Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO, L'ASSOLUTA CONTINUITA' E LA DERIVATA DEBOLE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Gabriele Pasini

♯ Sessione II
Anno Accademico 2009/2010

Alla mia famiglia,
che non mi ha mai abbandonato,
ai miei fratelli,
vicini nella distanza,
a questa compagnia,
che continua a sostenermi.

Introduzione

Questa tesi, divisa in tre capitoli, vuole presentare un argomento profondo come l'assoluta continuità. Abbiamo introdotto questo concetto partendo da teoremi fondamentali di Analisi Matematica cercando di svilupparlo fino a mostrare un collegamento con la teoria delle distribuzioni.
In particolare nel primo capitolo, ha notevole importanza il teorema di Lebesgue, secondo il quale una funzione monotona ammette derivata quasi dappertutto, un risultato profondo e sorprendente. Basti pensare che esistono funzioni continue non derivabili in nessun punto, mentre per dimostrare il teorema non è richiesta nessuna ipotesi di continuità. Viene poi mostrato come l'integrale indefinito e le funzioni a variazione limitata siano funzioni assolutamente continue.
Il secondo capitolo inizialmente espone una generalizzazione al caso di funzioni di più variabili dei precedenti concetti, mentre nella seconda parte dimostriamo il teorema di differenziazione di Lebesgue, risultato che richiede l'utilizzo profondi lemmi di ricoprimento di tipo Vitali, e l'introduzione della funzione massimale di Hardy-Littlewood.
Il terzo e ultimo capitolo collega l'assoluta continuità al concetto di derivata debole, mostrando dunque l'importanza che ricoprono le funzioni assolutamente continue nella teoria delle distribuzioni.

Indice

Capitolo 1

Assoluta continuità

1.1 Premesse

1.1.1 Numeri derivati di Dini e insiemi di misura nulla secondo Lebesgue

Definizione 1.1 (Numeri derivati superiori e inferiori di Dini). Sia $f : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A \cap D(A)$. Se $x_0 \in D\,(A \cap]x_0, +\infty[)$ allora

$$\Lambda_d(f, x_0) = \limsup_{x \to x_0^+ \; x \in A \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lambda_d(f, x_0) = \liminf_{x \to x_0^+ \; x \in A \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si chiamano derivata superiore destra e derivata inferiore destra di f in x_0.
Se $x_0 \in D(] - \infty, x_0[\cap A)$ allora

$$\Lambda_s(f, x_0) = \limsup_{x \to x_0^- \; x \in A \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lambda_s(f, x_0) = \liminf_{x \to x_0^- \; x \in A \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si chiamano derivata superiore sinistra e derivata inferiore sinistra di f in x_0.
$\Lambda_d(f, x_0), \lambda_d(f, x_0), \Lambda_s(f, x_0), \lambda_s(f, x_0)$ si chiamano complessivamente numeri derivati di f in x_0, i primi due numeri derivati superiore e inferiore a destra, gli altri due numeri derivati superiore e inferiore a sinistra.

Osservazione 1. Se $\Lambda_d(f, x_0) = \lambda_d(f, x_0)$ allora esiste $f'^+(x_0)$ ed è $\Lambda_d(f, x_0) = \lambda_d(f, x_0) = f'^+(x_0)$;
se $\Lambda_s(f, x_0) \geq \lambda_s(f, x_0)$ allora esiste $f'^-(x_0)$ ed è $\Lambda_s(f, x_0) = \lambda_s(f, x_0) = f'^-(x_0)$.

Definizione 1.2 (Insieme di misura nulla secondo Lebesgue). Si dice che l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ ha misura nulla secondo Lebesgue o $L-$misura nulla, e si scrive $\mu(A) = 0$, se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste un insieme finito o numerabile di intervalli aperti limitati I_n, $n \in M \subseteq N$, tale che

$$A \subseteq \bigcup_{n \in M} I_n \quad , \quad \sum_{n \in M} misI_n < \varepsilon.$$

In particolare $\mu(\varnothing) = 0$.

1.1.2 Il teorema di Lebesgue per funzioni monotone

Lemma 1.1.1. *Sia* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dotata in ogni punto* $x_0 \in [a,b]$ *del limite* $g(x_0+O) \in \mathbb{R}$ *per* $x \to x_0^+$ *e del limite* $g(x_0-O) \in \mathbb{R}$ *per* $x \to x_0^-$ *(per* $x = a$ *esisterà solo* $g(a+O)$ *e per* $x = b$ *solo* $g(b-O)$*); poniamo* $G(x) = \max\{g(x-O), g(x), g(x+O)\}$ *convenendo che sia* $g(a-O) = g(a)$ *e* $g(b+O) = g(b)$. *Allora l'insieme* $E = \{x; x \in]a,b[, \exists \xi_x \in]x,b], g(\xi_x) > G(x), g(\xi_x) \in]x,b]\}$*, se non è vuoto, è un insieme aperto; se* $]a_k, b_k[$ *è un suo intervallo componente allora* $g(a_k+O) \le G(b_k)$.

Dimostrazione. Se $x_0 \in E$ si ha ξ_{x_0}, $g(\xi_{x_0} > G(x_0)$; a causa della definizione di G, sarà allora $\xi_{x_0} > x, g(\xi_{x_0}) > G(x)$ per ogni punto di un certo intorno di x_0, dunque x_0 è punto interno di E onde E è aperto.
Sia $]a_k, b_k[$ un intervallo componente di E. Sia $x \in]a_k, b_k[$ e proviamo che $g(x) \le G(b_k)$. Sia $x_1 = \sup\{y; y \in]x, b_k[, g(x) \le G(y)\}$; è $x_1 = b_k$ perché se fosse $x_1 < b_k$ si avrebbe $g(\xi_{x_1}) > G(x_1)$ e $\xi_{x_1} > b_k$ perché in caso contrario sarebbe $G(\xi_{x_1}) \ge g(\xi_{x_1}) > G(x_1) \ge g(x)$ contrariamente alla definizione di x_1; d'altra parte $b_k \notin E$ e quindi $g(\xi_{x_1}) \le G(b_k)$; allora $G(x_1) < g(\xi_{x_1}) \le G(b_k) < G(x_1)$, il che è assurdo.
Passando ora al limite per $x \to a_k^+$ si ha $g(a_k+O) \le G(b_k)$. □

Teorema 1.1.2 (di Lebesgue). *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *è monotona, allora quasi dappertutto su* $[a,b]$ *la derivata di* f *esiste e appartiene a* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Supponiamo f non decrescente su $[a,b]$.
Ciascuno dei quattro numeri derivati superiori e inferiori è $+\infty$ oppure $\in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Proviamo che q.d. è

$$\Lambda_d(f,x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad , \quad \Lambda_d(f,x) \le \lambda_s(f,x).$$

Allora posto $\phi(-x) = -f(x)$ si ha che ϕ è non decrescente e quindi q.d. in $]a,b[$ si ha $\Lambda_d(\phi,-x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \Lambda_d(\phi,-x) \le \lambda_s(\phi,-x)$, ma $\Lambda_d(\phi,-x) = \Lambda_s(f,x)$,$\lambda_d(\phi,-x) = \lambda_s(f,x), \Lambda_s(\phi,-x) = \Lambda_d(f,x), \lambda_s(\phi,-x) = \lambda_d(f,x) \forall x \in]a,b[$ e quindi $\Lambda_s(f,x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $\Lambda_s(f,x) \le \lambda_d(f,x)$ q.d. in $]a,b[$ e quindi $\Lambda_d(f,x) \le \lambda_s(f,x) \le \Lambda_s(f,x) \le \lambda_d(f,x) \le \Lambda_d(f,x) \in \mathbb{R}$ q.d. in $]a,b[$, ossia q.d. in $]a,b[$ i quattro numeri derivati superiori e inferiori coincidono ed il loro valore comune $\in \mathbb{R}$, ossia q.d. f ha derivata $\in \mathbb{R}$.
Sia $E_\infty = \{x; x \in]a,b[, \Lambda_d(f,x) = +\infty\}$. $\forall x \in]a,b[$ è $f(x-O) \le f(x) \le f(x+O)$; se $f(x) < f(x+O)$ allora $x \in E_\infty$; d'altra parte $E' = \{x; x \in]a,b[, x$ punto di discontinuità di $f\}$ è finito o numerabile onde $\mu(E') = 0$. Posto $E'' = \{x; x \in]a,b[, x$ punto di continuità di $f, \Lambda_d(f,x) = +\infty\}$, risulta $E_\infty \subseteq E' \cup E''$; perciò se $\mu(E'') = 0$ anche $\mu(E_\infty) = 0$.
Supponiamo $x \in E''$. Poichè $\Lambda_d(f,x) = +\infty$, scelto ad arbitrio $C \in \mathbb{R}^+$, è $\Lambda_d(f,x) > C$ e quindi $\exists \xi_x \in]x,b[\ni \frac{f(\xi_x)-f(x)}{\xi_x - x} > C$ onde $f(\xi_x) - C\xi_x > f(x) - Cx$; posto $g(x) = f(x) - Cx$, risulta $g(\xi_x) > g(x) = G(x)$ e quindi, per il lemma premesso, $g(a_k+O) \le g(b_k+O)$ ossia $C(b_k - a_k) \le f(b_k+O) - f(a_k+O)$.

Ne segue $C\sum_k(b_k-a_k) \leq \sum_k\left(f(b_k+O)-f(a_k+O)\right) \leq f(b)-f(a)$; per l'arbitrarietà di C, essendo $E'' \subseteq \bigcup_k]a_k,b_k[$, si ha $\mu(E'')=0$ e quindi $\mu(E_\infty)=0$.

Sia ora $F=\{x; x\in]a,b[, x$ punto di continuità di $f, \Lambda_d(f,x)>\lambda_s(f,x)\}$. Siano c e C due numeri razionali e $c<C$, sia $F_{c,C}=\{x;x\in]a,b[, \Lambda_d(f,x)> C>c>\lambda_s(f,x)\}$; evidentemente $F\subseteq \bigcup_{c,c\in\mathbb{Q},c<C} F_{c,C}$. Ne segue che se $\mu(F_{c,C})=0\ \forall c,C\in\mathbb{Q}, c<C$, allora $\mu(F)=0$ (perché $\{(c,C);c,C\in\mathbb{Q}\}=\bigcup_{c\in\mathbb{Q}}\{(c,C);C\in\mathbb{Q}\}$ è numerabile).

Poiché $\lambda_s(f,x)=-\Lambda_d(\psi,-x)$ con $\psi(-x)=f(x)$, se $\lambda_s(f,x)<c$ risulta $\Lambda_d(\psi,-x)>-c$ e quindi $\exists -\xi_x\in\mathbb{R}, -\xi_x>-x, \ni \frac{\psi(-\xi_x)-\psi(-x)}{x-\xi_x}>-c$ ossia $\psi(-\xi_x)+c(-\xi_x)>\psi(-x)+c(-x)$. Per il lemma premesso i punti $-x$ appartengono a un insieme aperto i cui intervalli componenti indichiamo con $]-b_k,-a_k[$. Dunque in ciascuno degli intervalli $]a_k,b_k[$ si ha $\lambda_s(f,x)<c$ e riesce $\psi(-b_k+O)+c(-b_k)\leq\psi(-a_k-O)+c(-a_k)$ cioè $f(b_k-O)-f(a_k+O)\leq c(b_k-a_k)$. Consideriamo ora i punti di $]a_k,b_k[$ in ciascuno dei quali è $\Lambda_d(f,x)>C$; ragionando come precedentemente essi sono quelli di un insieme aperto i cui intervalli componenti indichiamo con $]a_{kl},b_{kl}[$. Si ha $C(b_{kl}-a_{kl})\leq f(b_kl+O)-f(a_kl+O)$. Ne segue

$$C\sum_k\sum_l(b_{kl}-a_{kl})\leq\sum_k\sum_l\left(f(b_{kl}+O)-f(a_{kl}+O)\right)\leq$$

$$\sum_k\left(f(b_k-O)-f(a_k+O)\right)\leq c\sum_k(b_k-a_k)$$

Posto $S_2=\bigcup_k\bigcup_l]a_{kl}.b_{kl}[, S_1=\bigcup_k]a_k,b_k[$ e $\mu(S_2)=\sum_k\sum_l(b_{kl}-a_{kl}), \mu(S_1)=\sum_k(b_k-a_k)$, si ha $\mu(S_2)\leq\frac{c}{C}\mu(S_1)$. Ripetendo su S_2 il ragionamento già fatto su $[a,b]$, si hanno due sistemi di intervalli aperti e disgiunti (al più un'infinità numerabile) S_3 ed S_4 tali che $S_4\subset S_3\subset S_2, \mu(S_4)\leq\frac{c}{C}\mu(S_3)$, onde $\mu(S_4)\leq\left(\frac{c}{C}\right)^2\mu(S_1)$; così procedendo si vede che $\forall n\in\mathbb{N}$ è $F_{c,C}\subseteq S_{2n}$ e $\mu(S_{2n})\leq\left(\frac{c}{C}\right)^n\mu(S_1)\to 0$ per $n\to\infty$. Pertanto $\mu(F_{c,C})=0$. □

Osservazione 2. Il teorema 1.1.2 è ancora vero se $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ oppure $f:]-\infty,b]\to\mathbb{R}$ oppure $f:]-\infty,+\infty[\to\mathbb{R}$, ed è monotona. Più in generale se $f:A\to\mathbb{R}$ è monotona, per esempio non decrescente, detto I l'intervallo (limitato o no) di estremi $\inf A$ e $\sup A$, posto $g(x)=\sup\{f(y);y\in I\cap A, y\leq x\}\ \forall x\in Int\, I$, la funzione g è non decrescente su $Int\, I$ e quindi ha derivata $\in\mathbb{R}$ in quasi tutti i punti di I; d'altra parte g è un prolungamento di f e quindi f ha derivata $\in\mathbb{R}$ in quasi tutti i punti di A.

1.1.3 L'assoluta continuità

Definizione 1.3 (Funzione assolutamente continua). Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice <u>assolutamente continua</u> su $[a,b]$ se, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\exists\delta_\varepsilon\in$

$\mathbb{R}^+$ tale che, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$ e qualunque siano i sottointervalli di $[a,b][\alpha_j,\beta_j], j = 1,2,\ldots,n$, tali che $]\alpha_i,\beta_i[\cap]\alpha_j,\beta_j[= \varnothing$ per $i \neq j$, risulta

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

purché sia

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta_\varepsilon$$

.

Osservazione 3. La assoluta continuità implica l'uniforme continuità, ma non viceversa

Dimostrazione. La prima affermazione è banale.
Per la seconda consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = 1-(2n-1)x$ per $\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n-1}$ e $f(x) = (2n+1)x - 1$ per $\frac{1}{2n+1} \leq x \leq \frac{1}{2n}, n = 1,2,\ldots; f(0) = 0$. Questa funzione è continua su $[0,1]$. D'altra parte, fissato $\delta \in \mathbb{R}^+$ e scelto $p \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{2p} < \delta$, se $[\alpha_j,\beta_j] = \left[\frac{1}{2p+j}, \frac{1}{2p+j-1}\right]$ si ha $\sum_{j=1}^{2n} (\beta_j - \alpha_j) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p+2n} < \frac{1}{2p} < \delta$, mentre $\sum_{j=1}^{2n} |f(\alpha_j) - f(\beta_j)| = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2p+2j} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{p+j}$ è maggiore di un arbitrario numero reale positivo se si sceglie n convenientemente (perché la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p+j}$ è divergente). □

Teorema 1.1.3. *Sia f integrabile secondo Riemann, sia x_0 contenuto in $[a,b]$, allora $x \to \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ è assolutamente continua.*

Dimostrazione. Si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_0}^{\alpha_j} f(t)dt - \int_{x_0}^{\beta_j} f(t)dt \right| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |f(t)|dt \leq \sup_{[a,b]} |f| \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j).$$

Pertanto se $\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \frac{\varepsilon}{\sup_{[a,b]} |f|}$ (si suppone che non sia $f(x) = 0 \; \forall x \in [a,b]$), si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_0}^{\alpha_j} f(t)dt - \int_{x_0}^{\beta_j} f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

□

Teorema 1.1.4. *Sia f integrabile secondo Riemann, allora $x \to \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ ha derivata in $\mathbb{R}$ in tutti i punti di continuità di f, e quindi quasi dappertutto su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt}{h} = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt.$$

Quindi $\exists$

$$\mu(h) \in \left[\inf_{[x,x+h]} f, \sup_{[x,x+h]} f\right] \text{ se } h > 0$$

,

$$\mu(h) \in \left[\inf_{[x+h,x]} f, \sup_{[x+h,x]} f\right] \text{ se } h < 0,$$

tale che

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt = \mu(h).$$

Se x è un punto di continuità di f si ha $\lim_{h\to 0}\mu(h) = f(x)$.
Perciò

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x).$$

Osservazione 4. Sia f integrabile secondo Riemann su $[a,b]$, $c \in [a,b]$ ed esiste il $\lim_{x\to c^+} f(x)$ $[\lim_{x\to c^-} f(x)]$, allora esiste la derivate destra [sinistra] di $\int_a^x f(t)dt$ in c ed essa è uguale al $\lim_{x\to c^+} f(x)$ $[\lim_{x\to c^-} f(x)]$.

1.2 Derivazione di funzioni integrali

Teorema 1.2.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente. Sia E l'insieme dei punti di $]a,b[$ nei quali f ha derivata.*
Allora la funzione $f' : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è sommabile e

$$\int_E f'(x)dx \leq f(b-O) - f(a+O)$$

Dimostrazione. La funzione f ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità (di prima specie) e q.d. ha derivata in $\mathbb{R}$. Essa è evidentemente $L-$misurabile
Continuiamo a indicare con f la funzione a valori reali di dominio $[a,b+1]$ che coincide con la precedente su $[a,b]$ ed è uguale a $f(b)$ su $[b,b+1]$. Poniamo

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}, x \in [a,b].$$

φ_n è $L-$misurabile $\forall n \in \mathbb{N}$ e poichè $\varphi_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(x)\,\forall x \in E$, anche f' è $L-$misurabile. Poiché $\mu([a,b]\setminus E) = 0$ si ha

$$\int_E \varphi_n(x)dx = \int_a^b \varphi_n(x)dx = n\left(\int_a^b f(x+\frac{1}{n})dx - \int_a^b f(x)dx\right) =$$

$$= n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right) = n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right)$$

Ora

$$n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx = n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)dx = nf(b)\int_b^{b+\frac{1}{n}} dx = f(b),$$

mentre

$$n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \geq n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx = nf(a)\int_a^{a+\frac{1}{n}} dx = f(a),$$

da cui

$$n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right) = f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

Allora per il Lemma di Fatou (appendice A), f' è sommabile e

$$\int_E f'(x)dx = \int_E \liminf_{n\to\infty} \varphi_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

Se $\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ e $E_\varepsilon = E \cap [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, si ha

$$\int_E f'(x)\chi_{E_\varepsilon}(x)dx = \int_{E_\varepsilon} f'(x)dx \leq f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon)$$

e quindi per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue (appendice A)

$$\int_E f'(x)dx \leq f(b-O) - f(a+O)$$

□

Teorema 1.2.2. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f$ a variazione limitata su $[a,b]$. Sia E l'insieme dei punti di $[a,b]$ nei quali f ha derivata. Allora la funzione $f' : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è sommabile e*

$$\int_E |f'(x)|dx \leq \bigvee_{a+O}^{b-O}(f)$$

Se, di più, f è continua, allora

$$\int_E |f'(x)|dx \leq \bigvee_a^b(f)$$

Dimostrazione. Se f è a variazione limitata allora per il Teorema di Jordan $f = \varphi - \psi$ con φ e ψ funzioni non decrescenti, perciò $f'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x)$ q.d. e quindi f' è sommabile su E. Poichè

$$f(x) = \bigvee_a^x{}^+(f) - \bigvee_a^x{}^-(f) + f(a), \bigvee_a^x(f) = \bigvee_a^x{}^+(f) + \bigvee_a^x{}^-(f)$$

si ha

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\bigvee_a^x{}^+(f) - \frac{d}{dx}\bigvee_a^x{}^-(f) q.d., \frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f) = \frac{d}{dx}\bigvee_a^x{}^+(f) + \frac{d}{dx}\bigvee_a^x{}^-(f) q.d.$$

Poichè $x \to \bigvee_a^x{}^+(f)$ e $x \to \bigvee_a^x{}^-(f)$ sono funzioni non decrescenti, le loro derivate, ove esistono sono non negative; perciò

$$|f'(x)| \leq \frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f) q.d.$$

Sia F l'insieme dei punti di $]a,b[$ nei quali esistono le derivate $f'(x)$ e $\frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f)$. Allora per il teorema 1.2.1 si ha

$$\int_E |f'(x)|dx = \int_F |f'(x)|dx \leq \int_F \frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f)dx \leq \bigvee_a^{b-O}(f) - \bigvee_a^{a+O}(f) = \bigvee_{a+O}^{b-O}(f).$$

Se poi $f \in C([a,b])$ allora anche $x \to \bigvee_a^x(f)$ appartiene a $C([a,b])$ e quindi

$$\int_E |f'(x)|dx \leq \bigvee_a^b(f)$$

□

1.2.1 Funzioni assolutamente continue

Teorema 1.2.3. *Sia $AC_{[a,b]}$ l'insieme delle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ assolutamente continue. Munito delle operazioni di addizione, moltiplicazione e moltiplicazione scalare per $\mathbb{R}$ esso è un algebra lineare commutativa.*

Dimostrazione. Se $f, g \in AC_{[a,b]}$ e $c \in \mathbb{R}$ anche $f + g, cf$ e $fg \in AC_{[a,b]}$. Cio segue subito osservando che

$$|(f+g)(\beta_j) - (f+g)(\alpha_j)| = |(f(\beta_j) - g(\alpha_j)) + (g(\beta_j) - f(\alpha_j))| \leq$$

$$\leq |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| + |g(\beta_j) - g(\alpha_j)|;$$

$$|(cf)(\beta_j) - (cf)(\alpha_j)| = |c||f(\beta_j) - f(\alpha_j)|;$$

$$|(fg)(\beta_j) - (fg)(\alpha_j)| = |(f(\beta_j) - f(\alpha_j))g(\beta_j) + f(\alpha_j)(g(\beta_j) - g(\alpha_j))| \leq$$

$$\leq \max_{x\in[a,b]} |g(x)||f(\beta_j) - f(\alpha_j)| + \max_{x\in[a,b]} |f(x)||g(\beta_j) - g(\alpha_j)|.$$

Dopo di ciò l'affermazione del teorema è immediata. □

Osservazione 5. Se $g \in AC_{[a,b]}$ e $g(x) \neq 0\, \forall x \in [a,b]$ allora anche $\frac{1}{g} \in AC_{[a,b]}$. Infatti è $|g(x)| \geq \alpha = \min\{|g(y)|; y \in [a,b]\} > 0\, \forall x \in [a,b]$ onde

$$\left|(\frac{1}{g})(\beta_j) - (\frac{1}{g})(\alpha_j)\right| = \left|\frac{1}{g(\beta_j)} - \frac{1}{g(\alpha_j)}\right| \leq \frac{|g(\beta_j) - g(\alpha_j)|}{\alpha^2}.$$

Teorema 1.2.4. *Sia f una funzione assolutamente continua su $[a,b]$. Allora anche $x \to \bigvee_a^x(f)$ è assolutamente continua su $[a,b]$ e quindi f si può esprimere come differenza di due funzioni non decrescenti assolutamente continue.*

Dimostrazione. Sia $f \in AC_{[a,b]}$. Allora $f \in \vartheta([a,b])$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\, \exists\, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

qualunque siano i sottointervalli $[\alpha_j, \beta_j]$ di $[a,b]$ purchè in numero finito n e tali che $]\alpha_i, \beta_i[\cap]\alpha_j, \beta_j[= \varnothing$ per $i \neq j$ e

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta_\varepsilon.$$

Sia ora $\{x_{k,0}, x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k}\}$ una scomposizione finita di $[\alpha_k, \beta_k](\alpha_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots < x_{k,n_k} = \beta_k)$ per $k = 1, 2, \ldots, n$. Risulta

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta_\varepsilon$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} |f(x_{k,j}) - f(x_{k,j-1})| < \varepsilon.$$

Prendendo allora gli estremi superiori di tutte le somme interne (in corrispondenza di tutte le scomposizioni finite di $[\alpha_k, \beta_k]$) si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \bigvee_{\alpha_k}^{\beta_k}(f) \leq \varepsilon.$$

Ciò prova che $x \to \bigvee_a^x(f)$ appartiene a $AC_{[a,b]}$. Per il teorema di Jordan

$$\bigvee_a^x{}^+(f) = \frac{1}{2}\bigvee_a^x(f) + \frac{1}{2}(f(x) - f(a)), \bigvee_a^x{}^-(f) = \frac{1}{2}\bigvee_a^x(f) - \frac{1}{2}(f(x) - f(a)),$$

anche $x \to \bigvee_a^x{}^+(f)$ e $x \to \bigvee_a^x{}^-(f)$ appartengono a $AC_{[a,b]}$.
Pertanto, essendo

$$f(x) = \bigvee_a^x{}^+(f) - \bigvee_a^x{}^-(f) + f(a),$$

il teorema è completamente provato. □

Teorema 1.2.5. *Sia f una funzione assolutamente continua su $[a, b]$. Sia E l'insieme dei punti di $]a, b[$ nei quali f ha derivata. Allora*

$$\int_E f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Per 1.2.4 f è la differenza di due funzioni assolutamente continue non decrescenti. Possiamo quindi limitarci a provare il teorema nell'ipotesi che f sia assolutamente continua e non decrescente. Sia

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}, x \in [a, b].$$

Poichè f è continua si ha

$$\lim_{n\to\infty} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx = f(a), \lim_{n\to\infty} n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx = f(b)$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x)dx = f(b) - f(a).$$

Il teorema risulterà quindi dimostrato non appena si sia provato che

$$\int_E f'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x)dx.$$

Ricordiamo che f si intende prolungata su $[b, b + 1]$ in modo che $f(x) = f(b)\, \forall x \in [b, b + 1]$. La f così prolungata è ancora non decrescente e assolutamente continua. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \,\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che, qualunque siano i sottointervalli $[\alpha_j, \beta_j]$ di $[a, b+1]$ tali che $]\alpha_i, \beta_i[\cap]\alpha_j, \beta_j[= \varnothing$ per $i \neq j$ purchè in numero finito,sia n, con $\sum_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j) < \delta_\varepsilon$, risulta

$$\sum_{j=1}^{n}(f(\beta_j) - f(\alpha_j)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Inoltre per il teorema di assoluta continuità dell'integrale $\exists \delta_\varepsilon^1 \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\int_F f'(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$\forall F \subseteq E, F\, L-$misurabile con $\mu(F) < \delta_\varepsilon^1$. Supponiamo $\delta_\varepsilon^1 < \delta_\varepsilon$. Per il teorema di Severini-Egorov $\exists G_\varepsilon \subseteq E, G_\varepsilon\, L-$misurabile con $\mu(G_\varepsilon) < \delta_\varepsilon^1$ tale che $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'$ uniformemente su $E \setminus G_\varepsilon$; allora $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_{E\setminus G_\varepsilon} |\varphi_n(x) - f'(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_\varepsilon$$

.

Ne segue che

$$\left|\int_E \varphi_n(x)dx - \int_E f'(x)dx\right| = \left|\int_{E\setminus G_\varepsilon} (\varphi_n(x) - f'(x))dx + \int_{G_\varepsilon} (\varphi_n(x) - f'(x))dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{E\setminus G_\varepsilon} |\varphi_n(x) - f'(x)|dx + \int_{G_\varepsilon} \varphi_n(x)dx + \int_{G_\varepsilon} f'(x)dx < \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{G_\varepsilon} \varphi_n(x)dx.$$

Poichè $\mu(G_\varepsilon) < \delta_\varepsilon^1 < \delta_\varepsilon$, $\exists$ un aperto O di $]a, b[$ tale che $G_\varepsilon \subset O$ e $\mu(O) < \delta_\varepsilon$. O è unione di intervalli chiusi $[\alpha_k, \beta_k]$ tali che $]\alpha_h, \beta_h[\cap]\alpha_k, \beta_k[= \varnothing$ per $h \neq k$. $\forall x \in [0, 1]$ e $\forall m \in \mathbb{N}, [\alpha_k + x, \beta_k + x]$ per $k = 1, 2, \ldots, m$ sono m sottointervalli di $[a, b+1]$ tali che $\sum_{j=1}^{m}(f(\beta_j + x) - f(\alpha_j + x)) < \delta_\varepsilon$ onde

$$\sum_{j=1}^{m}(f(\beta_j + x) - f(\alpha_j + x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si ha

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \varphi_n(x)dx = n\left(\int_{\alpha_j}^{\beta_j} f(x + \frac{1}{n})dx - \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f(x)dx\right) =$$

$$n\left(\int_{\beta_j}^{\beta_j+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_{\alpha_j}^{\alpha_j+\frac{1}{n}} f(x)dx\right) = n\int_0^{\frac{1}{n}} (f(\beta_j + x) - f(\alpha_j + x))dx$$

onde

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \varphi_n(x)dx = n\int_0^{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^{m}(f(\beta_j + x) - f(\alpha_j + x))dx = \frac{\varepsilon}{3}$$

e quindi

$$\int_{G_\varepsilon} \varphi_n(x)dx \le \int_O \varphi_n(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \varphi_n(x)dx \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il teorema è così dimostrato □

Teorema 1.2.6. *Sia f una funzione assolutamente continua su $[a,b]$; allora esiste una funzione g sommabile su $[a,b]$ tale che*

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt + f(a), x \in [a,b].$$

Dimostrazione. Sia g tale che $g(x) = f'(x)$ nei punti $x \in]a,b[$ nei quali $\exists f'(x)$ e $g(x) = 0$ nei restanti punti di $[a,b]$. Allora per 1.2.5 si ha

$$\int_a^x g(t)dt = f(x) - f(a).$$

□

Osservazione 6. Siano $f_1, f_2 \in AC_[a,b]$; allora $\exists\, g_1, g_2 \in \mathcal{L}([a,b])$ tali che

$$f_1(x) = \int_a^x g_1(t)dt + f_1(a), f_2(x) = \int_a^x g_2(t)dt + f_2(a), x \in [a,b].$$

Per il teorema di integrazione per parti si ha perciò

$$\int_a^b (f_1(x) - f_1(a))g_2(x)dx + \int_a^b (f_2(x) - f_2(a))g_1(x)dx = (f_1(b) - f_1(a))(f_2(b) - f_2(a))$$

e quindi

$$\int_a^b f_1(x)g_2(x)dx + \int_a^b f_2(x)g_1(x)dx = f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a).$$

D'altra parte $f_1'(x) = g_1(x)$ q.d. e $f_2'(x) = g_2(x)$ q.d. Perciò

$$\int_a^b f_1(x)f_2'(x)dx + \int_a^b f_2(x)f_1'(x)dx = f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a).$$

Teorema 1.2.7. *Sia f una funzione assolutamente continua su $[a,b]$ con derivata 0 quasi dappertutto. Allora f è costante.*

Dimostrazione. Se g ha il significato di 1.2.6 allora $g(x) = 0$ q.d. e quindi $f'(x) = f(a)\, \forall x \in [a,b]$. □

Teorema 1.2.8. *Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile e $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ assolutamente continua. Sia $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$ e $(f \circ \varphi)\varphi'$ sia sommabile su $[\alpha, \beta]$. Allora*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Dimostrazione. Sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniformemente lipschitziana, cioè $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tale che $|F(x') - F(x'')| \leq M|x' - x''| \; \forall x', x'' \in [a,b]$. Allora F è assolutamente continua. Anche $F \circ \varphi$ è assolutamente continua perchè

$$\sum_{j=1}^{n} |F(\varphi(\beta_j)) - F(\varphi(\alpha_j))| \leq m \sum_{j=1}^{n} |\varphi(\beta_j) - \varphi(\alpha_j)|.$$

Sia t un punto di $]\alpha, \beta[$ nel quale esistano in $\mathbb{R}$ $\varphi'(t)$ e $(F \circ \varphi)'(t)$ e sia $\varphi'(t) \neq 0$, per esempio $\varphi'(t) > 0$; allora $\exists$ un intervallo $[t_1, t_2] \subseteq [\alpha, \beta]$ tale che $t \in]t_1, t_2[$ e $\varphi(t') > \varphi(t) \; \forall t' \in]t, t_2], \varphi(t'') < \varphi(t) \; \forall t'' \in [t_1, t[$. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $]\varphi(t_1), \varphi(t_2)[$ convergente a $\varphi(t)$, con $x_n \neq \varphi(t) \; \forall n \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists \tau_n \in]t_1, t_2[$ tale che $\varphi(\tau_n) = x_n$; risulta $\lim_{n \to \infty} \tau_n = t$ (infatti in caso contrario, da $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione $(\tau_{\nu_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto $t^* \neq t$; ma allora $\lim_{n \to \infty} x_{\nu_n} = \varphi(t^*) \neq \varphi(t)$, il che è assurdo perchè $\lim_{n \to \infty} x_n = \varphi(t)$). Ne segue che

$$F'(\varphi(t)) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(\varphi(t)) - F(x_n)}{\varphi(t) - x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{F(\varphi(t)) - F(\varphi(\tau_n))}{t - \tau_n}}{\frac{\varphi(t) - \varphi(\tau_n)}{t - \tau_n}} = \frac{(F \circ \varphi)'(t)}{\varphi'(t)}$$

Se invece è $\varphi'(t) = 0$ allora $F'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0$ e anche $F \circ \varphi$ è derivabile in t con derivata zero perché

$$\left| \frac{F(\varphi(t)) - F(\varphi(t'))}{t - t'} \right| \leq M \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t')}{t - t'} \right| \quad \forall t' \in [\alpha, \beta].$$

Pertanto

$$(F \circ \varphi)'(t) = (F' \circ \varphi)(t)\varphi'(t) \; q.d.$$

Supponiamo ora che f sia $L-$misurabile e limitata, $|f(x)| \leq M \; \forall x \in [a,b]$, onde $(f \circ \varphi)\varphi'$ è sommabile; allora

$$x \to F(x) = \int_a^x f(y)dy, x \in [a,b]$$

è uniformemente lipschitziana. Il risultato precedente assicura che

$$(F \circ \varphi)'(t) = (f \circ \varphi)(t) \; q.d.$$

e quindi, integrando su $[\alpha, \beta]$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} \left(\int_a^{\varphi(t)} f(x)dx \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

onde per 1.2.5

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Supponiamo infine che f non sia limitata ma sommabile e tale che $(f \circ \varphi)\varphi'$ sia sommabile.
Poniamo $f_n(x) = f(x)$ per $x \in \{y \in [a,b]; |f(y)| \le n\}, f_n(x) = n$ per $x \in \{y \in [a,b]; f(y) > n\}, f_n(x) = -n$ per $x \in \{y \in [a,b]; f(y) < -n\}$. Allora

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f_n(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_n(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Essendo $|f_n(x)| \le |f(x)| \forall x \in [a,b]$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \forall x \in [a,b]$, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue (appendice A) si ha

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

□

Teorema 1.2.9. *Se la funzione $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ è sommabile e $\int_a^x f(t)dt = 0$ per ogni x contenuta in $[a,b]$ allora $f(x) = 0$ quasi dappertutto.*

Dimostrazione. Sia $[\alpha, \beta]$ un arbitrario sottointervallo di $[a,b]$; allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{a}^{\beta} f(x)dx - \int_{a}^{\alpha} f(x)dx = 0.$$

Sia ora E un arbitrario sottoinsieme $L-$misurabile di $[a,b]$.
Proviamo che

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

infatti supponiamo che E sia un sottoinsieme $L-$misurabile di $[a,b]$ tale che $\int_E f(x)dx \ne 0$; sia $\left|\int_E f(x)dx\right| = \lambda > 0$.
$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $\left|\int_F f(x)dx\right| < \lambda \quad \forall F \subseteq [a,b], F\ L-$misurabile con $\mu(F) < \delta$. Sia O un aperto di $\mathbb{R}$ tale che $E \subseteq O$ e $\mu(O) < \mu(E) + \delta$; risulta $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} [\alpha_j, \beta_j]$ con $]\alpha_i, \beta_i[\cap]\alpha_j, \beta_j[= \varnothing$ per $i \ne j$. Poniamo $I_n = [\alpha_n, \beta_n] \cap [a,b]$ e $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Allora per il teorema di additività numerabile dell'integrale e per quanto precede

$$\int_V f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f(x)dx = 0.$$

D'altra parte $E \subseteq V \subseteq O$ onde $\mu(V \setminus E) < \delta$ e quindi $\left|\int_{V\setminus E} f(x)dx\right| < \lambda$. Ma da

$$O = \int_V f(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_{V\setminus E} f(x)dx$$

segue

$$\left|\int_{V\setminus E} f(x)dx\right| = \left|\int_E f(x)dx\right| = \lambda.$$

Assurdo. Dunque $\forall E \subseteq [a,b], E$ $L-$misurabile, risulta

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

Posto allora $E^+ = \{x \in [a,b]; f(x) \geq 0\}$ e $E^- = \{x \in [a,b]; f(x) < 0\}$, si ha

$$\int_{E^+} f(x)dx = \int_{E^-} f(x)dx = 0$$

e quindi visto che $f \in \mathfrak{L}([a,b]), f \geq 0$,e $\int_E f = 0$ si ha $f(x) = 0$ q.d. □

Teorema 1.2.10. *Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile e $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia la funzione integrale definita ponendo*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]\ (\varphi(a) = 0).$$

Allora $\varphi'(x) = f(x)$ quasi dappertutto.

Dimostrazione. Per il teorema di assoluta continuità dell'integrale la funzione φ è assolutamente continua. Sia $g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione così definita: $g(x) = \varphi'(x)$ nei punti $x \in]a,b[$ per i quali $\exists \varphi'(x)$ e $g(x) = 0$ nei restanti punti di $[a,b]$. Allora per 1.2.5 risulta

$$\int_a^x g(t)dt = \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi(x)$$

e quindi

$$\int_a^x (g(t) - f(t))dt = 0$$

e quindi per 1.2.9, $g(x) = f(x)$ q.d. ossia $\varphi'(x) = f(x)$ q.d. □

1.2.2 Punti di Lebesgue a una variabile e funzioni singolari

Definizione 1.4 (Punto di Lebesgue). Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione sommabile. Un punto $x \in]a,b[$ si chiama punto di Lebesgue se $f(x) \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt = 0.$$

Osservazione 7. Posto $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b]$, se x è un punto di Lebesgue si ha $\varphi'(x) = f(x)$. Infatti

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt.$$

Dimostrazione. Proviamo che quasi ogni punto di $[a,b]$ è punto di Lebesgue di f.
Se $r \in \mathbb{Q}$ allora $t \to |f(t)-r|$ è sommabile su $[a,b]$ e quindi

$$\frac{d}{dx}\int_a^x |f(t)-r|dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt = |f(x)-r| \quad q.d.$$

Sia E_r il sottoinsieme di $[a,b]$ dei punti per cui la precedente uguaglianza non sussiste. Risulta $\mu(E_r) = 0$. Ordiniamo i numeri razionali nella successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e poniamo $E = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{r_n}) \bigcup E_\infty$ essendo $E_\infty = \{x \in [a,b]; |f(x)| = +\infty\}$. Allora $\mu(E) = 0$. Proviamo che ogni punto di $[a,b]\setminus E$ è un punto di Lebesgue di f. Sia $x_0 \in [a,b]\setminus E$ ed ε un arbitrario numero reale positivo. $\exists r_n \in \mathbb{Q}$ tale che $|f(x_0)-r_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ e quindi $\big||f(t)-r_n| - |f(t)-f(x_0)|\big| < \frac{\varepsilon}{3}$. Perciò

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|dt - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Poichè $x_0 \notin E$ $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|dt - |f(x_0)-r_n|dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\forall h \in \mathbb{R}, 0 < |h| < \delta_\varepsilon$, e quindi

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|dt\right| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

e quindi

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt < \varepsilon$$

$\forall h \in \mathbb{R}, 0 < |h| < \delta_\varepsilon$. E' evidente, in particolare, ogni punto di continuità di f è punto di Lebesgue. □

Osservazione 8. Se $f_1, f_2 \in AC_{[a,b]}$ per l'osservazione 6 si ha

$$\int_a^x (f_1(t)f_2'(t) + f_2(t)f_1'(t))dt = f_1(x)f_2(x) - f_1(a)f_2(a) \quad \forall x \in [a,b].$$

D'altra parte anche $f_1f_2 \in AC_{[a,b]}$ perciò

$$\int_a^x (f_1f_2)'(t)dt = f_1(x)f_2(x) - f_1(a)f_2(a)$$

e quindi

$$0 = \int_a^x \big((f_1 f_2)'(t) - (f_1 f_2')(t) - (f_2 f_1')(t)\big)\, dt.$$

Ne segue che

$$(f_1 f_2)'(t) = (f_1 f_2')(t) + (f_2 f_1')(t) \quad q.d.$$

Definizione 1.5 (Funzione Singolare). Se $\varphi \in \vartheta_{[a,b]}, \varphi \in C([a,b]), \varphi$ non è costante e $\varphi'(x) = 0$ q.d. si dice che φ è una funzione singolare

Teorema 1.2.11. *Sia f una funzione a variazione limitata su $[a,b]$; allora*

$$f = g + h + s$$

con s la funzione dei salti, g assolutamente continua su $[a,b]$ con $g(a) = f(a)$ e $h = 0$ oppure h singolare.
g e h sono univocamente determinate.

Dimostrazione. Sia s la funzione dei salti, g la funzione definita ponendo

$$g(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a),\ x \in [a,b]$$

e

$$h = (f - s) - g.$$

Allora $g \in AC_{[a,b]}$ e $g(a) = f(a), f - s \in \vartheta_{[a,b]}, f - s \in C([a,b])$ e quindi $h \in \vartheta_{[a,b]}, h \in C([a,b])$, inoltre

$$h'(x) = f'(x) - s'(x) - g'(x)$$

Ma $s'(x) = 0$ e $g'(x) = f'(x)$, quindi

$$h'(x) = f'(x) - f'(x) = 0 \quad q.d.$$

e quindi h è singolare. Proviamo ora che g e h sono univocamente determinate. Supponiamo che sussista anche la decomposizione $f = g_1 + h_1 + s$ con $g_1 \in AC_{[a,b]}, g_1(a) = f(a), h_1$ singolare. Si ha $g - g_1 = h_1 - h \in AC_{[a,b]}$ e $g'(x) - g_1'(x) = h_1'(x) - h'(x) = 0$ q.d.; allora $g - g_1$ è costante per 1.2.7 e quindi $g = g_1$ perché $g(a) = g_1(a) = f(a)$, quindi anche $h = h_1$. □

Teorema 1.2.12. *Sia f una funzione a variazione limitata su $[a,b]$. Allora*

$$f \text{ è assolutamente continua su [a,b]} \Longleftrightarrow \int_a^b |f'(x)|dx = \bigvee_a^b(f).$$

Dimostrazione. Supponiamo $f \in AC_{[a,b]}$. Sia g la funzione definita ponendo

$$g(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{nei punti di }]a,b[\text{ nei quali esiste } f'(x) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Siano h_1 e h_2 le funzioni definite ponendo

$$h_1(x) = \int_a^x g^+(t)dt, h_2(x) = \int_a^x g^-(t)dt,\ x \in [a,b].$$

$h_1, h_2 \in AC_{[a,b]}$ e sono non decrescenti; risulta $h_1'(x) = g^+(x)$ q.d.,$h_2'(x) = g^-(x)$ q.d. onde $f'(x) = h_1'(x) - h_2'(x)$ q.d. perché $f' = g^+ - g^-$. Allora per 1.2.5

$$\left(\int_a^x f'(x) =\right) f(x) - f(a) = h_1(x) - h_2(x) \left(= \int_a^x h_1'(x) - h_2'(x)\right).$$

Essendo h_1 e h_2 non decrescenti e $h_1(a) = h_2(a) = 0$ si ha

$$\bigvee_a^b(h_1) + \bigvee_a^b(h_2) = h_1(b) - h_1(a) + h_2(b) - h_2(a) = \int_a^b \left(g^+(x) + g^-(x)\right) dx = \int_a^b |f'(x)|dx$$

e quindi

$$\bigvee_a^b(f) \leq (h_1) + \bigvee_a^b(h_2) = \int_a^b |f'(x)|dx.$$

D'altra parte per 1.2.2

$$\int_a^b |f'(x)|dx \leq \bigvee_a^b(f).$$

Dunque $\int_a^b |f'(x)|dx = \bigvee_a^b(f)$.
Supponiamo inversamente che sia $\int_a^b |f'(x)|dx = \bigvee_a^b(f)$.
Poichè

$$f(x) = \bigvee_a^x{}^+(f) - \bigvee_a^x{}^-(f) + f(a),\ \bigvee_a^x(f) = \bigvee_a^x{}^+(f) + \bigvee_a^x{}^-(f),$$

si ha

$$|f'(x)| = \left|\frac{d}{dx}\bigvee_a^x{}^+(f) - \frac{d}{dx}\bigvee_a^f{}^-(f)\right| \leq \frac{d}{dx}\bigvee_a^x{}^+(f) + \frac{d}{dx}\bigvee_a^x{}^-(f) = \frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f) \quad q.d.$$

onde per l'ipotesi e per 1.2.2 si ha

$$\bigvee_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx \leq \int_a^b \frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f)dx \leq \bigvee_a^{b-O}(f) - \bigvee_a^{a+O}(f)$$

e quindi $0 \le \bigvee_a^b(f) - \bigvee_a^{b-O}(f) \le -\bigvee_a^{a+O}(f) \le 0$ e quindi $\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^{b-O}(f)$ e $\bigvee_a^{a+O}(f) = 0$.
Se $a < x < b$ si ha conseguentemente

$$\bigvee_a^b(f) = \int_a^b \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt = \int_a^x \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt + \int_x^b \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt \le$$

$$\le \bigvee_a^{x-O}(f) + \bigvee_a^b(f) - \bigvee_a^{x+O}(f)$$

e quindi

$$0 \le \bigvee_a^{x+O}(f) - \bigvee_a^{x-O} \le 0$$

e quindi

$$\bigvee_a^{x+O}(f) = \bigvee_a^{x-O}(f) = \bigvee_a^x(f).$$

Allora per 1.2.2

$$\int_a^x \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt \le \bigvee_a^x(f).$$

Ma non può essere $\int_a^x \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt < \bigvee_a^x(f)$ perché altrimenti sarebbe

$$\bigvee_a^b(f) = \int_a^x \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt + \int_x^b \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt < \bigvee_a^x(f) + \bigvee_a^b(f) - \bigvee_a^x(f),$$

il che è assurdo.
Allora $\forall x \in [a,b]$ si ha

$$\int_a^x \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt = \bigvee_a^x(f).$$

Ciò assicura che la funzione $x \to \bigvee_a^x(f)$ è assolutamente continua e quindi tale è anche f perché se $x, y \in [a,b]$ e $x < y$ si ha

$$|f(y) - f(x)| \le \bigvee_x^y(f) = \bigvee_a^y(f) - \bigvee_a^x(f)$$

e quindi

$$\sum_{j=1}^n |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \le \sum_{j=1}^n \bigvee_{\alpha_j}^{\beta_j}(f)$$

qualunque siano i sottointervalli di $[\alpha_j, \beta_j]$ di $[a,b]$. □

Teorema 1.2.13. *Sia $[f]$ una curva continua rettificabile di $\mathbb{R}^n$ e $f \in [f], f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Se $t \to s(t)$ è l'ascissa curvilinea si ha*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (f_k'(t))^2} \leq s'(t) \quad q.d.$$

e

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (f_k'(t))^2 dt} \leq s(b).$$

Nell'ultima formula l'eguaglianza sussiste se e solo se ogni f_k è assolutamente continua.

Dimostrazione. Se $t, t+h \in]a,b[$ e $h > 0$ si ha per definizione di ascissa curvilinea

$$s(t+h) - s(t) = \bigvee_{t}^{t+h}(f) \geq \|f(t+h) - f(t)\|$$

e quindi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_k(t+h) - f_k(t)}{h}\right)^2} \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

da cui segue la prima affermazione.
La seconda affermazione segue dalla prima per integrazione utilizzando 1.2.2.
Supponiamo ora che sia

$$\int_a^b s'(t)dt = s(b).$$

Allora tenendo presente che s è non decrescente, per 1.2.12 risulta $s \in AC_{[a,b]}$.
Se $a \leq t < \tau \leq b$ si ha

$$|f_k(\tau) - f_k(t)| \leq \|f(\tau) - f(t)\| \leq s(\tau) - s(t) \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Perciò ogni f_k è assolutamente continua.
Viceversa supponiamo $f_k \in AC_{[a,b]}$ per $k = 1, 2, \ldots, n$. Allora se $a \leq \alpha < \beta \leq b$ si ha

$$f_k(\beta) - f_k(\alpha) = \int_\alpha^\beta f_k'(t)dt$$

e quindi

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\int_\alpha^\beta f_k'(t)dt\right)^2}.$$

Supponiamo $\|f(\beta) - f(\alpha)\| > 0$ e sia

$$c_k\|f(\beta) - f(\alpha)\| = \int_\alpha^\beta f_k'(t)dt, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

onde $\sum_{k=1}^n c_k^2 = 1$. Si ha

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| = \sum_{k=1}^n c_k^2 \|f(\beta) - f(\alpha)\| = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n c_k f_k'(t) dt \le$$

$$\le \int_\alpha^\beta \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n c_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k'(t))^2} \right) dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k'(t))^2 dt}.$$

Pertanto se $\sigma = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_m = b\}$ è una scomposizione finita di $[a,b]$ si ha

$$\sum_{k=1}^m \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \le \sum_{j=1}^m \int_{t_j-1}^{t_j} \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k'(t))^2 dt} = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k'(t))^2 dt}.$$

Ne segue che

$$s(b) = \bigvee_a^b (f) \le \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k'(t))^2 dt}.$$

D'altra parte $\int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k'(t))^2 dt} \le s(b)$. Dunque

$$s(b) = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k'(t))^2 dt}.$$

$\square$

Capitolo 2

Differenziazione

2.1 L'integrale indefinito

2.1.1 Funzioni d'insieme

Se f è un funzione integrabile secondo Riemann su un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$, la sua familiare definizione del suo integrale indefinito è

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \ (a < x < b).$$

Il teorema fondamentale del calcolo ci assicura che $F' = f$ se f è continua. Noi studieremo un analogo di questo risultato per le funzioni integrabili secondo Lebesgue e a più variabili.
Noi dobbiamo prima trovare un'appropriata definizione dell'integrale indefinito. Per esempio in due dimensioni noi potremmo scegliere

$$F(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Si scopre però che è meglio abbandonare la nozione che un integrale indefinito sia una funzione di un punto e addottare l'idea che sia una funzione d'insieme

Definizione 2.1 (Funzione d'insieme additiva). Sia $\mathcal{E}$ un insieme ($\neq \varnothing$) di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$; una funzione $\varphi : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ si chiama una funzione d'insieme. Essa si dice additiva se tra i suoi valori non si trovano contemporaneamente $+\infty$ e $-\infty$ e se

$$\varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2)$$

$\forall E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ tali che $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$ e $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Osservazione 9. L'ipotesi che non si trovino in contemporanea $-\infty$ e $+\infty$ ci permette di applicare la proprietà associativa ad una somma di valori di φ.

Osservazione 10. Se φ è additiva allora essa è finitamente additiva, cioè $\forall m \in \mathbb{N}$ ed $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E}$ tali che $\cup_{k=1}^m E_k \in \mathcal{E}$ e $E_h \cap E_k = \varnothing$ per $h \neq k$, allora

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^m E_k\right) = \sum_{k=1}^m \varphi(E_k).$$

Dimostrazione. Supponiamo infatti che $E_1, \dots, E_m$ soddisfino tali condizioni e sia $E_{m+1} \in \mathcal{E}$ tale che

$$\left(\bigcup_{k=1}^m E_k\right) \bigcup E_{m+1} \in \mathcal{E} \quad \text{e} \quad E_{m+1} \bigcap E_i = \varnothing \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m,$$

allora

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{m+1} E_k\right) = \varphi\left(\left(\bigcup_{k=1}^m E_k\right) \bigcup E_{m+1}\right) = \varphi\left(\bigcup_{k=1}^m E_k\right) + \varphi\left(E_{m+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^m \varphi(E_k) + \varphi(E_{m+1}) = \sum_{k=1}^{m+1} \varphi(E_k).$$

Definizione 2.2 (Funzione d'insieme completamente additiva). La funzione φ si dice completamente , o numerabilmente, additiva se $\forall E_k \in \mathcal{E}, k \in \mathbb{N}$, tali che $\cup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{E}$ ed $E_k \cap E_h = \varnothing$ per $h \neq k$, allora

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \varphi(E_k)$$

se $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k \varphi(E_j) \exists$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

Per esempio se $\mathcal{E}$ è l'insieme dei sottoinsiemi $L-$misurabili di $\mathbb{R}^n$ e μ è la misura di Lebesgue, allora μ è completamente additiva per il teorema di additività della misura.
Evidentemente una funzione può essere additiva e non completamente additiva.

Osservazione 11. Se $\varnothing \in \mathcal{E}$ e $\varphi(\varnothing) = 0$ allora se φ è completamente additiva essa è anche additiva

Dimostrazione. $\cup_{k=1}^\infty E_k = \cup_{k=1}^m E_k$, se $E_j = \varnothing$ per $j > m$, e $E_k \cap \varnothing = \varnothing, \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$.

□

Osservazione 12. Se φ è additiva, $\varnothing \in \mathcal{E}$, ed esiste almeno un $E \in \mathcal{E}$ tale che $\varphi(E) \in \mathbb{R}$, allora necessariamente è $\varphi(\varnothing) = 0$

Dimostrazione. $\varphi(E) = \varphi(\varnothing \cup E) = \varphi(\varnothing) + \varphi(E)$. □

Definizione 2.3 (Funzione d'insieme assolutamente continua). Sia $\mathcal{E}$ l'insieme dei sottoinsiemi $L-$misurabili di un intervallo I limitato e aperto in $\mathbb{R}^n$; una funzione $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ si dice assolutamente continua se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $|\varphi(E)| < \varepsilon \ \forall E \in \mathcal{E}$ con $\mu(E) < \delta_\varepsilon$.

Teorema 2.1.1. *Sia $\mathcal{E}$ l'insieme dei sottoinsiemi $L-$misurabili di un intervallo I aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ sia additiva e assolutamente continua; allora φ è anche completamente additiva.*

Dimostrazione. Sia $E_k \in \mathcal{E} \ \forall k \in \mathbb{N}, E_h \cap E_k = \varnothing$ per $h \neq k$. Poichè $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \leq \mu(I) < \infty$ si ha $\lim_{m\to\infty} \mu(\cup_{k=m+1}^{\infty} E_k) = 0$ e quindi

$$\lim_{m\to\infty} \varphi\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

D'altra parte

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \varphi\left(\left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right)\right) = \varphi\left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k\right) +$$

$$+\varphi\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(E_k) + \varphi\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right) \overrightarrow{m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_k)$$

e quindi

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_k).$$

□

Teorema 2.1.2. *Sia $\mathcal{E}$ l'insieme dei sottoinsiemi $L-$misurabili di un intervallo I aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ una funzione d'insieme additiva e assolutamente continua. Sia A un sottoinsieme arbitrario di I ed E_1,E_2 siano due elementi di $\mathbb{E}$ tali che $A \subseteq E_1, A \subseteq E_2, \mu(E_1) = \mu(E_2) = \mu^*(A)$. Allora $\varphi(E_1) = \varphi(E_2)$.*

Dimostrazione. Sia $E_3 = E_1 \cap E_2$; allora $A \subseteq E_3 \subseteq E_1$ e quindi $\mu(E_3) = \mu(E_1)$ onde $\mu(E_1 \setminus E_3) = 0$. Allora $\mu(E_1 \setminus E_3) = 0$.
Ma $E_1 = E_3 \cup (E_1 \setminus E_3)$ ed $E_3 \cap (E_1 \setminus E_3) = \varnothing$ onde $\varphi(E_1) = \varphi(E_3) + \varphi(E_1 \setminus E_3) = \varphi(E_3)$. Analogamente $\varphi(E_2) = \varphi(E_3)$. □

Convenzione. Nelle ipotesi di 2.1.2 se A è un arbitrario sottoinsieme di I ed $E \in \mathcal{E}$, $A \subseteq E, \mu(E) = \mu^*(A)$, poniamo

$$\varphi(A) = \varphi(E).$$

2.1.2 L'integrale indefinito

Definizione 2.4 (Integrale indefinito). Sia $f \in \mathcal{L}(A)$,A,$\subseteq \mathbb{R}$,A misurabile, definiamo l'integrale indefinito di f la funzione

$$F(E) = \int_E f,$$

con E un qualsiasi sottoinsieme misurabile di A.

Teorema 2.1.3. *Sia f una funzione sommabile su A; allora il suo integrale indefinito è assolutamente continuo*

Dimostrazione. Supponiamo $f \geq 0$ considerando f^+ e f^-. Fissiamo k e scriviamo $f = g + h$,dove

$$g = \begin{cases} f & \text{se} f \leq k \\ k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists k$ (abbastanza grande) tale che $0 \leq \int_A h < \frac{1}{2}\varepsilon$ e a fortiori $0 \leq \int_E h < \frac{1}{2}\varepsilon\ \forall E \subseteq A$. D'altra parte siccome $0 \leq g \leq k$, abbiamo $0 \leq \int_E g \leq k|E| < \frac{1}{2}\varepsilon$ (se $|E|$ è abbastanza piccolo). Così

$$0 \leq \int_E f = \int_E g + \int_E h < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

se $|E|$ è piccolo abbastanza. □

2.2 Il teorema di differenziazione di Lebesgue

Veniamo ora ad un teorema fondamentale di Lebesgue relativo alla differenziazione dell'integrale indefinito. Per $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, sia F l'integrale indefinito di f, sia Q un cubo $n-$dimensionale coi lati paralleli agli assi, sia $x \in \mathbb{R}^n$, consideriamo quei Q centrati in x, e chiediamo se la media

$$\frac{F(Q)}{|Q|} = \frac{1}{Q}\int_Q f(y)dy$$

converge a $f(x)$ quando Q si contrae in x. Se questo è il caso, scriveremo

$$\lim_{Q \to x} \frac{F(Q)}{|Q|} = f(x),$$

e diremo che l'integrale indefinito di f è differenziabile in x con derivata $f(x)$. Nel caso $n = 1$ la questione è se

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)dy = f(x),$$

che è equivalente chiedere che

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy = f(x.)$$

Siccome la funzione può essere cambiata arbitrariamente in un insieme di misura 0 senza effetti sul suo integrale indefinito, il meglio che noi possiamo sperare è che la F sia diffenziabile q.d.

Teorema 2.2.1 (Teorema di differenziazione di Lebesgue). *Sia f una funzione sommabile su $\mathbb{R}^n$; allora il suo integrale indefinito è differenziabile con derivata $f(x)$ quasi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$*

La dimostrazione di questo risultato è complessa e richiede alcuni risultati non banali.
Considerare la funzione

$$f^*(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy,$$

dove il sup è preso su tutto Q centrato in x. Questa funzione gioca un ruolo importante in analisi.

Osservazione 13. Il teorema 2.2.1 è semplice da dimostrare per le funzioni continue.

Dimostrazione. Sia f continua in x e sia Q il cubo di centro x, allora

$$\left|\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy - f(x)\right| = \left|\frac{1}{|Q|} \int_Q (f(y) - f(x))\, dy\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|dy \leq \sup_{y\in Q} |f(y) - f(x)|,$$

che tende a 0 quando Q si restringe a x. □

La strategia della dimostrazione è di approsimare una data funzione $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ con funzioni continue C_k. Questa approssimazione è affermata nel lemma 2.2.2 ed ha natura globale. Quindi sarà necessario trovare una via di controllo per il comportamento locale (per esempio le medie) di $f - C_k$ dalla sua stima globale. Questo passaggio viene effettuato nel lemma 2.2.4, e consiste nello stimare la dimensione di f^* in termini di $\int |f|$. Il lemma 2.2.3 è un fondamentale lemma di ricoprimento usato per provare 2.2.4.

Lemma 2.2.2. *Sia f una funzione sommabile su$\mathbb{R}^n$; allora esiste una successione (C_k) di funzioni continue a supporto compatto tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - C_k|dx \to 0 \textit{ per } k \to \infty.$$

Dimostrazione. Se f è una funzione integrabile per cui vale la conclusione, diremo che f ha proprietà $\mathcal{A}$. Proveremo il lemma considerando una serie di casi speciali. Per aiutare il passaggio da un caso a quello successivo noi proveremo che

1. Una combinazione lineare finita di funzioni con proprietà $\mathcal{A}$ ha proprietà $\mathcal{A}$.

2. Se (f_k) è una successione di funzioni con proprietà $\mathcal{A}$, e se $\int_{\mathbb{R}^n} |f - f_k| \to 0$, allora f ha proprietà $\mathcal{A}$.

Per provare la 1. è sufficiente mostrare che per ogni scalare $a \in \mathbb{R}$, se f ha proprietà $\mathcal{A}$, af ha proprietà $\mathcal{A}$, e che la somma $f_1 + f_2$ di due funzioni con proprietà $\mathcal{A}$ ha proprietà $\mathcal{A}$. Questi seguono facilmente dalle relazioni

$$\int |af - aC| = |a| \int |f - C|,$$

$$\int |(f_1 + f_2) - (C_1 + C_2)| \leq \int |f_1 - C_1| + \int |f_2 - C_2|.$$

Per provare 2., sia (f_k) che f soddisfino le ipotesi 2. Siccome f_k è integrabile e $\int |f| \leq \int |f - f_k| + \int |f_k|$, f è integrabile.
Sia ora $\varepsilon > 0$, scegliamo k_0 tale che $\int |f - f_{k_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Scegliamo poi una funzione a supporto compatto C tale che $\int |f_{k_0} - C| < \frac{\varepsilon}{2}$. Siccome

$$\int |f - C| \leq \int |f - f_{k_0}| + \int |f_{k_0} - C| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

f ha proprietà $\mathcal{A}$.
Per dimostrare il lemma, sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Scrivendo $f = f^+ - f^-$ assumiamo (da 1.) che $f \geq 0$. Quindi esistono funzioni non negative semplici $f_k \nearrow f$. Così $f_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\int |f - f_k| \to 0$, così da 2. possiamo supporre che f è una funzione semplice integrabile. Quindi da 1. assumiamo che $f = \chi_E, |E| < +\infty$ sia $\varepsilon > 0$ scgliamo un aperto G tale che $E \subset G$ e $|G \setminus E| < \varepsilon$. Quindi

$$\int |\chi_G - \chi_E| = |G \setminus E| < \varepsilon,$$

così possiamo supporre che $f = \chi_G$ per un aperto G con $|G| < \infty$. Scriviamo $G = \bigcup I_k$, dove I_k sono intervalli semiaperti disgiunti. Sia f_N la funzione caratteristica di $\bigcup_{k=1}^N I_k$, otteniamo

$$\int |f - f_N| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |I_k| \to 0$$

siccome $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = |G| < +\infty$. Da 2. è sufficiente mostrare che ciascuna f_N ha proprietà $\mathcal{A}$. Ma f_N è la somma di χ_{I_k}, $k = 1, 2, \ldots, N$, così è sufficiente da 1. mostrare che la funzione caratteristica di ogni intervallo I ha proprietà $\mathcal{A}$. Questo è evidente, se denotiamo con I^* un intervallo che contiene la chiusura di I e che soddisfa $|I^* - I| < \varepsilon$, quindi per ogni funzione continua C,$0 \leq C \leq 1$ che è 1 in I e 0 fuori I^* abbiamo

$$\int |\chi_I - C| \leq |I^* - I| < \varepsilon.$$

□

2.2.1 Il lemma di Vitali e la funzione massimale di Hardy-Littlewood

Lemma 2.2.3 (semplice di Vitali). *Sia E un sottoinsieme diR^n con $|E|_e < +\infty$, e sia K una famiglia di cubi Q ricoprente E; allora esiste β positivo dipendente solo da n e un numero finito di cubi $Q_1, \ldots, Q_N$ disgiunti in K tale che*

$$\sum_{j=1}^{N} |Q_j| \geq \beta |E|_e.$$

Dimostrazione. Indichiamo con $Q(t)$ la dimensione del cubo $Q \in K$ dove t è la lunghezza del bordo di Q. Sia $K_1 = K$ e

$$t_1^* = \sup\{t : Q = Q(t) \in K_1\}.$$

Se $t_j^* = +\infty$, allora K_1 contiene una sequenza di cubi Q con $|Q| \to +\infty$. In questo caso preso $\beta > 0$, scegliamo semplicemente un $Q \in K_1$ con $|Q| \geq \beta |E|_e$. Se $t_1^* < +\infty$, l'idea è ancora di prendere un cubo relativamente grande: scegliamo $Q_1 = Q_1(t_1) \in K_1$ tale che $t_1 > \frac{1}{2} t_1^*$. Adesso dividiamo $K_1 = K_2 \cup K_2'$ dove K_2 consiste in quei cubi di K_1 che sono disgiunti da Q_1, e K_2' da quelli che intersecano Q_1. Denotiamo con Q_1^* il cubo concentrico con Q_1 il cui bordo è lungo $5t_1$. Così, $|Q_1^*| = 5^n |Q_1|$, e siccome $2t_1 > t_1^*$ tutti i cubi in K_2' sono contenuti in Q_1^*.
Partendo con $j = 2$ continuiamo questo processo con $j = 2, 3, \ldots$ ponendo

$$t_j^* = \sup\{t : Q = Q(t) \in K_j\},$$

scegliendo un cubo $Q_j = Q_j(t_j) \in K_j$ con $t_j > \frac{1}{2} t_j^*$, e dividendo $K_j = K_{j+1} \cup K_{j=1}'$ dove K_{j+1} consiste in tutti quei cubi di K_j che sono disgiunti da Q_j. Se K_{j+1} è vuoto il processo termina. Abbiamo $t_j^* \geq t_{j+1}^*$, inoltre per ciascuna j le $Q_1, \ldots, Q_j$ sono disgiunti a due a due da qualsiasi cubo in K_{j+1}, qualsiasi cubo in K_{j+1}' è contenuto nel cubo Q_j^* concentrico con Q_j il cui borbo ha lunghezza $5t_j$. Notare che $|Q_j^*| = 5^n |Q_j$.

Consideriamo la sequenza $t_1^* \geq t_2^* \geq \dots$. Se qualche K_{N+1} è vuoto (ossia se $t_j^* = 0$ per $j \geq N+1$), quindi siccome

$$K_1 = K_2 \cup K_2' = \ldots = K_{N+1} \cup K_{N+1}' \cup \ldots \cup K_2',$$

e E è coperto dai cubi in K_1, segue che E è coperto dai cubi in $K_{N+1}' \cup \ldots \cup K_2'$. Quindi $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} Q_j^*$, così che

$$|E|_e \leq \sum_{j=1}^{N} |Q_j^*| = 5^n \sum_{j=1}^{N} |Q_j|.$$

Questo prova il lemma con $\beta = 5^{-n}$.
D'altra parte se nessun t_j^* è zero, allora o esiste a $\delta > 0$ tale che $t_j^* \geq \delta\ \forall j$, o $t_j^* \to 0$. Nel primo caso, $t_j \geq \frac{1}{2}\delta\ \forall j$, quindi,$\sum_{j=1}^{N} |Q_j| \to +\infty$ per $N \to \infty$. $\forall \beta > 0$ il lemma segue in questo caso scegliendo N sufficientemente largo.
Infine se $t_j^* \to 0$ affermiamo che ogni cubo in K_1 è contenuto in $\cup_j Q_j^*$. Altrimenti esisterebbe un cubo $Q = Q(t)$ non intersecante nessun Q_j. Siccome questo cubo apparterrebbe ad ogni cubo in K_j,t soddisferebbe $t \leq t_j^*\, \forall j$ e quindi, $t = 0$. Questa contraddizione prova l'affermazione. Siccome E è coperto dai cubi in K_1 segue che

$$|E|_e \leq \sum_j |Q_j^*| = 5^n \sum_j |Q_j|.$$

Quindi $\forall \beta$ con $0 < \beta < 5^{-n}$ $\exists N$ tale che $\sum_{j=1}^{N} |Q_j| \geq \beta |E|_e$ □

Osservazione 14. Il lemma 2.2.3 non presuppone la misurabilità di E, la dimostrazione può essere semplificata se E è misurabile.

Dimostrazione. In fatti se E è misurabile, noi possiamo supporlo chiuso e limitato. Quindi assumendo, come possiamo, che i cubi in K siano aperti, segue dal teorema di Heine-Borel che E può essere coperto da un numero finito di cubi. Per Q_1, noi possiamo scegliere il cubo più grande, analogamente in sequenza prendiamo come Q_j il più largo dei cubi disgiunti da $Q_1, \ldots, Q_{j-1}$. Così $E \subseteq \cup Q_j^*$, da cui segue il lemma □

Prima di iniziare il prossimo lemma, facciamo qualche definizione e qualche commento.

Definizione 2.5 (Funzione massimale di Hardy-Littlewood). Sia f definita su $\mathbb{R}^n$ e integrabile su ogni cubo Q chiamiamo la funzione massimale di Hardy-Littlewood di f

$$f^*(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

dove l'estremo superiore è preso su tutto Q coi lati paralleli agli assi e di centro x. f^* è una stima della dimensione delle medie di $|f|$ attorno a x.

Osservazione 15. f^* soddisfa

1. $0 \leq f^*(x) \leq +\infty$,
2. $(f+g)^*(x) \leq f^*(x) + g^*(x)$,
3. $(cf)^*(x) = |c| f^*(x)$.

Se $f^*(x_0) > \alpha$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$, segue dall'assoluta continuità dell'integrale indefinito che $f^*(x) > \alpha$ $\forall x$ vicina a x_0. Quindi f^* è semicontinua inferiormente in $\mathbb{R}^n$. In particolare è misurabile.
Studiamo adesso la dimensione di f^*.
$\forall E$ misurabile

$$\chi_E^*(x) = \sup \left\{ \frac{|E \cap Q|}{|Q|} : Q \text{ ha centro in } x \right\}.$$

Se E è limitato e Q^x denota il più piccolo cubo con centro x contenente E, allora

$$\frac{|E \cap Q^x|}{|Q^x|} = \frac{|E|}{|Q^x|}.$$

Segue che $\exists c_1, c_2$ costanti,$c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1 \frac{|E|}{|x|^n} \leq \chi_E^*(x) \leq c_2 \frac{|E|}{|x|^n} \quad \text{per grandi} \quad |x|. \tag{2.1}$$

In particolare se $|E| > 0$,χ_E^* è non integrabile su $\mathbb{R}^n$. Per trovare un modo per stimare la dimensione di f^*, richiamiamo la disuguaglianza di Tchebyshev

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

Quindi se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ $\exists$ una costante c indipendente da α tale che

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \quad (\alpha > 0). \tag{2.2}$$

2.2.2 Funzioni L debole e lemma di Hardy-Littlewood

Definizione 2.6 (Funzione $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ debole). Ogni f misurabile, integrabile o no, per la quale vale 2.2 diremo che appartiene a $\underline{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ debole}}$

Osservazione 16. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ debole.

Lemma 2.2.4 (di Hardy-Littlewood). *Sia f sommabile su $\mathbb{R}^n$; allora f^* appartiene a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ debole. In più esiste una costante c indipendente da f e da α tale che*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|, \quad \alpha > 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia a supporto compatto, oltre che integrabile. Quindi per 2.1 esiste una costante c_1 dipendente da f tale che $f^*(x) \leq c_1|x|^{-n}$ per $|x|$ sufficientemente grandi. In particolare $\{f^* > \alpha\}$ ha misura finita $\forall \alpha > 0$. Fissiamo $\alpha > 0$ e sia $E = \{f^* > \alpha\}$.
Se $x \in E$, dalla definizione di E e f^* esiste un cubo Q_x con centro x tale che $|Q_x|^{-1} \int_{Q_x} |f| > \alpha$. Equivalentemente,

$$|Q_x| < \frac{1}{\alpha} \int_{Q_x} |f|.$$

La famiglia di tali Q_x ricopre E, così dal lemma 2.2.3, $\exists \beta > 0$ e $x_1, \dots, x_N$ in E tali che $Q_{x_1}, \dots, Q_{x_N}$ sono disgiunti e $|E| < \beta^{-1} \sum_{j=1}^{N} |Q_{x_j}|$. Quindi,

$$|E| < \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \int_{Q_{x_j}} |f| = \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\bigcup_{j=1}^{N} Q_{x_j}} |f| \leq \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Questo prova il risultato per tale f, con $c = \beta^{-1}$.
Presa qualsiasi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, non è restrittivo supporre $f \geq 0$, perché sostituendo f con $|f|$, f^* non cambia. Sia (f_k) una successione di funzioni integrabili a supporto compatto tali che $0 \leq f_k \nearrow f$. Quindi esiste una costante c indipendente da k e $\alpha > 0$ tale che

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; f_k^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Siccome $f_k^* \nearrow f^*$, segue che

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f,$$

che completa la dimostrazione □

Dimostrazione del teorema di Lebesgue. Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ da 2.2.2 esiste un successione di funzioni integrabili e continue C_k tale che $\int_{\mathbb{R}^n} |f - C_k| \to 0$. Poniamo $F(Q) = \int_Q f$ e $F_k(Q) = \int_Q C_k$. Quindi per qualsiasi k,

$$\limsup_{Q \searrow x} \left| \frac{F(Q)}{|Q|} - f(x) \right| \leq \limsup_{Q \searrow x} \left| \frac{F(Q)}{|Q|} - \frac{F_k(Q)}{|Q|} \right| +$$

$$+ \limsup_{Q \searrow x} \left| \frac{F_k(Q)}{|Q|} - C_k(x) \right| + |C_k(x) - f(x)|,$$

dove il limsup è preso per i cubi di centro x che si restringono a x. Siccome C_k è continua, il secondo termine dalla destra è 0. In più,

$$\left| \frac{F(Q)}{|Q|} - \frac{F_k(Q)}{|Q|} \right| \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - C_k| \leq (f - C_k)^*(x),$$

e dunque $\forall k$,

$$\limsup_{Q \searrow x} \left| \frac{F(Q)}{|Q|} - f(x) \right| \leq (f - C_k)^*(x) + |f(x) - C_k(x)|. \tag{2.3}$$

Preso $\varepsilon > 0$, sia E_ε un insieme la cui parte sinistra di 2.3 superi ε.
Per 2.3,

$$E_\varepsilon \subseteq \left\{ x : (f - C_k)^*(x) > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ x : |f(x) - C_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Applicando il lemma 2.2.4 al primo insieme sulla destra e la disuguaglianza di Tchebishev al secondo otteniamo

$$|E_\varepsilon|_e \leq c \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f - C_k| + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f - C_k|.$$

Visto che c è indipendente da k, segue che tendendo k a $+\infty$ $|E_\varepsilon|_e = 0$.
Sia E un insieme per cui la parte sinistra di 2.3 sia positiva. Allora $E = \bigcup_k E_{\varepsilon_k}$ per ogni successione $\varepsilon_k \to 0$, e perciò $|E| = 0$. Questo significa che $\lim_{Q \searrow x} \frac{F(Q)}{|Q|}$ esiste ed è uguale a $f(x)$ quasi per ogni x, il che completa la dimostrazione. □

Elenchiamo ora alcune estensioni e corollari del teorema di Lebesgue

2.2.3 Funzioni localmente integrabili, punti di densità e punti di dispersione

Definizione 2.7 (Funzione localmente integrabile). Una funzione f definita su $\mathbb{R}^n$ si dice che è localmente integrabile su $\mathbb{R}^n$ se è integrabile per ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.2.5. *Se sostituiamo l'ipotesi di integrabilità con l'ipotesi di locale integrabilità è ancora valida la conclusione del teorema di Lebesgue*

Dimostrazione. E' sufficiente provare che la conclusione vale q.d. in ogni palla aperta. Fissiamo una palla e poniamo $f = 0$ fuori dalla palla. Questa nuova funzione è integrabile su $\mathbb{R}^n$, il suo integrale è differenziabile q.d., e siccome la differenziabilità è una proprietà locale, la funzione iniziale f è differenziabile q.d. nella palla. □

Osservazione 17. Per qualsiasi insieme misurabile E, notiamo che

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \chi_E = \frac{|E \cap Q|}{|Q|}.$$

Per 2.2.5, la parte sinistra tende a $\chi_E(x)$ q.d. per $Q \searrow x$, cioè

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{|E \cap Q|}{|Q|} = \chi_E(x) \quad q.d. \tag{2.4}$$

Definizione 2.8 (Punto di densità e punto di dispersione). Un punto x per il quale il limite di 2.4 è uguale a 1 è chiamato punto di densità di E. Un punto x per il quale il limite di 2.4 è uguale a 0 è chiamato punto di dispersione di E.

Osservazione 18. Siccome vale

$$\frac{|Q \cap E|}{|Q|} + \frac{|Q \cap E^C|}{|Q|} = \frac{|Q|}{|Q|} = 1,$$

ogni punto di densità di E è un punto di dispersione di E^C e viceversa.

La formula 2.4 può essere riscritta come segue

Teorema 2.2.6. *Sia E un insieme misurabile; allora quasi ogni punto di E è un punto di densità di E*

Osservazione 19. La formula $\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy = f(x)$ può essere scritta

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q (f(y) - f(x))dy = 0,$$

ed è valida quasi per ogni x se f è localmente integrabile.

2.2.4 Punti e insiemi di Lebesgue e famiglie regolari

Definizione 2.9 (Punto e insieme di Lebesgue). Un punto x per il quale vale la condizione più forte

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|dy = 0 \tag{2.5}$$

è chiamato punto di Lebesgue di f. L'unione di tutti i punti di Lebesgue è chiamata insieme di Lebesgue.

Teorema 2.2.7. *Sia f localmente integrabile in $\mathbb{R}^n$; allora quasi ogni punto di $\mathbb{R}^n$ è un punto di Lebesgue di f; Cioè esiste un insieme Z (dipendente da f) di misura 0 tale che vale 2.5 per $x \notin Z$.*

Dimostrazione. Siano r_k i numeri razionale,e sia Z_k l'insieme ove la formula

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - r_k|dy = |f(y) - r_k|$$

NON è valida. Visto che $|f(y) - r_k|$ è localmente integrabile, abbiamo $|Z_k| = 0$, poniamo $Z = \bigcup Z_k$; quindi $|Z| = 0$. Per qualsiasi Q,x e r_k,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - r_k|dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - r_k|dy =$$

$$= \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-r_k|dy + |f(x)-r_k|.$$

Quindi se $x \notin Z$,

$$\limsup_{Q\searrow x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|dy \leq 2|f(x)-r_k|$$

per ogni r_k. Per una x per cui $f(x)$ è finita noi possiamo scegliere r_k tale che $|f(x)-r_k|$ è arbitrariamente piccolo. Questo mostra che la parte sinistra della formula è 0 q.d. e completa la dimostrazione. □

Fino adesso abbiamo preso cubi centrati in x con lati paralleli agli assi, ma possiamo utilizzare molti altri tipi d'insiemi.

Definizione 2.10 (Famiglie regolari). Una famiglia $\{S\}$ di insiemi misurabili si dice regolare in x se soddisfa le seguenti condizioni:

1. Il diametro degli insiemi S tende a 0.
2. Se Q è il più piccolo cubo di centro x contenente S esiste una costante k indipendente da S tale che
$$|Q| \leq k|S|.$$

L'insieme S può non contenere x

Teorema 2.2.8. *Sia f localmente integrabile su $\mathbb{R}^n$; Allora per ogni x appartenente all'insieme di Lebesgue di f (in particolare, quasi dappertutto),*

$$\frac{1}{|S|}\int_S |f(y)-f(x)|dy \to 0$$

per qualsiasi famiglia $\{S\}$ regolare in x. Così anche

$$\frac{1}{|S|}\int_S f(y)dy \to f(x) \quad q.d.$$

Dimostrazione. Se $S \subseteq Q$, abbiamo

$$\int_S |f(y)-f(x)|dy \leq \int_Q |f(y)-f(x)|dy.$$

Quindi se $\{S\}$ è regolare in x e Q è il più piccolo cubo di centro x contenente S, allora

$$\int_S |f(y)-f(x)|dy \leq \frac{|Q|}{|S|}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|dy \leq$$

$$\leq k\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|dy.$$

Se x è un punto di Lebesgue di f l'ultima espressione tende a 0, da cui segue il teorema. □

Osservazione 20. In particolare per funzioni di una singola variabile otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy = f(x) \quad q.d.$$

Capitolo 3

Derivata debole e assoluta continuità

3.1 La derivata debole

Teorema 3.1.1. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se f è assolutamente continua, allora f è derivabile in senso debole con $Df = f'$, ove con Df indichiamo la derivata debole.*

Dimostrazione. Poichè f è assolutamente continua risulta:

1. $\exists f'(x)$ q.d. in $[a, b]$
2. $f' \in L^1([a, b])$ e $f(x) = f(a) + \int_a^x f(t)dt$ q.d. in $[a, b]$

Sia ora $\varphi \in C_0^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$. Si ha

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b \left(f(a) + \int_a^x f'(t)dt\right)\varphi'(x)dx =$$

$$= f(a)\int_a^b \varphi'(x)dx + \int_a^b \left(\int_a^x f'(t)dt\right)\varphi'(x)dx =$$

$\big(\varphi$ è a supporto compatto nell'aperto $]a, b[$ e $0 \le t \le x \le b\big)$

$$= 0 + \int_a^b f'(t)\left(\int_t^b \varphi'(x)dx\right)dt = -\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt.$$

Quindi

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(]a, b[).$$

Questo prova che f è derivabile in senso debole e che $Df = f'$ □

Teorema 3.1.2. *Sia $f \in L^1([a,b])$ e sia $g \in L^1([a,b])$ tale che $Df = g$. Allora f è assolutamente continua e $f' = g$ q.d. in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Per ipotesi risulta

$$\int_a^b f\varphi' dx = -\int_a^b g\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(]a,b[). \tag{3.1}$$

Siano $x, y \in]a,b[$ punti di Lebesgue di f tali che $x \leq y$. Sia $h \in \mathbb{R}$,$h \geq 0$ e tale che $a < x - h$,$y + h < b$. Sia poi φ_h la funzione il cui grafico è quello in figura

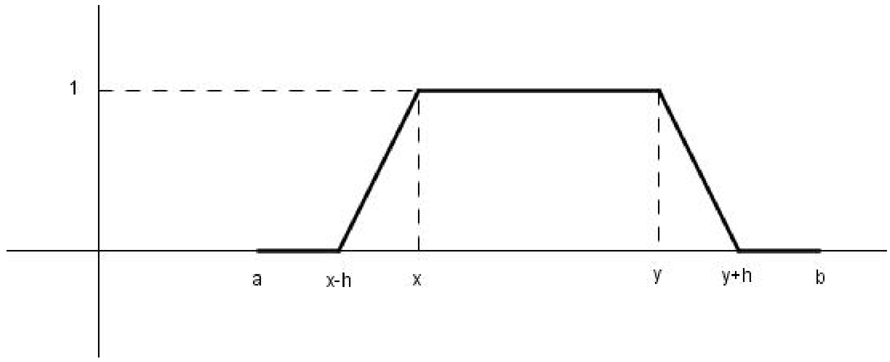

Figura 3.1: grafico di φ_h

Da 3.1 segue

$$\int_a^b f\varphi_h' dt = -\int_a^b g\varphi_h dt$$

e quindi

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^x f(t)dt - \frac{y}{h}\int_y^{y+h} f(f)dt = -\int_a^b g\varphi_h dt$$

per $h \to 0$ si ottiene

$$f(x) - f(y) = \int_x^y g(t)dt.$$

Questo prova l'assunto. □

Appendice A

Richiami

A.1 Teorema di Convergenza dominata di Lebesgue

Sia (f_k) *una successione di funzioni sommabili convergenti a* f*, supponiamo esista* g *sommabile tale che* $|f_k| \leq g$ *per ogni* k*, allora*

$$f \in \mathcal{L}(A), \text{e} \int_A f d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_A f_k d\mu$$

A.2 Lemma di Fatou

Sia (f_k) *una successione di funzioni, siano* $f_k : A \to \mathbb{R}$*, misurabili e non negative, allora*

$$\liminf_{k \to \infty} \int_A f_k d\mu \geq \int_A \liminf_{k \to \infty} f_k d\mu$$

Bibliografia

[1] Primo Corso di Analisi Matematica / Bruno Pini - Bologna : Cooperativa Libraria Universitaria, 1973. - 621 p. : ill. ; 26 cm

[2] Terzo Corso di Analisi Matematica / Bruno Pini - Bologna : Cooperativa libraria universitaria editrice. - v. ; 24 cm.

[3] Measure and integral : an introduction to real analysis / Richard L. Wheeden, Antoni Zygmund. - New York ; Basel : M. Dekker, c1977. - X, 274 p. ; 24 cm.