Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

RIVESTIMENTI E GRUPPO FONDAMENTALE DI UNO SPAZIO TOPOLOGICO

Tesi di Laurea in Geometria III

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Rita Fioresi

Presentata da:
Tommaso Pola

Sessione II
Anno Accademico 2009/2010

. . . che sempre l'ignoranza fa paura
ed il silenzio è uguale a morte. . .
Francesco Guccini, Canzone per Silvia

Introduzione

In questa tesi ci occuperemo di analizzare la teoria dei rivestimenti, studiandone le principali proprietà e approfondendo uno fra i problemi fondamentali di tale teoria: la ricerca di una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un rivestimento di uno spazio topologico fissato. Per poter ottenere questo risultato, osserveremo la stretta correlazione fra gruppo fondamentale e rivestimenti: molti dei problemi topologici sui rivestimenti verranno infatti trasformati in problemi prettamente algebrici riguardanti i gruppi fondamentali degli spazi coinvolti. Nel corso della trattazione sono inoltre presenti numerosi esempi, molto utili per una maggior comprensione dei risultati esposti.

Il capitolo 1 ha come obiettivo principale quello di introdurre il concetto di rivestimento, studiandone le principali proprietà. Dopo aver dato la definizione di rivestimento di uno spazio topologico e averne studiato alcuni esempi, ci concentreremo ed approfondiremo il caso particolare in cui gli spazi considerati siano G-spazi, cioè ammettano l'azione di un gruppo G. Successivamente studieremo alcune proprietà generali dei rivestimenti, concentrandoci in particol modo sul concetto di sollevamento di un rivestimento. A questo proposito studieremo i principali teoremi sul sollevamento, tra cui spiccano il teorema di unicità del sollevamento e il teorema di sollevamento dei cammini e delle omotopie.

Nel capitolo 2 ci concentreremo sullo stretto legame tra rivestimenti e gruppo fondamentale degli spazi topologici coinvolti. Pertanto, dopo aver dato la definizione di gruppo fondamentale, ne studieremo le principali proprietà, concentrandoci sulle proprietà funtoriali e cioè sul fatto che funzioni continue tra spazi topologici inducono omomorfismi tra i corrispondenti gruppi fondamentali. Questo aspetto verrà ulteriormente approfondito analizzando il caso in cui la funzione continua sia un rivestimento. Grazie a quanto studiato, approfondiremo inoltre il concetto di sollevamento di un rivestimento, trovando una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tale sollevamento. Nella parte finale del capitolo studieremo invece i morfismi di rivestimenti, introducendo il gruppo delle trasformazioni.

Nel capitolo 3 giungeremo a uno fra i risultati più importanti di tutta la teoria dei rivestimenti: dimostreremo infatti il teorema di esistenza per i rivestimenti. Per poter dimostrare tale teorema avremo bisogno, oltre che di tutti i risultati analizzati nei primi due capitoli, di altre nozioni preliminari. Per questo motivo introdurremo i rivestimenti universali e approfondiremo il gruppo delle trasformazioni. Soprattutto il concetto di rivestimento universale, come vedremo nel corso del capitolo, risulterà essere un passaggio fondamentale per la dimostrazione del teorema suddetto.

Nel capitolo 4 ci concentreremo su un'applicazione concreta della teoria dei rivestimenti; studieremo infatti i rivestimenti ramificati di superfici. Dopo averne dato la definizione e averne visto alcuni esempi, approfondiremo il caso dei rivestimenti ramificati di superfici di Riemann e osserveremo i principali risultati derivanti da questo studio.

Indice

Capitolo 1

Rivestimenti: esempi e proprietà

In questo capitolo vogliamo studiare i rivestimenti di uno spazio topologico e le loro principali proprietà, fino ad arrivare al teorema di sollevamento dei cammini. Per comprendere appieno il concetto di rivestimento, studieremo alcuni esempi e approfondiremo il legame tra rivestimenti e G-spazi.

1.1 Definizione

In questa sezione, dopo aver enunciato la definizione di rivestimento di uno spazio topologico, studiamo alcuni esempi.

Definizione 1.1.1. Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un'applicazione continua. Diremo che un aperto $U \subseteq X$ è *uniformemente rivestito da* p se la controimmagine $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di sottinsiemi aperti di $\widetilde{X}$ ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite l'applicazione p. Si dice che $p : \widetilde{X} \to X$ è un *rivestimento* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto di x uniformemente rivestito da p; l'applicazione p viene detta *proiezione*, X *spazio base* e $\widetilde{X}$ *spazio totale.*
In altri termini, $p : \widetilde{X} \to X$ è un *rivestimento* se:

- p è suriettiva;

- per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x e una famiglia $\{U_j\}_{j\in J}$ di aperti di $\widetilde{X}$ tali che:

  1. $p^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} U_j$;
  2. $U_j \cap U_k = \emptyset$ se $j \neq k$;
  3. $p|_{U_j} : U_j \to U$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J$.

Per comodità useremo la seguente notazione:

Notazione 1.1.1. Se $p : \widetilde{X} \to X$ è un rivestimento, allora indicheremo come rivestimento di X la coppia $(\widetilde{X}, p)$.

Vediamo ora alcuni esempi di rivestimenti.

Esempio 1.1.1. Se X è uno spazio qualsiasi e se $id : X \to X$ è la funzione identità, allora (X, id) è un esempio banale di rivestimento di X.

Esempio 1.1.2. Sia $p : \mathbb{R} \to S^1$ definita da

$$p(t) = (\cos t, \sin t).$$

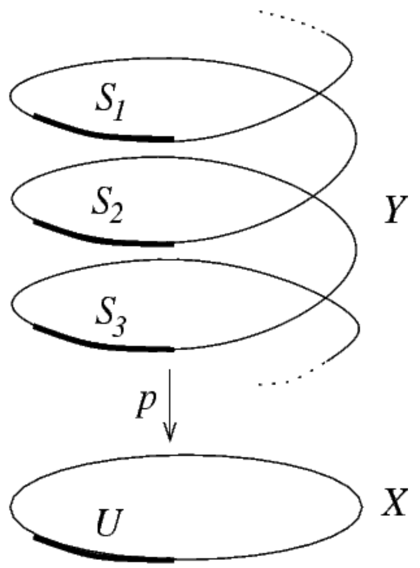

Figura 1.1: $(\mathbb{R}, p)$ rivestimento di S^1

La coppia $(\mathbb{R}, p)$ è un rivestimento di S^1. Infatti fissato $x \in S^1$, sappiamo che esiste $t_1 \in [0, 2\pi)$ tale che $x = (\cos t_1, \sin t_1)$. Definiamo ora $t_2 = \pi + t_1$ (ovviamente $t_2 \in [\pi, 3\pi)$) e $-x$ come l'antipodale di x, cioè

$$-x = (-\cos t_1, -\sin t_1) = (\cos t_2, \sin t_2).$$

Un intorno aperto di x uniformemente rivestito da p è dato da $S^1 \backslash \{-x\}$. Calcoliamo la preimmagine di questo aperto:

$$p^{-1}(S^1 \backslash \{-x\}) = p^{-1}(S^1 \backslash \{(\cos t_2, \sin t_2)\}) =$$

$$= \mathbb{R} \backslash \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{t_2 + 2\pi k\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (t_2 + 2\pi k, t_2 + 2\pi(k+1)).$$

Tutti questi aperti di $\mathbb{R}$ sono a due a due disgiunti e ognuno di essi è omeomorfo a $S^1 \backslash \{-x\}$ tramite l'applicazione p e ciò dimostra che $(\mathbb{R}, p)$ è un rivestimento di S^1.

Esempio 1.1.3. Consideriamo le coordinate polari (ρ, θ) del piano $\mathbb{R}^2$. La circonferenza di raggio unitario è definita dalla condizione $\rho = 1$. Fissato un $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ definiamo una funzione $p_n : S^1 \to S^1$ data dalla seguente equazione:

$$p_n(1, \theta) = (1, n\theta).$$

(S^1, p_n) è un rivestimento di S^1: la funzione p_n avvolge la circonferenza su se stessa n volte.
Studiamo in maniera più approfondita il caso $n = 2$, il caso n generico è una facile generalizzazione. Consideriamo un qualsiasi $x \in S^1$. Sappiamo che esiste un $\theta_1 \in [0, 2\pi)$ tale che $x = (1, \theta_1)$. Studiamo ora i due possibili casi:

- se $\theta_1 = 0$ un intorno aperto di x è $U = \{1\} \times (-\pi, \pi)$; la preimmagine di U è:
$$p_2^{-1}(U) = \{\{1\} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ \{1\} \times (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\},$$
costituito da due insiemi disgiunti, ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite p_2;

- se $\theta_1 \neq 0$ un intorno aperto di x è $U = \{1\} \times (0, 2\pi)$; la preimmagine di U è:
$$p_2^{-1}(U) = \{\{1\} \times (0, \pi),\ \{1\} \times (\pi, 2\pi)\},$$
costituito da due insiemi disgiunti, ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite p_2.

Abbiamo quindi dimostrato che (S^1, p_2) è un rivestimento di S^1. La dimostrazione è analoga per tutti gli altri interi.

Esempio 1.1.4. Sia $p : X \times Y \to X$ la proiezione sul primo fattore. Se Y è uno spazio discreto, allora $(X \times Y, p)$ è un rivestimento di X. Infatti fissato un punto $x \in X$ e un suo intorno aperto U, sappiamo che
$$p^{-1}(U) = \bigcup_{y \in Y} U \times \{y\}.$$
Poichè Y è uno spazio discreto, ogni suo punto è un aperto, pertanto $(X \times Y, p)$ è un rivestimento di X.

Esempio 1.1.5. Siano $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X e $(\widetilde{Y}, q)$ un rivestimento di Y. Allora $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p \times q)$ è un rivestimento di $X \times Y$, dove la funzione $p \times q$ è definita da
$$(p \times q)(x, y) = (p(x), q(y)).$$
Infatti ogni punto $(x, y) \in X \times Y$ ha un intorno uniformemente rivestito da $p \times q$, precisamente $U \times V$, dove U è un intorno di x uniformemente rivestito da p e V è un intorno di y uniformemente rivestito da q.

1.2 Rivestimenti e G-spazi

Esempi importanti di rivestimento si ottengono a partire dai G-spazi. A questo proposito introduciamo alcune nozioni necessarie alla comprensione di tali esempi.

Definizione 1.2.1. Sia X un insieme e G un gruppo. Diremo che G *agisce su* X, o che X è un $G-$ *insieme*, se esiste una funzione da $G \times X$ in X, denotata con $(g, x) \to g * x$, tale che:

- $1_G * x = x$ per ogni $x \in X$, dove 1_G è l'elemento neutro di G;
- $g * (h * x) = (gh) * x$, per ogni $x \in X$, per ogni $g, h \in G$.

Teorema 1.2.1. *Se X è un G-insieme, per ogni $g \in G$ la funzione $\theta_g : X \to X$ definita da $x \to g * x$ è biiettiva.*

Dimostrazione. Dalla definizione di G-insieme segue che $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$ e che $\theta_{1_G} = id_X$; pertanto

$$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = id_X = \theta_{g^{-1}} \circ \theta_g$$

e quindi θ_g è biiettiva. □

Definizione 1.2.2. Sia X uno spazio topologico e sia G un gruppo; X viene detto un $G-$ *spazio* se G agisce su X e se per ogni $g \in G$ la funzione θ_g definita da $x \to g * x$ risulta continua.

Teorema 1.2.2. *Sia X un G-spazio, allora la funzione $\theta_g : X \to X$ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Sappiamo già che la funzione θ_g è biiettiva e continua. Sappiamo inoltre che $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$, e, dalla definizione di G-spazio, che θ_g è continua per ogni $g \in G$, quindi in particolare per g^{-1}. Abbiamo quindi mostrato che per qualsiasi $g \in G$, θ_g è una funzione continua, biiettiva con inversa continua e ciò dimostra che è un omeomorfismo. □

Definizione 1.2.3. Se X è un G-insieme possiamo definire una relazione di equivalenza $\sim$ su X mediante:

$$x \sim y \iff \text{esiste } g \in G \text{ tale che } g * x = y.$$

L'insieme delle classi di equivalenza, indicato con X/G, è detto *insieme quoziente di X modulo G*. Se X è uno spazio topologico sul quale agisce un gruppo G, possiamo dotare X/G della topologia quoziente relativa alla proiezione canonica $\pi : X \to X/G$; in tal caso lo spazio X/G, è detto *spazio quoziente di* X *modulo* G.

Per comprendere meglio i concetti appena espressi studiamo ora alcuni esempi significativi.

Esempio 1.2.1. Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ definita da $\theta_n(x) = n + x$. Poichè θ_n è continua per tutti gli $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ è uno $\mathbb{Z}$-spazio e lo spazio quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è omeomorfo alla circonferenza S^1.

Esempio 1.2.2. Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}_2$ su S^n definita da $\theta_0(x) = x$, $\theta_1(x) = -x$. Poichè sia θ_1, sia θ_0 sono funzioni continue, S^n è uno $\mathbb{Z}_2$-spazio. Pertanto possiamo definire, utilizzando la definizione precedente, lo *spazio proiettivo*, denotato con $\mathbb{RP}^n$, come lo spazio quoziente di S^n modulo $\mathbb{Z}_2$, cioè $\mathbb{RP}^n = S^n/\mathbb{Z}_2$.

Teorema 1.2.3. *Se* X *è un* G*-spazio, allora la proiezione canonica* $\pi : X \to X/G$ *è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Sia U un aperto di X e consideriamo $\pi^{-1}(\pi(U))$; avremo allora:

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{x \in X |\ \pi(x) \in \pi(U)\} =$$

$$= \{x \in X |\ \pi(x) = \pi(y) \text{ per qualche } y \in U\} =$$

$$= \{x \in X |\ x = g * y \text{ per qualche } y \in U,\ g \in G\} =$$

$$= \{x \in X |\ x \in g * U \text{ per qualche } g \in G\} = \bigcup_{g \in G} g * U.$$

Poichè θ_g è un omeomorfismo e U è aperto, $g * U$ è aperto per ogni $g \in G$; ne segue che $\pi^{-1}(\pi(U))$ è aperto in X, e quindi che $\pi(U)$ è aperto in X/G. $\square$

Definizione 1.2.4. Se X è un G-spazio, diremo che l'azione di G su X è *propriamente discontinua* se, fissato un qualsiasi $x \in X$, esiste un intorno V di x tale che, per ogni coppia g, g' di elementi distinti di G, vale:

$$g * V \cap g' * V = \emptyset.$$

Si noti che un'*azione* propriamente discontinua è *libera*, cioè per ogni $x \in X$ e per ogni $g \in G,\ g \neq 1_G$, si ha $g * x \neq x$.

Queste nozioni ci portano alle seguenti conclusioni.

Teorema 1.2.4. *Sia X un G-spazio; se l'azione di G su X è propriamente discontinua, allora la proiezione naturale $p : X \to X/G$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che p, essendo una proiezione, è un'applicazione continua e suriettiva e, per il teorema **1.2.3**, aperta. Siano ora $x \in X$ e U un intorno aperto di x che verifichi la condizione di discontinuità propria; $p(U)$ è un intorno aperto di $p(x)$ uniformemente rivestito da p in quanto $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g * U$ (per quanto visto nella dimostrazione del teorema **1.2.3**), dove, poichè l'azione di G su X è propriamente discontinua, $\{g * U\}_{g \in G}$ è una famiglia di aperti disgiunti di X, e la restrizione $p|_{g*U} : g * U \to p(U)$ è una biiezione continua ed aperta e, come tale, è un omeomorfismo. □

Alla luce dei risultati appena esposti, approfondiamo gli esempi **1.2.1** e **1.2.2**.

Esempio 1.2.3. L'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ descritta nell'esempio **1.2.1** è propriamente discontinua: infatti, fissato $x \in \mathbb{R}$, l'intervallo $U = (x - \frac{1}{2},\ x + \frac{1}{2})$ è un intorno aperto di x per cui, per ogni $n, n' \in \mathbb{Z}$, $(n + U) \cap (n' + U) = \emptyset$. Pertanto la proiezione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è un rivestimento.

Esempio 1.2.4. L'azione di $\mathbb{Z}_2$ su S^n descritta nell'esempio **1.2.2** è propriamente discontinua: infatti, fissato $x \in S^n$, $D = \{y \in S^n |\ ||y - x|| < \frac{1}{2}\}$ è un intorno aperto di x per cui $0 * D \cap 1 * D = \emptyset$. Pertanto la proiezione $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ è un rivestimento.

Teorema 1.2.5. *Se G è un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff X, allora l'azione di G su X è propriamente discontinua.*

Dimostrazione. Siano $1_G = g_0,\ g_1,\ g_2,\ ...,\ g_n$ gli elementi di G e sia $x \in X$. I punti $g_1 * x,\ g_2 * x,\ ...,\ g_n * x$ sono tutti distinti da $g_0 * x = x$, ed essendo

X uno spazio di Hausdorff, esistono degli intorni aperti $U_0,\ U_1,\ ...,\ U_n$ di $g_0 * x,\ g_1 * x,\ ...,\ g_n * x$ rispettivamente, tali che $U_0 \cap U_j = \emptyset$, per ogni $j = 1,\ 2,\ ...,\ n$. L'insieme

$$U = \bigcap_{j=0}^{n} g_j^{-1} * U_j$$

è un intorno aperto di x, ed inoltre se $i \neq j \in \{0,\ 1, ...,\ n\}$,

$$g_i * U \cap g_j * U = g_j((g_j^{-1} g_i * U) \cap U) =$$

$$= g_j(g_k * U \cap U) \text{ per qualche } k \neq 1_G.$$

Ma

$$g_k * U = \bigcap_{j=0}^{n} g_k g_j^{-1}(U_j) \subseteq U_k$$

e $U \subseteq U_0$, quindi $g_k * U \cap U = \emptyset$. Pertanto

$$g_i * U \cap g_j * U = \emptyset$$

e quindi l'azione di G è propriamente discontinua. □

Combinando i 2 teoremi precedenti, si deduce facilmente il seguente corollario.

Corollario 1.2.6. *Se G è un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff X, allora (X, p) è un rivestimento di X/G, dove p è la proiezione naturale.*

Studiamo ora un esempio concreto di quanto appena esposto.

Esempio 1.2.5. Cosideriamo

$$S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 | \ \ |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$$

e l'applicazione $h : S^3 \to S^3$ definita da

$$h(z_0, z_1) = (exp(\tfrac{2\pi i}{p})z_0, exp(\tfrac{2\pi i q}{p})z_1),$$

dove p e q sono due interi primi tra loro. Ora, poichè h è un omeomorfismo e $h^p = id_{S^3}$, possiamo definire un'azione del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_p$ su S^3 mediante

$$n * (z_0, z_1) = h^n(z_0, z_1),$$

dove $n \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, ..., p-1\}$. Allora la proiezione naturale $S^3 \to S^3/\mathbb{Z}_p$ è un rivestimento in quanto l'azione è libera e S^3 è uno spazio di Hausdorff. Lo spazio quoziente $S^3/\mathbb{Z}_p$, denotato con $L(p, q)$, è chiamato spazio lenticolare.

Introduciamo ora alcune nozioni che ci serviranno nel capitolo **3**.

Definizione 1.2.5. Sia X un $G-$ *spazio*. Diciamo che G *agisce transitivamente* su X (o che X è un $G-$ *spazio omogeneo*) se vale la seguente condizione: per ogni $x, y \in X$ esiste un elemento $g \in G$ tale che $g * x = y$.

Definizione 1.2.6. Sia X un $G-$ *spazio*. Il sottogruppo

$$G_x = \{g \in G |\ g * x = g\}$$

di G è chiamato *sottogruppo* di *isotropia* relativo a x secondo l'azione di G.

Definizione 1.2.7. Sia X un $G-$*spazio* e H un sottogruppo di G. Definiamo il *normalizzatore* di H, e lo scriveremo $N(H)$, il più grande sottogruppo di G contenente H come sottogruppo normale. Quindi

$$N(H) = \{g \in G |\ gHg^{-1} = H\}.$$

1.3 Principali teoremi sui rivestimenti

In questa sezione enunciamo alcuni teoremi sui rivestimenti, che ne descrivono le caratteristiche generali. Introduciamo anche il concetto di sollevamento, fondamentale nello studio dei rivestimenti.

Teorema 1.3.1. *Se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di X, allora p è un'applicazione aperta e X ha la topologia quoziente relativa a p.*

Dimostrazione. Sia U un sottinsieme aperto di $\widetilde{X}$, $x \in p(U)$ e V un intorno aperto di x uniformemente rivestito da p. Sia $\widetilde{x} \in U$ tale che $x = p(\widetilde{x})$, allora

$$\widetilde{x} \in p^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

e quindi $\widetilde{x} \in V_j \cap U$ per un qualche $j \in J$. Poichè $V_j \cap U$ è aperto in V_j e $p|_{V_j} : V_j \to V$ è un omeomorfismo, $p(V_j \cap U)$ è aperto in V e quindi in X. Inoltre

$$x = p(\widetilde{x}) \in p(V_j \cap U) \subseteq p(U);$$

abbiamo così trovato un intorno aperto di x contenuto interamente in $p(U)$, il che implica che $p(U)$ è aperto. Ciò dimostra che p è aperta.
Per quanto riguarda la seconda parte del teorema, poichè p è una suriezione continua e aperta, un sottinsieme V di X è aperto in X se e solo se $p^{-1}(V)$ è aperto in $\widetilde{X}$ e questa è proprio la definizione di aperto nella topologia quoziente. □

Introduciamo ora il concetto di sollevamento.

Definizione 1.3.1. Se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di X e $f : Y \to X$ è una funzione continua, un *sollevamento di* f è una funzione continua $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Il seguente teorema mostra che, fissato il punto iniziale, se tale sollevamento esiste, è unico. Si tratta di un risultato fondamentale, la cui importanza sarà chiarita nel prossimo capitolo.

Teorema 1.3.2 (Teorema di unicità del sollevamento)**.** *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X, e siano $\widetilde{f}, \widetilde{f}' : Y \to \widetilde{X}$ due sollevamenti di una funzione continua $f : Y \to X$. Se Y è uno spazio connesso e se $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{f}'(y_0)$ per un qualche $y_0 \in Y$, allora $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$.*

Dimostrazione. Sia Y' l'insieme dei punti sui quali $\widetilde{f}$ e $\widetilde{f'}$ coincidono, cioè:

$$Y' = \{y \in Y | \widetilde{f}(y) = \widetilde{f'}(y)\}.$$

Per ipotesi Y' non è vuoto ($y_0 \in Y'$). Dimostriamo ora che Y' è sia aperto sia chiuso; poichè Y è connesso, ne dedurremo che $Y' = Y$ e che quindi $\widetilde{f} = \widetilde{f'}$. Siano $y \in Y$ e V un intorno aperto di $f(y)$ uniformemente rivestito da p; scriviamo $p^{-1}(V)$ come unione disgiunta $\bigcup_{j \in J} V_j$, dove V_j è aperto in $\widetilde{X}$ e $p|_{V_j} : V_j \to V$ è un omeomorfismo. Se $y \in Y'$, il punto $\widetilde{x} = \widetilde{f}(y) = \widetilde{f'}(y)$ appartiene a V_k per qualche $k \in J$, quindi $\widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_k)$ è un intorno aperto di y. Vediamo ora che tale intorno è interamente contenuto in Y': se $z \in \widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_k)$, $\widetilde{f}(z)$ e $\widetilde{f'}(z)$ sono due punti di V_k, entrambi mandati in $f(y)$ da p; poichè $p|_{V_k}$ è iniettiva, ne segue che $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f'}(z)$, ossia che $z \in Y'$. Ciò dimostra che Y' è aperto.
D'altro canto se $y \notin Y'$, ragionando in modo analogo si deduce che $\widetilde{f}(y) \in V_k$ e $\widetilde{f'}(y) \in V_l$, dove $k \neq l$; di conseguenza $\widetilde{f}^{-1}(V_k) \cap \widetilde{f'}^{-1}(V_l)$ è un intorno aperto di y, chiaramente contenuto nel complementare di Y'. Ciò dimostra che $Y \backslash Y'$ è aperto e che quindi Y' è chiuso. $\square$

Corollario 1.3.3. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X con $\widetilde{X}$ connesso per archi, e sia $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ una funzione continua con $p \circ \varphi = p$. Se φ ha un punto fisso (cioè se $\varphi(x_1) = x_1$, per qualche $x_1 \in \widetilde{X}$), φ è l'applicazione identica.*

Dimostrazione. Sia x un punto qualsiasi di $\widetilde{X}$ e $\alpha : I \to \widetilde{X}$ un arco dal punto fisso x_1 a x. Gli archi α e $\varphi \circ \alpha$ sono due sollevamenti dell'arco $p \circ \alpha : I \to X$ (perchè $p \circ \alpha = p \circ \varphi \circ \alpha$) ed iniziano entrambi in x_1 (perchè $\varphi(x_1) = x_1$). Dal teorema **1.3.2** segue allora che i due archi coincidono; in particolare coincidono i loro punti finali, cioè $x = \varphi(x)$. $\square$

1.4 Sollevamenti di cammini

E' gia stato introdotto il concetto di sollevamento; in questa sezione analizziamo in maniera più approfondita il sollevamento di cammini, cioè il caso in cui l'insieme Y sia l'intervallo $I = [0, 1]$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "g"] \\ I \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Premettiamo alcune nozioni per comprendere appieno i risultati di questa sezione.

Definizione 1.4.1. Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un'applicazione continua, la coppia $(\widetilde{X}, p)$ si dice *rivestimento banale* di X se $\widetilde{X}$ si può decomporre in un'unione disgiunta di aperti $\widetilde{X_i}$ e $p|_{\widetilde{X_i}}$ è un omeomorfismo su X.

Notazione 1.4.1. Sia K uno spazio metrico con metrica d, $x \in X$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$. Denotiamo con $B(x, \delta)$ la palla aperta di centro x e raggio δ, cioè

$$B(x, \delta) = \{y \in K |\ d(x, y) < \delta\}.$$

Notazione 1.4.2. Sia K uno spazio metrico con metrica d e $K' \subseteq K$. Si dice che K' ha diametro c se $\sup\{d(k_1, k_2)|\ k_1, k_2 \in K'\} = c$.

Lemma 1.4.1 (Numero di Lebesgue)**.** *Sia K uno spazio topologico compatto e metrizzabile con metrica d. Per ogni ricoprimento aperto $\{U_j |\ j \in J\}$ esiste un numero δ, detto numero di Lebesgue del ricoprimento, tale che ogni sottinsieme di K con diametro $< \delta$ è interamente contenuto in un U_j.*

Dimostrazione. Fissato un $x \in K$, sia $\varepsilon(x) = \sup\{\delta > 0 | \exists j \in J$ tale che $B(x, \delta) \subseteq U_j\}$. Poniamo $\varepsilon_0 = \inf_{x \in K} \varepsilon(x)$. Se $\varepsilon_0 > 0$, prendendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ si ottiene l'asserto.
Supponiamo ora per assurdo che $\varepsilon_0 = 0$; allora esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di punti in K tale che $\lim_{n \to \infty} \varepsilon(x_n) = 0$. Poichè K è compatto, possiamo supporre che esista $x_0 \in K$ tale che $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Sia n_0 tale che $d(x_0, x_n) < \frac{1}{4}\varepsilon(x_0)$, per ogni $n \geq n_0$. Allora si ha $B(x_n, \frac{\varepsilon(x_0)}{4}) \subset B(x_0, \frac{\varepsilon(x_0)}{2})$, per ogni $n \geq n_0$ e quindi $\varepsilon(x_n) \geq \frac{\varepsilon(x_0)}{4}$, per ogni $n \geq n_0$. Pertanto

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon(x_n) \geq \frac{\varepsilon(x_0)}{4} > 0,$$

che dimostra l'assurdo. $\square$

Teorema 1.4.2 (Teorema di sollevamento dei cammini e delle omotopie). *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X.*

- *per ogni arco $f : I \to X$ e per ogni $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ con $p(\widetilde{x_0}) = f(0)$, esiste uno e un solo arco $\widetilde{f} : I \to \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{f} = f$ e $\widetilde{f}(0) = \widetilde{x_0}$.*

- *per ogni funzione continua $f : I \times I \to X$ e per ogni $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ con $p(\widetilde{x_0}) = F(0,0)$, esiste una e una sola funzione continua $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$ tale che $p \circ \widetilde{F} = F$ e $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x_0}$.*

Dimostrazione. Dimostreremo solo il primo caso, in quanto il secondo si dimostra in maniera analoga.
L'unicità deriva direttamente dal teorema **1.3.2**.
Rimane ora da dimostrare l'esistenza del sollevamento: consideriamo un ricoprimento $\{U_j\}_{j \in J}$ di X tale che $\forall j \in J$, $(p^{-1}(U_j), p|_{p^{-1}(U_j)})$ sia un rivestimento banale di U_j. Consideriamo poi il ricoprimento $\{f^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$ di I, e sia δ il suo numero di Lebesgue: possiamo costruire una successione $0 = b_0 < b_1 < ... < b_{n-1} < b_n = 1$ tale che $|b_j - b_{j-1}| < \delta$ e dunque $f([b_{j-1}, b_j]) = f(I_j) \subset U_{k_j}$, per un certo $k_j \in J$. Costruiamo ora induttivamente per $j = 0, 1, ..., n$ dei sollevamenti $\widetilde{f_j}$, definiti su $[0, b_j]$, tali che $\widetilde{f_j}(0) = \widetilde{x_0}$. Per $j = 0$ non abbiamo altra scelta che porre $\widetilde{f_0}(0) = \widetilde{x_0}$. Supponiamo ora di aver definito un sollevamento $\widetilde{f_j} : [0, b_j] \to \widetilde{X}$ con $\widetilde{f_j}(0) = \widetilde{x_0}$; consideriamo il punto $\widetilde{f}(b_j)$ contenuto nell'aperto $p^{-1}(U_{k_{j+1}})$. Usando l'inversa di questo omeomorfismo (ricordiamo che $(p^{-1}(U_j), p|_{p^{-1}(U_j)})$ è un rivestimento banale di U_j) possiamo definire $\widetilde{f_{k+1}}$. Pertanto, ponendo $\widetilde{f} = \widetilde{f_n}$, si ottiene il sollevamento cercato. □

Corollario 1.4.3 (Teorema di monodromia). *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Siano f, f' due cammini chiusi su $x_0 \in X$ tali che $f \sim f'$ con omotopia F. Fissato $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ e detti $\widetilde{f}$ un sollevamento di f e $\widetilde{f'}$ un sollevamento di f' con $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f'}(0) = \widetilde{x}$, risulta $\widetilde{f}(1) = \widetilde{f'}(1)$.*

Dimostrazione. Per il teorema **1.4.2** esiste uno e un solo sollevamento di F detto $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$, che risulta essere un'omotopia tra $\widetilde{f}$ e $\widetilde{f'}$; infatti

$\widetilde{F}(x,0) = \widetilde{f}$ e $\widetilde{F}(x,1) = \widetilde{f}'$. Inoltre $\widetilde{F}(1,t) \in p^{-1}(x_0)$. Poichè x_0 ammette un aperto uniformemente rivestito, ogni elemento di $p^{-1}(x_0)$ appartiene ad un diverso U_i disgiunto dagli altri; poichè I è connesso e $\widetilde{F}(1,t)$ è continua allora $\widetilde{F}(1,I)$ deve essere connesso e, pertanto, $\widetilde{F}(1,I)$ è costante. □

Definizione 1.4.2. Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. La controimmagine di un punto $x \in X$ viene chiamata **fibra** *su* x.

Corollario 1.4.4. *Se* $(\widetilde{X}, p)$ *è un rivestimento di* X*, allora la fibra su* x*, cioè l'insieme* $p^{-1}(x)$*, ha la stessa cardinalità per qualsiasi* $x \in X$*.*

Dimostrazione. Siano $x_0, x_1 \in X$, e sia $f : I \to X$ tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Grazie a questo cammino è possibile definire una mappa biiettiva da $p^{-1}(x_0)$ a $p^{-1}(x_1)$. Infatti: dato un qualsiasi punto $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, esiste g, sollevamento di f, in $\widetilde{X}$ con punto iniziale y_0 tale che $p \circ g = f$. Sia y_1 il punto finale di g. Allora la funzione che manda y_0 in y_1 è la funzione cercata. Usando $\overline{f}$, il cammino inverso a f, $\overline{f}(t) = f(1-t)$, possiamo definire in modo analogo a prima una funzione da $p^{-1}(x_1)$ a $p^{-1}(x_0)$. Risulta ovvio che queste due funzioni sono una l'inversa dell'altra e questo prova la loro biiettività. □

Grazie a questo corollario è possibile definire il grado di un rivestimento.

Definizione 1.4.3. Sia $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di X, e sia $x \in X$. La cardinalità dell'insieme $p^{-1}(x)$, cioè la cardinalità della fibra su x, è chiamata *grado del rivestimento* o *numero di fogli del rivestimento.*

Troviamo ora il grado di qualche rivestimento precedentemente studiato.

Esempio 1.4.1. Consideriamo il rivestimento $(\mathbb{R}, p)$ di S^1 descritto nell'esempio **1.1.2**. Poichè

$$p^{-1}((1,0)) = \{2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

tale rivestimento avrà grado infinito.

Esempio 1.4.2. Consideriamo il rivestimento (S^1, p_n) di S^1 descritto nell'esempio **1.1.3**. Poichè

$$p^{-1}((1,0)) = \{\frac{2\pi k}{n} | \ k = 0, 1, ..., n-1\},$$

tale rivestimento avrà grado n.

Esempio 1.4.3. Consideriamo il rivestimento $(\mathbb{R}, p)$ di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ descritto negli esempi **1.2.1** e **1.2.3**. Poichè

$$p^{-1}([0]) = \mathbb{Z},$$

tale rivestimento avrà grado infinito.

Capitolo 2

Rivestimenti e gruppo fondamentale

In questo capitolo verrà analizzato e approfondito il legame fra rivestimento e gruppo fondamentale di uno spazio topologico. Dopo aver definito il gruppo fondamentale e averne esposto le principali proprietà, studieremo la relazione tra i gruppi fondamentali $\pi(X, x)$ e $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ dato un rivestimento $p : \widetilde{X} \to X$. Grazie ai risultati che analizzeremo, troveremo anche una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un sollevamento, approfondendo i risultati della sezione **1.3**. Nell'ultima sezione studieremo invece gli omomorfismi tra rivestimenti.

2.1 Gruppo fondamentale

In questa sezione, dopo aver esposto alcune nozioni preliminari, introduciamo il concetto di gruppo fondamentale e ne studiamo le principali proprietà.

Definizione 2.1.1. Siano $f_0, f_1 : I \to X$ due cammini tali che $f_0(0) = f_1(0)$ e $f_0(1) = f_1(1)$. Si dice che f_0 e f_1 sono equivalenti (e scriveremo $f_0 \sim f_1$) se esiste una funzione continua $F : I \times I \to X$, detta *omotopia* tra f_0 e f_1, tale che

$$F(t,0) = f_0(t),\ F(t,1) = f_1(t),$$

$$F(0,s) = f_0(0) = f_1(0),\ F(1,s) = f_0(1) = f_1(1).$$

In tal caso scriveremo $F : f_0 \sim f_1$.

Definizione 2.1.2. Siano $f, g : I \to X$ due cammini tali che $f_0(1) = f_1(0)$. Si definisce il prodotto di archi, che indicheremo con $*$, nel seguente modo:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Lemma 2.1.1. *Siano f_0, f_1, g_0, g_1 dei cammini in X, con $f_0(1) = g_0(0)$ e $f_1(1) = g_1(0)$. Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$, allora $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.*

Dimostrazione. Siano $F : f_0 \sim f_1$ e $G : g_0 \sim g_1$ due omotopie, e definiamo $H : I \times I \to X$ come:

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(2t-1,s), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Poichè $F(1,s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0,s)$, H è continua per il lemma di incollamento; pertanto H è un'omotopia tra $f_0 * g_0$ e $f_1 * g_1$. □

Definizione 2.1.3. Un cammino $f : I \to X$ è detto *chiuso* se $f(0) = f(1)$. In particolare il punto $x = f(0) = f(1)$ si chiama *base di f*.

Definizione 2.1.4. Sia $x \in X$. Consideriamo l'insieme delle classi di equivalenza dei cammini chiusi di base x e lo denotiamo con $\pi(X,x)$. Questo insieme è dotato di un'operazione binaria definita da $[f][g] = [f * g]$ (ben definita per il lemma **2.1.1**). Con questa operazione $\pi(X,x)$ risulta essere un gruppo, chiamato *gruppo fondamentale* (o *primo gruppo di omotopia*) di X con punto base x. L'elemento neutro del gruppo è $[\varepsilon_x]$, dove $\varepsilon_x : I \to X$ tale che $\varepsilon_x(t) = x$, per ogni $t \in I$; l'inverso di $[f]$ è invece dato da $[f]^{-1} = [\overline{f}]$, dove $\overline{f} : I \to X$ tale che $\overline{f}(t) = f(1-t)$.

Studiamo ora le principali proprietà del gruppo fondamentale.

Teorema 2.1.2. *Se f è un cammino in X dal punto $x \in X$ al punto $y \in X$, allora i gruppi $\pi(X, x)$ e $\pi(X, y)$ sono isomorfi.*

Dimostrazione. Se f è un cammino da x a y, per ogni arco chiuso g di base x, $(\overline{f} * g) * f$ è un cammino chiuso di base y. Definiamo allora:

$$u_f : \pi(X, x) \to \pi(X, y), \text{ come } u_f[g] = [\overline{f} * g * f].$$

L'applicazione u_f è un omomorfismo di gruppi: infatti

$$u_f([g][h]) = u_f[g * h] = [\overline{f} * g * h * f] = [\overline{f} * g * f * \overline{f} * h * f] =$$

$$= [\overline{f} * g * f][\overline{f} * h * f] = u_f[g]u_f[h].$$

Inoltre, utilizzando il cammino $\overline{f}$ da y a x, possiamo definire:

$$u_{\overline{f}} : \pi(X, y) \to \pi(X, x), \text{ come } u_{\overline{f}}[h] = [f * h * \overline{f}].$$

Ora, poichè $u_{\overline{f}}u_f[g] = [g]$ e $u_f u_{\overline{f}}[h] = [h]$, u_f è biiettiva e quindi è un isomorfismo. □

Una conseguenza ovvia del teorema precedente è il seguente corollario:

Corollario 2.1.3. *Se X è uno spazio connesso per archi, $\pi(X, x)$ e $\pi(X, y)$ sono gruppi isomorfi per ogni coppia di punti $x, y \in X$.*

Questo corollario risulta molto importante, in quanto, a meno di isomorfismo, si può parlare di *gruppo fondamentale* di X, senza far riferimento al punto base, qualora X sia uno spazio topologico connesso per archi. Per questo motivo, da ora in poi, supporremo che ogni spazio topologico che considereremo sia connesso per archi, a meno di non specificare esplicitamente di trovarci in altre ipotesi.

Studiamo ora i gruppi fondamentali di due spazi topologici X e Y tali che esista una funzione continua fra di loro.

Definizione 2.1.5. Consideriamo una funzione continua $\varphi : X \to Y$. Abbiamo immediatamente che:

- se f è un cammino in X, allora $\varphi \circ f$ è un cammino in Y;
- se $f \sim g$, allora $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$;
- se f è un cammino chiuso in X di base x, allora $\varphi \circ f$ è un cammino chiuso in Y di base $\varphi(x)$.

Pertanto, per ogni elemento $[f]$ di $\pi(X, x)$, $[\varphi \circ f]$ è un elemento ben definito di $\pi(Y, \varphi(x))$; possiamo quindi definire

$$\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x)) \text{ come } \varphi_*[f] = [\varphi \circ f].$$

Teorema 2.1.4. *La funzione φ_* è un omomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione.

$$\varphi_*([f][g]) = \varphi_*[f * g] = [\varphi \circ (f * g)] = [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] =$$

$$= [\varphi \circ f][\varphi \circ g] = \varphi_*[f]\varphi_*[g].$$

Ciò dimostra che φ_* è un omomorfismo. □

Definizione 2.1.6. Se $\varphi : X \to Y$ è una funzione continua, l'omomorfismo di gruppi $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ definito da $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$ è detto *omomorfismo indotto* da φ.

Teorema 2.1.5.

- *Se $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to Z$ sono funzioni continue, allora $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.*
- *Se $id : X \to X$ è l'applicazione identica, id_* è l'omomorfismo identico di $\pi(X, x)$.*

Dimostrazione. Per definizione:

-
$$(\psi \circ \varphi)_*[f] = [(\psi \circ \varphi) \circ f],$$
$$(\psi_*\varphi_*)[f] = \psi_*[\varphi_*[f]] = \psi_*[\varphi \circ f] = [\psi \circ [\varphi \circ f]].$$

- $$id_*([f]) = [id \circ f] = [f].$$

□

Corollario 2.1.6. *Se $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo, allora $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Dal teorema precedente segue che:

$$(\varphi^{-1})_* \varphi_* = (id_X)_* = id_{\pi(X,x)}$$

$$\varphi_* (\varphi^{-1})_* = (id_Y)_* = id_{\pi(Y,\varphi(x))}$$

e quindi φ_* e $(\varphi^{-1})_*$ sono isomorfismi e inoltre sono uno inverso dell'altro. □

I risultati studiati in questa sezione descrivono l'idea che sta alla base della topologia algebrica, nella quale si cerca di sostituire alcune nozioni algebriche, in modo da utilizzare le nostre conoscenze algebriche per dedurre risultati d'interesse topologico. Il passaggio da uno spazio topologico al suo gruppo fondamentale costituisce infatti un esempio di *funtore.* Un funtore differisce da una funzione in modo sostanziale. Oltre ad associare ad ogni spazio topologico un gruppo, il funtore associa a funzioni continue tra spazi topologici omomorfismi tra i rispettivi gruppi fondamentali in modo naturale.

2.2 Rivestimenti e gruppo fondamentale

Finora abbiamo studiato il morfismo φ_* indotto da una funzione continua $\varphi : X \to Y$ ha sui gruppi fondamentali $\pi(X,\ x)$ e $\pi(Y,\ \varphi(x))$. In questa sezione ci concentriamo nello studio del morfismo indotto da un rivestimento di X, $(\widetilde{X}, p)$, sui gruppi fondamentali $\pi(\widetilde{X},\ \widetilde{x})$ e $\pi(X,\ p(\widetilde{x}))$.

Definizione 2.2.1. Uno spazio topologico si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi e se $\pi(X, x) = \{1\}$ per qualche (e quindi, necessariamente, per ogni) $x \in X$.

Una conseguenza immediata dei risultati esposti finora è il seguente teorema.

Teorema 2.2.1. *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento di* X*, con* $\widetilde{X}$ *semplicemente connesso. Per ogni* $x_0 \in X$ *c'è una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi* $\pi(X, x_0)$ *e* $p^{-1}(x_0)$*.*

Dimostrazione. Sia $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ e definiamo $\varphi : \pi(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ come $\varphi[f] = \widetilde{f}(1)$ dove $\widetilde{f}$ è un sollevamento di f con $\widetilde{f}(0) = \widetilde{x_0}$ (tale applicazione è ben definita). L'inversa $\psi : p^{-1}(x_0) \to \pi(X, x_0)$ è definita come $\psi(\widetilde{x}) = [p \circ f]$, dove f è un arco in $\widetilde{X}$ da $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x}$ (un tale arco esiste perchè $\widetilde{X}$ è connesso per archi). ψ è ben definita perchè due archi f ed f' in $\widetilde{X}$ da $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x}$ sono necessariamente equivalenti ($\widetilde{X}$ è semplicemente connesso), e quindi $p \circ f$ e $p \circ f'$ sono equivalenti. □

Il precedente teorema suggerisce pertanto un metodo per calcolare il gruppo fondamentale $\pi(X, x_0)$: innanzitutto si trova un rivestimento di X $(\widetilde{X}, p)$ con $\widetilde{X}$ semplicemente connesso, poi si definisce una struttura di gruppo sull'insieme $p^{-1}(x_0)$ in modo tale che la biiezione $\varphi : \pi(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ sia un isomorfismo di gruppi. Tale metodo tuttavia, non essendo di facile applicazione, non viene praticamente mai utilizzato.

Altra conseguenza dei teoremi esposti nel capitolo precedente, specialmente del teorema **1.4.2**, è il seguente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento di* X*,* $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ *e* $x_0 = p(\widetilde{x_0})$*. Allora l'omomorfismo indotto* $p_* : \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to \pi(X, x_0)$ *è un monomorfismo.*

Dimostrazione. Per mostrare che p_* è un monomorfismo, basta mostrare che $Ker(p_*) = \{e\}$. Sia ora f un cammino chiuso di base $\widetilde{x_0}$ tale che $p_*[f] = e$, identità di $\pi(X, x_0)$; c'è pertanto un'omotopia F tra $p \circ f$ e il cammino costante in x_0, ε_{x_0}. Grazie al teorema **1.4.2**, F può essere sollevata a un'omotopia $\widetilde{F}$ tra f e un qualche cammino. Poichè F mappa sia la base inferiore, sia quella superiore del quadrato unitario nel punto x, il suo sollevamento

$\widetilde{F}$ mappa a sua volta sia la base inferiore, sia quella superiore del quadrato unitario nel punto $\widetilde{x_0}$. Pertanto $\widetilde{F}$ è un'omotopia tra f e il cammino costante $\varepsilon_{\widetilde{x_0}}$ e ciò conclude la dimostrazione. □

Scegliendo un diverso punto base $\widetilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$ si ottiene in generale un sottogruppo $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1})$ diverso a seconda del punto scelto. Il seguente teorema mostra la relazione che c'è tra i sottogruppi $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ e $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1})$.

Teorema 2.2.3. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Per ogni coppia $\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}$ di punti di $\widetilde{X}$ esiste un arco f in X da $p(\widetilde{x_0})$ a $p(\widetilde{x_1})$ tale che $u_f p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) = p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1})$, ove u_f è il morfismo $g \to \overline{f} * g * f$ descritto nel teorema **2.1.2**.*

Dimostrazione. Ogni arco g in $\widetilde{X}$ da $\widetilde{x_0}$ a $\widetilde{x_1}$, per **2.1.2**, individua un isomorfismo u_g fra i gruppi fondamentali $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ e $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1})$; pertanto $u_g\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) = \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1})$. Applicando l'omomorfismo p_* si ottiene $p_*u_g\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) = p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1})$, pertanto l'arco $f = p \circ g$ soddisfa le condizioni richieste. □

Applicando il teorema nel caso in cui $p(\widetilde{x_0}) = p(\widetilde{x_1}) = x_0$ si ottiene un arco chiuso f di base x_0, e quindi un elemento $[f]$ di $\pi(X, x_0)$ per il quale vale la relazione $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}) = [f]^{-1}(p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))[f]$; di conseguenza $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1})$ e $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ sono sottogruppi coniugati di $\pi(X, x_0)$. La nostra discussione si può riassumere con il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "u_g"] & \pi(X, x_0) \arrow[d, "u_f"] \\ \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}) \arrow[r, "p_*"] & \pi(X, x_0) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Vale inoltre il seguente:

Teorema 2.2.4. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Se $x_0 \in X$, l'insieme $Z = \{p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \mid \widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)\}$ è una classe di coniugio (cioè una classe di equivalenza per l'azione di coniugio) di sottogruppi di $\pi(X, x_0)$.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che due elementi qualunque dell'insieme Z sono coniugati. Sia ora H un sottogruppo di $\pi(X, x_0)$ coniugato ad uno dei sottogruppi $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ in Z, cioè $H = \alpha^{-1}(p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))\alpha$ per qualche $\alpha \in \pi(X, x_0)$. Se $\alpha = [f]$, denotiamo con $\widetilde{f}$ un sollevamento con punto iniziale $\widetilde{x_0}$; per il teorema precedente avremo allora: $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{f}(1)) = u_f p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) = H$, e quindi H appartiene all'insieme dato. □

2.3 Teorema di sollevamento per i rivestimenti

Nella sezione **1.3** abbiamo visto che, dato un rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ di X e una funzione continua f da uno spazio connesso Y in X, un sollevamento $\widetilde{f}$ di f in $\widetilde{X}$, se esiste, è unico. In questa sezione cerchiamo invece di analizzare il problema dell'esistenza di tale sollevamento.

Innanzitutto diamo la definizione di spazio topologico localmente connesso per archi.

Definizione 2.3.1. Uno spazio topologico X è detto *localmente connesso per archi* se, per ogni $x \in X$, ogni intorno aperto di x contiene un intorno aperto di x che sia connesso per archi.

Lemma 2.3.1. *Uno spazio connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.*

Dimostrazione. Siano Y uno spazio connesso e localmente connesso per archi, y un punto di Y ed indichiamo con U l'insieme dei punti di Y che possono essere uniti a y con un cammino in Y. Poichè Y è localmente connesso per archi, ogni punto $u \in U$ ammette un intorno aperto V connesso per archi; tale intorno è interamente contenuto in U perchè se $v \in V$ esiste un cammino in V da v a u e un cammino in Y da u a y, e quindi esiste in Y un cammino da v a y. Ciò dimostra che U è aperto. In maniera analoga si dimostra che $Y \backslash U$ è aperto. Quindi U è un sottinsieme di Y non vuoto (contiene sicuramente y) simultaneamente aperto e chiuso. Poichè Y è connesso, ciò implica che $U = Y$, il che dimostra che Y è connesso per archi. □

Introduciamo ora una notazione per semplificare la scrittura delle funzioni.

Notazione 2.3.1. Siano X e Y spazi topologici, $x \in X$ e $y \in Y$, allora la notazione

$$f : (X, x) \to (Y, y)$$

significa che f è una funzione continua da X in Y con $f(x) = y$.

Utilizzando la notazione sopra descritta, il problema dell'esistenza di un sollevamento risulta essere il seguente.
Siano $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X, $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$, $x_0 = p(\widetilde{x_0})$, $y_0 \in Y$, e $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$. Sotto quali condizioni esiste una funzione $\widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ tale che il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \arrow[dd, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & (X, x_0) \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

sia commutativo?

Nel caso $\widetilde{f}$ sia un sollevamento di f, si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \arrow[dd, "p_*"] \\ \pi(Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & \\ & \pi(X, x_0) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

nel quale p_* è iniettiva (vedere il teorema **2.2.2**) e $p_* \circ \widetilde{f}_* = f_*$; pertanto

$$f_* \pi(Y, y_0) = p_* \circ \widetilde{f}_* \pi(Y, y_0) \subseteq p_* \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}).$$

Ne segue che la relazione $f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ è una condizione necessaria per l'esistenza di $\widetilde{f}$. L'aspetto più interessante è che, nel caso in cui Y sia uno spazio localmente connesso per archi, tale condizione è anche sufficiente. Tale risultato viene descritto e analizzato nel seguente teorema.

Teorema 2.3.2. *Siano $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X, Y uno spazio connesso e localmente connesso per archi, $y_0 \in Y$, $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ e $x_0 = p(\widetilde{x_0})$. Sia $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un sollevamento $\widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ è che*

$$f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}).$$

Dimostrazione. Per semplificare la comprensione dividiamo la dimostrazione in passaggi.

- Abbiamo già mostrato che la condizione è necessaria; vediamo ora che essa è anche sufficiente. Per fare ciò dobbiamo definire la funzione $\widetilde{f}$. Le seguenti considerazioni mostrano che c'è un solo modo per definire $\widetilde{f}$. Assumiamo che $\widetilde{f}$ esista; sia y un qualsiasi punto di Y. Poichè Y è connesso per archi (per il lemma **2.3.1**), possiamo scegliere un cammino $\varphi : I \to Y$ con punto iniziale y_0 e punto finale y. Consideriamo i cammini $f \circ \varphi$ e $\widetilde{f} \circ \varphi$, rispettivamente in X e in $\widetilde{X}$. Il cammino $\widetilde{f} \circ \varphi$ è un sollevamento di $f \circ \varphi$, e $\widetilde{f}(y)$ è il punto finale del cammino $\widetilde{f} \circ \varphi$.

- Alla luce di tali considerazioni, definiamo la funzione $\widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ nel seguente modo. Fissato un qualsiasi punto $y \in Y$, scegliamo un cammino $\varphi : I \to Y$ con punto iniziale y_0 e punto finale y. Allora $f \circ \varphi$ è un cammino in X con punto iniziale x_0. Per il teorema **1.4.2** esiste un unico cammino $\widetilde{f \circ \varphi} : I \to \widetilde{X}$ con punto iniziale $\widetilde{x_0}$ e tale che $p \circ \widetilde{f \circ \varphi} = f \circ \varphi$. Definiamo:

$$\widetilde{f}(y) = \text{ punto finale di } \widetilde{f \circ \varphi}.$$

  Vediamo ora che la definizione è ben posta, mostrando che $\widetilde{f}(y)$ non dipende dalla scelta del cammino φ. Se ψ è un altro cammino in Y da y_0 a y, il prodotto $\varphi * \overline{\psi}$ è un cammino chiuso in Y di base y_0; inoltre

$$f_*[\varphi * \overline{\psi}] \in f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}),$$

e quindi esiste un arco chiuso α in $\widetilde{X}$ di base $\widetilde{x_0}$ per il quale

$$[f \circ \varphi * f \circ \overline{\psi}] = f_*[\varphi * \overline{\psi}] = p_*[\alpha] = [p \circ \alpha].$$

Tenendo presenti le proprietà del prodotto di archi, si ottiene:

$$f \circ \varphi \sim f \circ \varphi * \varepsilon_{x_0} \sim f \circ \varphi * (f \circ \overline{\psi} * f \circ \psi) \sim$$
$$\sim (f \circ \varphi * f \circ \overline{\psi}) * f \circ \psi \sim p \circ \alpha * f \circ \psi.$$

Dal corollario **1.4.3** segue allora che $\widetilde{f \circ \varphi}(1) = \gamma(1)$, dove γ è un sollevamento di $p \circ \alpha * f \circ \psi$ che inizia in x_0; ma per l'unicità di sollevamento, $\gamma = \alpha * \widetilde{f \circ \psi}$, e quindi

$$\widetilde{f \circ \varphi}(1) = \gamma(1) = (\alpha * \widetilde{f \circ \psi})(1) = \widetilde{f \circ \varphi}(1),$$

il che dimostra che $\widetilde{f}$ è ben definita. Si osservi che finora abbiamo sfruttato solo l'ipotesi che Y sia connesso.

- Per dimostrare che $\widetilde{f}$ è una funzione continua, dovremo utilizzare l'ipotesi di connessione per archi locale per Y. Siano $y \in Y$ e U un intorno aperto in $\widetilde{X}$ di $\widetilde{f}(y)$. Per dimostrare la continuità, noi dobbiamo mostrare che esiste un intorno V di y tale che $\widetilde{f}(V) \subseteq U$. Per il teorema **1.3.1** p è un'applicazione aperta e quindi $p(U)$ è un intorno aperto di $p \circ \widetilde{f}(y) = f(y)$; possiamo allora trovare un intorno U' di $f(y)$ uniformemente rivestito da p, tale che $U' \subseteq p(U)$. Per definizione, $p^{-1}(U') = \bigcup_{j \in J}(V_j)$, dove ogni V_j è omeomorfo a U' tramite p; quindi $\widetilde{f}(y) \in V_k$ per qualche $k \in J$. Ne segue che $f^{-1}(p(U \cap V_k))$ è un intorno aperto di y e, poichè Y è localmente connesso per archi, esiste un intorno aperto V connesso per archi di y tale che $V \subseteq f^{-1}(p(U \cap V_k))$, ossia $f(V) \subseteq p(U \cap V_k)$.

- Dimostreremo ora che V è l'aperto cercato, facendo vedere che $\widetilde{f}(V) \subseteq U \cap V_k$. Siamo dunque y' un punto di V , ψ un cammino in Y da y_0 a y e φ un arco in V da y a y'. Per definizione, $\widetilde{f}(y')$ è il punto finale del sollevamento di $f(\psi * \varphi) = f \circ \psi * f \circ \varphi$ che inizia in $\widetilde{x_0}$; un tale sollevamento è dato da $\widetilde{f \circ \psi} * \beta$, dove β è il sollevamento di $f \circ \varphi$ che inizia in $\widetilde{f \circ \psi}(1) = \widetilde{f}(y)$. Ne segue che $\widetilde{f}(y') = \beta(1)$; è sufficiente quindi verificare che $\beta(1) \in U \cap V_k$. Si osservi innanzitutto che

$$\beta(I) \subseteq p^{-1}(f \circ \varphi(I)) \subseteq p^{-1}(p(U \cap V_k)) \subseteq p^{-1}(U') = \bigcup_{j \in J} V_j$$

e che il punto inziale $\widetilde{f}(y)$ di β appartiene a V_k. Poichè $\beta(I)$ è connesso, ne segue che $\beta(I) \subseteq V_k$; d'altro canto

$$p \circ \beta(I) = f \circ \varphi(I) \subseteq p(U \cap V_k)$$

quindi $\beta(I) \subseteq U \cap V_k$ perchè $p|_{V_k}$ è iniettiva. Ciò completa la dimostrazione del teorema.

□

Abbiamo osservato nella dimostrazione precedente che per definire $\widetilde{f}$ è sufficiente che Y sia connesso, mentre per dimostrare che $\widetilde{f}$ è continua abbiamo utilizzato l'ipotesi che sia localmente connesso per archi. Vediamo ora con un esempio che nel caso di uno spazio connesso, ma non localmente connesso per archi, la condizione $f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ non è sufficiente a garantire l'esistenza di un sollevamento continuo di f.

Controesempio 2.3.1. Lo spazio che consideriamo è il cosiddetto *cerchio polacco* (figura 2.1): $Y = A \cup B \cup C$, dove:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ -1 \leq x \leq 0,\ y = 0\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < x \leq 1,\ y = \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{x})\}$$

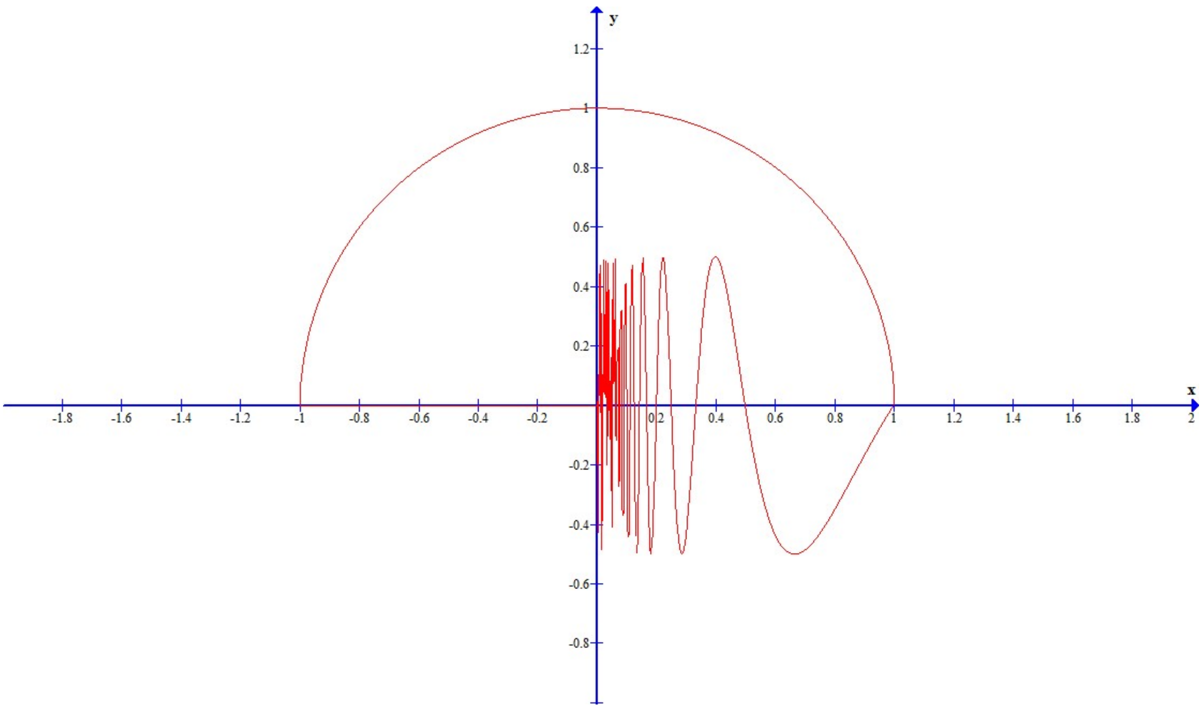

Figura 2.1: Cerchio polacco

Lo spazio Y è chiaramente connesso per archi (e quindi, poichè siamo in $\mathbb{R}^2$, anche connesso), ma non è localmente connesso per archi, in quanto ogni intorno di $(0,0)$ interseca sia B sia C, e l'unico cammino che collega B e C passa attraverso A; quindi se l'intorno assegnato non contiene A, esso non è connesso per archi. Consideriamo il rivestimento di S^1 $(\mathbb{R}, p)$, descritto nell'esempio **1.1.2**, cioè $p(t) = (\cos t, \sin t)$. Definiamo $f : Y \to S^1$ nel seguente modo:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & (x,y) \in A \\ (x, -\sqrt{1-x^2}), & (x,y) \in B \cup C \end{cases}$$

Si vede facilmente che f è una funzione continua. Scegliamo ora come punti base $x_0 = (1,0) \in S^1 = X$, $\widetilde{x_0} = 0 \in \mathbb{R} = \widetilde{X}$, $y_0 = (1,0) \in Y$. La condizione

$$f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$$

è evidentemente verificata, in quanto sia $\widetilde{X}$ che Y sono semplicemente connessi (Y è semplicemente connesso perchè $B \cup C$ non è connesso per archi). Dimostriamo ora che f non ammette un sollevamento continuo. Scegliendo un ramo opportuno della funzione arcocoseno, possiamo trovare una funzione continua $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\cos(\varphi(x)) = 1,\ \sin(\varphi(x)) \geq 0,\ \varphi(-1) = \pi,\ \varphi(1) = 0.$$

Scegliendo un ramo differente, troveremo una funzione continua $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\cos(\psi(x)) = 1,\ \sin(\psi(x)) \leq 0,\ \psi(-1) = -\pi,\ \psi(1) = 0$$

Supponiamo ora che esista un sollevamento continuo $\widetilde{f}$ di f. Se $(x,y) \in A$,

$$p(\widetilde{f}(x,y)) = f(x,y) = (x,y) =$$

$$= (x, \sqrt{1-x^2}) = (\cos(\pi x), \sin(\pi x)) = p(\varphi(x))$$

e quindi $\widetilde{f}(x,y) = \varphi(x) + 2\pi n$, dove $n = n(x,y)$ è un intero che a priori dipende da (x,y). Poichè $\widetilde{f}$ e φ sono continue, $n(x,y)$ è una funzione continua a valori interi definita su A; poichè A è connesso, $n = n(x,y)$ è costante. Analogamente si deduce che, se $(x,y) \in B \cup C$,

$$\widetilde{f}(x,y) = \psi(x) + 2\pi m,$$

dove $m \in \mathbb{Z}$. Calcolando le due relazioni nei punti $(-1,0)$ e $(1,0)$ di $A \cap (B \cup C)$ e sottraendo si avrà:

$$\begin{gathered} \varphi(-1) - \psi(-1) = 2\pi(n-m) \\ \varphi(1) - \psi(1) = 2\pi(n-m); \end{gathered}$$

dalla prima relazione si ottiene $n - m = 1$ e dalla seconda $n - m = 0$. Se ne deduce quindi che non esiste un sollevamento continuo.

Alla luce di quanto osservato in questa sezione, da ora in poi assumeremo che tutti gli spazi topologici che considereremo siano connessi e localmente connessi per archi.

2.4 Omomorfismi di rivestimenti

In questa sezione cerchiamo di ottenere alcune informazioni fondamentali sui possibili rivestimenti di un dato spazio X. A questo proposito introduciamo i concetti di omomorfismo, isomorfismo e automorfismo tra rivestimenti e ne studiamo le principali proprietà. Definiamo anche il gruppo delle trasformazioni di rivestimento e studiamo l'azione che tale gruppo ha sul rivestimento.

Definizione 2.4.1. Siano $(\widetilde{X_1}, p_1)$ e $(\widetilde{X_2}, p_2)$ rivestimenti di X. Un *omomorfismo* da $(\widetilde{X_1}, p_1)$ in $(\widetilde{X_2}, p_2)$ è una funzione continua $\varphi : \widetilde{X_1} \to \widetilde{X_2}$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X_1} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dd, "\varphi"] \\ X & \\ & \widetilde{X_2} \arrow[ul, "p_2"] \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Si noti che la composizione di due omomorfismi è ancora un omomorfismo e che, se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di X, allora $id_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ è un omomorfismo.

Definizione 2.4.2. Un omomorfismo φ da $(\widetilde{X_1}, p_1)$ in $(\widetilde{X_2}, p_2)$ è chiamato *isomorfismo* se esiste un omomorfismo ψ da $(\widetilde{X_2}, p_2)$ in $(\widetilde{X_1}, p_1)$ tale che entrambe le composizioni $\psi \circ \varphi$ e $\varphi \circ \psi$ siano la funzione identità. Due rivestimenti sono detti *isomorfi* se esiste un isomorfismo di uno nell'altro. Un *automorfismo* è un isomorfismo da un rivestimento in sé stesso.

Definizione 2.4.3. Gli automorfismi di rivestimenti sono solitamente chiamati *trasformazioni* di *rivestimenti*. L'insieme delle trasformazioni del rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ di X, con la composizione di funzioni come operazione, è ovviamente un gruppo, chiamato *gruppo* delle *trasformazioni* di *rivestimento*, e lo denoteremo con $A(\widetilde{X}, p)$.

Lemma 2.4.1. *Siano φ_0 e φ_1 omomorfismi da $(\widetilde{X_1}, p_1)$ in $(\widetilde{X_2}, p_2)$. Se esiste un punto $x \in \widetilde{X_1}$ tale che $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$, allora $\varphi_0 = \varphi_1$.*

Questo è un caso particolare del teorema **1.3.2**, in quanto φ_0, φ_1 sono due sollevamenti di p_1 con un punto in comune.

Una conseguenza immediata di questo lemma è il seguente corollario.

Corollario 2.4.2. *Se $\varphi \in A(\widetilde{X}, p)$ e $\varphi \neq id_{\widetilde{X}}$, allora φ non ha punti fissi.*

Lemma 2.4.3. *Siano $(\widetilde{X_1}, p_1)$ e $(\widetilde{X_2}, p_2)$ due rivestimenti di X, e fissiamo come punti base $\widetilde{x_1} \in \widetilde{X_1}$, $\widetilde{x_2} \in \widetilde{X_2}$, $x_0 \in X$, con $p_1(\widetilde{x_1}) = p_2(\widetilde{x_2}) = x_0$. Allora esiste un omomorfismo φ da $(\widetilde{X_1}, p_1)$ a $(\widetilde{X_2}, p_2)$ tale che $\varphi(\widetilde{x_1}) = \widetilde{x_2}$ se e solo se $p_{1*}\pi(\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1}) \subseteq p_{2*}\pi(\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2})$.*

Questo è un caso particolare del teorema **2.3.2**

Corollario 2.4.4. *Siano $(\widetilde{X_1}, p_1)$ e $(\widetilde{X_2}, p_2)$ due rivestimenti di X, e fissiamo come punti base $\widetilde{x_1} \in \widetilde{X_1}$, $\widetilde{x_2} \in \widetilde{X_2}$, $x_0 \in X$, con $p_1(\widetilde{x_1}) = p_2(\widetilde{x_2}) = x_0$. Allora esiste un isomorfismo φ da $(\widetilde{X_1}, p_1)$ a $(\widetilde{X_2}, p_2)$ tale che $\varphi(\widetilde{x_1}) = \widetilde{x_2}$ se e solo se $p_{1*}\pi(\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1}) = p_{2*}\pi(\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2})$.*

Questa è una conseguenza diretta del lemma **2.4.3**, della definizione di isomorfismo e del corollario **2.4.2**.

Teorema 2.4.5. *Due rivestimenti $(\widetilde{X_1}, p_1)$ e $(\widetilde{X_2}, p_2)$ di X sono isomorfi se e solo se, per ogni coppia di punti $\widetilde{x_1} \in \widetilde{X_1}$ e $\widetilde{x_2} \in \widetilde{X_2}$ tale che $p_1(\widetilde{x_1}) = p_2(\widetilde{x_2}) = x_0$, i sottogruppi $p_{1*}\pi(\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1})$ e $p_{2*}\pi(\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2})$ appartengono alla stessa classe di coniugio di $\pi(X, x_0)$.*

Anche questo teorema è una conseguenza immediata dai risultati sinora studiati: deriva infatti dal corollario **2.4.4** e dal teorema **2.2.4**.
Questo teorema esprime un concetto fondamentale nello studio dei rivestimenti; infatti mostra che ad ogni classe di coniugio del gruppo $\pi(X, x_0)$ è associato, a meno di isomorfismi, un unico rivestimento.

Riprendiamo ora il gruppo delle trasformazioni di rivestimento definito precedentemente $A(\widetilde{X}, p)$ e studiamone l'azione su $\widetilde{X}$.

Teorema 2.4.6. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X; l'azione di $A(\widetilde{X}, p)$ su $\widetilde{X}$ è propriamente discontinua.*

Dimostrazione. Fissato un punto $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, esiste un intorno U connesso per archi di $x = p(\widetilde{x})$ uniformemente rivestito da p: quindi $p^{-1}(U)$ è l'unione disgiunta di $\{V_j\}_{j \in J}$. Per ogni elemento $h \neq 1_{A(\widetilde{X},p)}$, avremo per il corollario **1.3.3** che $h(\widetilde{x}) \neq \widetilde{x}$; inoltre $\widetilde{x}$, $h(\widetilde{x}) \in p^{-1}(x) \subseteq p^{-1}(U)$, e quindi $\widetilde{x} \in V_k$, $h(\widetilde{x}) \in V_l$ per qualche $k, l \in J$. Allora $l \neq k$ perchè altrimenti $h(\widetilde{x})$ e $\widetilde{x}$ sarebbero due punti distinti di V_k aventi la stessa immagine tramite $p|_{V_k}$, che è una funzione iniettiva. Poichè $p \circ h(V_k) = p(V_k) = U$ si ha $h(V_k) \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$; ma $h(V_k)$ è connesso per archi (è omeomorfo a U) e $h(\widetilde{x}) \in V_l$, quindi $h(V_k) \subseteq V_l$. Ne segue che $V_k \cap h(V_k) \subseteq V_k \cap V_l = \emptyset$ e quindi l'azione di $A(\widetilde{X}, p)$ su $\widetilde{X}$ è propriamente discontinua. $\square$

Questa proprietà ci permette, in alcuni casi, di descrivere lo spazio base X come spazio quoziente dello spazio totale $\widetilde{X}$:

Teorema 2.4.7. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X; se $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ è un sottogruppo normale di $\pi(X, x_0)$, allora X è omeomorfo a $\widetilde{X}/A(\widetilde{X}, p)$.*

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che la condizione di normalità vale per ogni punto base $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Per il teorema **2.2.3** $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = u_f p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, dove f è un cammino da x_0 a $p(\widetilde{x})$; poichè u_f è un isomorfismo, $u_f p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ è normale in $u_f\pi(X, x_0) = \pi(X, p(\widetilde{x}))$ e quindi $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ è normale in $\pi(X, p(\widetilde{x}))$. Definiamo ora la funzione $f : X \to \widetilde{X}/A(\widetilde{X}, p)$ mediante $f(x) = \pi(\widetilde{x})$, dove $\widetilde{x}$ è un punto di $p^{-1}(x)$ e $\pi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/A(\widetilde{X}, p)$ è la proiezione canonica, e verifichiamo che f non dipende dalla scelta di $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. Se $\widetilde{y} \in p^{-1}(x)$, i due sottogruppi $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ e $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{y})$ sono coniugati in $\pi(X, x)$ e quindi coincidono perchè sono normali in $\pi(X, x)$. Per il corollario **2.4.4** segue quindi che esiste un elemento $h \in A(\widetilde{X}, p)$ tale che $h(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$. Ciò vuol dire

che $\pi(\widetilde{x}) = \pi(\widetilde{y})$.
Sappiamo inoltre che f è biiettiva e che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd, "f"] & \\ & \widetilde{X} \arrow[ul, "p"'] \arrow[dl, "\pi"] \\ \widetilde{X}/A(\widetilde{X},p) & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

è commutativo; pertanto, siccome X ha la topologia quoziente relativa a p, $\widetilde{X}/A(\widetilde{X},p)$ ha la topologia quoziente relativa a π e f è una biiezione, f è un omeomorfismo. □

Capitolo 3

Teorema di esistenza per i rivestimenti

Fino ad ora abbiamo studiato e approfondito cosa sia un rivestimento e quali siano le sue principali proprietà. Il problema che ci poniamo in questo capitolo è quello di trovare una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un rivestimento. Per fare ciò avremo bisogno di alcune nozioni preliminari: nella sezione **3.1** definiremo il concetto di rivestimento universale e nella sezione **3.2** approfondiremo il gruppo delle trasformazioni di un rivestimento. Alla luce dei risultati di queste due sezioni, nella sezione **3.3** troveremo finalmente la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un rivestimento.

3.1 Rivestimenti universali

In questa sezione introduciamo il concetto di rivestimento universale, fondamentale per la comprensione dei risultati di questo capitolo.

Definizione 3.1.1. Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. $(\widetilde{X}, p)$ si dice essere un *rivestimento universale* di X se $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso.

Teorema 3.1.1. *Siano $(\widetilde{X_1}, p_1)$ e $(\widetilde{X_2}, p_2)$ due rivestimenti di X, e sia φ un omomorfismo da $(\widetilde{X_1}, p_1)$ a $(\widetilde{X_2}, p_2)$. Allora $(\widetilde{X_1}, \varphi)$ è un rivestimento di $\widetilde{X_2}$.*

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che ogni punto $x \in X$ ha un intorno U connesso per archi uniformemente rivestito sia da p_1 che da p_2. Possiamo ottenere un tale intorno, scegliendo due intorni aperti di x, U_1 e U_2, uniformemente rivestiti rispettivamente da p_1 e da p_2 e definendo U come la componente connessa per archi di $U_1 \cap U_2$ contenente x.
Ora proviamo che φ è suriettiva. Sia $y \in \widetilde{X_2}$; dobbiamo mostrare che esiste un punto $x \in \widetilde{X_1}$ tale che $\varphi(x) = y$. Fissiamo un punto base $x_1 \in \widetilde{X_1}$ e sia $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_0 = p_1(x_1) = p_2(x_2)$. Consideriamo un cammino f in $\widetilde{X_2}$ con punto iniziale x_2 e punto finale y e sia $g = p_2 \circ f$. Per il teorema **1.4.2** esiste un unico cammino h in $\widetilde{X_1}$ con punto iniziale x_1 tale che $p_1 \circ h = g$. Sia x il punto finale di h. Allora i cammini $\varphi \circ h$ e f hanno stesso punto iniziale e vale $p_2 \circ \varphi \circ h = g = p_2 \circ f$, quindi, sempre per il toerema di sollevamento dei cammini, $\varphi \circ h = f$. Pertanto $\varphi(x) = y$.
Ora, fissato $z \in \widetilde{X_2}$, risulta immediato trovare un intorno di z uniformemente rivestito da φ. Prendiamo un intorno U di $x = p_2(z)$ uniformemente rivestito sia da p_1, sia da p_2 e sia W la componente di $p_2^{-1}(U)$ contenente z. Tale W è l'intorno di z cercato. □

Per cominciare a capire l'utilità della nozione di rivestimento universale, osserviamo il teorema appena enunciato. Se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento universale di X e $(\widetilde{X'}, p')$ è un rivestimento di X, per il lemma **2.4.3**, esiste un omomorfismo φ da $(\widetilde{X}, p)$ a $(\widetilde{X'}, p')$, e, per il teorema appena dimostrato, $(\widetilde{X}, \varphi)$ è un rivestimento di $\widetilde{X'}$. Pertanto $\widetilde{X}$ può essere sempre visto come un rivestimento di ogni rivestimento di X e ciò giustifica la terminologia *rivestimento universale*. In altre parole $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento universale di X se e solo se ogni altro rivestimento $(\widetilde{X'}, p')$ di X è rivestito da $(\widetilde{X}, p)$, cioè si ha il seguente diagramma comutativo:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{X'} \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Un'immediata conseguenza è il seguente teorema.

Teorema 3.1.2. *Due rivestimenti universali di X sono isomorfi.*

3.2 L'azione del gruppo $\pi(X,x)$ sull'insieme $p^{-1}(x)$

In questa sezione approfondiamo lo studio del gruppo $A(\widetilde{X},p)$ delle trasformazioni di un rivestimento $(\widetilde{X},p)$ di X che abbiamo introdotto nella sezione **2.4**. Per fare ciò, per ogni $x \in X$ definiamo un'azione di $\pi(X,x)$ sull'insieme $p^{-1}(x)$.

Definizione 3.2.1. Sia $(\widetilde{X},p)$ un rivestimento di X e sia $x \in X$. Per ogni punto $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ e per ogni $\alpha \in \pi(X,x)$, definiamo $\widetilde{x} \star \alpha \in p^{-1}(x)$ nel seguente modo. Dal teorema **1.4.2**, sappiamo che esiste un'unica classe di cammini $\widetilde{\alpha}$ in $\widetilde{X}$ tale che $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ e che abbia punto iniziale $\widetilde{x}$. Definiamo $\widetilde{x}\star\alpha$ come il punto finale della classe di cammini $\widetilde{\alpha}$. Poichè $(\widetilde{x}\star\alpha)\star\beta = \widetilde{x}\star(\alpha\beta)$ e $\widetilde{x} \star 1_{\pi(X,x)} = \widetilde{x}$, abbiamo che $p^{-1}(x)$ è un $\pi(X,x) -$ *spazio.*

Teorema 3.2.1. *Sia $(\widetilde{X},p)$ un rivestimento di X e sia $x \in X$. Il gruppo $\pi(X,x)$ agisce transitivamente su $p^{-1}(x)$.*

Dimostrazione. Siano $\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1} \in p^{-1}(x)$. Poichè $\widetilde{X}$ è connesso per archi, esiste una classe di cammini $\widetilde{\alpha}$ in $\widetilde{X}$ con punto iniziale $\widetilde{x_0}$ e punto finale $\widetilde{x_1}$. Sia $\alpha = p_*(\widetilde{\alpha})$; allora α è una classe di equivalenza di cammini chiusi e, ovviamente, $\widetilde{x_0} \star \alpha = \widetilde{x_1}$. □

Una conseguenza immediata di questo teorema è il seguente risultato.

Corollario 3.2.2. *Sia $(\widetilde{X},p)$ un rivestimento di X e sia $x \in X$. Per ogni $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, il sottogruppo di isotropia rispetto a questo punto è precisamente il sottogruppo $p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x})$ di $\pi(X,x)$ e il grado del rivestimento è uguale all'indice del sottogruppo $p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x})$.*

Grazie a queste nozioni, studiamo la relazione tra il gruppo delle trasformazioni di un rivestimento e l'azione di $\pi(X,x)$ è $p^{-1}(x)$.

Teorema 3.2.3. *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento di* X *e sia* $x \in X$*. Per ogni automorfismo* $\varphi \in A(\widetilde{X}, p)$*, per ogni punto* $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ *e per ogni* $\alpha \in \pi(X, x)$*,* $\varphi(\widetilde{x} \star \alpha) = \varphi(\widetilde{x}) \star \alpha$*. In altre parole, l'azione di* $\pi(X, x)$ *su* $p^{-1}(x)$ *commuta con* φ*.*

Dimostrazione. Solleviamo α a un cammino $\widetilde{\alpha}$ con punto iniziale $\widetilde{x}$ e tale che $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$; $\widetilde{x} \star \alpha$ sarà il punto finale di $\widetilde{\alpha}$. Consideriamo ora il cammino $\varphi_*(\widetilde{\alpha})$ in $\widetilde{X}$. Il suo punto iniziale è $\varphi(\widetilde{x})$ e il suo punto finale è $\varphi(\widetilde{x} \star \alpha)$. Osserviamo che $p_*[\varphi_*(\widetilde{\alpha})] = (p \circ \varphi)_*(\widetilde{\alpha}) = p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$, cioè $\varphi_*(\widetilde{\alpha})$ è a sua volta un sollevamento di α. Perciò, per definizione, $\varphi(\widetilde{x}) \star \alpha$ è il punto finale del cammino $\varphi(\widetilde{\alpha})$, cioè $\varphi(\widetilde{x}) \star \alpha = \varphi(\widetilde{x} \star \alpha)$, come richiesto. □

Ora possiamo determinare completamente la struttura di $A(\widetilde{X}, p)$.

Teorema 3.2.4. *Sia* $(\widetilde{X}, p)$ *un rivestimento di* X *e sia* $x \in X$*. Allora* $A(\widetilde{X}, p)$ *è isomorfo al gruppo delle trasformazioni di* $p^{-1}(x)$*, considerato come* $\pi(X, x) -$ *spazio.*

Dimostrazione. Se φ è un qualsiasi automorfismo di $(\widetilde{X}, p)$, allora la restrizione $\varphi|_{p^{-1}(x)}$ è un automorfismo di $p^{-1}(x)$ per il teorema **3.2.2**. Inoltre per il corollario **2.4.2**, ogni automorfismo φ è completamente determinato dalla sua restrizione $\varphi|_{p^{-1}(x)}$. Esiste pertanto un monomorfismo tra $A(\widetilde{X}, p)$ è il gruppo delle trasformazioni del $\pi(X, x) -$ *spazio*, $p^{-1}(x)$. La suriettività di tale morfismo risulta immediata dal corollario **2.4.4**. Pertanto $A(\widetilde{X}, p)$ è isomorfo al gruppo delle trasformazioni di $p^{-1}(x)$. □

Conseguenza immediata di questo teorema è il seguente corollario.

Corollario 3.2.5. *Per ogni punto* $x \in X$ *e per ogni* $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$*,* $A(\widetilde{X}, p)$ *è isomorfo al gruppo quoziente* $N(p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}))/p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$*, dove* $N(p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ *denota il normalizzatore di* $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ *in* $\pi(X, x)$*.*

Definizione 3.2.2. Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Se $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ è un sottogruppo normale di $\pi(X, x)$, allora $(\widetilde{X}, p)$ si dice essere un *rivestimento regolare* di X.

Corollario 3.2.6. *Se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento regolare di X, allora $A(\widetilde{X}, p)$ è isomorfo al gruppo quoziente $\pi(X,x)/p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

Questo deriva direttamente dal corollario **3.2.4**, poichè in questo caso $N(p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = \pi(X, x)$.

Questo risultato risulta particolarmente interessante se applicato ai rivestimenti universali, infatti vale il seguente.

Corollario 3.2.7. *Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento universale di X e $x \in X$. Allora $A(\widetilde{X}, p)$ è isomorfo a $\pi(X, x)$, e l'ordine di $\pi(X, x)$ è uguale alla fibra del rivestimento $(\widetilde{X}, p)$.*

Esempio 3.2.1. Consideriamo il rivestimento $(\mathbb{R}, p)$ di S^1 definito nell'esempio **1.1.2**. Poichè $\mathbb{R}$ è contraibile, è semplicemente connesso. Pertanto $(\mathbb{R}, p)$ è un rivestimento universale di S^1, quindi è applicabile il corollario **3.2.6**. Cerchiamo ora di determinare il gruppo delle trasformazioni di $\mathbb{R}$. Per la periodicità delle funzioni seno e coseno, risulta ovvio che la traslazione $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $T_n(t) = t + 2\pi n$ è un automorfismo per ogni intero n. Inoltre risulta ovvio che se x è un punto di S^1 e se t_1, t_2 sono due punti qualsiasi $p^{-1}(x)$, allora esiste un intero n tale che $T_n(t_1) = t_2$. Ne segue che ogni automorfismo del rivestimento $(\mathbb{R}, p)$ è una di queste traslazioni T_n (vedere lemma **2.4.1** e corollario **2.4.2**). Poichè il gruppo di queste traslazioni$\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è ovviamente un gruppo ciclico di ordine infinito, anche $\pi(S^1, x)$ è un gruppo ciclico di ordine infinito. A questo proposito ricordiamo che un gruppo ciclico di ordine infinito è sempre isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

3.3 Esistenza di rivestimenti

Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato che un rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ di uno spazio topologico X è determinato, a meno di isomorfismi, dalla classe di coniugio del sottogruppo $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ di $\pi(X, x)$. Questo fatto fa nascere la

seguente domanda: fissato uno spazio topologico X e una classe di coniugio di sottogruppi di $\pi(X,x)$, esiste un rivestimento $(\widetilde{X},p)$ di X tale che $p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x})$ appartenga alla classe di coniugio data? In questa sezione mostriamo che la risposta a questa domanda è affermativa, purchè X soddisfi un ipotesi aggiuntiva.
Proviamo innanzitutto che è sufficiente considerare il problema nel caso particolare in cui la classe di coniugio di sottogruppi fissata consista nel sottogruppo banale $\{1\}$.

Lemma 3.3.1. *Sia X uno spazio topologico che ammetta un rivestimento universale $(\widetilde{X},p)$ e sia $x \in X$. Per ogni classe di coniugio di sottogruppi di $\pi(X,x)$, esiste un rivestimento $(\widetilde{X},p)$ di X tale che $p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x})$ appartenga alla classe di coniugio data.*

Dimostrazione. Sia (Y,q) un rivestimento universale di X. Grazie a quanto studiato nella sezione **3.2**, $\pi(X,x)$ agisce transitivamente su $q^{-1}(x)$ e, poichè Y è semplicemente connesso, agisce senza punti fissi. Inoltre il gruppo delle trasformazioni $A(Y,q)$ è isomorfo a $\pi(X,x)$, quindi agisce a sua volta transitivamente e senza punti fissi su $q^{-1}(x)$. Scegliamo ora un punto $y \in q^{-1}(x)$ e un sottogruppo G di $\pi(X,x)$ che appartenga alla classe di coniugio data. Sia H il sottogruppo di $A(Y,q)$ definito nel seguente modo: $\varphi \in H$ se e solo se esiste un elemento $\alpha \in G$ tale che $\varphi(y) = y \star \alpha$. In questo modo G e H sono isomorfi: $\varphi \leftrightarrow \alpha \Leftrightarrow \varphi(y) = y \star \alpha$.
Poichè H è un sottogruppo di $A(Y,q)$, agisce in maniera propriamente discontinua su Y. Siano ora: $\widetilde{X}$ lo spazio quoziente Y/H, $r : Y \to \widetilde{X}$ la proiezione canonica e $p : \widetilde{X} \to X$ la funzione indotta da $q : Y \to X$. In questo modo otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "r"] \arrow[dd, "q"'] & \\ & \widetilde{X} = Y/Q \arrow[dl, "p"] \\ X & \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

(Y, q) è un rivestimento di X per costruzione e (Y, r) è un rivestimento di $\widetilde{X}$ per il teorema **1.2.4**; pertanto anche $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento di X. Quindi il gruppo $\pi(X, x)$ agisce su $p^{-1}(x)$. Sia ora $\widetilde{x} = r(y) \in p^{-1}(x)$. Per la costruzione di $\widetilde{X}$ è chiaro che il sottogruppo di isotropia di $\pi(X, x)$ corrispondente al punto $\widetilde{x}$ è precisamente il sottogruppo G e, per quanto osservato nella sezione **3.2**, ciò è equivalente a dire che $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = G$. □

La domanda posta all'inizio della sezione diventa pertanto la seguente: sia X uno spazio topologico; X ha un rivestimento universale?
Innanzitutto deriviamo una semplice condizione necessaria. Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento universale di X, x un punto qualsiasi di X, $\widetilde{x}$ un punto di $p^{-1}(x)$, U un intorno di x uniformemente rivestito da p e V la componente di $p^{-1}(U)$ contenente $\widetilde{x}$. Abbiamo dunque il seguente diagramma comutativo, riguardante i gruppi fondamentali.

$$\begin{tikzcd} \pi(V, \widetilde{x}) \arrow[r] \arrow[d, "(p|_V)_*"] & \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi(U, x) \arrow[r, "i_*"] & \pi(X, x) \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Poichè $p|_V$ è un omeomorfismo di V in U, $(p|_V)_*$ è un isomorfismo. Inoltre, per ipotesi, $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = \{1\}$. Da questi due fatti e dalla commutatività del diagramma, segue che i_* è l'omomorfismo banale, cioè $Im(i_*) = \{1\}$. Pertanto possiamo concludere che lo spazio X gode della seguente proprietà: ogni punto $x \in X$ ha un intorno U tale che l'omomorfismo $\pi(U, x) \to \pi(X, x)$ sia l'omomorfismo banale. Uno spazio con tale proprietà è detto semilocalmente semplicemente connesso. Tale definizione può anche essere formulata nel seguente modo.

Definizione 3.3.1. Uno spazio topologico X è detto *semilocalmente semplicemente connesso* se ogni punto $x \in X$ ha un intorno U tale che ogni *cappio* in U di base x è equivalente in X all'arco costante ε_x.

Controesempio 3.3.1. Gli spazi topologici più interessanti sono tutti semilocalmente semplicemente connessi e non è facile trovare spazi connessi e localmente connessi per archi che non siano semilocalmente semplicemente connessi. Un tale esempio è dato dagli orecchini hawaiani, cioè il sottospazio X di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

dove

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$$

è la circonferenza di raggio $\frac{1}{n}$ e di centro $(\frac{1}{n}, 0)$.

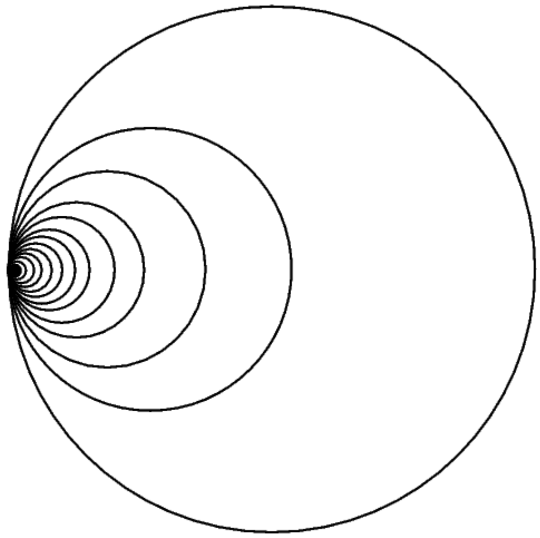

Figura 3.1: Orecchini hawaiani

X non è semilocalmente semplicemente connesso, in quanto nessun intorno del punto $(0, 0)$ soddisfa la condizione richiesta.

Possiamo ora provare uno fra i risultati più importanti di tutta la teoria dei rivestimenti, descritto nel seguente teorema.

Teorema 3.3.2 (Teorema di esistenza per i rivestimenti)**.** *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Allora per ogni classe di conigio di sottogruppi di $\pi(X, x)$, esiste un rivestimento $(\widetilde{X}, p)$ di X corrispondente alla classe di coniugio data, cioè tale che $p_*(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ appartenga alla classe di coniugio data.*

Dimostrazione. Alla luce del lemma **3.3.1**, è sufficiente provare che X ammetta un rivestimento universale. Questo lo faremo con una costruzione diretta.
Per semplificare la comprensione diviadiamo la dimostrazione in passaggi.

- Assumiamo momentaneamente che X ammetta un rivestimento universale $(\widetilde{X}, p)$. Scegliamo un punto base $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ e sia $x_0 = p(\widetilde{x_0})$. Fissato un punto $y \in \widetilde{X}$, poichè $\widetilde{X}$ è connesso per archi, esiste una classe di cammini α di punto iniziale $\widetilde{x_0}$ e punto finale y. Poichè $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso, questa classe di cammini è unica. Ora consideriamo la funzione che assegna a ogni punto y la classe di cammini $p_*(\alpha)$ in X. Segue dai teoremi **1.3.2** e **1.4.2** che questa è una funzione iniettiva da $\widetilde{X}$ all'insieme delle classi di cammini in X con punto iniziale x_0. Questa semplice osservazione è alla base della seguente costruzione.

- Scegliamo un punto $x_0 \in X$ e definiamo $\widetilde{X}$ come l'insieme di tutte le classi di equivalenza di cammini α in X con punto iniziale x_0. Definiamo ora una funzione $p : \widetilde{X} \to X$, ponendo $p(\alpha)$ il punto finale delle classe di cammini α. Ora dobbiamo trovare una topologia di $\widetilde{X}$ in maniera che sia semplicemente connesso e che $(\widetilde{X}, p)$ sia un rivestimento di X.

- Osserviamo che le nostre ipotesi implicano che la topologia su X abbia una base costituita da insiemi aperti U con le seguenti proprietà: U è connesso per archi e, fissato un qualsiasi $x \in U$, l'omomorfismo $\pi(U, x) \to \pi(X, x)$ indotto dall'inclusione è l'omomorfismo banale. Equivalentemente, ogni cappio in U è equivalente, in X, a un cammino costante. Per brevità chiamiamo un tale aperto, *basico*. Notiamo quindi che, fissati x, y in un aperto basico U, due cammini qualsiasi $f, g : I \to U$ con punto iniziale x e punto finale y sono equivalenti in X.

- Fissato un cammino α in $\widetilde{X}$ e un aperto basico U contenente il punto finale $p(\alpha)$, denotiamo con (α, U) l'insieme di tutti i cammini β di $\widetilde{X}$ tali che esista un cammino α' di U, con $\beta = \alpha * \alpha'$. Pertanto (α, U) è un sottinsieme di $\widetilde{X}$. Definiamo ora una topologia di $\widetilde{X}$ scegliendo come base di aperti la famiglia di sottinsiemi del tipo (α, U). Per dimostrare che la famiglia di tutti i sottinsiemi del tipo (α, U) sia una base è necessario provare la seguente affermazione: se $\gamma \in (\alpha, U) \cap (\beta, V)$, allora esiste un aperto basico W tale che $(\gamma, W) \subseteq (\alpha, U) \cap (\beta, V)$. Tale affermazione risulta verificata scegliendo W come un qualsiasi aperto basico tale che $p(\gamma) \in W \subseteq U \cap V$.

- Prima di procedere con la dimostrazione che $(\widetilde{X}, p)$ sia un rivestimento universale di X, conviene fare le due seguenti osservazioni:

  1. sia $\alpha \in \widetilde{X}$ e sia U un intorno aperto basico di $p(\alpha)$; allora $p|_{(\alpha,U)}$ è una funzione iniettiva da (α, U) a U;

  2. sia U un aperto basico e sia x un punto qualsiasi di U; allora $p^{-1}(U) = \bigcup_\lambda (\alpha_\lambda, U)$, dove $\{\alpha_\lambda\}$ è l'insieme di tutte le classi di cammini in X con punto iniziale x_0 e punto finale x. Inoltre gli insiemi (α_λ, U) sono a due a due disgiunti.

- Notiamo ora che dalla 2. segue che p è continua; pertanto, per la 1., $p|_{(\alpha,U)}$ è una funzione continua iniettiva da (α, U) a U. Possiamo ora dire che $p|_{(\alpha,U)}$ è una funzione aperta, infatti ogni sottinsieme aperto di (α, U) è unione di insiemi della forma (β, V), dove $V \subseteq U$. Quindi p è un omeomorfismo da (α, U) a U. Poichè U è connesso per archi, altrettanto sarà (α, U). Poichè gli insiemi descritti (α_λ, U) descritti al punto 2. sono a due a due disgiunti, segue che ogni aperto basico $U \subseteq X$ gode delle proprietà richieste per per essere uniformemente rivestito.

- Ora proviamo che $\widetilde{X}$ è connesso per archi. Sia $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ la classe di equivalenza che denota il cammino costante in x_0. Fissato un punto $\alpha \in \widetilde{X}$, dobbiamo trovare un cammino che unisca i punti $\widetilde{x_0}$ e α. Scegliamo dunque un cammino $f : I \to X$ appartenente alla classe di equivalenza α. Per ogni $s \in I$ definiamo $f_s : I \to X$, $f_s(t) = f(st)$, $t \in I$. Allora,

$f_1 = f$ e f_0 è il cammino costante in x_0. Sia α_s la classe di equivalenza del cammino f_s. Dimostriamo ora che la funzione che manda s in α_s è una funzione continua da I a $\widetilde{X}$, cioè è un cammino. Per dimostrare ciò dobbiamo provare che per ogni $s_0 \in I$ e per ogni intorno aperto basico U di $f(s_0)$, esiste un $\delta > 0$ tale che se $|s - s_0| < \delta$, allora $\alpha_s \in (\alpha_{s_0}, U)$; scegliendo un δ tale che se $|s - s_0| < \delta$ allora $f(s) \in U$ (tale δ esiste poichè f è continua), la funzione che manda $s \to \alpha_s$ è un cammino in $\widetilde{X}$ con punto iniziale $\widetilde{x_0}$ e punto finale α.

- Mostriamo infine che $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso. Per quanto visto nella sezione **3.2**, $p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ è il sottogruppo di isotropia corrispondente al punto $\widetilde{x_0}$ per l'azione di $\pi(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0)$. Quindi dobbiamo determinare $\widetilde{x_0} \star \alpha$ per ogni $\alpha \in \pi(X, x_0)$. Scegliamo un cammino chiuso $f : I \to X$ appartenente alla classe di equivalenza α e, utilizzando il metodo visto nel paragrafo precedente, definiamo il cammino $s \to \alpha_s$ in $\widetilde{X}$. Questo cammino in $\widetilde{X}$ ha $\widetilde{x_0}$ come punto iniziale, α come punto finale ed è ovviamente un sollevamento del cammino f. Quindi $\widetilde{x_0} \star \alpha = \alpha$ per la definizione dell'azione di $\pi(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0)$. Pertanto $\widetilde{x_0} \star \alpha = \widetilde{x_0}$ se e solo se $\alpha = 1$; pertanto il sottogruppo di isotropia è composto solo dall'elemento 1 e ciò dimostra il teorema.

$\square$

Capitolo 4

Rivestimenti ramificati

Un'applicazione importante della teoria dei rivestimenti sono i rivestimenti ramificati, molto utili nello studio delle superfici e in particolare delle superfici di Riemann.

4.1 Rivestimenti ramificati di superfici

In questa sezione, dopo aver ricordato la nozione di superficie, definiamo i rivestimenti ramificati di superfici e ne studiamo alcuni esempi.

Definizione 4.1.1. Una *superficie* è una varietà bidimensionale.
Cioè X è una superficie se è uno spazio topologico a base numerabile di Hausdorff, dotato di un atlante $\mathcal{A}$, di dimensione 2. Per maggiori dettagli si veda il capitolo 1, *Two-Dimensional Manifolds*, di [2]

Tutti gli spazi che consideriamo in questa sezione sono superfici.

Definizione 4.1.2. Sia $p : \widetilde{X} \to X$ una funzione continua. $(\widetilde{X}, p)$ è detto *rivestimento ramificato* di X se esiste un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_n \in X$ tale che l'insieme $p^{-1}(\{x_1, \ldots x_n\})$ sia discreto e che $(\widetilde{X} \backslash p^{-1}(\{x_1, \ldots x_n\}), p)$ sia un rivestimento di $X \backslash \{x_1, \ldots x_n\}$.
I punti $x_1, \ldots, x_n \in X$ sono detti *punti* di *ramificazione* di p.
Il *grado* di *ramificazione* è $|p^{-1}(x)|$, con $x \neq x_1, \ldots x_n$.

Vediamo ora alcuni esempi di rivestimenti ramificati; tali esempi ci aiuteranno a capire come i rivestimenti ramificati si comportano vicino ai punti di ramificazione

Esempio 4.1.1. Sia $D^2 = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| \leq 1\}$ e sia $p : D^2 \to D^2, \ p(z) = z^n$. Allora p è un rivestimento ramificato di grado n con $z = 0$ unico punto di ramificazione. Infatti ogni punto, eccetto 0, la cui preimmagine è solo 0 stesso, ha come preimmagine n punti.

Grazie a questo esempio possiamo cominciare a comprendere il comportamento di un rivestimento ramificato vicino ai suoi punti di ramificazione. Infatti se $(\widetilde{X}, p)$ è un rivestimento ramificato di X di grado k e U è un disco sufficientemente piccolo, intorno di un punto di ramificazione, allora $p^{-1}(U)$ consisterà in uno o più dischi sui quali p ha la struttura della funzione dell'esempio. Possiamo ora definire l'indice di ramificazione precedente.

Definizione 4.1.3. Sia $(\widetilde{X}, p)$ un rivestimento ramificato di X, $x \in X$ un punto di ramificazione di p. Se in un piccolo intorno di x la funzione p è equivalente alla funzione $z \to z^m$, diremo che x ha *indice* di *ramificazione* m.

Esempio 4.1.2. Consideriamo la funzione $p : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ data dalla seguente formula $p(z) = 2(z + \frac{1}{z})$. $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, p)$ è un rivestimento ramificato di $\mathbb{C}$ con punti di ramificazione $-4, +4$ con indice di ramificazione 2.
Infatti l'equazione $2(z + \frac{1}{z}) = c$ è un'equazione di secondo grado, il cui descriminante $\frac{c^2}{4} - 4$ si annulla in $-4, +4$, le cui preimmagini sono $-1, +1$.

Esempio 4.1.3. Sia p la restrizione della funzione p dell'esempio **1.1.2** alla corona circolare $C = \{z \in \mathbb{C} | \ \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Se $z = \rho e^{i\varphi}$, allora

$$p(z) = 2((\rho + \frac{1}{\rho}) \cos \varphi + i(\rho - \frac{1}{\rho}) \sin \varphi),$$

così l'immagine della corona C sarà l'interno dell'ellisse

$$\{z = 5 \cos \varphi + 3i \sin \varphi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

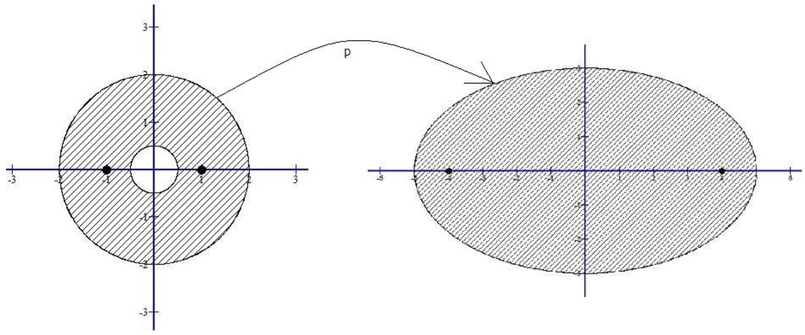

Figura 4.1: Rivestimento ramificato dell'ellisse

Consideriamo ora un teorema molto interessante.

Teorema 4.1.1. *Sia* S_n^2 *la sfera con n manici (vedi figura* ***4.2****). Allora esiste un rivestimento ramificato* (S_n^2, p) *di* S^2 *avente* $2n+2$ *punti di ramificazione.*

Dimostrazione. Consideriamo uno spazio omeomorfo a una sfera con n manici con asse di simmetria l. Identifichiamo tutte le coppie di punti simmetrici rispetto a l. Lo spazio quoziente è omeomorfo alla sfera S^2. Pertanto la proiezione naturale $p : S_n^2 \to S^2$ è un rivestimento ramificato con $2n + 2$ punti di ramificazione. □

La figura **4.2** mostra in maniera più chiara quanto descritto nel teorema precedente.

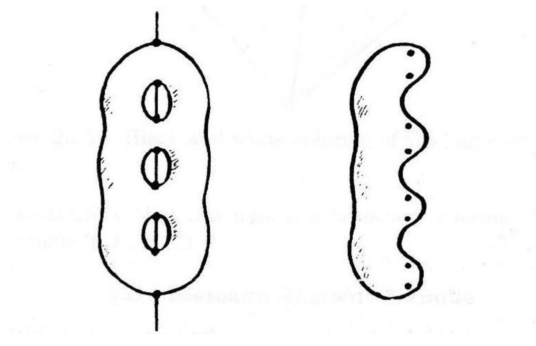

Figura 4.2: Rivestimento ramificato della sfera

4.2 Rivestimenti ramificati di superfici di Riemann

In questo capitolo abbiamo finora analizzato i rivestimenti ramificati di superfici. Ora approfondiamo il caso delle superfici di Riemann.

Introduciamo innanzitutto la definizione di superficie di Riemann e di funzione olomorfa tra superfici di Riemann.

Definizione 4.2.1. Sia X una superficie e $\Phi = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di carte con A opportuno insieme di indici. Φ è detto *atlante olomorfo* se valgono:

- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$;
- se $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \Phi$ e $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora l'omeomorfismo

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  è olomorfo.

La funzione $\varphi_{\alpha\beta}$ è detta *funzione* di *transizione*.

Definizione 4.2.2. Una coppia (X, Φ) in cui X è una superficie e Φ è un atlante olomorfo è detta *superficie* di *Riemann*. Diremo inoltre che due atlanti olomorfi Φ e Ψ di X definiscono la stessa superficie di Riemann se la loro unione è ancora un atlante olomorfo di X. Per maggiori dettagli si veda il capitolo 4, *The Riemann surface of an algebraic function*, di [3].

Notazione 4.2.1. Per indicare una superficie di Riemann, scriveremo solo lo spazio topologico X, omettendo l'atlante olomorfo Φ.

Definizione 4.2.3. Sia X una superficie di Riemann con atlante olomorfo Φ. Una funzione continua $f : X \to \mathbb{C}$ è detta *olomorfa* in $x \in X$ se esiste una carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Phi$ tale che $x \in U_\alpha$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ e $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to \mathbb{C}$ è olomorfa in $\varphi(x)$. Una funzione è olomorfa in X se lo è in ogni punto.

Definizione 4.2.4. Siano X, Y due superfici di Riemann con atlanti olomorfi rispettivamente Φ, Ψ. Una funzione continua $f : X \to Y$ è detta *olomorfa* se

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta)) \to Y_\beta$$

è olomorfa, dove $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Phi$, $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$, $(W_\beta, \psi_\beta) \in \Psi$, $\psi_\beta(W_\beta) = Y_\beta$.

Studiamo ora alcuni risultati necessari per poter comprendere appieno l'importanza delle superfici di Riemann.

Teorema 4.2.1. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione olomorfa tra due superfici di Riemann e supponiamo che $f(x_0) = y_0$. Allora esistono una carta (U, φ) con U intorno di x_0 in X ed una carta (V, ψ) con V intorno di y_0 in Y tali che*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$$

per qualche $k \geq 1$.

La dimostrazione di questo teorema è presente a pagina 265 di [5].

Grazie a questo teorema introduciamo il concetto di indice di ramificazione di una funzione olomorfa.

Definizione 4.2.5. Sia $f : X \to Y$ una funzione olomorfa tra due superfici di Riemann e sia $x \in X$. Si definisce l'*indice* di *ramificazione* di f nel punto x il numero naturale

$$\upsilon_f(x) = k$$

dove k è lo stesso esponente visto nel teorema precedente. Un punto x per cui $\upsilon_f(x) > 1$ si dice *punto* di *ramificazione*. Denotiamo con R l'insieme dei punti di ramificazione mentre chiamiamo il *luogo* di *ramificazione* $f(R)$.

Teorema 4.2.2. *Sia $f : X \to Y$ una funzione olomorfa tra superfici di Riemann compatte e connesse. Valgono allora le seguenti:*

1. *l'insieme R è finito;*

2. *la coppia* $(X\backslash R, f)$ *è un rivestimento di* $Y\backslash f(R)$ *di grado* n *per un qualche* $n \in \mathbb{N}$*;*

3. *per ogni punto* $y \in Y$*,* $\sum_{x\in f^{-1}(y)} \upsilon_f(x) = n$*.*

Dimostrazione. Procediamo per ordine.

1. Per ogni punto $x \in R$ troviamo un intorno del punto in X nel quale la funzione f si esprime come $f(z) = z^k$ (dove $k = \upsilon_f(p)$ e la scrittura sottointende la lettura tramite carte) che è invertibile in tutto l'intorno eccettuato il punto x stesso. In altre parole per ogni punto di ramificazione esiste tutto un suo intorno che non contiene altri punti di ramificazione. Poichè X è uno spazio compatto, R non potrà che essere un insieme finito.

2. Sia $y \notin f(R)$ e sia $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots x_n\}$. Siano U_i intorni di x_i e V_i intorni di y tali che la restrizione di f a U_i sia un omeomorfismo tra U_i e V_i. Restringendo gli U_i se necessario, possiamo assumere che gli U_i siano a due a due disgiunti e che i V_i non contengano punti di $f(R)$. Per ogni intorno connesso V di y contenuto in $\bigcap V_i$, sia $U_i' = U_i \cap f^{-1}(V)$; notiamo immediatamente che f è un omeomorfismo tra ogni U_i' e V. Dobbiamo ora mostrare che $f^{-1}(V)$ è l'unione disgiunta degli U_i'; una volta dimostrato ciò potremo poi concludere che V è uniformemente rivestito da f e che quindi $(X\backslash R, f)$ è un rivestimento di $Y\backslash f(R)$. Per provare ciò, supponiamo per assurdo che esista una successione di intorni N_α di y tali che esistono $t_\alpha \in N_\alpha$ per cui $f^{-1}(t_\alpha) \notin \bigcup U_i$. Ma poichè i t_α si accumulano in y, $f^{-1}(y) \notin \bigcup U_i$ e ciò dimostra l'assurdo. Inoltre il grado del rivestimento sarà n, in quanto il numero di preimmagini di ogni punto è costante nell'intorno aperto V di y e, dato che un discorso analogo vale per ogni $y \in Y\backslash f(R)$, tale n sarà costante su tutta la superficie $Y\backslash f(R)$.

3. Siano $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots x_n\}$, U_i intorni aperti di x_i e V_i intorni aperti di y tali che f mappi U_i in V_i e che localmente f sia $f(z) = z^{\upsilon_f(x_i)}$. Consideriamo V contenuto nell'intersezione dei V_i ma senza nessun punto di

$f(R)$; allora $f^{-1}(y')$ conterrà $\sum_i v_f(x_i)$ punti, per ogni $y' \in V \backslash \{y\}$. Per il punto **2** questa somma sarà esattamente n, il grado del rivestimento.

□

Grazie a questi risultati possiamo facilmente dedurre il seguente corollario, risultato fondamentale nello studio delle superfici di Riemann

Corollario 4.2.3. *Sia $f : X \to Y$ una funzione olomorfa tra superfici di Riemann compatte e connesse. Allora (X, f) è un rivestimento ramificato di Y di grado n per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

Altro risultato importante è il seguente teorema.

Teorema 4.2.4. *Sia Y una superficie di Riemann, S un sottinsieme finito di Y e (X^0, p) un rivestimento di grado finito di $Y \backslash S$, con X^0 connesso. Allora X^0 può essere visto come sottinsieme aperto di una superficie di Riemann X, che è l'unione di X^0 e di un insieme finito, tale che p si estende a una funzione olomorfa tra X e Y.*

La dimostrazione di questo teorema è presente a pagina $268 - 270$ di [3].

Lo studio dei rivestimenti ramificati di superfici di Riemann ha portato a scoperte fondamentali nello studio delle superfici di Riemann. Di seguito riportiamo alcuni tra i risultati principali raggiunti grazie a questo studio.

Teorema 4.2.5. *Sia X una superficie di Riemann. Allora X è omeomorfa ad un membro della famiglia $\{S_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove S_n^2 è la superficie che si ottiene incollando n manici alla sfera S^2. L'intero n è detto genere della superficie.*

La dimostrazione di questo teorema è presente a pagina $9 - 13$ di [2].

Combinando il teorema **4.1.1** e il teorema **4.2.5** si ottiene il seguente.

Corollario 4.2.6. *Sia X una superficie di Riemann. Allora esiste un rivestimento ramificato (X, p) di S^2 di grado n per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

Completiamo la nostra discussione enunciando la formula di Riemann-Hurwitz che si può trovare a pagina $131 - 136$ di [6].

Teorema 4.2.7 (Formula di Riemann-Hurwitz)**.** *Siano $f : X \to Y$ una funzione olomorfa tra superfici di Riemann compatte e connesse, R l'insieme dei punti di ramificazione di X tramite f e n il grado del rivestimento di $Y \backslash f(R)$ $(X \backslash R, f|_{X \backslash R})$. Vale allora:*

$$\chi(X) = n\chi(Y) - \sum_{p \in R}(v_f(p) - 1)$$

dove $\chi(X)$ e $\chi(Y)$ sono la caratteristica di Eulero rispettivamente di X e di Y.

Bibliografia

[1] C. Kosniowski, *Introduzione alla Topologia Algebrica*, Zanichelli, 1988.

[2] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1991.

[3] R. Narasimhan, *Compact Riemann Surfaces*, Birkhauser-Verlag,1992.

[4] E. Sernesi, *Geometria* 2, Bollati Boringhieri, 1994.

[5] W. Fulton, *Algebraic Topology*: *A First Course*, Springer, 1995.

[6] V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky, *Knots*, *Links*, *Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*, American Mathematical Society, 1997.

[7] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[8] M. Manetti, *Topologia*, Springer, 2008.