente per  $\epsilon \rightarrow 0$  su un compatto contenuto in  $\Omega$ . Inoltre, poichè  $v_\epsilon$  converge uniformemente a  $v = D_i w$  in  $\Omega$ , allora  $w \in C^2(\Omega)$  e

$$D_{ij} w = u = \int_{\Omega_0} D_{ij} \Gamma(x-y)(f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i \Gamma(x-y) \nu_j(y) d\sigma(y).$$

Se prendiamo  $\Omega_0 = B(x, R)$  con  $R$  sufficientemente grande e usiamo l'equazione

(1.27), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Delta w(x) &= \sum_{i=1}^n D_{ii}w(x) = \\
&= \int_{B(x,R)} \sum_{i=1}^n D_{ii}\Gamma(x-y)(f(y) - f(x)) dy - f(x) \sum_{i=1}^n \int_{\partial B(x,R)} D_i\Gamma(x-y)\nu_i(y) d\sigma(y) = \\
&= (\Delta\Gamma(x-y) = 0 \text{ per } x \neq y) - f(x) \sum_{i=1}^n \int_{\partial B(x,R)} D_i\Gamma(x-y)\nu_i(y) d\sigma(y) = \\
&= (\text{per la formula (1.25)}) - f(x) \sum_{i=1}^n \int_{\partial B(x,R)} \underbrace{\frac{1}{n\omega_n}}_{=R} \underbrace{|x-y|^{1-n}}_{=\nu_i(y)} \nu_i(y) d\sigma(y) = \\
&= f(x) \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \sum_{i=1}^n \int_{\partial B(x,R)} \nu_i(y)\nu_i(y) d\sigma(y) = \\
&= f(x) \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} n\omega_n R^{n-1} = f(x).
\end{aligned}$$

Dunque,  $\Delta w = f$  in  $\Omega$ . □

Poichè  $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$  e  $w \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ , allora la funzione  $\varphi - w|_{\partial\Omega}$  è continua su  $\partial\Omega$ . Inoltre abbiamo supposto che ogni punto di  $\partial\Omega$  sia  $\Delta$ -regolare. Perciò, per il Teorema 1.4.2, il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = \varphi - w|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

ha una soluzione classica. Se poniamo

$$u = v + w$$

si ha

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta w = f \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} + w|_{\partial\Omega} = \varphi - w|_{\partial\Omega} + w|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} .$$

In definitiva, la funzione  $u$  risolve il Problema di Dirichlet non omogeneo (1.23). In particolare, se  $\partial\Omega$  è Lipschitziana e  $f$  è Hölderiana in  $\Omega$ , il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

ha una, e una sola, soluzione per ogni funzione  $\varphi$  continua su  $\partial\Omega$ .

Nel prossimo capitolo verrà studiato il Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson dal punto di vista numerico. Tale problema sarà definito su domini con frontiera Lipschitziana, pertanto questo problema sarà risolvibile per ogni dato al bordo continuo.

# Capitolo 2

## Discretizzazione del Problema di Poisson

In questo capitolo verrà analizzata l'equazione matriciale che trae origine dalla discretizzazione (mediante il metodo delle differenze finite) del problema di Poisson bidimensionale. In particolare verrà esaminata l'equazione di Poisson

$$-u_{xx} - u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.1)$$

dove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  è un dominio sufficientemente regolare da assicurare la risolubilità del problema. Inizialmente si assume il dominio quadrato  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . Poichè, per la nostra trattazione, il termine noto  $f$  non riveste un ruolo importante, si considera il caso  $f$  uguale a costante, in particolare  $f(x, y) = 1$  per ogni  $(x, y) \in \Omega$ . Per determinare la soluzione di tale equazione è necessario assegnare le condizioni al bordo. In questo capitolo vengono fissate condizioni al bordo di Dirichlet omogenee:

$$\begin{cases} -u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = 1 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, 1] \\ u(x, 1) = 0 & x \in [0, 1] \end{cases} . \quad (2.2)$$

Un passaggio fondamentale per trasformare il problema continuo in un modello discreto è la discretizzazione del dominio. Nel piano, ogni punto è individuato dalla coppia di indici  $(i, j)$  con  $i, j = 1, \dots, N+1$ . Pertanto il dominio  $\Omega$  viene discretizzato con la griglia  $\Omega_h$  formata dai nodi equispaziati  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, N+1$ .

Dunque, il termine noto  $f(x, y) = 1$  calcolato nei nodi diventa  $f = f(x_i, y_j)$ . Facendo variare  $i, j$  si ottiene la matrice  $F_{i,j} = f(x_i, y_j)$ .

Allo stesso modo, la soluzione numerica del problema di Poisson calcolata nei nodi è  $u = u(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, N+1$ ; facendo variare gli indici  $i, j$  si ottiene la matrice  $U_{i,j} = u(x_i, y_j)$ . Poichè i valori della soluzione sul bordo del dominio sono noti, occorre determinare la soluzione numerica del problema di Poisson solo nei nodi interni  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 2, \dots, N$ . A tal fine, è necessario scrivere l'equazione di Poisson in ognuno di essi utilizzando le differenze finite. Le differenze finite bidimensionali sono definite in maniera analoga a quelle per una sola variabile; in due dimensioni varia solo l'indice relativo alla variabile rispetto alla quale si deve

effettuare la derivata e si mantiene fisso l'altro indice.

In particolare, per discretizzare la derivata  $u_{xx}$  si fa variare l'indice della riga  $i$ -esima e si tiene fisso l'indice della colonna  $j$ -esima:

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2}, \quad i = 2, \dots, N, \quad (2.3)$$

dove  $h$  è la dimensione della griglia.

Mettendo insieme questa relazione per tutte le righe e per tutte le colonne si ottiene:

$$-u_{xx}(x_i, y_j) = -\frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & & & & & \\ * & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & & 1 & -2 & * & \\ & & & & * & * & \end{bmatrix}}_{=:T} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{i-1,j} \\ \\ U_{i,j} \\ \\ U_{i+1,j} \end{bmatrix}}_{=:U} = TU \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)},$$

dove  $T$ , eccetto per i valori “\*”, è una matrice tridiagonale simmetrica perchè ogni equazione (2.3) coinvolge tre incognite. I valori indicati con il simbolo “\*” sono associati ai valori al bordo di  $U$  e verranno calcolati nel paragrafo 2.2.

Allo stesso modo, per discretizzare la derivata  $u_{yy}$  si fa variare l'indice della colonna  $j$ -esima e si tiene fisso l'indice della riga  $i$ -esima:

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2}, \quad j = 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

Raccogliendo questa relazione per tutte le righe e per tutte le colonne si ottiene:

$$-u_{yy}(x_i, y_j) = -\frac{1}{h^2} [U_{i,j-1}, \quad U_{i,j}, \quad U_{i,j+1}] \begin{bmatrix} * & * & & & & & \\ * & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & & 1 & -2 & * & \\ & & & & * & * & \end{bmatrix} = UT \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)},$$

in cui la matrice  $T$  viene moltiplicata a destra della matrice incognita.

Si osserva che i punti coinvolti nella discretizzazione delle derivate  $u_{xx}(x_i, y_j)$  e  $u_{yy}(x_i, y_j)$  sono  $(x_i, y_j)$  (in Figura 2.1 è rappresentato con un punto nero),  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  e  $(x_i, y_{j+1})$  (in Figura 2.1 sono rappresentati con un punto bianco). Perciò le derivate seconde calcolate nel punto  $(x_i, y_j)$  vengono determinate dalla soluzione calcolata nel punto  $(x_i, y_j)$  e dalla soluzione calcolata nei quattro punti vicini (Figura 2.2).

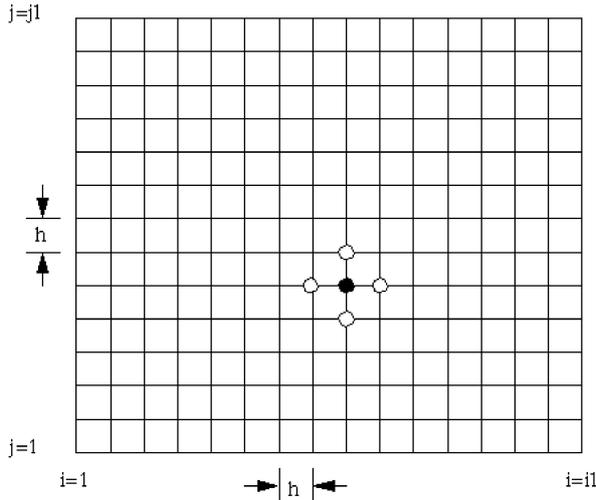


Figura 2.1

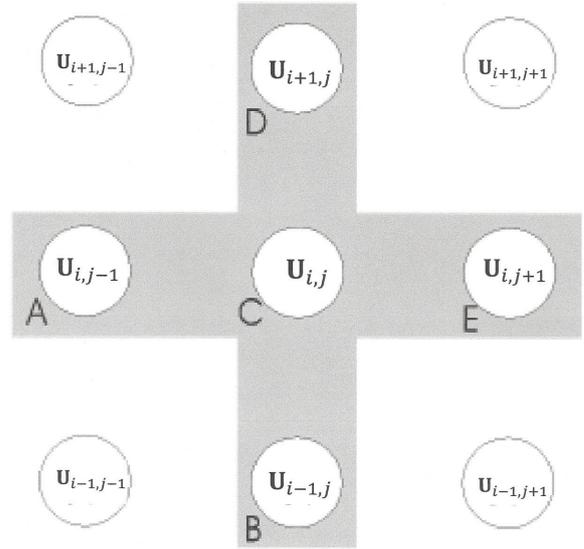


Figura 2.2

In definitiva, discretizzando l'equazione di Poisson (2.1) mediante le approssimazioni (2.3) e (2.4), si ottiene l'equazione matriciale

$$\mathbf{T}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{T} = \mathbf{F},$$

dove la lettera in grassetto denota la matrice soluzione.

Nel paragrafo 2.2 verrà spiegato come completare gli angoli della matrice  $\mathbf{T}$ . Con l'aggiunta di questi valori, è necessario distinguere la discretizzazione delle derivate seconde lungo la direzione  $x$  e lungo la direzione  $y$ . Pertanto la matrice  $\mathbf{T}$  darà origine alle matrici  $\mathbf{T}_1$  e  $\mathbf{T}_2$ , una trasposta dell'altra. In particolare,  $\mathbf{T}_1$  moltiplicherà  $\mathbf{U}$  a sinistra e  $\mathbf{T}_2$  la moltiplicherà a destra. Inoltre, imponendo esplicitamente le condizioni al bordo, la matrice  $\mathbf{U}$  conterrà anche i valori al bordo e non solo i valori nei nodi interni.

## 2.1 Coordinate polari

La procedura utilizzata per discretizzare l'equazione di Poisson (2.1), definita su un dominio quadrato, si può ripetere anche per le equazioni alle derivate parziali che sono definite su una *regione fisica*. Il questo capitolo si assume la regione fisica *connessa*, cioè, intuitivamente, formata da un solo "pezzo". Inoltre, si assume che la regione sia *semplicemente connessa*; nel piano, una regione connessa è semplicemente connessa se il suo complementare è connesso.

Per potersi ricondurre al caso precedente, è utile trasformare la regione fisica in un dominio più semplice, generalmente rettangolare, che dipende dai parametri

della regione fisica. Si osserva che anche il dominio rettangolare è semplicemente connesso. In generale, una trasformazione è un sistema di coordinate che ha la regione fisica come dominio ed è richiesto che questa trasformazione sia regolare. Poichè la regione fisica è assunta come dominio della trasformazione e la regione si è supposta semplicemente connessa, allora la regione fisica deve essere la chiusura di un aperto semplicemente connesso.

Grazie a questa trasformazione vengono eliminate le complicazioni dovute alla forma della regione fisica. Dunque, è più semplice risolvere il problema sul dominio rettangolare piuttosto che sulla regione fisica e solo successivamente si riporterà la soluzione sullo spazio fisico. Pertanto è richiesto che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione che porta lo spazio fisico nel dominio rettangolare sia diverso da zero, così la trasformazione ha un'inversa e si crea una corrispondenza dal dominio rettangolare allo spazio fisico.

In particolare, si consideri il problema (2.2) definito sulla porzione di corona circolare  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[ \}$ . Si osserva che  $\Omega$  è un dominio semplicemente connesso. Per eliminare le complicazioni dovute alla forma di  $\Omega$ , la sua definizione suggerisce di utilizzare le coordinate polari

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.5)$$

dove  $r \geq 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi[$ . In questo modo, il dominio  $\Omega$  viene trasformato nel dominio rettangolare  $\tilde{\Omega} = [r_0, r_1] \times [0, \frac{\pi}{4}]$  con  $0 \leq r_0 < r_1$ .

Di seguito viene riportato il procedimento per trasformare l'equazione di Poisson (2.1) in coordinate polari.

Sia  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , allora:

$$r_x = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}.$$

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2) - x^2}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)} = \\ &= \frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} = \frac{y^2}{r^3}, \end{aligned}$$

$$r_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{x^2}{r^3}.$$

Sia ora  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ , allora:

$$\theta_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left( \frac{-y}{x^2} \right) = \frac{-y}{\frac{x^2 + y^2}{x^2} x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{r^2},$$

$$\theta_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2},$$

$$\theta_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{r^4},$$

$$\theta_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{-x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{r^4}.$$

Poichè  $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta)$ , allora:

$$u_x = \tilde{u}_r r_x + \tilde{u}_\theta \theta_x,$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (\tilde{u}_r)_x r_x + \tilde{u}_r r_{xx} + (\tilde{u}_\theta)_x \theta_x + \tilde{u}_\theta \theta_{xx} = \\ &= ((\tilde{u}_r)_r r_x + (\tilde{u}_r)_\theta \theta_x) r_x + \tilde{u}_r r_{xx} + ((\tilde{u}_\theta)_r r_x + (\tilde{u}_\theta)_\theta \theta_x) \theta_x + \tilde{u}_\theta \theta_{xx} = \\ &= \tilde{u}_{rr} (r_x)^2 + \tilde{u}_{r\theta} \theta_x r_x + \tilde{u}_r r_{xx} + \tilde{u}_{\theta r} r_x \theta_x + \tilde{u}_{\theta\theta} (\theta_x)^2 + \tilde{u}_\theta \theta_{xx} = \\ &= \tilde{u}_{rr} (r_x)^2 + 2\tilde{u}_{r\theta} r_x \theta_x + \tilde{u}_r r_{xx} + \tilde{u}_{\theta\theta} (\theta_x)^2 + \tilde{u}_\theta \theta_{xx}. \end{aligned}$$

$$u_y = \tilde{u}_r r_y + \tilde{u}_\theta \theta_y,$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= (\tilde{u}_r)_y r_y + \tilde{u}_r r_{yy} + (\tilde{u}_\theta)_y \theta_y + \tilde{u}_\theta \theta_{yy} = \\ &= ((\tilde{u}_r)_r r_y + (\tilde{u}_r)_\theta \theta_y) r_y + \tilde{u}_r r_{yy} + ((\tilde{u}_\theta)_r r_y + (\tilde{u}_\theta)_\theta \theta_y) \theta_y + \tilde{u}_\theta \theta_{yy} = \\ &= \tilde{u}_{rr} (r_y)^2 + \tilde{u}_{r\theta} \theta_y r_y + \tilde{u}_r r_{yy} + \tilde{u}_{\theta r} r_y \theta_y + \tilde{u}_{\theta\theta} (\theta_y)^2 + \tilde{u}_\theta \theta_{yy} = \\ &= \tilde{u}_{rr} (r_y)^2 + 2\tilde{u}_{r\theta} r_y \theta_y + \tilde{u}_r r_{yy} + \tilde{u}_{\theta\theta} (\theta_y)^2 + \tilde{u}_\theta \theta_{yy}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= \tilde{u}_{rr} (r_x)^2 + 2\tilde{u}_{r\theta} r_x \theta_x + \tilde{u}_r r_{xx} + \tilde{u}_{\theta\theta} (\theta_x)^2 + \tilde{u}_\theta \theta_{xx} + \\ &\quad + \tilde{u}_{rr} (r_y)^2 + 2\tilde{u}_{r\theta} r_y \theta_y + \tilde{u}_r r_{yy} + \tilde{u}_{\theta\theta} (\theta_y)^2 + \tilde{u}_\theta \theta_{yy} = \\ &= \tilde{u}_{rr} ((r_x)^2 + (r_y)^2) + 2\tilde{u}_{r\theta} (r_x \theta_x + r_y \theta_y) + \tilde{u}_r (r_{xx} + r_{yy}) + \\ &\quad + \tilde{u}_{\theta\theta} ((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2) + \tilde{u}_\theta (\theta_{xx} + \theta_{yy}). \end{aligned}$$

Infine calcoliamo i coefficienti  $(r_x)^2 + (r_y)^2$ ,  $r_x \theta_x + r_y \theta_y$ ,  $r_{xx} + r_{yy}$ ,  $(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2$  e  $\theta_{xx} + \theta_{yy}$ :

$$(r_x)^2 + (r_y)^2 = \left( \frac{x}{r} \right)^2 + \left( \frac{y}{r} \right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1,$$

$$r_x \theta_x + r_y \theta_y = \frac{x}{r} \left( \frac{-y}{r^2} \right) + \frac{y}{r} \frac{x}{r^2} = 0,$$

$$r_{xx} + r_{yy} = \frac{y^2}{r^3} + \frac{x^2}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r},$$

$$(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 = \left(\frac{-y}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{x}{r^2}\right)^2 = 1,$$

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = \frac{2xy}{r^4} - \frac{2xy}{r^4} = 0.$$

Dunque  $u_{xx} + u_{yy} = \tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r + \tilde{u}_{\theta\theta}$ .

In definitiva, in coordinate polari, il problema di Poisson (2.2) diventa

$$\begin{cases} -\tilde{u}_{rr} - \frac{1}{r}\tilde{u}_r - \tilde{u}_{\theta\theta} = \tilde{f}(r, \theta) & (r, \theta) \in \tilde{\Omega} \\ \tilde{u}(r, 0) = 0 & r \in [r_0, r_1] \\ \tilde{u}(r, \frac{\pi}{4}) = 0 & r \in [r_0, r_1] \\ \tilde{u}(r_0, \theta) = 0 & \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \tilde{u}(r_1, \theta) = 0 & \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}, \quad (2.6)$$

dove  $\tilde{f}(r, \theta) = 1$  ed il problema è definito sul dominio rettangolare  $\tilde{\Omega}$ .

L'equazione  $-\tilde{u}_{rr} - \frac{1}{r}\tilde{u}_r - \tilde{u}_{\theta\theta} = \tilde{f}(r, \theta)$  è un'equazione di convezione-diffusione in cui  $-\frac{1}{r}$  è il coefficiente convettivo.

Analogamente al problema di Poisson definito sul dominio quadrato, per poter trasformare il problema continuo (2.6) in un problema discreto, occorre distribuire uniformemente i nodi  $(r_i, \theta_j)$ , con  $i, j = 1, \dots, N + 1$ , sul dominio  $\tilde{\Omega}$ . In questo modo,  $\tilde{\Omega}$  viene discretizzato con una griglia rettangolare  $\tilde{\Omega}_h$ .

Anche in questo caso, è sufficiente calcolare la soluzione dell'equazione (2.6) nei nodi interni. La derivazione fornirà un'equazione matriciale simile alla precedente. Infatti, le derivate  $\tilde{u}_{rr}$  e  $\tilde{u}_{\theta\theta}$  si approssimano in maniera analoga a  $u_{xx}$  e  $u_{yy}$  in (2.3) e (2.4), cioè

$$\begin{aligned} -\tilde{u}_{rr}(r_i, \theta_j) &= T\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}, \\ -\tilde{u}_{\theta\theta}(r_i, \theta_j) &= \mathbf{U}T \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}. \end{aligned}$$

Però, a differenza dell'equazione di Poisson, nell'equazione di convezione-diffusione è presente anche la derivata prima. Per mantenere la stessa velocità di convergenza delle formule utilizzate per approssimare le derivate seconde  $\tilde{u}_{rr}$  e  $\tilde{u}_{\theta\theta}$ , si discretizza la derivata prima  $\tilde{u}_r$  con le differenze finite centrali, variando l'indice della riga  $i$ -esima e tenendo fisso l'indice della colonna  $j$ -esima:

$$\tilde{u}_r(r_i, \theta_j) \approx \frac{-U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{2h}, \quad i = 2, \dots, N.$$

Mettendo insieme questa relazione per tutte le righe e per tutte le colonne si



## 2.2 Condizioni al bordo

Per poter completare il problema algebrico, è necessario imporre le condizioni al bordo; questo corrisponde a trovare la prima e l'ultima riga delle matrici  $T$  e  $B$  e la prima e l'ultima colonna delle stesse matrici. Completando gli angoli di queste matrici si generano le matrici  $T_1$ ,  $T_2$  e  $B_1$  dove  $T_2 = T_1^T$ . Dunque, dopo aver imposto le condizioni al bordo, l'equazione matriciale associata al problema (2.6) assumerà la forma

$$T_1 \mathbf{U} + (\Phi_1 B_1) \mathbf{U} + \mathbf{U} T_2 = \tilde{F}. \quad (2.8)$$

Tale equazione è ben definita per ogni  $(r_i, \theta_j) \in \tilde{\Omega}_h, i, j = 1, \dots, N+1$ .

Per poter assegnare i valori al bordo, è utile precisare che la prima e l'ultima colonna di  $\mathbf{U}$ , rispettivamente  $\mathbf{U}e_1$  ed  $\mathbf{U}e_{N+1}$ , corrispondono ai bordi  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Invece la prima e l'ultima riga di  $\mathbf{U}$  prendono i valori ai bordi  $r = r_0$  e  $r = r_1$ . Poichè le condizioni al bordo del problema (2.6) sono  $\tilde{u}(r, 0) = 0$  e  $\tilde{u}(r, \frac{\pi}{4}) = 0$ , la matrice  $\mathbf{U}$  è definita nel modo seguente:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} & 0 \\ 0 & u_{2,2} & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & u_{N+1,2} & \cdots & u_{N+1,N} & 0 \end{bmatrix}.$$

I valori di  $\tilde{F}$  che corrispondono a  $i, j \in \{1, N+1\}$  contengono i contributi dei valori al bordo di  $\mathbf{U}$ . Perciò i valori mancanti in  $\tilde{F}$  si definiscono moltiplicando entrambi i membri dell'equazione matriciale (2.8) per i vettori  $e_1$  ed  $e_{N+1}$ , che corrispondono rispettivamente alla prima e alla  $(N+1)$ -esima colonna della matrice identità. Di conseguenza vengono determinati anche gli angoli delle matrici  $T$  e  $B$ . In particolare, per trovare la prima colonna di  $\tilde{F}$  è sufficiente moltiplicare entrambi i membri dell'equazione (2.8) per il vettore colonna  $e_1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{F}e_1 &= T_1 \mathbf{U}e_1 + (\Phi_1 B_1) \mathbf{U}e_1 + \mathbf{U} T_2 e_1 = \\ &= \frac{-1}{h^2} \begin{bmatrix} * & * & & & \\ * & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N+1,1} \end{bmatrix}}_{=0} + \Phi_1 \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} * & * & 1 & & \\ * & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 0 & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N+1,1} \end{bmatrix}}_{=0} - \frac{1}{h^2} U \begin{bmatrix} * & * & 1 & & \\ * & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{h^2} U \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} & 0 \\ 0 & u_{2,2} & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & u_{N+1,2} & \cdots & u_{N+1,N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} & 0 \\ 0 & u_{2,2} & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & u_{N+1,2} & \cdots & u_{N+1,N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } T_1 = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ * & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix}.$$

Analogamente, l'ultima colonna di  $\tilde{F}$  viene determinata moltiplicando entrambi i membri di (2.8) per il vettore colonna  $e_{N+1}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{F}e_{N+1} &= T_1 \mathbf{U}e_{N+1} + (\Phi_1 B_1) \mathbf{U}e_{N+1} + \mathbf{U}T_2 e_{N+1} = \\ &= \frac{-1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ * & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & * & * & * \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{1,N+1} \\ U_{2,N+1} \\ \vdots \\ U_{N+1,N+1} \end{bmatrix}}_{=0} + \Phi_1 \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} * & * & & & \\ * & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 0 & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{1,N+1} \\ U_{2,N+1} \\ \vdots \\ U_{N+1,N+1} \end{bmatrix}}_{=0} - \frac{1}{h^2} \mathbf{U} \begin{bmatrix} -1 & * & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{h^2} \mathbf{U} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} & 0 \\ 0 & u_{2,2} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & u_{N+1,2} & \cdots & u_{N+1,N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} & 0 \\ 0 & u_{2,2} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & u_{N+1,2} & \cdots & u_{N+1,N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } T_1 = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ * & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Invece, per trovare la prima riga di  $\tilde{F}$  si devono moltiplicare entrambi i membri di

(2.8) per il vettore riga  $e_1^T$ :

$$\begin{aligned}
e_1^T \tilde{F} &= e_1^T T_1 \mathbf{U} + \underbrace{e_1^T \Phi_1 B_1}_{=0} \mathbf{U} + e_1^T \mathbf{U} T_2 = \\
&= [10 \cdots 0] \left( -\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ * & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} U + [10 \cdots 0] U \left( -\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & * & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & & * & -1 \end{bmatrix} \\
&= [10 \cdots 0] \left( -\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ * & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} U - \frac{1}{h^2} [0 u_{1,2} \cdots u_{1,N} 0] \begin{bmatrix} -1 & * & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & & * & -1 \end{bmatrix} \\
&= [10 \cdots 0] \left( -\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ * & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} U - \frac{1}{h^2} [0 u_{1,2} \cdots u_{1,N} 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & & * & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{Quindi } T_1 = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Infine, moltiplicando entrambi i membri di (2.8) per il vettore riga  $e_{N+1}^T$ , si ottiene l'ultima riga di  $\tilde{F}$ :

$$\begin{aligned}
e_{N+1}^T \tilde{F} &= e_{N+1}^T T_1 \mathbf{U} + \underbrace{e_{N+1}^T \Phi_1 B_1}_{=0} \mathbf{U} + e_{N+1}^T \mathbf{U} T_2 = \\
&= [0 \cdots 0 1] \left( -\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} U + [0 \cdots 0 1] U \left( -\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & & * & -1 \end{bmatrix} \\
&= [0 \cdots 0 1] \left( -\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} U - \frac{1}{h^2} [0 u_{N+1,2} \cdots u_{N+1,N} 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & & * & -1 \end{bmatrix} \\
&= [0 \cdots 0 1] \left( -\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & * \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} U - \frac{1}{h^2} [0 u_{N+1,2} \cdots u_{N+1,N} 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_1 = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inoltre,

$$B_1 = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In definitiva, discretizzando il problema di convezione-diffusione (2.6) si ottiene l'equazione matriciale  $T_1\mathbf{U} + (\Phi_1 B_1)\mathbf{U} + \mathbf{U}T_2 = \tilde{F}$ , cioè

$$(T_1 + \Phi_1 B_1)\mathbf{U} + \mathbf{U}T_2 = \tilde{F}. \quad (2.9)$$

Inoltre, le condizioni al bordo sono:

$$\tilde{F}e_1 = T_1\mathbf{U}e_1 + (\Phi_1 B_1)\mathbf{U}e_1 + \mathbf{U}T_2e_1 = T_1\mathbf{U}e_1 + (\Phi_1 B_1)\mathbf{U}e_1 + \frac{1}{h^2}\mathbf{U}e_1,$$

in maniera analoga si definisce  $\tilde{F}e_{N+1}$ ;

$$e_1^T \tilde{F} = e_1^T T_1 \mathbf{U} + e_1^T (\Phi_1 B_1) \mathbf{U} + e_1^T \mathbf{U} T_2 = \frac{1}{h^2} e_1^T \mathbf{U} + e_1^T \mathbf{U} T_2,$$

dove  $e_1^T (\Phi_1 B_1) = 0$  perchè la prima riga di  $B_1$  è formata da tutti 0.

In maniera analoga si definisce  $e_{N+1}^T \tilde{F}$ .

Per una generalizzazione del problema di convezione-diffusione (2.6) e, di conseguenza, dell'equazione matriciale corrispondente e delle sue condizioni al bordo, si veda [4], paragrafi 2,3.

## 2.3 Equazione di Sylvester di piccole dimensioni

Un'Equazione di Sylvester è un'equazione lineare matriciale nella forma

$$A\mathbf{X} + \mathbf{X}B = C \quad (2.10)$$

dove  $A$  e  $B$  sono matrici quadrate reali o complesse e la matrice  $C$  ha dimensioni conformi. Tale equazione prende il nome da J. J. Sylvester perchè la sua prima

apparizione è solitamente associata al lavoro di questo matematico. Se  $B = A^*$ , dove  $A^*$  è la trasposta coniugata di  $A$ , l'equazione (2.10) è chiamata *Equazione di Lyapunov* in onore di A. M. Lyapunov.

Pertanto, l'equazione (2.9) è un'equazione di Sylvester perchè è formata dalle matrici reali quadrate  $(T_1 + \Phi_1 B_1)$ ,  $T_2$  e  $\tilde{F}$ .

Un metodo efficiente per risolvere numericamente l'equazione (2.10) di piccole e medie dimensioni fu introdotto nel 1972 da Bartels e Stewart. Per prima cosa si calcola la decomposizione di Schur delle matrici  $A$  e  $B$  dei coefficienti. Poi si trasforma l'equazione (2.10) in un'equazione equivalente che usa la struttura quasi-triangolare inferiore/superiore delle matrici di Schur; in questo modo, questa nuova equazione si risolve esplicitamente elemento per elemento. Infine si calcola la matrice soluzione  $\mathbf{X}$ .

Di seguito è riportato l'algoritmo nel caso in cui  $A$  e  $B$  sono matrici complesse:

### Algoritmo

1. Calcolare le forme di Schur  $A^* = URU^*$  e  $B = VSV^*$  dove  $R, S$  sono matrici triangolari superiori.
2. Risolvere in  $\mathbf{Y}$  l'equazione  $R^*\mathbf{Y} + \mathbf{Y}S = U^*CV$ .
3. Calcolare  $\mathbf{X} = U\mathbf{Y}V^*$ .

La forma di Schur nel primo punto è ottenuta tramite l'iterazione QR, invece il terzo passo è un semplice prodotto. Spieghiamo ora come risolvere la nuova equazione di Sylvester nel secondo passo. Poichè  $R^*$  è una matrice triangolare inferiore e  $S$  è una matrice triangolare superiore, si ottiene subito l'elemento (1,1) della matrice  $\mathbf{Y}$ . Da questo elemento si ottengono tutti gli altri elementi della prima riga di  $\mathbf{Y}$  e con un ragionamento simile si ottengono tutte le altre righe.

Se  $A$  e  $B$  sono reali, le matrici  $R$  e  $S$  sono quasi-triangolari, cioè le diagonali hanno blocchi  $2 \times 2$  e  $1 \times 1$  che corrispondono rispettivamente agli autovalori complessi e all'autovalore reale. Finchè i blocchi diagonali hanno dimensioni conformi, si può utilizzare lo stesso procedimento del caso precedente per calcolare gli elementi di  $\mathbf{Y}$ . Se le dimensioni non sono conformi, si deve risolvere una sequenza di piccoli sistemi lineari traslati.

Il principale costo computazionale è dovuto al calcolo delle forme di Schur nel primo passo. Infatti, per una matrice di dimensione  $n$ , il calcolo della forma di Schur costa almeno  $10n^3$  operazioni floating point. Per limitare i costi, l'algoritmo di Bartels e Stewart si usa solo se  $A$  o  $B$  è già in forma di Schur o in forma di Hessenberg superiore.

Se invece le matrici  $A$  e  $B$  hanno una forma generica, si usa il metodo proposto da Golub, Nash e Van Loan nel 1979 perchè è considerevolmente più veloce, soprattutto se la dimensione di una delle due matrici è significativamente più piccola della dimensione dell'altra. Se si suppone, per esempio, che  $B$  abbia dimensione  $m$

ed  $A$  abbia dimensione  $n$  con  $m \gg n$ , quest'ultimo metodo sostituisce la decomposizione di Schur della matrice più larga  $B$  con la decomposizione di Hessenberg di  $B$  perchè così il costo computazionale della decomposizione di Hessenberg si riduce a  $\frac{5}{3}m^3$ .

Ulteriori dettagli si possono trovare in [5], paragrafo 4.2.

Nell'equazione (2.9), le matrici  $(T_1 + \Phi_1 B_1)$  e  $T_2$  hanno la stessa dimensione  $N + 1$  e sono tridiagonali, cioè sono un caso particolare della forma Hessenberg superiore. Allora, per risolvere l'equazione (2.9) viene usato l'algoritmo di Bartels e Stewart.

In Matlab, cioè nel linguaggio che verrà utilizzato per risolvere l'equazione matriciale (2.9) e le equazioni che si otterranno nel paragrafo 2.5, è presente la funzione `lyap`. Nonostante il nome "lyap" faccia pensare che questa funzione risolva solo le equazioni di Lyapunov, essa risolve anche le equazioni di Sylvester. Infatti la funzione `lyap` trova la soluzione dell'equazione  $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$  in cui non è necessario che  $B$  sia la trasposta coniugata di  $A$ .

## 2.4 Forma di Kronecker associata a

$$(T_1 + \Phi_1 B_1)\mathbf{U} + \mathbf{U}T_2 = \tilde{F}$$

Un'altra strategia che può essere utilizzata per risolvere il problema di convezione-diffusione (2.6) è quella che deriva dall'ordinamento delle incognite  $U_{i,j}$  per riga o per colonna mediante l'ordine lessicografico. Ad esempio, l'operatore `vec` impila le colonne di una matrice  $X = [x_1, \dots, x_m] \in \mathbb{C}^{n \times m}$  una sotto l'altra, cioè

$$\text{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nm \times 1}.$$

Pertanto, utilizzando l'operatore `vec`, la matrice incognita  $\mathbf{U}$  diventa il vettore colonna  $\mathbf{u} = \text{vec}(\mathbf{U})$ .

Nel paragrafo 2.1 è stato spiegato il motivo per cui, nella discretizzazione delle derivate  $-\tilde{u}_{rr}(r_i, \theta_j)$ ,  $-\tilde{u}_{\theta\theta}(r_i, \theta_j)$  e  $\tilde{u}_r(r_i, \theta_j)$ , compaiono cinque incognite:  $U_{i-1,j}$ ,  $U_{i,j}$ ,  $U_{i+1,j}$ ,  $U_{i,j-1}$  e  $U_{i,j+1}$ . A causa dell'ordinamento utilizzato, nel vettore incognito  $\mathbf{u}$  ci sono tre valori vicini ( $U_{i-1,j}$ ,  $U_{i,j}$  e  $U_{i+1,j}$ ) e gli altri due valori sono più distanti. Le relazioni che legano le incognite  $U_{i,j}$  formano un sistema lineare la cui struttura dipende dal modo in cui sono state ordinate tali incognite:

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \tilde{f}. \quad (2.11)$$

Dunque la matrice dei coefficienti  $\mathcal{A}$  ha una struttura tridiagonale a blocchi in cui ci sono tre diagonali vicine, che corrispondono alle incognite  $U_{i-1,j}$ ,  $U_{i,j}$  e  $U_{i+1,j}$ , e due diagonali separate. Il termine noto  $\tilde{f}$  è ottenuto ordinando gli elementi  $\tilde{F}_{i,j}$

con l'operatore  $\text{vec}$ .

Il sistema lineare (2.11) ammette una soluzione per ogni  $\tilde{f}$ . La soluzione è unica se e solo se la matrice  $\mathcal{A}$  è non singolare.

L'approccio sopra descritto è equivalente a trasformare l'equazione (2.9) in un sistema lineare usando il prodotto di Kronecker. Dunque, utilizzando il prodotto di Kronecker, i problemi (2.11) e (2.9) sono matematicamente equivalenti. Questo segue dalla definizione di prodotto di Kronecker.

**Definizione 2.1 (prodotto di Kronecker).** Date le matrici  $A \in \mathbb{C}^{n_A \times m_A}$ ,  $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n_A, j=1,\dots,m_A}$  e  $B \in \mathbb{C}^{n_B \times m_B}$ , il prodotto di Kronecker di  $A$  e  $B$  è la matrice ottenuta moltiplicando  $B$  per ogni elemento di  $A$ , cioè

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,m_A}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,m_A}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n_A,1}B & a_{n_A,2}B & \cdots & a_{n_A,m_A}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_A n_B \times m_A m_B}.$$

Se si pone  $A = T_1 + \Phi_1 B_1$ , il prodotto di Kronecker trasforma l'equazione matriciale (2.9), cioè  $A\mathbf{U} + \mathbf{U}T_2 = \tilde{F}$ , nel sistema lineare standard

$$(I_m \otimes A + T_2^T \otimes I_n)\mathbf{u} = \tilde{f}, \quad (2.12)$$

dove  $m = \text{size}(T_2)$ ,  $n = \text{size}(A)$ ,  $\mathbf{u} = \text{vec}(\mathbf{U})$ ,  $\tilde{f} = \text{vec}(\tilde{F})$  e la matrice dei coefficienti

$$\mathcal{A} = I_m \otimes A + T_2^T \otimes I_n$$

è tridiagonale a blocchi. Pertanto il sistema lineare (2.12) coincide con il sistema lineare (2.11) ottenuto ordinando le incognite con l'ordine lessicografico.

La risoluzione del sistema lineare (2.12) è l'approccio comunemente usato in letteratura con la discretizzazione mediante differenze finite.

## 2.5 Nuove trasformazioni

Nel paragrafo 2.1, la porzione di corona circolare (regione fisica) è definita dai parametri  $r, \theta$ . Le coordinate polari hanno consentito di passare dalla porzione di corona circolare al rettangolo definito dai medesimi parametri  $r, \theta$ . Inoltre, mediante una traslazione dei parametri della trasformazione, è possibile trasformare qualsiasi dominio rettangolare nel quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  (*spazio logico*) in modo tale che il bordo del quadrato corrisponda al bordo del dominio fisico. Si osserva che anche lo spazio logico è semplicemente connesso. Grazie a questa traslazione, le trasformazioni sono definite sullo stesso dominio adimensionale. Perciò il dominio non dipende più dai parametri della regione fisica e, in questo modo, si riesce ad

automatizzare la procedura di costruzione del dominio di qualsiasi trasformazione. Dunque, anche in questo caso, è più semplice risolvere il problema sullo spazio logico piuttosto che sul dominio fisico e solo successivamente si riporterà la soluzione sul dominio fisico. Pertanto è richiesto che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione che porta il dominio fisico nello spazio logico sia diverso da zero, così la trasformazione ha un'inversa e si crea una corrispondenza dallo spazio logico al dominio fisico.

La trasformazione dallo spazio logico al dominio fisico ha due nuovi parametri: la dimensione  $k$  dell'oggetto e la dimensione  $n$  del dominio fisico. Dunque la trasformazione è definita in questo modo:

$$X_k^n : \mathcal{U}_k \rightarrow \Omega_k^n \quad (2.13)$$

dove  $0 < n \leq 2$ ,  $0 < k \leq n$  e  $\Omega_k^n$  è semplicemente connesso. Lo spazio logico è scelto come segue:  $\mathcal{U}_1$  è l'intervallo unitario in  $\mathbb{R}$  e  $\mathcal{U}_2$  è il quadrato unitario in  $\mathbb{R}^2$ . Inoltre, le variabili  $\xi, \eta$  sono le coordinate nello spazio logico e le variabili  $x, y$  sono le coordinate nel dominio fisico.

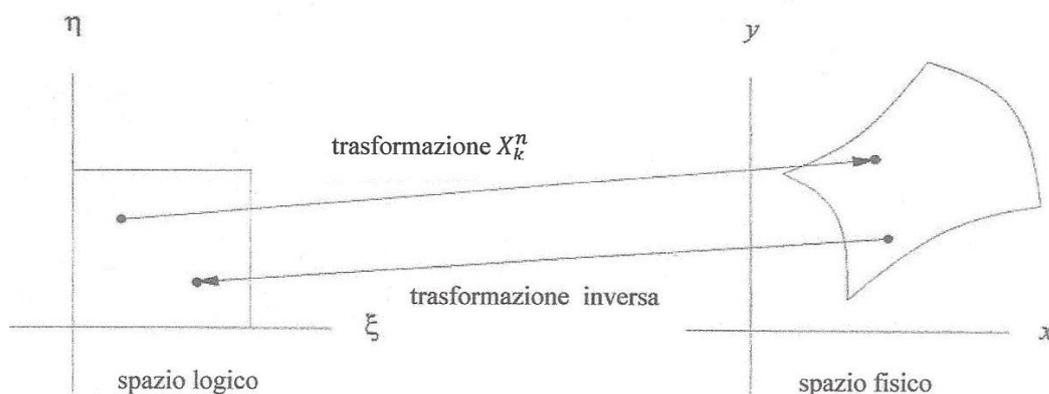


Figura 2.3

La mappa  $X_k^n$  trasforma una griglia uniforme nello spazio logico in una griglia nello spazio fisico e la griglia nel dominio fisico dipende dalla parametrizzazione della mappa: differenti parametrizzazioni producono differenti griglie. La trasformazione utilizzata per generare la griglia porta il bordo  $\partial\mathcal{U}_k$  dello spazio logico  $\mathcal{U}_k$  nel bordo  $\partial\Omega_k^n$  della regione fisica  $\Omega_k^n$ . Perciò si definisce la mappa

$$\partial X_k^n : \partial\mathcal{U}_k \rightarrow \partial\Omega_k^n \quad (2.14)$$

Poi si estende la mappa (2.14) alla trasformazione (2.13) dall'interno dello spazio logico  $\mathcal{U}_k$  all'interno dello spazio fisico  $\Omega_k^n$ . È di fondamentale importanza eseguire l'estensione della mappa perchè così ogni punto nello spazio logico viene mandato in un unico punto nello spazio fisico (trasformazione iniettiva) e ogni punto nello spazio fisico è l'immagine di un punto nello spazio logico (trasformazione suriettiva).

Inoltre è richiesto che la mappa  $X_k^n$  sia regolare e, poichè si considera lo spazio logico  $\mathcal{U}_k$  come un oggetto chiuso (cioè che comprende il bordo), la mappa  $X_k^n$  deve essere regolare sia all'interno di  $\mathcal{U}_k$  sia sul bordo  $\partial\mathcal{U}_k$ .

I dettagli si possono trovare in [3], paragrafo 1.3.

Poichè è stato supposto che  $X_k^n \in C^1$ , allora è possibile definire le derivate parziali  $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, k$  e di conseguenza gli elementi della matrice Jacobiana:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}.$$

**Teorema 2.5.1 (Teorema della mappa inversa).** *Sia  $X_k^n \in C^1$ . Allora  $X_k^n$  è localmente iniettiva in  $\xi$  nell'interno di  $\mathcal{U}_k$  se e solo se il rango della matrice Jacobiana è massimo (uguale a  $k$ ) in  $\xi$ .*

Se la dimensione dell'oggetto fisico è uguale alla dimensione dello spazio fisico, cioè se  $n = k$ , allora la matrice Jacobiana è quadrata e si può calcolare il determinante. Allora la matrice Jacobiana ha rango massimo se e solo se il determinante è diverso da 0.

Di seguito viene spiegato come trasformare il problema di Poisson (2.2) nelle coordinate  $(x, y)$  in un problema nelle coordinate logiche  $(\xi, \eta)$ .

In generale, sia  $\Omega$  un dominio fisico e sia  $\partial\Omega$  il bordo di  $\Omega$ . Inoltre siano  $\alpha = \alpha(x, y)$ ,  $\beta = \beta(x, y)$ ,  $\gamma = \gamma(x, y)$  e  $f = f(x, y)$  funzioni definite in  $\Omega$  che soddisfano il seguente problema:

$$\begin{cases} (\alpha u_x)_x + (\beta u_x)_y + (\beta u_y)_x + (\gamma u_y)_y = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

dove  $u = u(x, y)$ .

Si consideri la trasformazione

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

con

$$\det(\mathcal{J}) = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \neq 0.$$

Per trasformare il problema (2.15) nelle coordinate  $(\xi, \eta)$ , si pone

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, \eta) &= u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ \tilde{f}(\xi, \eta) &= f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ \tilde{\alpha}(\xi, \eta) &= \alpha(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ \tilde{\beta}(\xi, \eta) &= \beta(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ \tilde{\gamma}(\xi, \eta) &= \gamma(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)). \end{aligned}$$

Applicando ora la formula della derivata della funzione composta alle derivate parziali in (2.15), si ottiene

$$\tilde{u}_\xi = u_x x_\xi + u_y y_\xi, \quad \tilde{u}_\eta = u_x x_\eta + u_y y_\eta. \quad (2.16)$$

Poichè si è supposto che il determinante della matrice Jacobiana è non-zero, allora la trasformazione è non singolare e di conseguenza le formule (2.16) possono essere invertite:

$$u_x = \frac{1}{\det(\mathcal{J})}(\tilde{u}_\xi y_\eta - \tilde{u}_\eta y_\xi) = \frac{1}{\det(\mathcal{J})}\{(\tilde{u}y_\eta)_\xi - (\tilde{u}y_\xi)_\eta\}, \quad (2.17)$$

$$u_y = \frac{1}{\det(\mathcal{J})}(\tilde{u}_\eta x_\xi - \tilde{u}_\xi x_\eta) = \frac{1}{\det(\mathcal{J})}\{(\tilde{u}x_\xi)_\eta - (\tilde{u}x_\eta)_\xi\} \quad (2.18)$$

tenendo presente che  $x_{\xi\eta} = x_{\eta\xi}$ .

Dunque

$$\alpha u_x = \frac{\tilde{\alpha}}{\det(\mathcal{J})}(\tilde{u}_\xi y_\eta - \tilde{u}_\eta y_\xi). \quad (2.19)$$

Grazie alle formule (2.17), (2.18) e (2.19) si ottengono le espressioni delle derivate seconde:

$$\det(\mathcal{J})(\alpha u_x)_x = \left( \tilde{\alpha} \frac{\tilde{u}_\xi y_\eta - \tilde{u}_\eta y_\xi}{\det(\mathcal{J})} y_\eta \right)_\xi - \left( \tilde{\alpha} \frac{\tilde{u}_\xi y_\eta - \tilde{u}_\eta y_\xi}{\det(\mathcal{J})} y_\xi \right)_\eta, \quad (2.20)$$

$$\det(\mathcal{J})(\beta u_x)_y = - \left( \tilde{\beta} \frac{\tilde{u}_\xi y_\eta - \tilde{u}_\eta y_\xi}{\det(\mathcal{J})} x_\eta \right)_\xi + \left( \tilde{\beta} \frac{\tilde{u}_\xi y_\eta - \tilde{u}_\eta y_\xi}{\det(\mathcal{J})} x_\xi \right)_\eta, \quad (2.21)$$

$$\det(\mathcal{J})(\beta u_y)_x = \left( \tilde{\beta} \frac{-\tilde{u}_\xi x_\eta + \tilde{u}_\eta x_\xi}{\det(\mathcal{J})} y_\eta \right)_\xi - \left( \tilde{\beta} \frac{-\tilde{u}_\xi x_\eta + \tilde{u}_\eta x_\xi}{\det(\mathcal{J})} y_\xi \right)_\eta, \quad (2.22)$$

$$\det(\mathcal{J})(\gamma u_y)_y = - \left( \tilde{\gamma} \frac{-\tilde{u}_\xi x_\eta + \tilde{u}_\eta x_\xi}{\det(\mathcal{J})} x_\eta \right)_\xi + \left( \tilde{\gamma} \frac{-\tilde{u}_\xi x_\eta + \tilde{u}_\eta x_\xi}{\det(\mathcal{J})} x_\xi \right)_\eta. \quad (2.23)$$

Se il problema (2.15) viene moltiplicato per il determinante della matrice Jacobiana e poi viene trasformato usando le formule (2.20)-(2.23), allora si ottiene il seguente problema:

$$\begin{cases} (\hat{\alpha}\hat{u}_\xi)_\xi + (\hat{\beta}\hat{u}_\xi)_\eta + (\hat{\beta}\hat{u}_\eta)_\xi + (\hat{\gamma}\hat{u}_\eta)_\eta = \hat{f} \\ \hat{u}(\xi, 0) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 1) = 0 \\ \hat{u}(0, \eta) = 0 \\ \hat{u}(1, \eta) = 0 \end{cases}$$

dove

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\xi, \eta), \quad \hat{f}(\xi, \eta) = \det \mathcal{J}(\xi, \eta) \tilde{f}(\xi, \eta),$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{1}{\det(\mathcal{J})}(\tilde{\alpha}y_\eta^2 - 2\tilde{\beta}x_\eta y_\eta + \tilde{\gamma}x_\eta^2), \\ \hat{\beta} &= -\frac{1}{\det(\mathcal{J})}(\tilde{\alpha}y_\xi y_\eta - \tilde{\beta}(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) + \tilde{\gamma}x_\xi x_\eta), \\ \hat{\gamma} &= \frac{1}{\det(\mathcal{J})}(\tilde{\alpha}y_\xi^2 - 2\tilde{\beta}x_\xi y_\xi + \tilde{\gamma}x_\xi^2). \end{aligned}$$

In definitiva, dopo aver trasformato l'equazione  $-u_{xx} - u_{yy} = f(x, y)$  nelle coordinate logiche  $(\xi, \eta)$ , si otterrà un'equazione del tipo

$$(\hat{\alpha}\hat{u}_\xi)_\xi + (\hat{\gamma}\hat{u}_\eta)_\eta = \det\mathcal{J}(\xi, \eta)\tilde{f}(\xi, \eta). \quad (2.24)$$

Discretizzando il termine noto dell'equazione (2.24) si ottiene la matrice

$$J \circ \tilde{F}.$$

Il simbolo “ $\circ$ ” indica il *prodotto di Hadamard* tra le matrici  $J$  e  $\tilde{F}$ , entrambe di dimensione  $(N+1) \times (N+1)$ . Il prodotto di Hadamard  $J \circ \tilde{F}$  è una matrice con la stessa dimensione degli operandi i cui elementi sono  $[J_{i,j}\tilde{F}_{i,j}]$ . Inoltre, a differenza del termine noto nell'equazione matriciale (2.9), il nuovo termine noto  $J \circ \tilde{F}$  non è una matrice simmetrica in quanto la matrice simmetrica  $\tilde{F}$  è moltiplicata per la matrice  $J$ .

Di seguito, l'equazione (2.1) verrà trasformata mediante le coordinate polari definite sullo spazio logico e attraverso tre nuovi sistemi di coordinate analitiche. Per trasformare l'equazione (2.1) utilizzando le coordinate polari definite sullo spazio logico, occorre trasformare l'equazione di Poisson mediante la trasformazione (2.5) in cui i parametri  $r, \theta$  sono traslati:

$$\begin{cases} r = r_0 + (r_1 - r_0)\eta \\ \theta = \theta_1 + (\theta_0 - \theta_1)\xi \end{cases},$$

$$\xi, \eta \in [0, 1], \quad 0 \leq r_0 < r_1 \text{ e } 0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 2\pi.$$

Pertanto l'equazione (2.24) diventa:

$$-(r_1 - r_0)^2 \tilde{u}_{\xi\xi} - r(\eta)(\theta_0 - \theta_1)^2 (r_1 - r_0) \tilde{u}_\eta - r(\eta)^2 (\theta_0 - \theta_1)^2 \tilde{u}_{\eta\eta} = r(\eta)^2 (\theta_0 - \theta_1)^2 (r_1 - r_0)^2 \tilde{f}(\xi, \eta) \quad (2.25)$$

dove  $r(\eta) \equiv r$ .

Discretizzando l'equazione (2.25) in maniera analoga a quanto spiegato nei paragrafi 2.1 e 2.2, si ottiene l'equazione matriciale

$$(r_1 - r_0)^2 T_1 \mathbf{U} + \mathbf{U}(B_2 \Phi_2) + \mathbf{U}(T_2 \Psi_2) = J \circ \tilde{F}, \text{ cioè}$$

$$(r_1 - r_0)^2 T_1 \mathbf{U} + \mathbf{U}(B_2 \Phi_2 + T_2 \Psi_2) = J \circ \tilde{F}, \quad (2.26)$$

dove  $B_2 = B_1^T$ ,  $\Phi_2 = (\theta_0 - \theta_1)^2 (r_1 - r_0) \text{diag}(-r(\eta_1), \dots, -r(\eta_{N+1}))$  e  $\Psi_2 = (\theta_0 - \theta_1)^2 \text{diag}(r(\eta_1)^2, \dots, r(\eta_{N+1})^2)$ .

Dunque, la nuova equazione matriciale (2.26) è ancora un'equazione di Sylvester.

Adesso l'equazione (2.1) verrà trasformata mediante tre nuovi sistemi di coordinate analitiche.

### Coordinate Paraboliche Cilindriche

Le coordinate paraboliche cilindriche, per la regione in Figura 2.4, sono definite dalla trasformazione

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(r^2 - s^2) \\ y = rs \end{cases},$$

dove  $r, s \in [1, 2]$ .

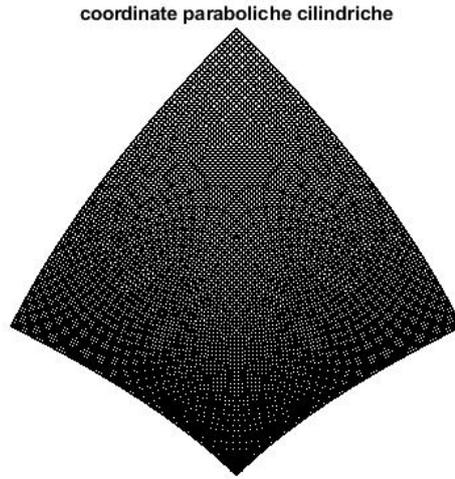


Figura 2.4

In questo caso, l'equazione di Poisson (2.1) diventa

$$-\frac{1}{r^2 + s^2} \tilde{u}_{rr} - \frac{1}{r^2 + s^2} \tilde{u}_{ss} = \tilde{f}(r, s), \quad (2.27)$$

cioè  $-\tilde{u}_{rr} - \tilde{u}_{ss} = (r^2 + s^2) \tilde{f}(r, s)$ .

Se invece si considera la traslazione

$$\begin{cases} r = 1 + \xi \\ s = 1 + \eta \end{cases},$$

l'equazione (2.1) diventa

$$-\tilde{u}_{\xi\xi} - \tilde{u}_{\eta\eta} = ((1 + \xi)^2 + (1 + \eta)^2) \tilde{f}(\xi, \eta). \quad (2.28)$$

Discretizzando entrambe le equazioni (2.27) e (2.28), si ottiene l'equazione matriciale

$$T_1 \mathbf{U} + \mathbf{U} T_2 = J \circ \tilde{F}. \quad (2.29)$$

Poichè, per definizione, la matrice  $T_2$  è uguale alla trasposta di  $T_1$ , allora l'operatore che ad  $\mathbf{U}$  associa  $T_1\mathbf{U} + \mathbf{U}T_2$  è l'operatore di Lyapunov. Si può parlare solo di operatore di Lyapunov e non di equazione di Lyapunov perchè il termine noto dell'equazione (2.29) non è una matrice simmetrica.

### Coordinate Ellittiche Cilindriche

Le coordinate ellittiche cilindriche, per la regione in Figura 2.5, sono definite dalla trasformazione

$$\begin{cases} x = a \cosh(r) \cos(s) \\ y = a \sinh(r) \sin(s) \end{cases},$$

dove  $a > 0$  è il raggio delle ellissi concentriche,  $r \in [1, 2]$  e  $s \in [0, \pi]$ .

coordinate ellittiche cilindriche

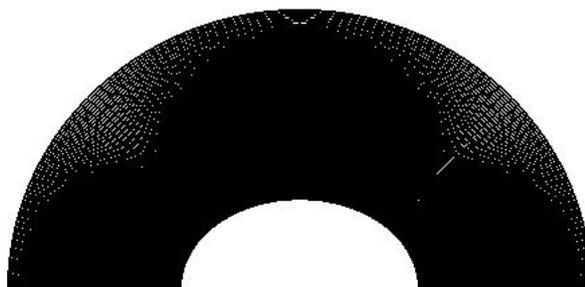


Figura 2.5

In questo caso, l'equazione di Poisson (2.1) diventa

$$-\frac{1}{a^2(\sinh^2(r) + \sin^2(s))} \tilde{u}_{rr} - \frac{1}{a^2(\sinh^2(r) + \sin^2(s))} \tilde{u}_{ss} = \tilde{f}(r, s), \quad (2.30)$$

cioè  $-\tilde{u}_{rr} - \tilde{u}_{ss} = a^2(\sinh^2(r) + \sin^2(s))\tilde{f}(r, s)$ .

Anche discretizzando questa equazione si ottiene un'equazione matriciale nella forma (2.29).

Se invece si considera la traslazione

$$\begin{cases} r = 1 + \xi \\ s = \pi\eta \end{cases},$$

l'equazione (2.1) diventa

$$-\pi \tilde{u}_{\xi\xi} - \frac{1}{\pi} \tilde{u}_{\eta\eta} = (a^2 \pi (\sinh^2(1 + \xi) + \sin^2(\pi\eta))) \tilde{f}(\xi, \eta). \quad (2.31)$$

Perciò, discretizzando l'equazione (2.31), si ottiene l'equazione matriciale

$$\pi T_1 \mathbf{U} + \frac{1}{\pi} \mathbf{U} T_2 = J \circ \tilde{F} \quad (2.32)$$

che è un'equazione di Sylvester.

### Coordinate Bipolari

Infine, le coordinate bipolari per il dominio fisico mostrato in Figura 2.6 sono definite dalla trasformazione

$$\begin{cases} x = \frac{a \sinh(r)}{\cosh(r) + \cos(s)} \\ y = \frac{a \sin(s)}{\cosh(r) + \cos(s)} \end{cases},$$

dove  $a > 0$  è il parametro che determina l'estensione del dominio,  $r \in [0, 1]$  e  $s \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .



Figura 2.6

In questo caso, l'equazione di Poisson (2.1) diventa

$$-\frac{(\cosh(r) + \cos(s))^2}{a^2} \tilde{u}_{rr} - \frac{(\cosh(r) + \cos(s))^2}{a^2} \tilde{u}_{ss} = \tilde{f}(r, s), \quad (2.33)$$

cioè  $-\tilde{u}_{rr} - \tilde{u}_{ss} = \frac{a^2}{(\cosh(r) + \cos(s))^2} \tilde{f}(r, s)$ .

Anche questa volta, discretizzando tale equazione si ottiene un'equazione matriciale nella forma (2.29).

Se invece si considera la traslazione

$$\begin{cases} r = \xi \\ s = \pi \left( \eta - \frac{1}{2} \right) \end{cases} ,$$

l'equazione (2.1) diventa

$$-\pi \tilde{u}_{\xi\xi} - \frac{1}{\pi} \tilde{u}_{\eta\eta} = \frac{a^2 \pi}{\left( \cosh(\xi) + \cos \left( \pi \left( \eta - \frac{1}{2} \right) \right) \right)^2} \tilde{f}(\xi, \eta). \quad (2.34)$$

Discretizzando l'equazione (2.34) si ottiene un'equazione matriciale analoga alla (2.32).

## 2.6 Risultati numerici

Come è stato spiegato nel paragrafo 2.3, l'equazione matriciale (2.9) è un'equazione di Sylvester e si risolve numericamente con la funzione Matlab `lyap`. Dunque, la soluzione sul dominio rettangolare  $\tilde{\Omega}_h$  è rappresentata in Figura 2.7:

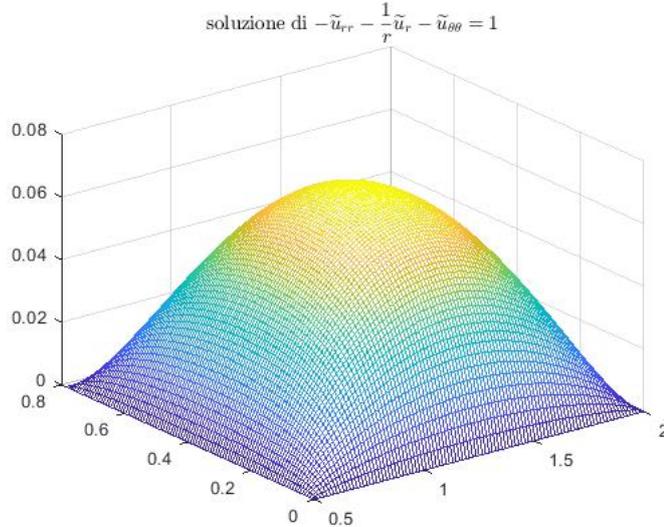


Figura 2.7

Se la soluzione  $\mathbf{U}$  viene trasferita sul dominio originale, cioè sulla porzione di corona circolare  $\Omega_h$  con raggi  $r_0$  e  $r_1$  (Figura 2.8), la soluzione si adatta al dominio, come si osserva in Figura 2.9.

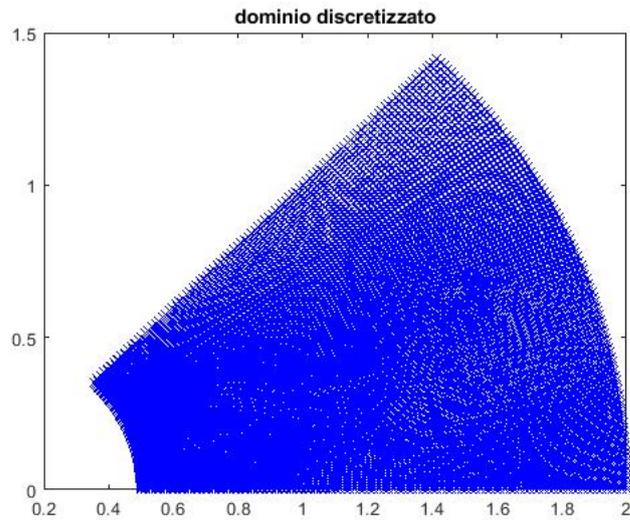


Figura 2.8

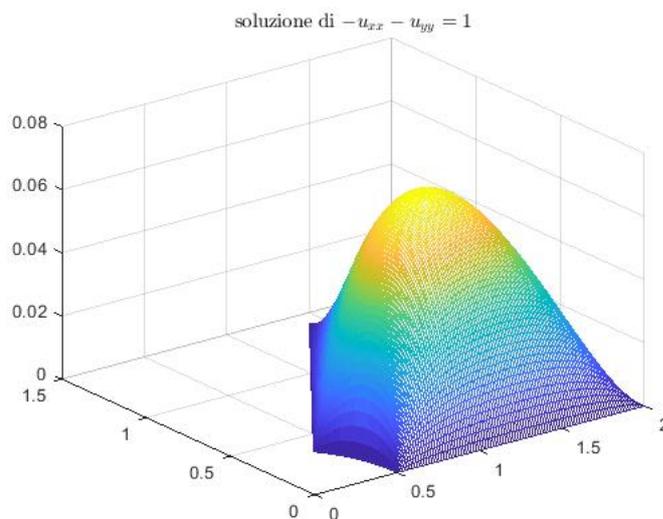


Figura 2.9

Poichè l'origine è una singolarità dell'equazione

$$-\tilde{u}_{rr} - \frac{1}{r}\tilde{u}_r - \tilde{u}_{\theta\theta} = 1$$

definita sul dominio  $\tilde{\Omega}_h$ , è di interesse studiare le proprietà del problema matriciale quando si fa rimpicciolire il raggio  $r_0$  della corona circolare, lasciando invariato  $r_1$ . Pertanto si osserva un cambiamento nella porzione di corona circolare (Figura 2.10). Poichè l'origine è una singolarità, le griglie ottenute prendendo

$r_0 = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-10}$  sono raffinate in modo non uniforme per avere più nodi nella zona critica (il caso in cui  $r_0 = 0.5$  corrisponde alla Figura 2.8):

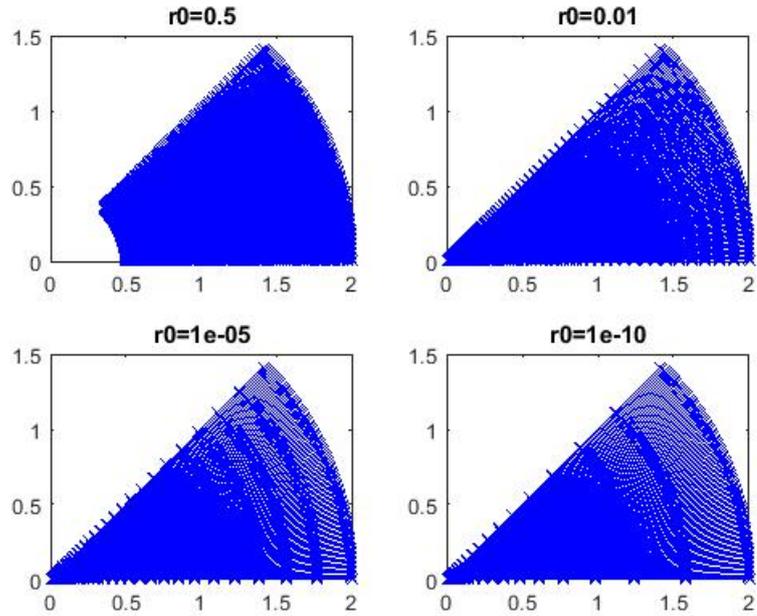


Figura 2.10: dominio

Inoltre, al diminuire del raggio  $r_0$ , il coefficiente convettivo  $\frac{1}{r}$  diventa molto maggiore del coefficiente della derivata  $\tilde{u}_{rr}$ . Dunque  $-\tilde{u}_{rr} - \frac{1}{r}\tilde{u}_r - \tilde{u}_{\theta\theta} = 1$  diventa un problema di convezione dominante e perciò risulta meno stabile.

In generale, l'equazione (2.7) è un *problema di convezione dominante* quando  $|w| \gg \epsilon$ .

D'altra parte, l'equazione  $-\tilde{u}_{rr} - \frac{1}{r}\tilde{u}_r - \tilde{u}_{\theta\theta} = 1$  non è definita per  $r = 0$  e la soluzione nel continuo diverge quando  $r$  tende a 0. Questa divergenza corrisponde al picco vicino alla singolarità che si osserva nella soluzione numerica, nei casi in cui  $r_0 = 10^{-5}$  e  $r_0 = 10^{-10}$  (Figura 2.11). Il caso  $r_0 = 0.5$  corrisponde alla Figura 2.9.

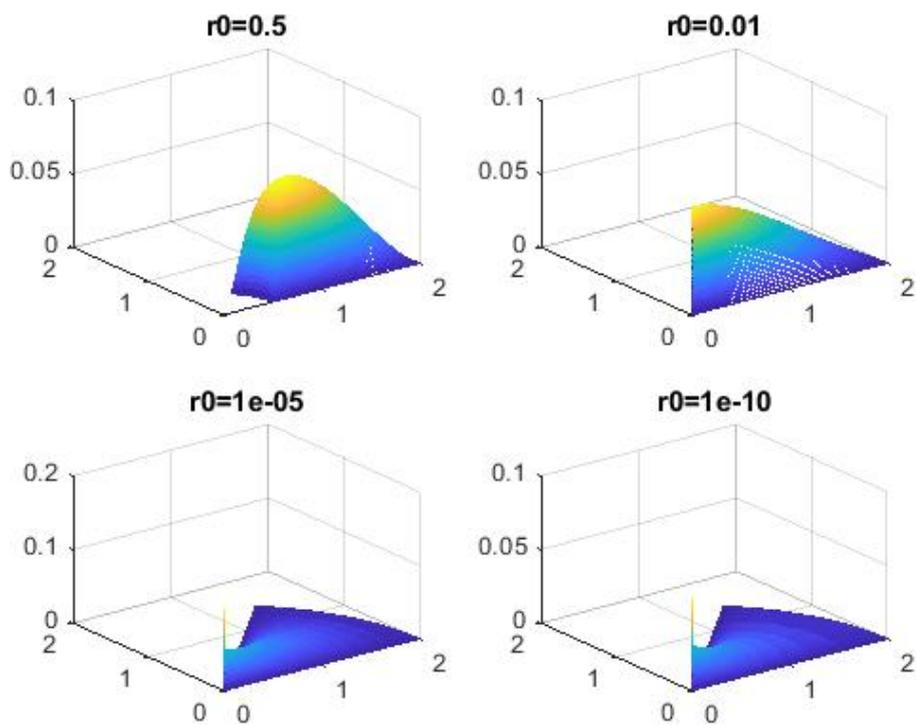


Figura 2.11: soluzione

Poichè la soluzione non è definita per  $r = 0$ , vicino all'origine si ha il comportamento mostrato in Figura 2.12. Questo comportamento è collegato al fatto che il problema non è definito sul dominio considerato.

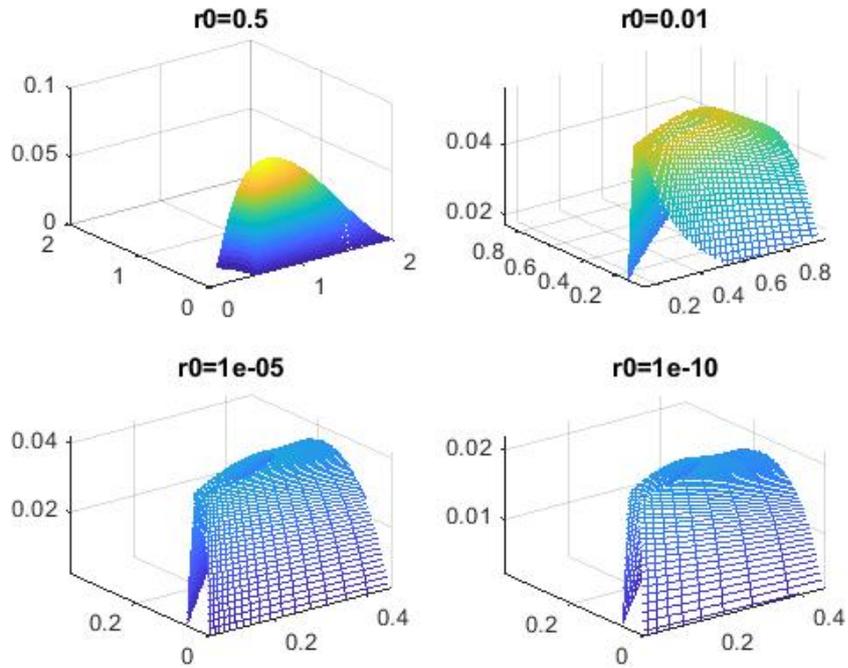


Figura 2.12: zoom soluzione

Si consideri ora il sistema lineare (2.12). Le matrici  $I_m, A, T_2^T, I_n$  che compongono la matrice  $\mathcal{A}$  hanno dimensione  $N + 1$ . Poichè la matrice  $\mathcal{A}$  è ottenuta applicando il prodotto di Kronecker, se si prende  $N = 100$ ,  $\mathcal{A}$  ha dimensione  $10201 \times 10201$ . Tuttavia, come spiegato nel paragrafo 2.4 e come si osserva in Figura 2.14,  $\mathcal{A}$  ha una struttura tridiagonale a blocchi in cui ci sono tre diagonali vicine e due diagonali separate. Pertanto  $\mathcal{A}$  è formata soltanto da 50197 elementi non zero:

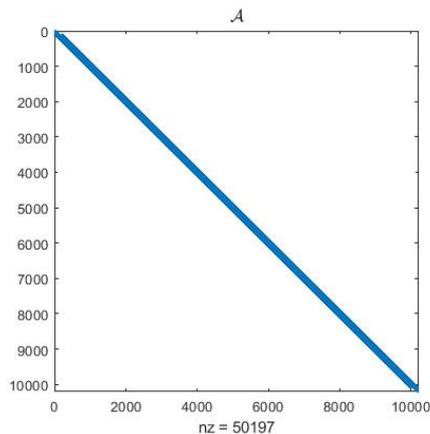


Figura 2.13: sparsità

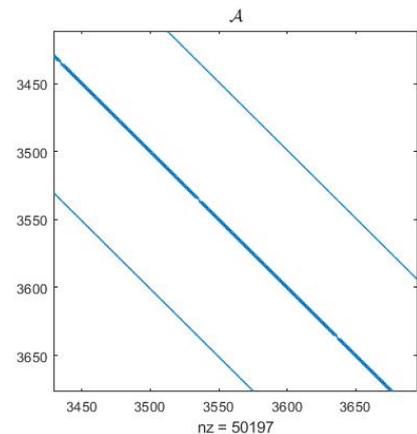


Figura 2.14: zoom sparsità

I prossimi risultati mostrano il numero di condizionamento delle matrici  $A = T_1 + \Phi_1 B_1$ ,  $T_2^T$  ed  $\mathcal{A} = I_m \otimes A + T_2^T \otimes I_n$  al diminuire di  $r_0$ . In generale, il *numero di condizionamento* di una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  non singolare, è il numero reale  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  con  $\|\cdot\|$  norma di matrice. Tuttavia,  $\mathcal{A}$  è una matrice di grandi dimensioni, perciò non si riesce a calcolare la sua inversa. Pertanto, per calcolare il numero di condizionamento di  $\mathcal{A}$  è necessario usare la funzione Matlab `condest`, la quale fornisce un limite inferiore del numero di condizionamento in norma 1 di una matrice quadrata senza calcolare l'inversa della matrice. Dunque si può usare anche per matrici di grandi dimensioni.

$r_0$	condizionamento A	condizionamento $T_2^T$	condizionamento $\mathcal{A}$
0.5	5.501926e+03	5.000000e+03	5.934832e+03
1.000000e-02	6.611344e+03	5.000000e+03	9.357655e+03
1.000000e-05	1.681431e+06	5.000000e+03	8.406351e+05
1.000000e-10	9.174868e+10	5.000000e+03	7.223652e+10

Si osserva che il numero di condizionamento della matrice  $T_2^T$  rimane invariato al diminuire del raggio  $r_0$  perchè la matrice non dipende dal raggio. Invece i numeri di condizionamento delle matrici  $A$  e  $\mathcal{A}$  presentano lo stesso andamento, cioè rimangono nell'ordine di grandezza  $10^3$  rimpicciolendo il raggio  $r_0$  da 0.5 a  $10^{-2}$ . Poi aumentano molto per gli altri due valori di  $r_0$  raggiungendo l'ordine di grandezza  $10^{10}$  nel caso in cui  $r_0 = 10^{-10}$ . Si può concludere che la matrice  $\mathcal{A}$  è mal condizionata già con il valore iniziale  $r_0 = 0.5$ , poi diventa estremamente mal condizionata al diminuire di tale raggio. Dunque piccole variazioni in  $\mathcal{A}$ , causate dalla diminuzione del raggio  $r_0$ , producono grosse variazioni nel vettore soluzione **u**.

Infine, la soluzione dell'equazione (2.9) viene confrontata con la soluzione dell'equazione (2.26) relativa alle coordinate  $(\xi, \eta)$ . Poichè anche l'equazione (2.26) è un'equazione di Sylvester, allora si risolve con la funzione Matlab `lyap`. La soluzione di (2.26) è rappresentata in Figura 2.15:

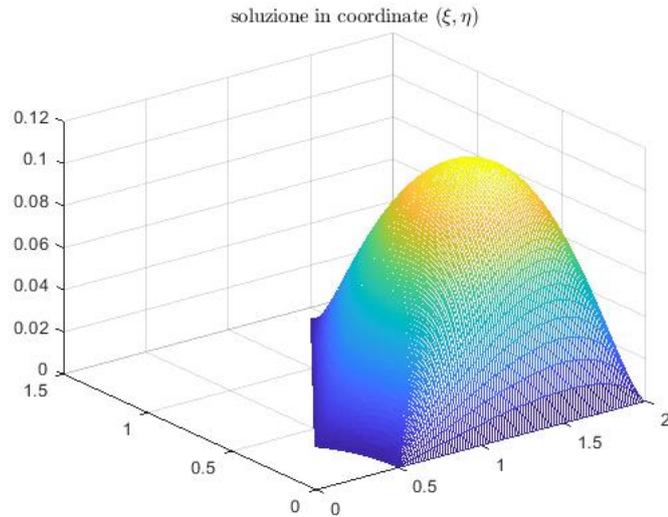


Figura 2.15

L'errore relativo tra la soluzione di (2.9) e la soluzione appena calcolata è  $6.940557e-01$ .

Si consideri ora l'equazione (2.1) trasformata mediante le coordinate paraboliche cilindriche, ellittiche cilindriche e bipolari; verranno confrontate le soluzioni delle relative equazioni in coordinate  $(r, s)$  e  $(\xi, \eta)$  come è stato fatto nel caso delle coordinate polari.

### Coordinate Paraboliche Cilindriche

Le soluzioni delle equazioni (2.27) e (2.28) sono rappresentate nelle seguenti figure:

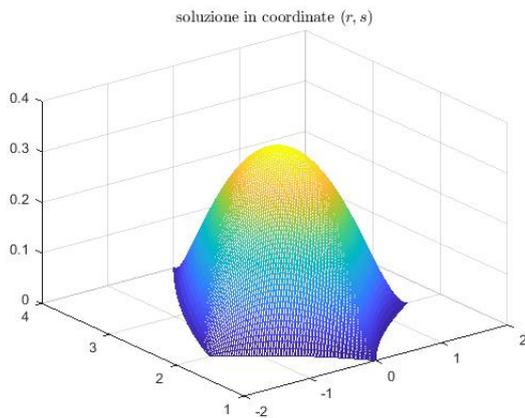


Figura 2.16

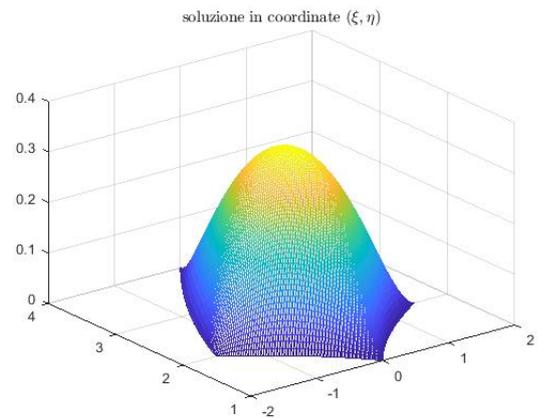


Figura 2.17

I grafici delle due soluzioni sono identici.

### Coordinate Ellittiche Cilindriche

Le soluzioni delle equazioni (2.30) e (2.31) sono:

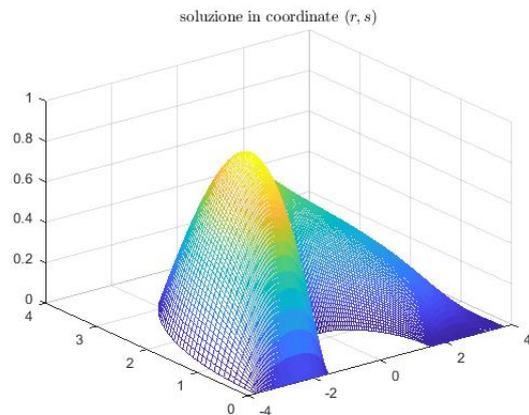


Figura 2.18

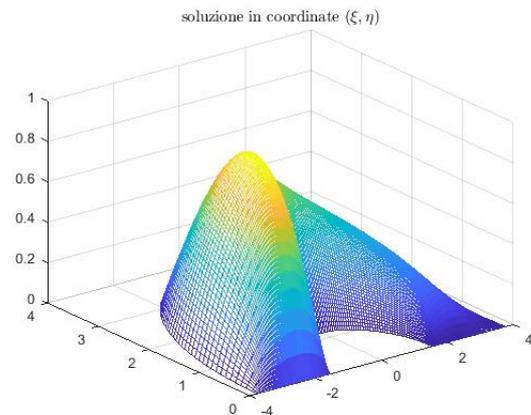


Figura 2.19

In questo caso, l'errore relativo delle soluzioni è  $5.570749e-14$ .

### Coordinate Bipolari

Infine, le soluzioni delle equazioni (2.33) e (2.34) sono:

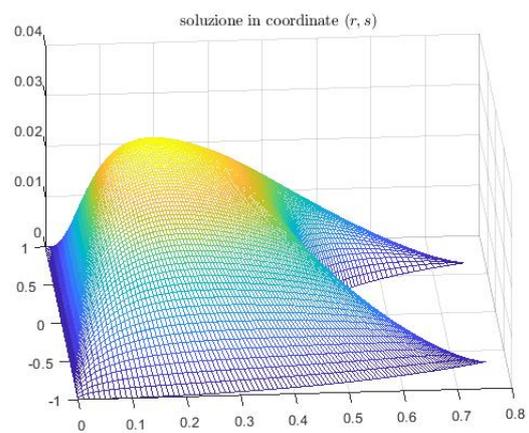


Figura 2.20

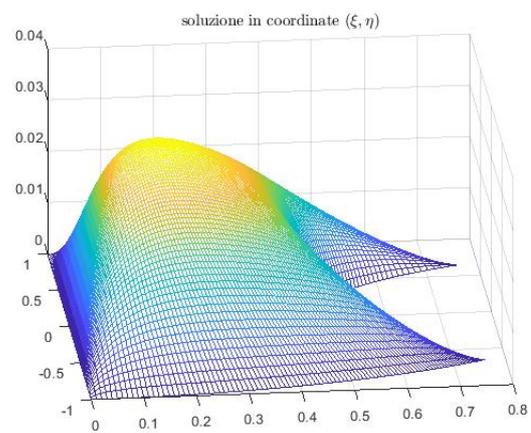


Figura 2.21

Usando questa trasformazione, l'errore relativo delle soluzioni è  $6.396020e-14$ .

In definitiva, si può concludere che il problema (2.2), trasformato mediante le coordinate polari, paraboliche cilindriche, ellittiche cilindriche e bipolari, può essere risolto in modo equivalente con lo stesso algoritmo per equazioni matriciali.



# A | Codici Matlab

In questa appendice sono mostrati i codici Matlab che forniscono i risultati numerici analizzati nel paragrafo 2.6.

Lo script seguente fornisce i grafici della soluzione dell'equazione (2.9) sul dominio rettangolare  $\widetilde{\Omega}_h$  e sulla porzione di corona circolare  $\Omega_h$ . Inoltre questo codice mostra la sparsità della matrice  $\mathcal{A}$ .

```
% discretizzazione del dominio [r0,r1] x [0, pi/4]
r0=0.5;
r1=2;
N=100;
hr=(r1-r0)/(N+1);
htheta=(pi/4)/(N+1);
r=linspace(r0,r1,N+1)';
theta=linspace(0,pi/4,N+1)';

% griglia rettangolare dei punti
[R,Theta]=meshgrid(r,theta);
% griglia dei punti (porzione di corona circolare)
X=r*cos(theta)';
Y=r*sin(theta)';

% matrice tridiagonale T1 (N+1)x(N+1) che discretizza la derivata -u_{rr}
T1=(-1/hr^2)*spdiags([ones(N+1,1),-2*ones(N+1,1),ones(N+1,1)],-1:1,N+1,N+1);
T1(1,1)=(-1/hr^2)*(-1);
T1(1,2)=0;
T1(N+1,N)=0;
T1(N+1,N+1)=(-1/hr^2)*(-1);

% matrice tridiagonale T2 (N+1)x(N+1) che discretizza la derivata
% -u_{\theta \theta}
T2=(-1/htheta^2)*spdiags([ones(N+1,1),-2*ones(N+1,1),ones(N+1,1)],-1:1,N+1,N+1);
T2(1,1)=(-1/htheta^2)*(-1); T2(1,2)=(-1/htheta^2)*(1);
T2(2,1)=0;
T2(N,N+1)=0;
T2(N+1,N)=(-1/htheta^2)*(1); T2(N+1,N+1)=(-1/htheta^2)*(-1);

% matrice B=Phi1*B1 (N+1)x(N+1) che discretizza la derivata -1/r *(u_r)
Phi1=diag(-1./r);

B1=(1/(2*hr))*spdiags([-ones(N+1,1),zeros(N+1,1),ones(N+1,1)],-1:1,N+1,N+1);
B1(1,1)=0;
```

```

B1(1,2)=0;
B1(N+1,N)=0;
B1(N+1,N+1)=0;

B=Phi1*B1;

% condizioni iniziali al bordo
% prima e ultima colonna
U(:,1)=0; U(:,N+1)=0;
% prima e ultima riga
U(1,:)=0; U(N+1,:)=0;

% matrice F (N+1)x(N+1) che discretizza il termine noto 1
F=ones(N+1,N+1);
% prima colonna di F
F(:,1)=T1*U(:,1)+(1/(h*theta^2))*U(:,1)+B*U(:,1);
% ultima colonna di F
F(:,N+1)=T1*U(:,N+1)+(1/(h*theta^2))*U(:,N+1)+B*U(:,N+1);

% prima riga di F
F(1,:)=(1/(hr^2))*U(1,:)+U(1,:)*T2;
% ultima riga di F
F(N+1,:)=(1/(hr^2))*U(N+1,:)+U(N+1,:)*T2;

% risolviamo l'equazione (T1+Phi1*B1)*U+U*T2=F con la funzione lyap
U=lyap(T1+B,T2,-F);

% grafico della soluzione U
% dominio rettangolare
figure;
mesh(R,Theta,U)
title('soluzione di $$$-\widetilde{u}_{rr} - \frac{1}{r}\widetilde{u}_r - \widetilde{u}_{\theta\theta} = 1$$$','Interpreter','Latex')

% dominio: porzione di corona circolare
figure;
mesh(X,Y,U)
title('soluzione di $$$-u_{xx}-u_{yy}= 1$$$','Interpreter','Latex')

% griglia del dominio
figure;
plot(X,Y,'b-x',X',Y', 'b-x')
title('dominio discretizzato')

% matrice (Im kron A + T2' kron In)

```

```

A=T1+B;
m=size(T2); n=size(A);
Im=speye(m); In=speye(n);
Acal=kron(Im,A)+kron(T2',In);

% sparsità della matrice (Im kron A + T2' kron In)
figure;
spy(Acal)
title('$\mathcal{A}$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize', 12)

```

Per calcolare le soluzioni delle equazioni (2.25), (2.28), (2.31) e (2.34) in coordinate  $(\xi, \eta)$ , sono stati utilizzati e modificati gli script realizzati da Siva Srinivas Kolukula, Structural Mechanics Laboratory, Indira Gandhi Center for Atomic Research (India).

Di seguito è riportato l'algoritmo che calcola la soluzione dell'equazione matriciale (2.26) relativa alle coordinate polari.

```

% COORDINATE POLARI NELLO SPAZIO LOGICO (\xi, \eta)
% number of discretizations along xi and eta axis
m = N+1 ;
n = N+1 ;

% discretize along xi and eta axis
xi = linspace(0.,1,m) ;
eta = linspace(0.,1.,n) ;

theta0=0;
theta1=-pi/4;
r0=0.5;
r1=2;

% Initialize matrices in x and y axis
X = zeros(m,n) ;
Y = zeros(m,n) ;
% Run a loop along xi and eta axis to get x,y
for i = 1:m
    for j = 1:n
        Xi = xi(i) ;
        Eta = eta(j) ;
        [x y] = PolarCoordinates(Xi,Eta,theta0,theta1,r0,r1) ;

        X(i,j) = x ;

```

```

        Y(i,j) = y ;

    end

end

X=X';
Y=Y';

% To plot grid obtained
plotgrid(X,Y)
title('coordinate polari')

h=1/(N+1);

% matrice (r1-r0)^2*T1 (N+1)x(N+1) che discretizza la derivata
% -(r1-r0)^2*u_{\xi \xi}
T1=(-1/h^2)*spdiags([ones(N+1,1),-2*ones(N+1,1),ones(N+1,1)],-1:1,N+1,N+1);
T1(1,1)=(-1/h^2)*(-1);
T1(1,2)=0;
T1(N+1,N)=0;
T1(N+1,N+1)=(-1/h^2)*(-1);

% matrice B2*Phi2 (N+1)x(N+1) che discretizza la derivata
% -r(\eta)*(theta0-theta1)^2*(r1-r0)*u_{\eta}
% matrice B2 (N+1)x(N+1) che discretizza la derivata u_{\eta}
B2=(1/(2*h))*spdiags([ones(N+1,1),zeros(N+1,1),-ones(N+1,1)],-1:1,N+1,N+1);
B2(1,1)=0; B2(1,2)=1/(2*h)*(-1);
B2(2,1)=0;
B2(N,N+1)=0;
B2(N+1,N)=1/(2*h)*(1); B2(N+1,N+1)=0;

% matrice Phi2 (N+1)x(N+1) che discretizza il coefficiente
% -r(\eta)*(theta0-theta1)^2*(r1-r0)
rr=r0+(r1-r0)*eta;
Phi2=(theta0-theta1)^2*(r1-r0)*diag(-rr);

A2=B2*Phi2;

% matrice T2*Psi2 (N+1)x(N+1) che discretizza la derivata
% -r(\eta)^2*(theta0-theta1)^2*u_{\eta \eta}
% matrice T2 (N+1)x(N+1) che discretizza la derivata -u_{\eta \eta}
T2=T1';

% matrice Psi2 (N+1)x(N+1) che discretizza il coefficiente
% r(\eta)^2*(theta0-theta1)^2

```

```

Psi2=(theta0-theta1)^2*diag(rr.^2);

C2=T2*Psi2;

% condizioni iniziali al bordo
% prima e ultima colonna
U(:,1)=0; U(:,N+1)=0;
% prima e ultima riga
U(1,:)=0; U(N+1,:)=0;

[XI,ETA]=meshgrid(xi,eta);

% determinante della matrice jacobiana calcolato nei nodi, quindi diventa
% una matrice (N+1) x (N+1)
J=(r0+(r1-r0)*ETA).^2*(r1-r0)^2*(theta0-theta1)^2;

% matrice F (N+1)x(N+1) che discretizza il termine noto 1
F=ones(N+1,N+1);

% matrice detJ(\xi, \eta) *f(\xi, \eta)
JF=J.*F;

% prima colonna di JF
JF(:,1)=(r1-r0)^2*T1*U(:,1)+C2*U(:,1);
% ultima colonna di JF
JF(:,N+1)=(r1-r0)^2*T1*U(:,N+1)+C2*U(:,N+1);

% prima riga di JF
JF(1,:)=1/(h^2)*(r1-r0)^2*U(1,:)+U(1,:)*A2+U(1,:)*C2;
% ultima riga di JF
JF(N+1,:)=1/(h^2)*(r1-r0)^2*U(N+1,:)+U(N+1,:)*A2+U(N+1,:)*C2;

% risolviamo l'equazione di Sylvester (r1-r0)^2*T1*U+U*(B2*Phi2+T2*Psi2)=JF
% con la funzione lyap
U=lyap((r1-r0)^2*T1,A2+C2,-JF);
figure;
mesh(X,Y,U)
title('soluzione in coordinate $$\xi, \eta$$','Interpreter','Latex')

```

Gli algoritmi che calcolano le soluzioni in coordinate  $(\xi, \eta)$  delle equazioni matriciali associate alle equazioni (2.28), (2.31), (2.34), non presentano differenze

significative. Pertanto viene riportato solo il codice per le coordinate paraboliche cilindriche.

```

% COORDINATE PARABOLICHE CILINDRICHE NELLO SPAZIO LOGICO (\xi, \eta)
% number of discretizations along xi and eta axis
m = N+1 ;
n = N+1 ;

% discretize along xi and eta axis
xi = linspace(0.,1,m) ;
eta = linspace(0.,1.,n) ;

% Initialize matrices in x and y axis
X = zeros(m,n) ;
Y = zeros(m,n) ;
% Run a loop along xi and eta axis to get x,y
for i = 1:m
    for j = 1:n
        Xi = xi(i) ;
        Eta = eta(j) ;
        [x y] = ParabolicCylinderCoordinates(Xi,Eta);

        X(i,j) = x ;
        Y(i,j) = y ;

    end
end
X=X';
Y=Y';

% To plot grid obtained
plotgrid(X,Y)
title('coordinate paraboliche cilindriche')

h=1/(N+1);

% matrici tridiagonali T1 e T2 (N+1)x(N+1) che discretizzano le
% derivate  $-u_{\xi\xi}$  e  $-u_{\eta\eta}$ 
T1=(-1/h^2)*spdiags([ones(N+1,1),-2*ones(N+1,1),ones(N+1,1)],-1:1,N+1,N+1);
T1(1,1)=(-1/h^2)*(-1);
T1(1,2)=0;
T1(N+1,N)=0;
T1(N+1,N+1)=(-1/h^2)*(-1);

T2=T1';

```

```

% condizioni iniziali al bordo
% prima e ultima colonna
U(:,1)=0; U(:,N+1)=0;
% prima e ultima riga
U(1,:)=0; U(N+1,:)=0;

[XI,ETA]=meshgrid(xi,eta);

% determinante della matrice jacobiana calcolato nei nodi, quindi diventa
% una matrice (N+1) x (N+1)
J=(1+XI).^2+(1+ETA).^2;

% matrice F (N+1)x(N+1) che discretizza il termine noto 1
F=ones(N+1,N+1);

% matrice detJ(\xi, \eta) *f(\xi, \eta)
JF=J.*F;

% prima colonna di JF
JF(:,1)=T1*U(:,1)+(1/(h^2))*U(:,1);
% ultima colonna di JF
JF(:,N+1)=T1*U(:,N+1)+(1/(h^2))*U(:,N+1);

% prima riga di JF
JF(1,:)=(1/(h^2))*U(1,:)+U(1,)*T2;
% ultima riga di JF
JF(N+1,:)=(1/h^2)*U(N+1,:)+U(N+1,)*T2;

% risolviamo l'equazione T1*U+U*T2=JF con la funzione lyap
U=lyap(T1,T2,-JF);

figure;
mesh(X,Y,U)
title('soluzione in coordinate  $(\xi, \eta)$ ','Interpreter','Latex')

```



# Bibliografia

- [1] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics (2007)
- [2] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (1977)
- [3] P. Knupp, S. Steiberg, *Fundamentals of Grid Generation*, CRC Press (1993)
- [4] D. Palitta, V. Simoncini, *Matrix-equation-based strategies for convection-diffusion equations*, BIT Numer Math **56**, 751-776 (2016)
- [5] V. Simoncini, *Computational Methods for Linear Matrix Equations*, SIAM Review **58**(3), 377-441 (2016)



# Ringraziamenti

Alla Professoressa Valeria Simoncini rivolgo il primo ringraziamento perchè, con grande pazienza e disponibilità, mi ha aiutata nella realizzazione di questa tesi. La ringrazio anche per il tempo che mi ha dedicato in questi anni e per l'entusiasmo che mi ha trasmesso in ogni insegnamento.

Ringrazio il professor Ermanno Lanconelli perchè i suoi insegnamenti sono stati preziosi nell'arricchimento di questa tesi. Inoltre lo ringrazio per la disponibilità e l'attenzione che mi ha dimostrato.

Grazie alla mia famiglia, in particolare ai miei genitori e a Barbara, per aver condiviso con me gioie, ansie e per essermi sempre vicino. Un grazie speciale va a mio cugino Lamberto che, con la sua spensieratezza, ha saputo liberarmi dai miei pensieri.

Un ultimo ringraziamento va alle professoresse di matematica che ho incontrato nel mio percorso di studi: la Professoressa Franca Postal per avermi fatto amare la matematica, la Professoressa Anna Maria Lonoce per avere avuto fiducia in me proponendomi una scelta impegnativa e, infine, la Professoressa Maria Ragagni per aver alimentato la mia passione per la matematica ed avermi accolta come tirocinante.