

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

# IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Ermanno Lanconelli

Presentata da:  
Riccardo Villani

Sessione II  
Anno Accademico 2009/'10



# Introduzione

Questa tesi tratta i principali ed elementari risultati del calcolo differenziale ed integrale. Include gli enunciati fondamentali dell'analisi matematica riguardanti la teoria differenziale in una e più variabili.

Nel primo capitolo sono riportati e dimostrati i teoremi più importanti di tale teoria nel caso di variabile reale, partendo dalla definizione di derivata, arrivando fino alla formula di Taylor con resto integrale, passando per polinomi di Taylor, funzioni convesse (definizione e alcune caratterizzazioni) e soprattutto per la teoria dell'integrale di Riemann.

Il secondo verte invece sull'analisi differenziale in  $\mathbb{R}^N$ , con  $N$  maggiore di 1. Dopo un breve richiamo alle funzioni lineari vengono introdotte le funzioni differenziabili per poter studiare alcuni importanti teoremi, che presentano analogie con quelli del capitolo 1. Dopo aver discusso le derivate di ordine superiore al primo, viene enunciata e dimostrata la formula di Taylor che ci dà la possibilità di sviluppare alcune funzioni in serie.

Il terzo ed ultimo capitolo del testo tratta l'invertibilità locale di funzioni; precisamente fornisce risultati per la risolubilità di sistemi non lineari. Come risultato principale dimostra il noto ed importante teorema di invertibilità locale.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Calcolo differenziale e integrale per funzioni di variabile reale</b>	<b>1</b>
1.1 Derivate di funzioni reali di variabile reale . . . . .	1
1.2 Funzioni derivabili in un intervallo . . . . .	5
1.3 Derivate d'ordine superiore . . . . .	12
1.4 Funzioni polinomiali in $\mathbb{R}$ . Polinomi di Taylor . . . . .	13
1.5 Funzioni convesse . . . . .	18
1.6 Integrale di Riemann in $\mathbb{R}$ . . . . .	20
1.7 Formula di Taylor con resto integrale. Primitive di ordine superiore . . . . .	33
<b>2 Calcolo differenziale in <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>37</b>
2.1 Richiami di funzioni lineari . . . . .	37
2.2 Funzioni differenziabili . . . . .	37
2.3 Teoremi del valor medio . . . . .	44
2.4 Funzioni di classe $C^1$ . . . . .	46
2.5 Derivate d'ordine superiore . . . . .	47
2.6 Formula di Taylor per funzioni di classe $C^{k+1}$ , $k \geq 0$ . . . . .	49
<b>3 Invertibilità locale</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>



# Capitolo 1

## Calcolo differenziale e integrale per funzioni di variabile reale

### 1.1 Derivate di funzioni reali di variabile reale

**Definizione 1.1.1.** Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A \cap D(A)$ . Si chiama *rapporto incrementale di  $f$  di punto iniziale  $x_0$*  la funzione

$$R_f(x_0) : A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_f(x_0)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Si dice che  $f$  è *derivabile in  $x_0$*  se esiste ed è reale,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x_0)(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} . \quad (1.1)$$

Il limite (1.1) si chiama *derivata di  $f$  nel punto  $x_0$*  e viene indicato con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x_0), \quad \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}, \quad Df(x_0) .$$

Diremo che  $f$  è *derivabile in senso esteso in  $x_0$*  se il limite in (1.1) esiste ed è  $+\infty$  o  $-\infty$ .

## 2 1. Calcolo differenziale e integrale per funzioni di variabile reale

---

**Proposizione 1.1.1.** *Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A \cap D(A)$ . Allora  $f$  è derivabile in  $x_0$  se e solo se esistono  $\lambda \in \mathbb{R}$  e una funzione  $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\omega(x) \rightarrow 0$  per  $x$  che tende a  $x_0$  e*

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \quad \forall x \in A.$$

In tal caso  $\lambda = f'(x_0)$

*Dimostrazione.* Se vale che  $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \quad \forall x \in A$ , risulta

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda + \omega(x) \quad \forall x \in A \setminus \{x_0\}$$

e quindi, pochè  $\omega(x) \rightarrow 0$  per  $x$  che tende a  $x_0$ ,  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $f'(x_0) = \lambda$

Viceversa, supponiamo  $f$  derivabile in  $x_0$ . Poniamo  $\omega(x_0) = 0$  e

$$\omega(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

per  $x \in A \setminus \{x_0\}$ .

Allora  $\omega(x) \rightarrow 0$  per  $x$  che tende a  $x_0$ ; inoltre

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) .$$

Ciò prova l'enunciato con  $\lambda = f'(x_0)$ . □

Ciò detto risulta ovvio il seguente

**Corollario 1.1.2.** *Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A \cap D(A)$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  allora  $f$  è continua in  $x_0$ .*

**Teorema 1.1.3.** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in A \cap D(A)$ . Siano poi  $f,g:A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili in  $x_0$ . Allora:*

(i)  $f+g$  è derivabile in  $x_0$  e si ha

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$



(ii)  $fg$  è derivabile in  $x_0$  e si ha

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

(iii) se  $g \neq 0$  per ogni  $x \in A$ ,  $\frac{f}{g}$  è derivabile in  $x_0$  e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

La dimostrazione di tale teorema è immediata applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.

**Teorema 1.1.4.** Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(A) \subseteq B$ . Sia  $x_0 \in A \cap D(A)$  e supponiamo  $f$  derivabile in  $x_0$ . Sia inoltre  $f(x_0) \in D(B)$  e supponiamo  $g$  derivabile in  $f(x_0)$ .

Allora  $g \circ f$  è derivabile in  $x_0$  e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

*Dimostrazione.* Poichè  $g$  è derivabile in  $f(x_0)$ , per la Proposizione 1.1.1 esiste una funzione  $\omega : B \rightarrow \mathbb{R}$ , continua in  $f(x_0)$ , tale che  $\omega(y) \rightarrow 0$  per  $y \rightarrow f(x_0)$  e

$$g(y) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + \omega(y)(y - f(x_0)) \quad \forall y \in B.$$

Allora, per ogni  $x \in A \setminus \{x_0\}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= g'(f(x_0)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \omega(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \\ &\rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Questo prova l'enunciato. □

**Teorema 1.1.5.** *Sia  $I$  un intervallo (non banale) di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua ed iniettiva. Sia  $x_0 \in I$  e supponiamo  $f$  derivabile in  $x_0$  con  $f'(x_0) \neq 0$ . Allora la funzione*

$$f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

*è derivabile in  $y_0 = f(x_0)$  e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Dimostrazione.* Se  $y \in f(I)$ ,  $y \neq y_0$ , si ha

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

avendo posto  $x = f^{-1}(y)$ .

Poichè  $f^{-1}$  è continua risulta  $x = f^{-1}(y) \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$  per  $y \rightarrow y_0$ , e quindi

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Questo prova che  $f^{-1}$  è derivabile in  $y_0$  e che  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .  $\square$

**Definizione 1.1.2.** Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $x_0$  è un punto di massimo (minimo) relativo di  $f$  se esiste  $\rho > 0$  tale che  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) per ogni  $x \in A \cap ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ . Se risulta  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ) per ogni  $x \in A \cap ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ ,  $x \neq x_0$ , si dice che  $x_0$  è un punto di massimo (minimo) relativo forte.

Un punto  $x_0 \in A$  si chiama estremante relativo di  $f$  se  $x_0$  è un punto di massimo o di minimo relativo di  $f$ .

**Teorema 1.1.6.** (di Fermat) *Sia  $A \in \mathbb{R}$  e sia  $x_0$  un punto interno di  $A$ . Sia inoltre  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile nel punto  $x_0$ . Allora, se  $x_0$  è un estremante relativo di  $f$  risulta*

$$f'(x_0) = 0.$$

*Dimostrazione.* Per fissare le idee supponiamo  $x_0$  punto di massimo relativo di  $f$ . Allora esiste  $\rho > 0$  tale che

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in A \cap ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[.$$

Poichè  $x_0$  è interno ad  $A$ , non è restrittivo supporre  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[ \in A$ .

Pertanto, per la disequazione precedente,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \rho[$$

e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in ]x_0 - \rho, x_0[$$

Poichè  $f$  è derivabile in  $x_0$ , dalle ultime due disequazioni si trae

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

e

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Ciò prova il risultato. □

## 1.2 Funzioni derivabili in un intervallo

**Teorema 1.2.1.** (di Rolle) Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ , e sia  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  derivabile in ogni punto di  $]a, b[$ . Supponiamo

$$f(a) = f(b) .$$

Allora esiste  $c \in ]a, b[$  tale che

$$f'(c) = 0 .$$

*Dimostrazione.* Poichè  $f$  è continua in  $[a, b]$  e poichè  $[a, b]$  è compatto (essendo chiuso e limitato), per il Teorema di Weirstrass esistono  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tali che

$$f(x_1) = \max_{[a,b]} f, \quad f(x_2) = \min_{[a,b]} f .$$

Se  $x_1, x_2 \in a, b$  allora, per l'ipotesi  $f(a) = f(b)$

$$\max_{[a,b]} f = f(x_1) = f(x_2) = \min_{[a,b]} f$$

e quindi  $f$  è costante su  $[a, b]$ ; di conseguenza

$$f'(c) = 0 \quad \forall c \in ]a, b[ .$$

Se invece  $x_1 \in ]a, b[$  oppure  $x_2 \in ]a, b[$  allora per il Teorema 1.1.6., rispettivamente

$$f'(x_1) = 0 \text{ oppure } f'(x_2) = 0 .$$

Questo prova l'enunciato, con  $c = x_1$  oppure  $c = x_2$  rispettivamente nel primo e nel secondo caso.  $\square$

**Teorema 1.2.2.** *(del valor medio, di Lagrange) Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$  e sia data  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  derivabile in ogni punto di  $]a, b[$ . Allora esiste  $c \in ]a, b[$  tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) .$$

*Dimostrazione.* poniamo

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) .$$

Evidentemente  $g$  è continua in  $[a, b]$  e derivabile in ogni punto di  $]a, b[$  con derivata

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . \quad (1.2)$$

Inoltre, come si verifica immediatamente  $g(a) = g(b) (= f(a))$ . Allora per il Teorema di Rolle, esiste  $c \in ]a, b[$  tale che  $g'(c) = 0$ . Questo per la (1.2) implica

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

e quindi l'enunciato.  $\square$

**Teorema 1.2.3.** *(di Cauchy) Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ , e siano  $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$  derivabili in ogni punto di  $]a, b[$ . Supponiamo  $g'(x) \neq 0 \forall x \in ]a, b[$ . Allora esiste un punto  $c \in ]a, b[$  tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

*Dimostrazione.* Preliminarmente osserviamo che dall'ipotesi  $g'(x) \neq 0 \forall x \in ]a, b[$ , per il Teorema di Rolle, segue  $g(b) - g(a) \neq 0$ .

Poniamo

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)) .$$

Evidentemente  $h$  è continua su  $[a, b]$  e derivabile in ogni punto di  $]a, b[$  con derivata

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)) . \quad (1.3)$$

Inoltre, come si verifica immediatamente,

$$h(a) = h(b) (= f(a)g(b) - g(a)f(b)) .$$

Allora, per il Teorema di Rolle, esiste  $c \in ]a, b[$  tale che  $h'(c) = 0$ . Questo, per la (1.3) implica

$$f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

e quindi, essendo  $g'(c) \neq 0$  e  $g(b) - g(a) \neq 0$ ,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = f(b) - f(a)g(b) - g(a)$$

□

*Osservazione 1.* Sia  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in I$ . Siano poi  $f, g \in C(I, \mathbb{R})$  derivabili in ogni punto di  $I \setminus \{x_0\}$ . Supponiamo inoltre  $g'(x) \neq 0 \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ . Allora, per ogni  $x \in I \setminus \{x_0\}$  esiste  $y \in (x_0, x)$  tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} ,$$

dove  $(x_0, x) = ]x_0, x[$  se  $x > x_0$ ,  $(x_0, x) = ]x, x_0[$  se  $x < x_0$ .

Tale osservazione è dovuta al teorema precedente, applicando le restrizioni di  $f$  e  $g$  all'intervallo  $(x_0, x)$  definito nel teorema.

**Teorema 1.2.4.** *Sia  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in ogni punto di  $I$ . Allora, se  $f'(x) = 0 \forall x \in I$ ,  $f$  è costante su  $I$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $x_1, x_2 \in I$ , con  $x_1 < x_2$ . Proviamo che  $f(x_1) = f(x_2)$ . Ora, poichè  $I$  è un intervallo e poichè  $x_1, x_2 \in I$  si ha  $[x_1, x_2] \subseteq I$ . Sull'intervallo  $[x_1, x_2]$  la funzione  $f$  risulta derivabile e quindi anche continua. Allora, per il Teorema del valore medio esiste un punto  $x \in ]x_1, x_2[$  tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) .$$

Ma per ipotesi  $f'(x) = 0$ . Allora  $f(x_2) - f(x_1) = 0$  e l'affermazione è provata.  $\square$

**Teorema 1.2.5.** *Sia  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in ogni punto di  $I$ . Allora  $f$  è monotona crescente (debolmente) su  $I$  se e solo se*

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I .$$

*Dimostrazione.* Se  $f$  è monotona crescente allora, per ogni  $x \in I$  e per ogni  $y \in I \setminus \{x\}$ , risulta

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 ;$$

quindi  $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$  per ogni  $x \in I$ .

Viceversa, supponiamo  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ . Siano  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ . Ora, poichè  $I$  è un intervallo e poichè  $x_1, x_2 \in I$ , risulta  $[x_1, x_2] \subseteq I$ . Sull'intervallo  $[x_1, x_2]$   $f$  è derivabile, e quindi anche continua. Allora, per il Teorema del valor medio, esiste un punto  $x \in ]x_1, x_2[$  tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x) .$$

Ma, per ipotesi,  $f'(x) \geq 0$ . Ne viene allora che  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$  in quanto  $x_2 - x_1 > 0$ .  $\square$

*Osservazione 2.* Nelle ipotesi del teorema precedente si ha anche, banalmente dall'enunciato, che  $f$  è monotona decrescente (debolmente) su  $I$  se e solo se  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ .

**Teorema 1.2.6.** *Sia  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in ogni punto di  $I$ . Allora  $f$  è monotona strettamente crescente su  $I$  se e solo se*

(i)

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I ;$$

(ii)

l'insieme  $F = \{x \in I \text{ tale che } f'(x) = 0\}$  non ha punti interni.

*Dimostrazione.* Se  $f$  è monotona strettamente crescente su  $I$  allora, per il Teorema 1.2.5, deve essere  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ . Inoltre  $F$  non può avere punti interni in quanto, se fosse  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[ \subseteq F$  per opportuni  $x_0 \in I$  e  $\rho > 0$  si avrebbe  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  e quindi  $f$  sarebbe costante sull'intervallo  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ , contrariamente all'ipotesi di crescita stretta.

Viceversa, supponiamo che (i) ed (ii) valgano. Anzitutto, per (i) risulta  $f$  monotona crescente. Se poi, per assurdo, esistessero  $x_1, x_2 \in I$ , con  $x_1 < x_2$ , tali che  $f(x_1) = f(x_2)$ ,  $f$  risulterebbe costante sull'intervallo  $[x_1, x_2]$  dato che  $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$ . Quindi sarebbe  $]x_1, x_2[ \subseteq \{x \in I \text{ tale che } f'(x) = 0\} = F$  ed il punto  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  risulterebbe interno ad  $F$ , contrariamente ad (ii).  $\square$

*Osservazione 3.* Nelle ipotesi del teorema precedente si ha anche, banalmente dall'enunciato, che  $f$  è monotona strettamente decrescente su  $I$  se e solo se  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$  e  $F$  non ha punti interni.

**Teorema 1.2.7.** (di de l'Hopital-Bernoulli) Siano  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  e sia  $a \in D(I)$ . Siano poi  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili in ogni punto di  $I \setminus a$  e sia  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus a$ . Supponiamo infine che risulti

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty .$$

Allora se esiste

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} , \tag{1.4}$$

esiste anche

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (1.5)$$

e i due limiti coincidono.

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista il limite (1.4) e poniamolo pari a  $\lambda$ . Dobbiamo provare che anche il limite (1.5) è uguale a  $\lambda$ .

Proviamo l'affermazione nel caso di  $I = ]a, \beta[$  con  $-\infty \leq a < \beta \leq +\infty$ . In modo analogo si proverà l'affermazione nel caso  $I = ]\alpha, a[$  con  $-\infty \leq \alpha < a < \beta \leq +\infty$ . Nel caso di  $I = ]\alpha, \beta[$  con  $-\infty \leq \alpha < a < \beta \leq +\infty$  l'affermazione seguirà dalle precedenti ricordando che  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$  è vera se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda .$$

Proveremo fra poco che

$$\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \lambda . \quad (1.6)$$

Ne verrà, sostituendo  $-g$  a  $g$ ,

$$\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{-g(x)} \geq -\lambda$$

e quindi

$$\limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \lambda .$$

Da questa e da (1.6) si trae

$$\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

cioè la (1.5).

Basterà dunque provare la (1.6). Se  $\lambda = -\infty$  non vi è nulla da dimostrare. Supponiamo allora  $\lambda > -\infty$  e scegliamo, ad arbitrio,  $\mu \in \mathbb{R}, \mu < \lambda$ . Per ipotesi il limite (1.4) è uguale a  $\lambda$ , quindi esiste  $\bar{z} \in ]a, \beta[ (= I)$  tale che

$$\mu < \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad \forall z \in ]a, \bar{z}[ . \quad (1.7)$$



Siano ora  $x, y \in ]a, \bar{z}[$ ,  $x \neq y$ . Per il teorema di Cauchy esiste un punto  $z \in (x, y)$  (e quindi  $z \in ]a, \bar{z}[$ ) tale che, per la (1.7),

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} > \mu . \quad (1.8)$$

Supponiamo ora verificata l'ipotesi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  e, nella disuguaglianza

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} > \mu ,$$

passiamo al limite per  $y$  che tende ad  $a$ . Si ottiene così:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \mu \quad \forall x \in ]a, \bar{z}[ ,$$

e quindi

$$\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \mu \quad \forall \mu < \lambda .$$

Da questa segue subito la (1.6).

Supponiamo ora verificata l'ipotesi  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ . Poichè  $|g(x)| \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow a$ , non è restrittivo supporre  $|g(x)| \neq 0$  per ogni  $x \in ]a, \bar{z}[$  e quindi, poichè  $g$  è continua,  $g(x) > 0$  per ogni  $x \in ]a, \bar{z}[$  oppure  $g(x) < 0$  per ogni  $x \in ]a, \bar{z}[$ . Supponiamo, per fissare le idee,  $g(x) > 0$  per ogni  $x \in ]a, \bar{z}[$ . Allora  $g(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow a$ . Fissato  $y \in ]a, \bar{z}[$  esiste pertanto un intorno  $W$  di  $a$  tale che  $g(x) - g(y) > 0$  per ogni  $x \in W \cap ]a, \bar{z}[$ . Da (1.8) si trae quindi

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(y)}{g(y)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)$$

e, di conseguenza,

$$\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \liminf_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(y)}{g(y)} + \mu \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(y)}{g(y)} + \mu \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \right) = \mu .$$

Da questa disuguaglianza, per l'arbitrarietà di  $\mu < \lambda$ , segue la (1.6).

Questo completa la dimostrazione.  $\square$

### 1.3 Derivate d'ordine superiore

**Definizione 1.3.1.** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $A \subseteq D(A)$ , e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in ogni punto  $A$ . Se  $x_0 \in A$  si dice che  $f$  è derivabile due volte in  $x_0$ , o che  $f$  ha la derivata seconda in  $x_0$ , se esiste

$$(f')'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Tale limite si chiama derivata seconda di  $f$  in  $x_0$  e si indica con le notazioni seguenti:

$$f''(x_0), \quad D^2(f(x_0)), \quad f^{(2)}(x_0), \quad \left( \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right)_{x=x_0}.$$

Ora per iterazione si definiscono le derivate di  $f$  di ordine  $n$ , con  $n \geq 3$ , e le denoteremo con

$$f^{(n)}(x_0), \quad D^n(f(x_0)), \quad \left( \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)_{x=x_0}.$$

Se  $n \in \mathbb{N}$  indichiamo con  $C^n(A, \mathbb{R})$  l'insieme delle funzioni derivabili  $n$  volte in ogni punto di  $A$  e tali che  $f^{(n)} \in C(A, \mathbb{R})$ . Poniamo inoltre

$$C^\infty(A, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(A, \mathbb{R}).$$

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $A$  un sottoinsieme non vuoto e aperto di  $\mathbb{R}$  e siano date  $f, g \in C^n(A, \mathbb{R})$  con  $n \geq 1$ . Allora*

(i)  $f + g \in C^n(A, \mathbb{R})$  e

$$D^n(f + g)(x) = D^n f(x) + D^n g(x) \quad \forall x \in A;$$

(ii)  $\lambda f \in C^n(A, \mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  e

$$D^n(\lambda f)(x) = \lambda D^n f(x) \quad \forall x \in A;$$

(iii)  $fg \in C^n(A, \mathbb{R})$  e

$$D^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f(x) D^{n-k} g(x) \quad \forall x \in A.$$

La dimostrazione delle affermazioni (i) e (ii) è immediata (da notare che la (ii) può esser vista come caso particolare della (i)). La (iii) si dimostra per induzione; sappiamo che è vera per  $n=1$  per il teorema sulla derivazione del prodotto di due funzioni e si dimostra con semplici passaggi algebrici per  $n+1$  una volta supposta vera per  $n$ .

**Definizione 1.3.2.** Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D(A)$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , e siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se esistono un intorno  $W$  di  $x_0$  ed una costante  $M > 0$  tali che

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W, \quad (1.9)$$

scriveremo

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Se esiste  $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f(x) = \omega(x)g(x) \quad \text{e } \omega(x) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad (1.10)$$

scriveremo

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Ovviamente, se  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora esistono  $W$  intorno di  $x_0$  ed  $M \in \mathbb{R}^+$  per i quali vale la (9). Pertanto se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  esiste ed è finito allora  $f(x) = O(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ . In particolare, se  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$  allora  $f(x) = O(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## 1.4 Funzioni polinomiali in $\mathbb{R}$ . Polinomi di Taylor

**Definizione 1.4.1.** Si dice che  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una *funzione polinomiale* di grado  $\leq n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se esistono  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tali che

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se  $a_n \neq 0$  diremo che  $p$  ha grado uguale a  $n$ .

Indichiamo con  $\mathbb{P}_n$  l'insieme delle funzioni polinomiali da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  di grado  $\leq n$ .

**Proposizione 1.4.1.** *Se  $p \in \mathbb{P}_n$ ,  $n \geq 1$ , per ogni fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$  esistono  $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tali che*

$$p(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione e dimostriamo dapprima che l'affermazione è vera per  $n = 1$ .

Se  $p \in \mathbb{P}_1$  esistono  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  tali che  $p(x) = a_0 + a_1 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ; allora

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_1 x_0 = b_0 + b_1(x - x_0)$$

dove  $b_0 = a_0 + a_1 x_0$  e  $b_1 = a_1$ .

Ora supponiamo l'affermazione vera per  $n$  e proviamola per  $n+1$ . Se  $p \in \mathbb{P}_{n+1}$  esistono  $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  tali che

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

allora per ogni  $x \in \mathbb{R}$  risulta

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+1}(x^{n+1} - (x - x_0)^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k x^k + a_{n+1} x_0 (x^n + x^{n-1}(x - x_0) + \dots + x(x - x_0)^{n-1} + \\ &\quad + (x - x_0)^n) + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} \equiv q(x) + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

dove  $q \in \mathbb{P}_n$ . Per ipotesi induttiva esistono ora  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ , tali che  $q(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k$ . Pertanto, posto  $b_{n+1} = a_{n+1}$ ,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k (x - x_0)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Così per induzione l'asserto è provato. □

Risulta ora immediata la seguente affermazione

**Corollario 1.4.2.** Sia  $p \in \mathbb{P}_n$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che

$$p(x) = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0 .$$

Allora  $p \equiv 0$ .

**Lemma 1.4.3.** Per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$  fissato e per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , si ha

$$D^k(x - x_0)^n = \begin{cases} n! \frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)!} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

*Dimostrazione.* È una semplice verifica □

**Proposizione 1.4.4.** Se  $p \in \mathbb{P}_n$  allora  $p \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Inoltre, se  $p$  si scrive nella forma  $p(x) = \sum_{k=0}^n b^k(x - x_0)^k$  per un fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora

$$b_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \text{ per } k = 0, 1, \dots, n.$$

La dimostrazione è immediata dal lemma precedente.

**Teorema 1.4.5.** Siano  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $n$ -volte derivabile in  $x_0$ . Esiste allora una sola funzione polinomiale  $T \in \mathbb{P}_n$  tale che

$$f(x) = T(x) + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0 . \quad (1.11)$$

L'unica funzione polinomiale  $T$  verificante la (1.11) è la seguente:

$$T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R} . \quad (1.12)$$

La (1.11) si chiama formula di Taylor con resto di Peano. La funzione  $T$  si chiama polinomio di Taylor di  $f$  di punto iniziale  $x_0$  e di grado  $n$ . Nel seguito essa verrà anche indicata con  $T_n(f, x_0)$ .

*Dimostrazione. Unicità.* Se  $T, T^* \in \mathbb{P}_n$  e se  $f(x) = T(x) + o((x - x_0)^n)$  per  $x \rightarrow x_0$  e  $f(x) = T^*(x) + o((x - x_0)^n)$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora  $T - T^* \in \mathbb{P}_n$  e

$$(T - T^*)(x) = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0 .$$

Per il Corollario 1.4.2 ciò implica  $T = T^*$

*Esistenza.* Sia  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione polinomiale definita in (1.12). Per la Proposizione 1.4.4 risulta

$$T^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \text{ per } k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

Proviamo che risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (1.14)$$

Poichè, per  $x$  che tende a  $x_0$ ,  $f(x) - T(x) \rightarrow f(x_0) - T(x_0) = 0$  per la (1.13) e  $x - x_0 \rightarrow 0$ , per il Teorema di de l'Hopital la (1.14) è vera se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = 0. \quad (1.15)$$

D'altra parte, se  $n > 1$ , per  $x$  che tende a  $x_0$  si ha, per la (1.13)

$$f'(x) - T'(x) \rightarrow f'(x_0) - T'(x_0)$$

e  $(x - x_0)^{n-1} \rightarrow 0$ .

Ancora per il teorema di de l'Hopital la (1.15), e quindi la (1.14), è vera se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(2)}(x) - T^{(2)}(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = 0.$$

Iteriamo questo procedimento applicando ripetutamente il Teorema di de l'hopital e otteniamo che la (1.14) è vera se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = 0. \quad (1.16)$$

D'altra parte, poichè  $f^{(n-1)}(x_0) = T^{(n-1)}(x_0)$ , per  $x$  che tende a  $x_0$  si ha

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{x - x_0} = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - \frac{T^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

$\rightarrow f^{(n)}(x_0) - T^{(n)}(x_0) = 0$  (per la (1.13)).

Questo prova la (1.16) e quindi la (1.14). □

**Lemma 1.4.6.** *Siano  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $n$ -volte derivabile in ogni punto di  $I$ ,  $n \geq 1$ . Supponiamo inoltre*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ per } 0 \leq k \leq n - 1 .$$

*Allora per ogni  $x \in I \setminus \{x_0\}$  esiste  $y \in (x_0, x)$  tale che*

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} .$$

*Dimostrazione.* Proviamo dapprima l'affermazione nel caso  $n = 1$ . poichè per ipotesi  $f(x_0) = 0$ , per il Teorema del valor medio di Lagrange,  $\forall x \in I$ ,  $x \neq x_0$ , esiste  $y \in (x_0, x)$  tale che

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(y) .$$

Procediamo ora per induzione. Supponiamo vera l'affermazione per  $n$  e proviamola per  $n + 1$ . Sia dunque  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $(n + 1)$ -volte differenziabile in ogni punto di  $I$  e tale che  $f^{(k)}(x_0) = 0$  per  $0 \leq k \leq n$ . Allora  $f'$  è una funzione da  $I$  ad  $\mathbb{R}$   $n$ -volte derivabile in ogni punti di  $I$  e tale che

$$(f')^{(k)}(x_0) = 0 \text{ per } 0 \leq k \leq n - 1 .$$

D'altra parte, per ogni  $x \in I \setminus \{x_0\}$ , grazie al Teorema di Cauchy, esiste  $z \in (x_0, x)$  tale che:

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(z)}{(n + 1)(z - x_0)^n} .$$

Allora per l'ipotesi induttiva esiste  $y \in (x_0, z) (\subseteq (x_0, x))$  tale che

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(z)}{(n + 1)(z - x_0)^n} = \frac{(f')^{(n)}(y)}{(n + 1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!} .$$

Così per il principio di induzione il lemma è provato.  $\square$

**Teorema 1.4.7.** *(formula di Taylor con resto di Lagrange) Siano  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $(n + 1)$ -volte derivabile in ogni punto di  $I$ . Allora  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$  esiste  $y \in (x_0, x)$  tale che*

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} .$$

*Dimostrazione.* La funzione  $g = f - T_n(f, x_0)$  risulta  $(n + 1)$ -volte derivabile in ogni punto di  $I$  e  $g^{(k)}(x_0) = 0$  per  $0 \leq k \leq n$ . Allora, per il Lemma precedente, per ogni  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$ , esiste  $y \in (x_0, x)$ , tale che

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!}.$$

Ma, poichè  $T_n(f, x_0)$  è una funzione polinomiale di grado al più  $n$ , la sua derivata  $(n + 1)$ -esima è nulla in ogni punto. Pertanto

$$\frac{f(x) - T_n(f, x_0)(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \equiv \frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n + 1)!}.$$

ciò prova il teorema. □

## 1.5 Funzioni convesse

**Definizione 1.5.1.** Sia  $I$  un intervallo (non banale) di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f$  è convessa su  $I$  se:

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0, 1] \Rightarrow f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2).$$

Se si pone  $x = tx_1 + (1 - t)x_2$  la definizione di convessità si può scrivere anche così:

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

per ogni  $x_1, x_2 \in I$  con  $x_1 < x_2$  e per ogni  $x \in ]x_1, x_2[$ , oppure così:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

per ogni  $x_1, x_2 \in I$  con  $x_1 < x_2$  e per ogni  $x \in ]x_1, x_2[$ .

Le ultime due disequazioni sono entrambe equivalente alla seguente:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\forall x \in ]x_1, x_2[$  con  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ .



**Teorema 1.5.1.** *Siano  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in ogni punto di  $I$ . Allora  $f$  è convessa se e solo se  $f' \uparrow$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $f$  convessa. Siano  $x_1, x_2 \in I$  con  $x_1 < x_2$ .  $\forall y, z \in ]x_1, x_2[, y < z$ , si ha (dalla definizione)

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}$$

e quindi

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(z) - f(x_2)}{z - x_2} \quad \forall y, z : x_1 < y < z < x_2 .$$

Di qui, passando al limite per  $y \rightarrow x_1^+$  e per  $z \rightarrow x_2^-$ , si trae che  $f' \uparrow$ .

Viceversa, supponiamo  $f' \uparrow$  e prendiamo  $x_1, x_2, x \in I$  tali che  $x_1 < x < x_2$ . Per il Teorema del valor medio di Lagrange esistono  $y_1 \in ]x_1, x[$  e  $y_2 \in ]x, x_2[$  tali che

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(y_1)$$

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(y_2) .$$

Poichè  $y_1 \leq y_2$  risulta  $f'(y_1) \leq f'(y_2)$ , da cui

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} .$$

Ciò implica

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

e quindi, per quanto visto in precedenza, la convessità di  $f$ . □

**Corollario 1.5.2.** *Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è due volte derivabile in ogni punto di  $I$ , allora  $f$  è convessa se e solo se  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ .*

*Dimostrazione.* Immediata dai Teoremi 1.5.1 e 1.2.5. □

## 1.6 Integrale di Riemann in $\mathbb{R}$

Indicheremo a partire da qui con  $[a, b]$  l'intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  di estremi  $a$  e  $b$ , con  $a < b$ .

**Definizione 1.6.1.** Si chiama *scomposizione* di  $[a, b]$  un sottoinsieme finito  $\sigma$  di  $[a, b]$  contenente  $a$  e  $b$ . Si conviene di scrivere  $\sigma$  nel seguente modo:

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ con } x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b;$$

l'intervallo  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  si chiama  $k$ -esimo intervallo di  $\sigma$ ; definiamo inoltre

$$\text{mis } I_k = x_k - x_{k-1}.$$

Risulta ovvio che:

$$\sum_{k=1}^n \text{mis } I_k = b - a.$$

**Definizione 1.6.2.** Chiamiamo *parametro di finezza* di  $\sigma$  il numero reale

$$|\sigma| = \max\{\text{mis } I_k, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

La totalità delle scomposizioni di  $[a, b]$  si indica con  $\Omega_{[a,b]}$ . Se  $\sigma, \sigma' \in \Omega_{[a,b]}$  si dice che  $\sigma$  è più fine di  $\sigma'$  se  $\sigma \supseteq \sigma'$ .

*Osservazione 4.* Se  $\sigma$  è più fine di  $\sigma'$  allora  $|\sigma| \leq |\sigma'|$ . può valere che  $\sigma' \subseteq \sigma, \sigma' \neq \sigma$  e  $|\sigma| = |\sigma'|$ .

Sia ora  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Se  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$ , si chiama *somma superiore di  $f$  relativa a  $\sigma$*  il numero reale

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \sup_{I_k} f \cdot \text{mis } I_k;$$

analogamente si chiama *somma inferiore di  $f$  relativa a  $\sigma$*  il numero reale

$$s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \inf_{I_k} f \cdot \text{mis } I_k.$$

Risulta ovviamente  $s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \forall \sigma \in \Omega_{[a,b]}$ .

Si pone:

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{s(f, \sigma), \sigma \in \Omega_{[a,b]}\}$$

e

$$\int_a^b f(x)dx = \inf\{S(f, \sigma), \sigma \in \Omega_{[a,b]}\}.$$

Risulta che

$$\int_a^b f(x)dx \text{ e } \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

Il numero reale  $\int_a^b f(x)dx$  si chiama *integrale inferiore da a a b di f*. Il numero reale  $\int_a^b f(x)dx$  si chiama *integrale superiore da a a b di f*.

**Proposizione 1.6.1.** Per ogni funzione limitata  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  risulta

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Per dimostrare tale proposizione premettiamo il seguente

**Lemma 1.6.2.** Siano  $\sigma, \sigma' \in \Omega_{[a,b]}$  tali che  $\sigma \supseteq \sigma'$ . Allora

$$S(f, \sigma) \leq S(f, \sigma'), \quad s(f, \sigma) \geq s(f, \sigma').$$

*Dimostrazione.* Proviamo le affermazioni nel caso di  $\sigma = \sigma' \cup \{c\}$  con  $c \notin \sigma'$ ; in generale il risultato seguirà applicando queste un numero finito di volte.

Sia  $\sigma' = \{x_0, x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n\}$  e sia  $x_p < c < x_{p+1}$ . Si ha  $S(f, \sigma) - S(f, \sigma') =$

$$\sup_{[x_p, c]} f \cdot (c - x_p) + \sup_{[c, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \sup_{[x_p, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p)$$

$$\leq \sup_{[x_p, x_{p+1}]} f \cdot (c - x_p) + \sup_{[x_p, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \sup_{[x_p, x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p) = 0.$$

Analogamente si dimostra che  $s(f, \sigma) \geq s(f, \sigma')$ . □

**Corollario 1.6.3.** Per ogni  $\sigma', \sigma'' \in \Omega_{[a,b]}$  risulta

$$s(f, \sigma') \leq S(f, \sigma'').$$

*Dimostrazione.* Siano  $\sigma', \sigma'' \in \Omega_{[a,b]}$  e poniamo  $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ . Risulta  $\sigma \supseteq \sigma'$  e  $\sigma \supseteq \sigma''$ . Allora

$$s(f, \sigma') \leq s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \leq S(f, \sigma'').$$

□

*Dimostrazione.* (della Proposizione 1.6.1) Segue immediatamente dal Corollario precedente □

**Definizione 1.6.3.** Una funzione limitata  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice integrabile secondo Riemann se risulta

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx.$$

In questo caso il numero reale  $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx$  si chiama integrale di  $f$  e si indica

$$\int_a^b f(x)dx$$

Nel seguito indicheremo con  $R[a, b]$  l'insieme delle funzioni  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitate ed integrabili nel senso di Riemann

**Teorema 1.6.4.** (di Riemann) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Allora  $f \in R[a, b]$  se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \sigma \in \Omega_{[a,b]} : S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon$$

*Dimostrazione.* Se  $f \in R[a,b]$  per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\sigma' \in \Omega_{[a,b]}$  tale che

$$S(f, \sigma') < \overline{\int}_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}; \quad (1.17)$$

esiste inoltre  $\sigma'' \in \Omega_{[a,b]}$  tale che

$$s(f, \sigma'') > \int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} = \overline{\int}_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.18)$$

Sia ora  $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ . Poichè  $\sigma \supseteq \sigma'$  e  $\sigma \supseteq \sigma''$ , per il Lemma 1.6.2 si ha:

$$S(f, \sigma) \leq S(f, \sigma') \text{ e } s(f, \sigma) \geq s(f, \sigma'').$$

Pertanto da (1.17) e (1.18) si trae:

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &\leq S(f, \sigma') - s(f, \sigma'') < \\ &\int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} - \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

e quindi  $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon$ .

Viceversa, supponiamo che per ogni  $\epsilon > 0$  esista  $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$  tale che risulti  $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon$ . Si ha allora:

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx - \underline{\int}_a^b f(x)dx \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon,$$

onde  $\overline{\int}_a^b f(x)dx - \underline{\int}_a^b f(x)dx < \epsilon$ . Di qui, per l'arbitrarietà di  $\epsilon$ , si trae

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq \underline{\int}_a^b f(x)dx$$

e quindi per la Proposizione 1.6.1  $\overline{\int}_a^b f(x)dx = \underline{\int}_a^b f(x)dx$ . In altri termini  $f \in R[a, b]$  □

**Teorema 1.6.5.** *Se  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  allora  $f \in R[a, b]$*

*Dimostrazione.* Anzitutto, per il Teorema di Weierstrass,  $f$  è limitata in  $[a, b]$ . Inoltre, per il teorema di Heine-Cantor,  $f$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ . Allora per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\rho > 0$  tale che

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \rho. \quad (1.19)$$

Sia ora  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$  una scomposizione dell'intervallo  $[a, b]$  con parametro di finezza  $|\sigma| < \rho$ . Si ha allora

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f) \text{mis } I_k. \quad (1.20)$$

Ora, per il Teorema di Weierstrass, per ogni  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , esistono  $x'_k, x''_k \in I_k$  tali che

$$f(x'_k) = \sup_{I_k} f, \quad f(x''_k) = \inf_{I_k} f. \quad (1.21)$$

D'altra parte  $|x'_k - x''_k| \leq \text{mis } I_k \leq |\sigma| < \rho \forall k = 1, 2, \dots, n$ . Allora, per la (1.19),  $f(x'_k) - f(x''_k) < \epsilon$ , e quindi per la (1.20) e per la (1.21),

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \sum_{k=1}^n \epsilon \text{mis } I_k = \epsilon(b - a).$$

Ciò, per il Teorema di Riemann da poco enunciato, prova che  $f \in R[a, b]$ .  $\square$

**Proposizione 1.6.6.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona. Allora  $f \in R[a, b]$ .*

*Dimostrazione.* Per fissare le idee supponiamo  $f$  monotona crescente. Allora  $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in [a, b]$  e quindi  $f$  è limitata. Sia ora  $\epsilon > 0$  e sia  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$  tale che  $|\sigma| < \epsilon$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \text{mis } I_k \\ &\leq |\sigma| \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) < \epsilon(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Ciò, per il Teorema di Riemann, prova che  $f \in R[a, b]$ .  $\square$

**Teorema 1.6.7.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e sia  $c \in ]a, b[$ . Allora  $f \in R_{[a,b]}$  se e solo se  $f \in R_{[a,c]}$  e  $f \in R_{[c,b]}$ . In tale caso risulta*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

*Dimostrazione.* Siano  $\sigma' \in \Omega_{[a,c]}$  e  $\sigma'' \in \Omega_{[c,b]}$ . Poniamo  $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ . Allora  $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$  e

$$S(f, \sigma) = S(f, \sigma') + S(f, \sigma'').$$

Di conseguenza, dato che  $\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq S(f, \sigma)$ , si ha

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq S(f, \sigma') + S(f, \sigma'') \quad \forall \sigma' \in \Omega_{[a,c]}, \quad \forall \sigma'' \in \Omega_{[c,b]},$$

e quindi

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq \overline{\int}_a^c f(x)dx + \overline{\int}_c^b f(x)dx. \quad (1.22)$$

Sia ora  $\sigma$  una arbitraria scomposizione di  $[a, b]$ . Poniamo  $\sigma^* = \sigma \cup \{c\}$ . Allora esistono  $\sigma' \in \Omega_{[a,c]}$  e  $\sigma'' \in \Omega_{[c,b]}$  tali che  $\sigma^* = \sigma' \cup \sigma''$ . Si ha quindi

$$\overline{\int}_a^c f(x)dx + \overline{\int}_c^b f(x)dx \leq S(f, \sigma') + S(f, \sigma'') = S(f, \sigma^*) \leq S(f, \sigma).$$

Da qui, per l'arbitrarietà di  $\sigma$ , si trae

$$\overline{\int}_a^c f(x)dx + \overline{\int}_c^b f(x)dx \leq \overline{\int}_a^b f(x)dx,$$

quindi, per la (1.22),

$$\overline{\int}_a^c f(x)dx + \overline{\int}_c^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx. \quad (1.23)$$

Analogamente si prova che

$$\underline{\int}_a^c f(x)dx + \underline{\int}_c^b f(x)dx \leq \underline{\int}_a^b f(x)dx.$$

Pertanto, poichè  $\underline{\int}_a^c \leq \overline{\int}_a^c$ ,  $\underline{\int}_c^b \leq \overline{\int}_c^b$ , si ha

$$\begin{aligned} f \in R_{[a,b]} &\iff \underline{\int}_a^b = \overline{\int}_a^b \iff \\ \underline{\int}_a^c f(x)dx + \underline{\int}_c^b f(x)dx &= \overline{\int}_a^c f(x)dx + \overline{\int}_c^b f(x)dx \iff \\ \underline{\int}_a^c f(x)dx = \overline{\int}_a^c f(x)dx, \quad \underline{\int}_c^b f(x)dx &= \overline{\int}_c^b f(x)dx \iff \\ f \in R_{[a,c]} \text{ e } f \in R_{[c,b]}. \end{aligned}$$

Ciò prova la prima parte del Teorema. La seconda segue dalla (1.23).  $\square$

**Teorema 1.6.8.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata, continua su  $]a, b[$ . Allora  $f \in R_{[a,b]}$ .*

*Dimostrazione.* Fissiamo ad arbitrio  $\epsilon > 0$ . Esistono  $a_1, b_1 \in ]a, b[$  con  $a_1 < b_1$ , tali che

$$\left( \sup_{[a, a_1]} f - \inf_{[a, a_1]} f \right) (a_1 - a) < \epsilon/3 \quad (1.24)$$

$$\left( \sup_{[b_1, b]} f - \inf_{[b_1, b]} f \right) (b - b_1) < \epsilon/3 \quad (1.25)$$

Sia poi  $\sigma' \in \Omega_{[a_1, b_1]}$  tale che

$$S(f, \sigma') - s(f, \sigma') < \epsilon/3 \quad (1.26)$$

(tale scomposizione esiste in quanto  $f$  è continua quindi integrabile su  $[a_1, b_1]$ ). In definitiva, posto  $\sigma = \{a\} \cup \sigma' \cup \{b\}$  risulta  $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$  e per le (1.24), (1.25) e (1.26)

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon$$

Ciò, per il Teorema di Riemann, prova l'enunciato. □

**Teorema 1.6.9.** *Siano  $f, g \in R_{[a,b]}$ . Allora:*

(i)

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

(ii)  $\lambda f \in R_{[a,b]}$  e

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx;$$

(iii) se  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

(iv)  $|f| \in R_{[a,b]}$  e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$



*Dimostrazione.* (i) Siano  $\sigma', \sigma''$  arbitrarie scomposizioni di  $[a, b]$ . Poniamo  $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ . Allora, poichè  $\sigma$  è più fine tanto di  $\sigma'$  quanto di  $\sigma''$ , si ha, notando anche che  $f + g$  è limitata:

$$\begin{aligned} \overline{\int}_a^b (f(x) + g(x))dx &\leq S(f + g, \sigma) \leq S(f, \sigma) + S(g, \sigma) \leq \\ &\leq S(f, \sigma') + S(g, \sigma''). \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \overline{\int}_a^b (f(x) + g(x))dx &\leq \overline{\int}_a^b f(x)dx + \overline{\int}_a^b g(x)dx = \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

Analogamente si mostra che

$$\underline{\int}_a^b (f(x) + g(x))dx \geq \underline{\int}_a^b f(x)dx + \underline{\int}_a^b g(x)dx.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \overline{\int}_a^b (f(x) + g(x))dx &\leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \\ &\leq \underline{\int}_a^b (f(x) + g(x))dx \leq \overline{\int}_a^b (f(x) + g(x))dx. \end{aligned}$$

Notando che in questa catena di disuguaglianze il primo e l'ultimo membro coincidono allora tutti i segni di  $\leq$  sono in effetti segni di uguaglianza; ciò prova (i).

(ii) Se  $\lambda = 0$  l'affermazione è banale. Se  $\lambda > 0$  la (ii) si trae dalle seguenti identità:

$$\lambda S(f, \sigma) = S(\lambda f, \sigma), \quad \lambda s(f, \sigma) = s(\lambda f, \sigma).$$

Infine se  $\lambda < 0$  l'affermazione segue dalle seguenti identità:

$$\lambda S(f, \sigma) = s(\lambda f, \sigma), \quad \lambda s(f, \sigma) = S(\lambda f, \sigma).$$

(iii) Dall'ipotesi si ha che  $S(f, \sigma) \leq S(g, \sigma) \forall \sigma \in \Omega_{[a,b]}$ . Quindi

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx \leq \overline{\int}_a^b g(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

(iv) Fissato  $\epsilon > 0$  ad arbitrio, scegliamo  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$  tale che  $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon$ . Allora, sfruttando il fatto che per ogni funzione limitata  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si ha  $\sup |f| - \inf |f| \leq \sup f - \inf f$ , risulta:

$$\begin{aligned} S(|f|, \sigma) - s(|f|, \sigma) &= \sum_{k=1}^n \left( \sup_{I_k} |f| - \inf_{I_k} |f| \right) \text{mis } I_k \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left( \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right) \text{mis } I_k \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon. \end{aligned}$$

Ciò, per il Teorema di Riemann, prova che  $|f| \in R_{[a,b]}$ .

ora, poichè  $f, -f \leq |f|$  per la (iii) e per la (ii), si ha

$$\int_a^b f(x)dx, - \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &= \max \left\{ \int_a^b f(x)dx, - \int_a^b f(x)dx \right\} \\ &\leq \int_a^b |f(x)|dx. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.6.10.** (della media integrale) Sia  $f \in R_{[a,b]}$ . Posto

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

risulta

$$\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f.$$

*Dimostrazione.* Basta ricordare che, per ogni  $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$ , si ha

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq S(f, \sigma) \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

e quindi, essendo  $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx$ ,

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

Dunque, per com'è definita  $\mu$  si ha

$$\inf [a, b]f \leq \mu \leq \sup [a, b]f.$$

Se  $f \in R[a, b]$  e se  $\alpha, \beta \in [a, b]$  con  $\alpha > \beta$ , si pone

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx.$$

Se  $\alpha = \beta$  si pone

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0.$$

Si riconosce facilmente che per ogni  $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$  si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx.$$

Inoltre, se  $\alpha \neq \beta$ ,

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \mu$$

con  $\inf_{(\alpha, \beta)} f \leq \mu \leq \sup_{(\alpha, \beta)} f$ . □

**Teorema 1.6.11.** (*teorema fondamentale del calcolo integrale*) Sia  $f \in R[a, b]$ .

Poniamo

$$I_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Allora:

(i)  $I_f$  è continua in ogni punto di  $[a, b]$ ;

(ii) se  $f$  è continua in  $x_0$ , allora  $I_f$  è derivabile in  $x_0$  e si ha

$$I'_f(x_0) = f(x_0).$$

*Dimostrazione.* Sia  $x_0$  un punto qualsiasi di  $[a, b]$  e sia  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $x_0 + h \in [a, b]$ . Si ha

$$\begin{aligned} I_f(x_0 + h) - I_f(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = \mu(h)h \end{aligned}$$

dove  $\mu(h) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ , e quindi per il Teorema della media integrale

$$\inf_{(x_0, x_0+h)} f \leq \mu(h) \leq \sup_{(x_0, x_0+h)} f.$$

In particolare  $|\mu(h)| \leq \sup_{[a,b]} |f|$ . Pertanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} (I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)) = 0.$$

Così è provato (i). Sia ora  $x_0$  un punto di continuità di  $f$ . Allora, per ogni  $\epsilon > 0 \exists \rho > 0$  tale che, per ogni  $t \in [a, b]$  con  $|t - x_0| < \rho$ , si ha

$$f(x_0) - \epsilon < f(t) < f(x_0) + \epsilon,$$

e quindi  $f(x_0) - \epsilon < f(t) < f(x_0) + \epsilon \forall t \in (x_0, x_0 + h)$  se  $h < \rho$ . Da queste disuguaglianze, integrando su  $(x_0, x_0 + h)$  e dividendo per  $h$ , si ottiene

$$f(x_0) - \epsilon < \mu(h) < f(x_0) + \epsilon \text{ se } |h| < \rho.$$

Allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu(h) = f(x_0).$$

Ciò prova (ii) in quanto

$$\mu(h) = \frac{I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)}{h}.$$

□

**Corollario 1.6.12.** Se  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  allora  $I_f$  è derivabile in ogni punto di  $[a, b]$  e

$$I'_f(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

**Corollario 1.6.13.** Sia  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  e sia  $x_0 \in [a, b]$ . Posto  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$G(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

risulta  $G'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

*Dimostrazione.* Basta osservare che si ha

$$G(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt = C + I_f(x)$$

per ogni  $x \in [a, b]$ , con  $C = \int_{x_0}^a f(t) dt$ .  $\square$

**Definizione 1.6.4.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si chiama primitiva di  $f$  una qualunque funzione  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in ogni punto di  $[a, b]$  e tale che  $\phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

*Osservazione 5.* Per il Corollario 1.6.12 ogni funzione continua  $f$  ha almeno una primitiva: la sua funzione integrale  $I_f$ .

*Osservazione 6.* Si nota facilmente che se  $\phi$  e  $\phi_1$  sono primitive di  $f$  allora  $\phi - \phi_1$  è costante.

**Teorema 1.6.14.** Sia  $f \in R[a, b]$  e sia  $\phi$  una primitiva di  $f$ . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = [\phi(x)]_a^b,$$

dove per definizione

$$[\phi(x)]_a^b = \phi(b) - \phi(a).$$

*Dimostrazione.* Poichè  $f$  è integrabile su  $[a, b]$ , fissato ad arbitrio  $\epsilon > 0$  per il Teorema di Riemann esiste una scomposizione  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\} \in \Omega_{[a, b]}$  tale che

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon. \quad (1.27)$$

Osserviamo ora che si può scrivere

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi(x_n) - \phi(x_0) = \sum_{k=1}^n (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})). \quad (1.28)$$

D'altra parte, per il Teorema del valor medio, esiste  $y_k \in ]x_{k-1}, x_k[$  tale che

$$\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}) = \phi'(y_k)(x_k - x_{k-1})$$

essendo  $\phi$  una primitiva di  $f$ . Sostituendo quest'ultima equazione nella (1.28) si ottiene

$$\begin{aligned} \phi(b) - \phi(a) &= \sum_{k=1}^n f(y_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= S(f, \sigma) < s(f, \sigma) + \epsilon \text{ (per la (1.27))} \\ &\leq \int_a^b f(x)dx + \epsilon. \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che

$$\phi(b) - \phi(a) \geq \int_a^b f(x)dx - \epsilon.$$

Dalle ultime 2 disuguaglianze e per l'arbitrarietà di  $\epsilon$  si ottiene l'asserto.  $\square$

**Corollario 1.6.15.** *Se  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  allora*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  quindi  $f' \in R_{[a, b]}$ . Inoltre ovviamente  $f$  è una primitiva di  $f'$ ; allora per il Teorema precedente

$$\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

$\square$

Analizziamo brevemente alcune differenze tra nozione di integrale e di primitiva. Abbiamo visto che una funzione integrabile e dotata di primitiva ha l'integrale pari alla differenza dei valori della primitiva stessa agli estremi

dell'intervallo di integrazione. Tuttavia l'esistenza di una primitiva non è condizione necessaria di integrabilità. D'altra parte l'esistenza di una primitiva non è neppure condizione sufficiente di integrabilità.

Enunciamo ora due importanti teoremi della teoria di integrazione molto utili anche per la risoluzione di esercizi. Non riporteremo però le dimostrazioni in quanto facili e non di nostro interesse per gli argomenti trattati in questo testo.

**Teorema 1.6.16.** (*integrazione per parti*) Siano  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  e  $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ . Sia poi  $F$  una primitiva di  $f$ . Allora

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

**Teorema 1.6.17.** (*cambiamento di variabile negli integrali*) Sia  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  e sia  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  biettiva. Allora se  $\varphi$  è di classe  $C^1$ , si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

## 1.7 Formula di Taylor con resto integrale. Primitive di ordine superiore

**Definizione 1.7.1.** Sia  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$ , sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $n \in \mathbb{N}$ . Una funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice che è una *primitiva di ordine  $n$  di  $f$*  se:

(i)  $g$  è derivabile  $n$  volte in ogni punto di  $I$ ;

(ii)  $g^{(n)}(x) = f(x)$  per ogni  $x \in I$ .

**Teorema 1.7.1.** Sia  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$  e sia  $f \in C(I, \mathbb{R})$ . Allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $f$  ha almeno una primitiva di ordine  $n$ .

*Dimostrazione.* Ragioniamo per induzione. Anzitutto se  $n = 1$  l'affermazione discende dal Corollario 1.6.13. Supponiamo ora vero l'enunciato del Teorema per  $n = p$  e proviamolo per  $n = p + 1$ . Sia  $g_p$  una primitiva di ordine  $p$  di  $f$  e, fissato  $x_0 \in I$  definiamo

$$g_{p+1} : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{p+1}(x) = \int_{x_0}^x g_p(t) dt.$$

Per il Corollario 1.6.13  $g_{p+1} \in C^1(I, \mathbb{R})$  e  $g'_{p+1}(x) = g_p(x) \forall x \in I$ . Ma per ipotesi induttiva  $g_p \in C^p(I, \mathbb{R})$  e  $g_p^{(p)}(x) = f(x) \forall x \in I$ . Dunque  $g_{p+1} \in C^{p+1}(I, \mathbb{R})$  e  $g_{p+1}^{(p+1)}(x) = g_p^{(p)}(x) = f(x) \forall x \in I$ . Quindi il Teorema è provato per induzione.  $\square$

**Teorema 1.7.2.** (*formula di Taylor con resto integrale*) Sia  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$ , sia  $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e sia  $x_0 \in I$ . Allora

$$f(x) = T_n(f, (x_0))(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad (1.29)$$

*Dimostrazione.* Per il Corollario 1.6.15 per ogni  $x_0, x \in I$  risulta

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0)$$

in quanto  $f'$  è continua e  $f$  è una primitiva di  $f'$ .

La precedente identità si può anche scrivere così:

$$f(x) = \int_{x_0}^x f'(t) dt + f(x_0)$$

che è la (1.29) per  $n = 0$ . Ragioniamo ora per induzione. Supponiamo vera la (1.29) per  $n = p$  e proviamola per  $n = p + 1$ . Sia dunque  $f \in C^{(p+2)}(I, \mathbb{R})$ . Per ipotesi induttiva abbiamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{p!} \int_{x_0}^x (x-t)^p f^{(p+1)}(t) dt. \quad (1.30)$$

Ma ora, essendo  $f^{(p+1)} \in C^1(I, \mathbb{R})$ , per il Teorema di integrazione per parti si ha

$$\frac{1}{p!} \int_{x_0}^x (x-t)^p f^{(p+1)}(t) dt =$$



$$\begin{aligned}
 &= \left[ -\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t) \right]_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{(p+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{p+1} f^{(p+2)}(t) dt \\
 &= \frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!} (x-x_0)^{p+1} + \frac{1}{(p+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{p+1} f^{(p+2)}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Sostituendo questa nella (1.30) si ottiene

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(p+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{p+1} f^{(p+2)}(t) dt$$

che è la (1.29) nel caso di  $n = p + 1$ . Il Teorema segue quindi per induzione.  $\square$

**Teorema 1.7.3.** *Sia  $I$  un intervallo non banale di  $\mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in I$  e sia  $g$  una primitiva di ordine  $n + 1$  di  $f$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Esiste allora una funzione polinomiale  $P \in \mathbb{P}_n$  tale che*

$$g(x) = P(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f(t) dt. \quad (1.31)$$

*Viceversa, ogni funzione del tipo (1.31) è una primitiva di ordine  $n + 1$  di  $f$ .*

*Dimostrazione.* Se  $g$  è una primitiva di ordine  $n + 1$  di  $f$  allora per il Teorema 1.42 vale la (1.31) con

$$P = T_n(g, x_0).$$

Viceversa, sia  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione del tipo (1.31). Sia poi  $h \in C^{(n+1)}(I, \mathbb{R})$  una primitiva di ordine  $n + 1$  di  $f$ . Allora, ancora per il Teorema 1.7.2 si ha

$$h(x) = T_n(h, x_0)(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f(t) dt.$$

Pertanto  $g = P - T_n(h, x_0) + h$ . Di conseguenza  $g \in C^{(n+1)}(I, \mathbb{R})$ . Inoltre, essendo  $P - T_n(h, x_0)$  un polinomio di grado non superiore ad  $n$ ,

$$D^{n+1}g = D^{n+1}h = f.$$

$\square$



# Capitolo 2

## Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$

### 2.1 Richiami di funzioni lineari

Indichiamo con  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$  l'insieme delle funzioni lineari da  $\mathbb{R}^N$  a  $\mathbb{R}^m$ . Ricordiamo che se  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$  esiste una ed una sola matrice  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$  tale che  $T(\alpha) = A\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^N$ , con  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$  insieme delle matrici  $m \times N$  a termini reali,  $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, N}$ ; tale  $A$  è detta *matrice associata* a  $T$ .

Se  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$  si pone

$$\|T\| = \max\{|T(\alpha)|, \alpha \in \mathbb{R}^N, |\alpha| = 1\}.$$

Si verifica facilmente che la funzione  $T \rightarrow \|T\|$  è una norma in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$  e che  $|T(\alpha)| \leq \|T\| |\alpha| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^N$ .

### 2.2 Funzioni differenziabili

**Definizione 2.2.1.** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \Omega$ . Si dice che  $f$  è differenziabile in  $a$  se esiste una funzione lineare  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{|h|} = 0 \quad (2.1)$$

o equivalentemente, che

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + \omega(h)|h| \quad \forall h \in \mathbb{R}^N : a+h \in \Omega, \text{ con } \omega(h) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

**Proposizione 2.2.1.** *Esiste al più una funzione lineare  $T$  verificante (2.1).*

*Dimostrazione.* Siano  $T, T' : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$  due funzioni lineari verificanti entrambe la (2.1). Esistono allora  $\omega, \omega'$  entrambe infinitesime per  $h \rightarrow 0$  per le quali risulta:

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + \omega(h)|h|,$$

$$f(a+h) = f(a) + T'(h) + \omega'(h)|h|,$$

per ogni  $h \in \mathbb{R}^N : a+h \in \Omega$ . Di qui, sottraendo membro a membro, segue

$$(T - T')(h) = (\omega'(h) - \omega(h))|h|$$

per ogni  $h \in \mathbb{R}^N : a+h \in \Omega$ . Ora, poichè  $\Omega$  è aperto, esiste  $\delta > 0$  tale che

$$a+h \in \Omega \quad \forall h \in \mathbb{R}^N : |h| < \delta.$$

In particolare, per ogni fissato  $u \in \mathbb{R}^N$ , risulta  $a+tu \in \Omega$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  tale che  $|t| |u| < \delta$ . D'altra parte, per la linearità di  $T$  e  $T'$

$$(T - T')(u) = \frac{(T - T')(tu)}{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Allora

$$\begin{aligned} (T - T')(u) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(T - T')(tu)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (\omega'(tu) - \omega(tu)) \frac{|tu|}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (\omega'(tu) - \omega(tu)) |u| = 0. \end{aligned}$$

Pertanto  $(T - T')(u) = 0$  per ogni  $u \in \mathbb{R}^N$  e la Proposizione è provata.  $\square$

Se  $f$  è differenziabile in  $a$  la funzione lineare (che abbiamo visto essere unica)  $T$  che figura nella (2.1) si chiama *differenziale di  $f$  in  $a$*  e si indica

$$df(a).$$

Osserviamo che una funzione  $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile in  $a$  se e solo se  $f_j$  è differenziabile in  $a$  per ogni  $j = 1, \dots, m$ . In questo caso

$$df(a) = (df_1(a), \dots, df_m(a)).$$

**Definizione 2.2.2.** Siano  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $a \in \Omega$ ,  $u \in \mathbb{R}^N$ . Si dice che  $f$  è derivabile (parzialmente) nel punto  $a$  rispetto ad  $u$  se esiste in  $\mathbb{R}^m$  il limite seguente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Tale limite si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a)$$

e si chiama derivata (parziale) di  $f$  in  $a$  rispetto ad  $u$ . Nel caso  $u = e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , ove 1 è la  $k$ -esima componente di  $e_k$ , si usa la notazione

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Osserviamo che  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  è la derivata (ordinaria) della funzione

$$x_k \rightarrow f(a_1, \dots, x_k, \dots, a_N)$$

nel punto  $a_k$ .

**Teorema 2.2.2.** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $a \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Se  $f$  è differenziabile in  $a$  allora

(i)  $f$  è continua in  $a$ ;

(ii)  $f$  è parzialmente derivabile in  $a$  rispetto ad ogni vettore  $u \in \mathbb{R}^N$  e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a)(u).$$

*Dimostrazione.* Per brevità poniamo  $df(a) = T$ . Poichè  $T$  è continua si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = T(0) = 0$$

ed allora, per la (2.2),

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + T(h) + \omega(h)|h|) = f(a).$$

ciò prova la (i).

D'altra parte, per ogni  $u \in \mathbb{R}^n$ , sempre per la (2.2), si ha

$$\frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \frac{T(tu) + \omega(tu)|t||u|}{t} = T(u) + \omega(tu)\frac{|t|}{t}|u| \rightarrow T(u)$$

per  $t$  che tende a 0 in quanto  $\omega(tu) \rightarrow 0$  per  $t$  che tende a 0 e perchè la funzione  $t \rightarrow \frac{|t|}{t}$  è limitata (vale 1 oppure -1).

Pertanto  $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$  esiste e si ha  $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = T(u)$ .  $\square$

Si verifica facilmente che se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  allora  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile in  $a \in \Omega$  se e solo se esiste in  $\mathbb{R}^m$  il seguente limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

In tal caso questo limite viene denotato con  $f'(a)$  oppure con  $\frac{df}{dt}(a)$ .

Risulta inoltre  $df(a)(t) = tf'(a)$ .

*Osservazione 7.* Se  $f = (f_1, \dots, f_m)$  allora  $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$  esiste se e solo se esistono  $\frac{\partial f_1}{\partial u}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial u}(a)$ . Si ha poi

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial u}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial u}(a) \right).$$

**Definizione 2.2.3.** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $a \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Se esistono  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)$ , il vettore di  $\mathbb{R}^N$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right)$$

si chiama *gradiente di  $f$  in  $a$*  e si indica

$$\nabla f(a) \text{ oppure } \text{grad } f(a) \text{ oppure } Df(a).$$

**Definizione 2.2.4.** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $a \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Se esistono  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)$ , la matrice

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_f(a) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right] \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

si chiama *matrice jacobiana di f in a*.

*Osservazione 8.* Se  $f$  è differenziabile in  $a$  allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df(a)(e_k), \quad k = 1, \dots, N,$$

quindi  $\mathcal{J}_f(a) = [df(a)(e_1), \dots, df(a)(e_N)]$  quindi la matrice jacobiana di  $f$  in  $a$  è la matrice associata a  $df(a)$  rispetto alle basi canoniche di  $\mathbb{R}^N$  e di  $\mathbb{R}^m$ .

Pertanto

$$df(a)(h) = \mathcal{J}_f(a)h \quad \forall h \in \mathbb{R}^N.$$

*Osservazione 9.*  $f$  è differenziabile in  $a$  se e solo se esiste  $\mathcal{J}_f(a)$  ed inoltre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathcal{J}_f(a)h}{|h|} = 0$$

*Dimostrazione.* Se  $f$  è differenziabile in  $a$  allora, per il Teorema 2.2.2 esiste  $\mathcal{J}_f(a)$ , inoltre, per la precedente Osservazione

$$df(a)(h) = \mathcal{J}_f(a)h \quad \forall h \in \mathbb{R}^N$$

e l'enunciato segue dalla (2.1).

Viceversa se vale la tesi, poichè  $h \rightarrow \mathcal{J}_f(a)h$  è lineare,  $f$  è differenziabile nel punto  $a$ .  $\square$

*Osservazione 10.* Nel caso di  $f$  a valori reali la matrice jacobiana di  $f$  ha una sola riga: il gradiente di  $f$ .

**Teorema 2.2.3.** *Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $a \in \Omega$ ,  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  sono differenziabili in  $a$  allora  $\lambda f + \mu g$  è differenziabile in  $a$  e risulta*

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a),$$

per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Per ipotesi, per ogni  $h \in \mathbb{R}^N$  tale che  $a + h \in \Omega$ , si ha:

$$f(a + h) - f(a) = df(a)(h) + \omega_1(h)|h| \text{ con } \omega_1(h) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

e

$$g(a + h) - g(a) = dg(a)(h) + \omega_2(h)|h| \text{ con } \omega_2(h) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0.$$

Allora

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(a + h) - (\lambda f + \mu g)(a) &= (\lambda df(a) + \mu dg(a))(h) \\ &\quad + (\omega_1(h) + \omega_2(h))|h|. \end{aligned}$$

poichè  $\lambda df(a) + \mu dg(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$  e  $(\omega_1(h) + \omega_2(h)) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ , ciò prova che  $\lambda f + \mu g$  è differenziabile in  $a$  e che

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

□

**Teorema 2.2.4.** *Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $O$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ ,  $f : \Omega \rightarrow O$  e  $g : O \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Sia poi  $a \in \Omega$ . Supponiamo  $f$  differenziabile in  $a$  e  $g$  differenziabile in  $f(a)$ . Allora  $g \circ f$  è differenziabile in  $a$  e si ha:*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $h \in \mathbb{R}^N$  tale che  $a + h \in \Omega$  si ha:

$$f(a + h) - f(a) = df(a)(h) + \omega(h)|h| \text{ con } \omega(h) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Analogamente, per ogni  $y \in O$ , si ha:

$$g(y) - g(f(a)) = dg(f(a))(y - f(a)) + \omega_1(y - f(a))|y - f(a)| \quad (2.4)$$



con  $\omega_1(0) = 0$  e  $\omega_1(y - f(a)) \rightarrow 0$  per  $y \rightarrow f(a)$ .

Da (2.3) e da (2.4) si ottiene:

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(f(a)) &= dg(f(a))(f(a+h) - f(a)) \\ &+ \omega_1(f(a+h) - f(a))|f(a+h) - f(a)| \\ &= dg(f(a))(df(a)(h) + \omega(h)|h|) \\ &+ \omega_1(f(a+h) - f(a))|f(a+h) - f(a)| \\ &= (dg(f(a)) \circ df(a))(h) + \omega^*(h)|h| \end{aligned}$$

dove abbiamo posto, per  $h \neq 0$ ,

$$\omega^*(h) = dg(f(a))(\omega(h)) + \omega_1(f(a+h) - f(a)) \frac{|f(a+h) - f(a)|}{|h|}.$$

Ci basta allora dimostrare che  $\omega^*(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ . Poichè  $\omega(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$  risulta  $dg(f(a))(\omega(h)) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ . Inoltre, essendo  $f$  continua in  $a$  in quanto differenziabile in  $a$ , si ha  $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$  e quindi  $\omega_1(f(a+h) - f(a)) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ . Risulta poi

$$\begin{aligned} \frac{|f(a+h) - f(a)|}{|h|} &= \left| df(a) \left( \frac{h}{|h|} \right) + \omega(h) \right| \leq \left| df(a) \left( \frac{h}{|h|} \right) \right| + |\omega(h)| \\ &\leq \|df(a)\| + |\omega(h)| \end{aligned}$$

per una nota proprietà della norma in precedenza osservata.

Pertanto  $\omega^*(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$  quindi il Teorema risulta provato.  $\square$

*Osservazione 11.* Nelle ipotesi del Teorema precedente vale:

$$\mathcal{J}_{g \circ f}(a) = \mathcal{J}_g(f(a)) \cdot \mathcal{J}_f(a).$$

Posto  $G = g \circ f$  risulta inoltre

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, N.$$

In particolare se  $g$  ha valori reali ( $p = 1$ )

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} g(f_1, \dots, f_m) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, N$$

cioè

$$\nabla G = \nabla g \cdot \mathcal{J}_f. \quad (2.5)$$

Se poi anche  $N = 1$  allora  $G$  è una funzione reale di variabile reale e

$$G' = \frac{d}{dx}g(f_1, \dots, f_m) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k} f'_k = \langle \nabla g, f' \rangle. \quad (2.6)$$

### 2.3 Teoremi del valor medio

Ricordiamo la definizione di segmento: se  $x, y \in \mathbb{R}^N$  si chiama segmento di estremi  $x$  e  $y$  l'insieme

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$$

**Teorema 2.3.1.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in ogni punto di  $\Omega$ . Allora per ogni  $x, y \in \Omega$  tale che  $[x, y] \subseteq \Omega$  esiste  $z \in [x, y]$  tale che*

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(z), (y - x) \rangle.$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t) = f(x + t(y - x))$ . Per il Teorema 2.2.4  $F$  è differenziabile in ogni punto di  $]0, 1[$  e per la (2.6)

$$F'(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), (y - x) \rangle, \quad \forall t \in ]0, 1[.$$

Inoltre, in quanto composizione di funzioni continue,  $F$  è continua in  $[0, 1]$ . Per il Teorema del valor medio di Lagrange esiste allora  $\tau \in ]0, 1[$  tale che  $F(1) - F(0) = F'(\tau)$ . Quindi, posto  $z = x + \tau(y - x)$ ,

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= F(1) - F(0) = F'(\tau) \\ &= \langle \nabla f(x + \tau(y - x)), (y - x) \rangle = \langle \nabla f(z), y - x \rangle. \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.3.2.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenziabile in ogni punto di  $\Omega$ . Siano poi  $x, y \in \Omega$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ . Allora, se  $[x, y] \subseteq \Omega$ , esiste  $z \in [x, y]$  tale che*

$$\langle f(y) - f(x), u \rangle = \langle \mathcal{J}_f(z)(y - x), u \rangle. \quad (2.7)$$

Nel caso  $m = 1$  prendendo  $u = 1$ , si ottiene il Teorema precedente dunque questo ne è una sua generalizzazione.

*Dimostrazione.* Poniamo  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t) = \langle f(x) + t(y - x), u \rangle$ . Ovviamente  $F$  è continua su  $[0, 1]$  e per ogni  $t \in ]0, 1[$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^m f_i(x + t(y - x)) u_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \nabla f_i(x + t(y - x)), (y - x) \rangle u_i = \\ &= \sum_{i=1}^m (\mathcal{J}_f(x + t(y - x)) \cdot (y - x))_i u_i = \\ &\quad \langle \mathcal{J}_f(x + t(y - x)) \cdot (y - x), u \rangle . \end{aligned}$$

Per il Teorema del valor medio di Lagrange esiste allora un punto  $\tau \in ]0, 1[$  tale che  $F(1) - F(0) = F'(\tau)$ . Quindi, posto  $z = x + \tau(y - x)$  risulta  $z \in [x, y]$  e

$$\langle f(y) - f(x), u \rangle = F(1) - F(0) = \langle \mathcal{J}_f(z)(y - x), u \rangle .$$

□

**Corollario 2.3.3.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenziabile in ogni punto di  $\Omega$ . Siano poi  $x, y \in \Omega$  tali che  $[x, y] \subseteq \Omega$ . Esiste allora  $z \in [x, y]$  tale che*

$$|f(y) - f(x)| \leq \|\mathcal{J}_f(z)\| |y - x|. \quad (2.8)$$

La dimostrazione di tale Corollario segue dalla (2.7) e dalla disuguaglianza di Cauchy-schwarz.

*Osservazione 12.* Nel caso di  $m = 1$  la (2.8) diventa:

$$|f(y) - f(x)| \leq |\nabla f(z)| |y - x|. \quad (2.9)$$

Nel caso  $N = 1$  possiamo scrivere

$$|f(y) - f(x)| \leq |f'(z)| |y - x|.$$

## 2.4 Funzioni di classe $C^1$

**Definizione 2.4.1.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ . Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice di classe  $C^1$  su  $\Omega$  se esistono  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}$  in ogni punto di  $\Omega$  e se le funzioni

$$x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)$$

sono continue in  $\Omega$ .

Indichiamo con  $C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  l'insieme delle funzioni da  $\Omega$  a  $\mathbb{R}^m$  di classe  $C^1$  su  $\Omega$ .

Ovviamente, se  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , risulta

$$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \iff f_j \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (2.10)$$

**Teorema 2.4.1.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Allora  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Per la (2.10) possiamo supporre  $m = 1$ . Supponiamo inoltre per semplicità di notazione  $N = 2$ . La prova per  $N$  qualsiasi si può fare in modo analogo con qualche complicazione formale.

Sia  $a = (a_1, a_2)$  un qualunque punto di  $\Omega$ . Allora

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) + f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2+\theta_2 h_2)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2)h_1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \omega(h)|h|, \end{aligned}$$

dove ho sfruttato il Teorema del valor medio di Lagrange, con  $\theta_1, \theta_2 \in ]0, 1[$  e ovviamente, per ogni  $h \neq 0$  tale che  $a+h \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \omega(h) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right) \frac{h_1}{|h|} \\ &+ \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right) \frac{h_2}{|h|}. \end{aligned}$$

Ora, essendo  $|h_1|/|h|$ ,  $|h_2|/|h| \leq 1$  ed essendo  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  continue, risulta che  $\omega(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ .

Dunque, per ogni  $h \in \mathbb{R}^2$  tale che  $a + h \in \Omega$ ,

$$f(a + h) - f(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle + \omega(h)|h|, \text{ con } \omega(h) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0.$$

Quindi  $f$  differenziabile in  $a$  e la dimostrazione è conclusa per l'arbitrarietà di  $a$ .  $\square$

**Teorema 2.4.2.** *Sia  $\Omega$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0 \forall x \in \Omega$  e  $\forall j = 1, 2, \dots, N$ . Allora  $f$  è costante in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $a$  e  $b$  due arbitrari punti di  $\Omega$ . Dimostriamo che  $f(a) = f(b)$ .

Poichè  $\Omega$  è connesso, quindi aperto, esiste una poligonale  $P = [x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{p-1}, x_p] \in \Omega$  tale che  $x_0 = a$  e  $x_p = b$ . Per il Corollario 2.3.3, per ogni  $i = 1, 2, \dots, p$  esiste  $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tale che

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \|\mathcal{J}_f(z_i)\| |x_i - x_{i-1}|.$$

Ma per ipotesi  $\mathcal{J}_f(z_i) = 0$  quindi  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = 0 \forall i = 1, \dots, p$ . Pertanto  $f(a) = f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_p) = f(b)$ .  $\square$

## 2.5 Derivate d'ordine superiore

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Supponiamo che esista per un fissato  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in ogni punto di  $\Omega$ . Se poi per un fissato  $j \in \{1, \dots, N\}$  la funzione  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  è derivabile rispetto a  $x_j$  nel punto  $a \in \Omega$  allora si pone

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

(nel caso  $i = j$  si scrive anche  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ ).  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$  si chiama *derivata seconda di  $f$  rispetto a  $x_i$  e  $x_j$  nel punto  $a$* .

In modo analogo si definiscono le derivate terze, quarte, ecc.

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice di classe  $C^2$  su  $\Omega$ , e si scrive  $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , se per ogni  $i, j = 1, \dots, N$  esiste  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  in ogni punto di  $\Omega$  e se la funzione  $x \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$  è continua in  $\Omega$ .

In modo analogo si definiscono le funzioni di classe  $C^k$  con  $k = 3, 4, \dots$

Si pone

$$C^0(\Omega, \mathbb{R}^m) = C(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

ed anche

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

**Teorema 2.5.1.** (di Schwarz) Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione di classe  $C^1$  con derivate prime differenziabili in ogni punto di  $\Omega$ . Siano inoltre  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $i \neq j$ . Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

*Dimostrazione.* Non è restrittivo supporre  $m = 1$  e  $N = 2$ . Fissato un punto  $x \in \Omega$ , per ogni  $h$  reale positivo e tale che

$$(x_1 + t, x_2 + \tau) \in \Omega, \quad \forall t, \tau \in [0, h],$$

poniamo

$$\Delta(h) = f(x_1 + h, x_2 + h) - f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2 + h) + f(x_1, x_2).$$

Fissato  $h > 0$  come sopra, definiamo

$$F : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = f(x_1 + h, x_2 + t) - f(x_1, x_2 + t).$$

Ovviamente  $F \in C^1$  e, indicando con  $\partial_2 f$  la derivata  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ , vale

$$F'(t) = \partial_2 f(x_1 + h, x_2 + t) - \partial_2 f(x_1, x_2 + t)$$

per ogni  $t \in (0, h)$ . D'altra parte, come si verifica subito,  $F(h) - F(0) = \Delta(h)$ .

Per il Teorema del valor medio esiste allora  $\sigma \in ]0, 1[$  tale che

$$\Delta(h) = F'(\sigma h)h = (\partial_2 f(x_1 + h, x_2 + \sigma h) - \partial_2 f(x_1, x_2 + \sigma h))h.$$

Inoltre, essendo  $\partial_2 f$  differenziabile in  $(x_1, x_2)$  per ipotesi, si ha

$$\begin{aligned} & \partial_2 f(x_1 + h, x_2 + \sigma h) - \partial_2 f(x_1, x_2 + \sigma h) \\ &= \partial_{12} f(x_1, x_2)h + \partial_{22} f(x_1, x_2)\sigma h - \partial_{22} f(x_1, x_2)\sigma h + \omega(h)h \\ &= \partial_{12} f(x_1, x_2)h + \omega(h)h, \end{aligned}$$

ove  $\omega(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$  e  $\partial_{12}$  e  $\partial_{22}$  indicano rispettivamente le derivate  $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$  e  $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ . In definitiva

$$\frac{\Delta(h)}{h^2} = \partial_{12} f(x_1, x_2) + \omega(h) \rightarrow \partial_{12} f(x) \text{ per } h \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Analogamente, utilizzando invece della  $f$  la funzione

$$G : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(t) = f(x_1 + t, x_2 + h) - f(x_1 + t, x_2),$$

si ottiene, indicando con  $\partial_{21}$  la derivata  $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$ ,

$$\frac{\Delta(h)}{h^2} \rightarrow \partial_{21} f(x) \text{ per } h \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Dalla (2.11) e dalla (2.12) si ricava  $\partial_{12} f(x) = \partial_{21} f(x)$  e quindi l'asserto.  $\square$

**Corollario 2.5.2.** *Sia  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^N$ , e sia  $(i_1, \dots, i_k)$  una  $k$ -pla di interi in  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Sia poi  $(j_1, \dots, j_k)$  una permutazione di  $(i_1, \dots, i_k)$ . Allora*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

La dimostrazione segue dal Teorema di Schwarz e dal Teorema 2.4.1.

## 2.6 Formula di Taylor per funzioni di classe

$$C^{k+1}, \quad k \geq 0$$

Chiamiamo multi-indice ad  $N$  componenti una  $N$ -pla ordinata  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  di numeri interi non negativi.

Se  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  è multi-indice poniamo

$$|\alpha| = \text{altezza di } \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_N, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!$$

Inoltre se  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , poniamo

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}.$$

**Lemma 2.6.1.** *Per ogni  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_N)^k = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{x^\alpha}{\alpha!}. \quad (2.13)$$

*Dimostrazione.* L'affermazione è ovvia se  $N = 1$ . Nel caso di  $N = 2$ , e per ogni  $k \in \mathbb{N}$  la (2.13) è nota in quanto è la formula binomiale di Newton. Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = k} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} &= \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} x_1^i x_2^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x_1^i x_2^{k-i} = (x_1 + x_2)^k. \end{aligned}$$

Supponiamo vera la (2.13) per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per  $N = n$  e proviamo che vale per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per  $N = n + 1$ . Si ha, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1})^k &= k! \sum_{i=0}^k \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^i x_{n+1}^{k-i}}{i!(k-i)!} \\ &= (\text{per ipotesi induttiva}) k! \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \frac{(x_1, \dots, x_n)^\alpha}{\alpha!} \frac{x_{n+1}^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= k! \sum_{|\beta|=k} \frac{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^{(\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})}}{(\beta_1, \dots, \beta_n)! \beta_{n+1}} \\ &= \sum_{|\beta|=k} \frac{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^\beta}{\beta!} \end{aligned}$$

ove  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ .

Per il principio di induzione ciò prova il Lemma.  $\square$

Se  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  è un multi-indice a  $N$  componenti, indichiamo con  $D^\alpha$  il seguente operatore di derivazione:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$



**Teorema 2.6.2.** *Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $f \in C^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 0$ ,  $a, x \in \Omega$  tali che  $[a, x] \subseteq \Omega$ . Allora esiste  $z \in [a, x]$  tale che*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(z)}{\alpha!} (x-a)^\alpha. \quad (2.14)$$

Il polinomio

$$P_k(f, a)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

si chiama polinomio di Taylor di  $f$  di punto iniziale  $a$  e di grado  $k$ . La seconda sommatoria della (2.14) si chiama resto  $k$ -esimo della formula di Taylor e si indica con  $R_k(f, a)(x)$ .

Osserviamo che  $R_k(f, a)(x) = O(|x-a|^{k+1})$  per  $x$  che tende ad  $a$ .

Infatti, essendo  $|(x-a)^\alpha| \leq |x-a|^{|\alpha|} = |x-a|^{|\alpha|}$ , per  $x \neq a$  vale

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_k(f, a)(x)}{|x-a|^{k+1}} \right| &= \left| \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(z)}{\alpha!} \frac{(x-a)^\alpha}{|x-a|^{k+1}} \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{|D^\alpha f(z)|}{\alpha!} \rightarrow \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{|D^\alpha f(a)|}{\alpha!} \end{aligned}$$

per  $x$  che tende ad  $a$  in quanto  $z \in [a, x]$  e  $D^\alpha f$  è continua in  $\Omega$  per ogni  $\alpha$  tale che  $|\alpha| = k+1$ .

*Dimostrazione.* Poniamo  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t) = f(a+th)$ ,  $h = x-a$ . Dato che  $f$  è di classe  $C^{k+1}$  in  $\Omega$ ,  $F$  è di classe  $C^{k+1}$  in  $[0, 1]$ . Esiste allora  $\tau \in ]0, 1[$  tale che

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}. \quad (2.15)$$

D'altra parte

$$F'(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i = \left( \sum_{i=1}^N h_i D_i \right) f(a+th),$$

avendo posto

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} F''(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + th) h_j h_i \\ &= \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_i D_j h_i h_j \right) f(a + h) = \left( \sum_{i=1}^N h_i D_i \right)^{(2)} f(a + h). \end{aligned}$$

In generale, per ogni  $p \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$  si ottiene

$$F^{(p)}(t) = \left( \sum_{i=1}^N h_i D_i \right)^{(p)} f(a + h).$$

Ora, per il Teorema di Scharz, per ogni  $i, j = 1, 2, \dots, N$   $D_i, D_j$  commutano fra loro dato che

$$\begin{aligned} D_i D_j f(a + th) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(a + th) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(a + th) = D_j D_i f(a + th). \end{aligned}$$

Per la potenza  $p$ -esima di  $\sum_{i=1}^N h_i D_i$  vale allora una formula analoga alla (2.13) del Lemma 2.6.1:

$$\left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^{(p)} f(a + h) = p! \sum_{|\alpha|=p} \frac{D^\alpha f(a + th)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Dalla (2.15) otteniamo pertanto

$$\begin{aligned} f(x) &= F(1) = \sum_{p=0}^k \frac{F^{(p)}(0)}{p!} + \frac{F^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!} = \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=p} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(a + \tau h)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(z)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \end{aligned}$$

ove è stato posto  $z = a + \tau h$ . Ciò prova il Teorema in quanto  $z \in [a, x]$ .  $\square$

Se  $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_{|\alpha|=p} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \right) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \quad (2.16)$$

si chiama *serie di Taylor* di  $f$  di punto iniziale  $a$ .

Se la serie (2.16) converge e la sua somma vale  $f(x)$  si dice che  $f$  è *svilupabile in serie di Taylor* di punto iniziale  $a$  nel punto  $x$ .

Ovviamente, dalla (2.14) si nota che  $f$  è svilupabile in serie di Taylor di punto iniziale  $a$  in  $x$  se e solo se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k(f, a)(x) = 0.$$

Se  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^N$ , una funzione  $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  si dice *analitica reale* se per ogni  $a \in \Omega \exists \delta > 0 : D(a, \delta) \subseteq \Omega$  e

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \quad \forall x \in D(a, \delta).$$

Vediamo ora una condizione sufficiente per l'analiticità reale.

**Teorema 2.6.3.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ . Se esiste  $M > 0$  tale che*

$$|D^\alpha f(x)| \leq |\alpha!| M^{|\alpha|} \quad \forall x \in \Omega$$

*per ogni multi-indice  $\alpha$ , allora  $f$  è analitica reale in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Fissiamo  $a \in \Omega$  e scegliamo  $\delta > 0$  tale che

$$D(a, \delta) \subseteq \Omega, \quad \delta N M < 1.$$

Allora, per ogni  $x \in D(a, \delta)$  si ha, prendendo  $z \in [a, x]$ ,

$$\begin{aligned} R_{k+1}(f, a)(x) &\leq \sum_{|\alpha|=k+1} \left| \frac{D^\alpha f(z)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \right| \leq \\ &\leq \sum_{|\alpha|=k+1} (k+1)! \frac{M^{k+1}}{\alpha!} |(x-a)^\alpha| \leq \sum_{|\alpha|=k+1} (k+1)! M^{k+1} |x-a|^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (k+1)! \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(\delta M)^{k+1}}{\alpha!} = (\delta M)^{k+1} (k+1)! \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \\ &= (\text{usando la (2.13)}) (\delta M)^{k+1} N^{k+1} = (\delta MN)^{k+1} \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

in quanto  $0 < \delta MN < 1$ .

□

# Capitolo 3

## Invertibilità locale

In questo paragrafo tratteremo il problema della risolubilità locale dei seguenti sistemi non lineari

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_N) = y_1 \\ \vdots \\ f_N(x_1, \dots, x_N) = y_N \end{cases} \quad (3.1)$$

ove  $f_1, \dots, f_N$  sono funzioni di classe almeno  $C^1$  tutte definite su uno stesso aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ .

Nel corso del paragrafo indicheremo con  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  la funzione  $(f_1, \dots, f_N)$ ; i punti  $(x_1, \dots, x_N)$ ,  $(y_1, \dots, y_N)$  verranno indicati con  $x$  e  $y$ . Quindi il sistema (3.1) si scriverà nella forma

$$f(x) = y. \quad (3.2)$$

Diremo che (3.2) è *localmente risolubile* se, fissato un punto  $a \in \Omega$  ad arbitrio e posto  $b = f(a)$ , esistono un intorno  $V$  di  $a$  e un intorno  $W$  di  $b$  tali che l'equazione (cioè il sistema)(3.2) ha una sola soluzione  $x \in V$  per ogni fissato  $y \in W$ . Pretendiamo inoltre che la funzione

$$W \ni y \rightarrow x \in V,$$

che associa ad ogni  $y \in W$  l'unica soluzione  $x \in V$  di (3.2), abbia la stessa regolarità di  $f$ . Tutto questo si formalizza con la definizione di *diffeomorfismo locale*.

**Definizione 3.0.1.** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^N$ . Si dice che una funzione  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \geq 1$ , è un *diffeomorfismo locale di classe  $C^k$*  se: per ogni  $a \in \Omega$  esiste un intorno aperto  $V$  di  $a$ ,  $V \subseteq \Omega$ , tale che

- (i)  $f/V$  è iniettiva;
- (ii)  $f(V)$  è aperto;
- (iii)  $(f/V)^{-1} \in C^k(f(V), \mathbb{R}^N)$ .

Osserviamo che  $W = f(V)$  per la (i) è un intorno aperto di  $b = f(a)$ . Inoltre, per la (i)  $f/V : V \rightarrow W$  è biettiva quindi invertibile e la sua inversa ha dominio  $W$ .

Per poter dimostrare il principale risultato di questo paragrafo, cioè il Teorema dell'invertibilità locale abbiamo bisogno di alcuni importanti enunciati. Vediamoli.

**Lemma 3.0.4.** *Se  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  è invertibile allora*

$$|T(h)| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} |h| \quad \forall h \in \mathbb{R}^N.$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che per ogni  $h \in \mathbb{R}^N$  risulta  $T^{-1}(T(h)) = h$  e quindi

$$|h| = |T^{-1}(T(h))| \leq \|T^{-1}\| |T(h)|.$$

□

**Lemma 3.0.5.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $k \geq 1$ . Allora la funzione  $x \rightarrow \|df(x)\|$  è continua su  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x_0$  un qualsiasi punto di  $\Omega$  e sia  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Allora

$$\begin{aligned} & \left| \|df(x)\| - \|df(x_0)\| \right| \leq \|df(x) - df(x_0)\| \\ & \leq \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

(la seconda disuguaglianza è dovuta ad una importante proprietà della norma di matrici) in quanto  $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$  è continua in  $\Omega$  per ogni  $i = 1, \dots, m$  e per ogni  $j = 1, \dots, N$ . Ciò, per l'arbitrarietà di  $x_0 \in \Omega$ , prova il Lemma.  $\square$

La seguente Proposizione è la parte cruciale del Teorema dell'invertibilità locale che vogliamo provare in questo paragrafo. In linea generale, essa afferma che una piccola perturbazione lipschitziana di una trasformazione lineare invertibile è invertibile con inversa anch'essa lipschitziana.

**Proposizione 3.0.6.** *Siano  $V$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $f = T + E$  ove  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una trasformazione lineare invertibile e  $E : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz  $L > 0$ , cioè*

$$|E(x) - E(x')| \leq L|x - x'| \quad \forall x, x' \in V. \quad (3.3)$$

*Supponiamo*

$$L\|T^{-1}\| < 1. \quad (3.4)$$

*Allora*

(i)  $f$  è iniettiva,

(ii)  $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$  è lipschitziana quindi esiste  $m > 0$  tale che

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| \leq m|y - y'| \quad \forall y, y' \in f(V), \quad (3.5)$$

(iii)  $f(V)$  è aperto.

*Dimostrazione.* (i) Per ogni  $x, x' \in V$  si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |(T(x) + E(x)) - (T(x') + E(x'))| \\ &\geq |T(x) - T(x')| - |E(x) - E(x')| \\ &= (T \text{ lineare}) \\ &\quad |T(x - x')| - |E(x) - E(x')| \\ &\geq (\text{per il Lemma 3.0.4 e per la (3.3)}) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{1}{\|T^{-1}\|} - L \right) |x - x'|,$$

e quindi, posto

$$m_0 = \frac{1}{\|T^{-1}\|} - L = \frac{1 - L\|T^{-1}\|}{\|T^{-1}\|},$$

$$|f(x) - f(x')| \geq m_0 |x - x'|. \quad (3.6)$$

Di conseguenza, essendo  $m_0 > 0$  (per la (3.4)), se  $f(x) = f(x')$  risulta  $x = x'$ . Dunque  $f$  è iniettiva.

- (ii) Dalla (3.6), ponendo  $f(x) = y$  e  $f(x') = y'$ , e quindi  $x = f^{-1}(y)$  e  $x' = f^{-1}(y')$ , si ottiene

$$|y - y'| \geq m_0 |f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| \quad \forall y, y' \in f(V).$$

Vale quindi la (3.5) con

$$m = \frac{1}{m_0}.$$

- (iii) Occorre dimostrare che per ogni  $a \in V$  esiste  $\sigma > 0$  tale che

$$D(f(a), \sigma) \subseteq f(V). \quad (3.7)$$

Sia dunque  $a \in V$ . Poichè  $V$  è aperto esiste  $r > 0$  tale che  $\overline{D(a, r)} \subseteq V$ .

Poniamo

$$\sigma = \left( \frac{1}{\|T^{-1}\|} - L \right) r. \quad (3.8)$$

Si noti che  $\sigma > 0$  grazie alla (3.4). Dimostriamo che

$$D(f(a), \sigma) \subseteq f(\overline{D(a, r)}). \quad (3.9)$$

Da questa seguirà la (3.7) e quindi l'asserto.

Per dimostrare la (3.9) occorre provare che

$$\forall y \in D(f(a), \sigma) \exists x \in \overline{D(a, r)} : f(x) = y.$$

Ora, poichè  $f = T + E$  e poichè  $T$  è invertibile, l'equazione  $f(x) = y$  è equivalente alla seguente

$$x = T^{-1}(y - E(x)). \quad (3.10)$$



Pertanto, fissato  $y \in D(f(a), \sigma)$  e posto

$$K : \overline{D(a, r)} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad K(x) = T^{-1}(y - E(x)),$$

occorre provare che esiste  $x \in \overline{D(a, r)}$  tale che  $K(x) = x$ , cioè che  $K$  ha un punto fisso.

Osserviamo che dapprima che  $\overline{D(a, r)}$  con la distanza euclidea è uno spazio metrico completo; allora, se valgono

$$(1) \quad K(\overline{D(a, r)}) \subseteq \overline{D(a, r)}$$

(2)  $K$  è una contrazione

per il Teorema di Banach (in uno spazio metrico completo una contrazione ha uno ed un solo punto fisso),  $K$  avrà un punto fisso e la Proposizione sarà così provata.

Ora, se  $x \in \overline{D(a, r)}$ , risulta

$$K(x) - a = (\text{vale } f(a) = T(a) + E(a) \text{ quindi}$$

$$a = T^{-1}(f(a) - E(a)))$$

$$|T^{-1}(y - E(x)) - T^{-1}(f(a) - E(a))|$$

$$\leq \|T^{-1}\|(|y - f(a)| + |E(x) - E(a)|)$$

$$\leq \|T^{-1}\|(\sigma + L|x - a|)$$

$$\leq \|T^{-1}\|(\sigma + Lr) = r.$$

L'ultima uguaglianza discende dalla (3.8). Questo dimostra che  $|K(x) - a| \leq r$  se  $|x - a| \leq r$ . Quindi (1) è vera. Dimostriamo infine (2). Per ogni  $x, x' \in \overline{D(a, r)}$  vale

$$|K(x) - K(x')| = |T^{-1}(E(x') - E(x))|$$

$$\leq \|T^{-1}\| |E(x) - E(x')| \leq \|T^{-1}\|L|x - x'|.$$

Ma, per la (3.4),  $\|T^{-1}\|L < 1$ . Quindi  $K$  è una contrazione.

Ciò conclude la dimostrazione. □

Vediamo quindi l'enunciato fondamentale sull'invertibilità locale.

**Teorema 3.0.7.** (dell'invertibilità locale) Una funzione  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $k \geq 1$ , è un diffeomorfismo locale di classe  $C^k$  se e solo se

$$\det \mathcal{J}_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.11)$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo dapprima la necessità. Se  $f$  è un diffeomorfismo locale di classe  $C^k$ , per ogni  $a \in \Omega$  esiste un intorno aperto  $V$  di  $a$ ,  $V \subseteq \Omega$ , tale che

$$g = f|_V$$

è iniettiva,  $g(V)$  è aperto e  $g^{-1} \in C^k(f(V), \mathbb{R}^N)$ . Poichè, per definizione di funzione inversa,

$$g^{-1} \circ g = i_V \quad (i_V(x) = x \quad \forall x \in V)$$

per il Teorema sulla composizione dei differenziali si ha

$$dg^{-1}(g(a)) \circ dg(a) = di_V(a) = i_{\mathbb{R}^N},$$

e quindi

$$\mathcal{J}_{g^{-1}}(g(a)) \cdot \mathcal{J}_g(a) = I_N \quad (\text{matrice identica } N \times N).$$

Allora

$$\det \mathcal{J}_{g^{-1}}(g(a)) \cdot \det \mathcal{J}_g(a) = \det I_N = 1,$$

e quindi  $\det \mathcal{J}_g(a) \neq 0$ . Ma  $\mathcal{J}_g(a) = \mathcal{J}_f(a)$ . In definitiva:

$$\det \mathcal{J}_f(a) \neq 0 \quad \forall a \in \Omega,$$

e la necessità è provata. Dimostriamo ora la sufficienza. Sia  $a \in \Omega$ . Poichè  $f$  è di classe  $C^k$  e  $k \geq 1$ ,  $f$  è differenziabile in  $a$ . Poniamo  $T = df(a)$  e

$$E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad E = f - T.$$

La trasformazione lineare  $T$  è invertibile perchè  $\det \mathcal{J}_f(a) \neq 0$ . Inoltre  $E$  è di classe  $C^k$  e  $dE(a) = df(a) - T = 0$ . Per il Lemma 3.0.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|dE(x)\| = \|dE(a)\| = 0,$$

e quindi, posto  $L = \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$ , esiste un disco  $V$  centrato in  $a$  e contenuto in  $\Omega$  tale che

$$\|dE(x)\| < L \quad \forall x \in V. \quad (3.12)$$

Ora, per il Corollario 2.3.3, per ogni  $x, x' \in V \exists z \in [x, x'] (\subseteq V)$  tale che

$$\begin{aligned} |E(x) - E(x')| &\leq \|dE(z)\| |x - x'| \\ &\leq L|x - x'| \quad (\text{per la (3.12)}). \end{aligned}$$

Questo prova che  $E$  è lipschitziana su  $V$ , con costante di Lipschitz  $L$ .

Poichè  $L\|T^{-1}\| = \frac{1}{2} < 1$  possiamo quindi applicare la Proposizione precedente e concludere che

*$f/V$  iniettiva e  $f(V)$  aperto*

e  $g = (f/V)^{-1}$  è lipschitziana su  $f(V)$ . Esiste allora una costante positiva  $m$  tale che

$$|g(y) - g(y')| \leq m|y - y'| \quad \forall y, y' \in W = f(V). \quad (3.13)$$

Ciò prova, anzitutto, che  $g$  è continua; dimostriamo che è anche differenziabile in ogni punto di  $W$ . Per ogni  $x_0, x \in V$ , per la differenziabilità di  $f$  in  $x_0$ , risulta

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0)(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$$

dove  $\omega(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$ . Di qui, posto  $y = f(x)$  e  $y_0 = f(x_0)$ , si trae

$$y - y_0 = df(x_0)(g(y) - g(y_0)) + \omega(g(y))|g(y) - g(y_0)|$$

oppure anche

$$g(y) - g(y_0) = (df(x_0))^{-1}(y - y_0) + \omega_1(y)|y - y_0|$$

dove, per  $y \neq y_0$ ,

$$\omega_1(y) = -(df(x_0))^{-1}(\omega(g(y)))|g(y) - g(y_0)| / |y - y_0|.$$

Ciò prova che  $g$  è differenziabile in  $y_0$  con differenziale

$$dg(y_0) = (df(x_0))^{-1}, \quad (3.14)$$

in quanto, per la continuità di  $g$  e per la (3.13),  $\omega_1(y) \rightarrow 0$  per  $y \rightarrow y_0$ .  
Dalla (3.14), data l'arbitrarietà di  $y_0$  in  $W$ , si trae

$$\mathcal{J}_g(y) = (\mathcal{J}_f(g(y)))^{-1} \quad \forall y \in W.$$

Quindi, per la continuità di  $g$  e per la continuità delle derivate prime di  $f$ , le derivate prime di  $g$  sono continue in  $W$ . Pertanto  $g \in C^1(W, \mathbb{R}^N)$ . Se poi  $f$  è di classe  $C^2$ , le derivate prime di  $g$  sono di classe  $C^1$ , sempre dalla (3.14), in quanto composizioni di funzioni di classe  $C^1$ . Pertanto  $g \in C^2(W, \mathbb{R}^N)$ . Iterando il ragionamento si prova che se  $f$  è di classe  $C^k$  allora  $g \in C^k(W, \mathbb{R}^N)$ . Con ciò il Teorema è completamente provato.  $\square$

**Corollario 3.0.8.** *Sia  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $k \geq 1$ . Se*

$$\det \mathcal{J}_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

*allora  $f$  è aperta, cioè  $f(U)$  è aperto per ogni aperto  $U \subseteq \Omega$ .*

*Dimostrazione.* Per il Teorema precedente la funzione  $f/U$  è un diffeomorfismo locale di classe  $C^k$ . In particolare per ogni  $x \in U$  esiste un intorno aperto  $V_x$  di  $x$ ,  $V_x \subseteq U$ , tale che  $f(V_x)$  è aperto. Allora

$$f(U) = \bigcup_{x \in f(U)} f(V_x)$$

è aperto in quanto unione di aperti.  $\square$

# Bibliografia

- [1] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 1*, Pitagora Editrice Bologna, 1998.
- [2] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2, prima parte*, Pitagora Editrice Bologna, 2000.



# Ringraziamenti

Ringrazio il Professor Lanconelli che mi ha dato la possibilità di scrivere questo testo e per il tempo che mi ha dedicato.

Ringrazio il Signore per tutti i doni che mi ha dato; è grazie a Lui se ho avuto la possibilità di giungere a questo traguardo importante.

Ringrazio i miei genitori che, anche se lontani dal luogo della mia vita universitaria, mi hanno sempre sostenuto e incoraggiato nel portare avanti questa strada. Nonostante tutte le difficoltà e le spese da affrontare, hanno fatto sempre in modo di farmi avere tutto ciò di cui ho bisogno, e glie ne sono davvero riconoscente! Ancor più che economicamente, li ringrazio per essermi stati accanto, per avermi dato fiducia e motivazione in ogni occasione e per aver sempre creduto in me. Spesso mi sono comportato male nei loro confronti, ma ho sempre saputo di avere i migliori genitori del mondo e voglio dirgli che gli voglio un mondo di bene!

Ringrazio il mio fratellone. Ho sempre saputo di poter contare su di lui; mi ha sempre aiutato, sopportato, fatto compagnia e ha reso bella e divertente la mia vita bolognese (ah grazie anche alla tua \*\*\*\*\* :p).

Ringrazio Martina per l'affetto che sempre mi dimostra e mi dà la forza per continuare questo cammino universitario. Mi ha sempre consolato nei brutti momenti e mi ha sempre spinto a dare il massimo ed è anche grazie a lei se sono riuscito a terminare questa triennale in tempo. Grazie di essermi sempre stata vicino e di avermi regalato magnifici momenti!....

Ringrazio tutti i miei amici, compagni e parenti per avermi sopportato e supportato sempre!