Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

INTEGRALE DI RIEMANN-STIELTJES E APPLICAZIONI A PROCESSI STOCASTICI DI POISSON

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Matteo Giorgetti

II Sessione
2009-2010

Indice

Introduzione

All'interno di questa tesi parliamo dell'integrale di Riemann-Stieltjes e delle sue applicazioni a processi stocastici di Poisson.
Nel primo capitolo introduciamo il concetto di funzione a variazione limitata.Tale nozione servirà per definire l'integrale di Riemann-Stieltjes e, in generale, per capire meglio gli argomenti ed esempi trattati successivamente.
Nella prima parte del secondo capitolo introduciamo l'integrale di Riemann-Stiltjes e le sue principali propietà.In un particolare caso vediamo come possiamo generalizzare tale integrale al caso di funzioni continue da sinistra.
Nella seconda parte del capitolo parliamo della formula di Itô e della sua estensione al caso di funzioni càdlàg.Tali risultati verranno poi utilizzati per ricavare la formule di integrazione per parti generalizzate al caso di funzioni continue,rispettivamente càdlàg,a variazione limitata.
Nel terzo capitolo parliamo dei processi di Poisson e delle loro principali caratteristiche,introducendo il concetto di compensated Poisson process.
Nell'ultimo capitolo vediamo delle applicazioni dell'integrale di Riemann-Stieltjes e Lebesgue-Stieltjes a processi di Poisson.In particolare,cercheremo di capire il legame tra la continuità della strategia di investimento ed il significato matematico-finanziario del suo guadagno,rappresentato dall'integrale di Riemann o Lebesgue-Stieltjes.

Capitolo 1

Funzioni a variazione limitata

Definizione 1.1. Dato un intervallo reale $[a,b]$ consideriamo una applicazione g:$[a,b] \to \mathbb{R}$ e una partizione $\sigma = \{t_0, .., t_n\}$ di $[a,b]$.La variazione di g relativa a σ è definita da:

$$V_{[a,b]}(g,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

Diciamo che la funzione g ha variazione limitata su $[a,b]$ (scriviamo g$\in$ BV($[a,b]$)) se l'estremo superiore della variazione di g al variare di tutte le partizioni σ di $[a,b]$ è finito, cioè se:

$$V_{[a,b]}(g) := \underset{\sigma}{sup}\, V_{[a,b]}(g,\sigma) < +\infty$$

Osservazione 1. Se considero due funzioni f,g $\in$ BV($[a,b]$) ed uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ allora:

(i) f+g $\in$ BV($[a,b]$)

(ii) $\alpha \in$ BV($[a,b]$)

Da ciò segue che l'insieme delle funzioni a variazione limitata sull'intervallo $[a,b]$ è uno spazio vettoriale.

Esempio 1.1. 1. Una applicazione g: $[a,b] \to \mathbb{R}$ monotona è a variazione limitata su $[a,b]$.Infatti, data una qualsiasi partizione $\sigma = \{t_0, .., t_n\}$ di

$[a, b]$ e supponendo g crescente, si ha:

$$V_{[a,b]}(g, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} (g(t_k) - g(t_{k-1})) = g(b) - g(a)$$

e quindi $V_{[a,b]}(g) = g(b) - g(a)$

2. Se g è Lipschitziana esiste una costante C tale che:

$$|g(t) - g(s)| \leq C|t - s|, \quad t, s \in [a, b]$$

ma allora g$\in$ BV([a,b]),infatti:

$$V_{[a,b]}(g, \sigma) = \sum_{k=1}^{N} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq C \sum_{k=1}^{N} |(t_k) - (t_{k-1})| = C(b - a)$$

e quindi:

$$V_{[a,b]}(g) \leq C(b - a)$$

Osservazione 2. Geometricamente, la variazione $V_{[a,b]}(g, \sigma)$ di una funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ rappresenta la lunghezza della spezzata di estremi $g(t_k)$ con $k = 0, .., N$.

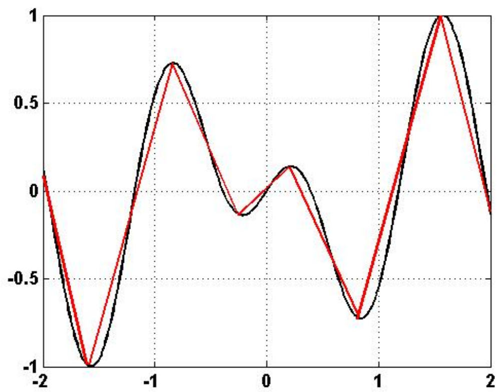

Figura 1.1: Approssimazione di una curva continua con una spezzata

Intuitivamente, se g è continua allora $V_{[a,b]}(g, \sigma)$ approssima,al tendere di $|\sigma|$ a zero,la lunghezza della curva. In altre parole,g ha variazione limitata se ha lunghezza finita approssimabile con spezzate.

Proposizione 1.0.1. *Una funzione reale ha variazione limitata se e solo se è differenza di funzioni monotone crescenti*

Dimostrazione. Premesse alla dimostrazione:

- è possibile dimostrare che se f:$[a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata su $[a,b]$, preso c$\in]a,b[$ allora:

$$V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$$

- la funzione $x \to V_{[a,x]}(f)$ è crescente, infatti se $a \leq x < y \leq b$ si ha:

$$V_{[a,y]}(f) = V_{[a,x]}(f) + V_{[x,y]}(f) \geq V_{[a,x]}(f)$$

Passiamo ora alla dimostrazione:
$\Leftarrow$)Poichè una funzione monotona è a variazione limitata e $BV([a,b])$ è uno spazio vettoriale, allora la differenza di due funzioni crescenti è a variazione limitata.
$\Rightarrow$)Pongo $f_1(x) := V_{[a,x]}(f)$ con x$\in$ (a,b) e $f_2(x) := V_{[a,x]}(f) - f(x)$.Risulta che $f_1(x)$ è crescente (vedi premessa),ma anche $f_2(x)$ lo è.Infatti, se considero due punti x,y con $x < y$ si ha:

$$f_2(y) - f_2(x) = V_{[x,y]}(f) - (f(y) - f(x))$$

ma in generale risulta: $|f(y) - f(x)| \leq V_{[x,y]}(f)$, quindi $f_2(y) - f_2(x) > 0$. Ponendo $f = f_1 - f_2$ ho la rappresentazione di f come differenza di funzioni crescenti. □

Teorema 1.0.2. *Sia f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile.*

Dimostrazione. Supponiamo f monotona crescente e sia E l'insieme dei punti di discontinuità di f.Sia x$\in$E, allora $f(x^-) < f(x+)$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ $\exists$ $r(x) \in \mathbb{Q}$ tale che:

$$f(x^-) < r(x) < f(x+)$$

Quindi se considero $x_1, x_2 \in$ E con $x_1 < x_2$,allora $\exists\ r(x_1)$ e $r(x_2) \in \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x_1^-) < r(x_1) < f(x_1^+), f(x_2^-) < r(x_2) < f(x_2^+)$$

Ne segue $r(x_1) \neq r(x_2)$ e quindi ho stabilito una corrispondenza biunivoca tra E e un sottoinsieme dei numeri razionali. $\square$

Dai precedenti risultati segue immediatamente la seguente proposizione:

Proposizione 1.0.3. *Sia f :$[a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata sull'intervallo $[a, b]$. Allora l'insieme dei punti di discontinuità di f è al piu numerabile.*

Capitolo 2

Integrale di Riemann-Stieltjes e formula di Itô

In questo capitolo parliamo dell'integrale di Riemann-Stieltjes,della formula di Itô e della sua generalizzazione al caso di funzioni càdlàg.In particolare faremo vedere che,in certi casi,l'integrale di Riemann-Stieltjes è ben definito anche se considero funzioni continue da sinistra.

Definizione 2.1 (Somme di Riemann-Stieltjes)**.** Dato un intervallo reale $[a, b]$ indichiamo con

$$P_{[a,b]} = \{\sigma = (t_0, .., t_N) : a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b\}$$

$$T_\sigma = \{\tau = (\tau_1, .., \tau_N) : \tau_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, ..., N\}$$

rispettivamente la famiglia delle partizioni di $[a, b]$ e la famiglia delle scelte di punti relative alla partizione σ. Date due funzioni reali f e g definite su $[a, b]$, si definisce somma di Riemann-Stieljes di f relativamente a g, alla partizione σ e alla scelta di punti $\tau \in T_\sigma$ la seguente somma:

$$\sum_{k=1}^{N} f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) := S(f, g, \sigma, \tau)$$

Vale il seguente teorema:

Teorema 2.0.4. *Si considerino una funzione $u \in C([a,b])$ e una funzione $g \in BV([a,b])$.Sia $|\sigma| := \max_{1\leq k\leq N} |t_k - t_{k-1}|$,allora esiste*

$$\lim_{|\sigma|\to\ 0} S(u,g,\sigma,\tau) =: \int_a^b u(t)dg(t) \tag{2.1}$$

Ossia, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$|\int_a^b u(t)dg(t) - S(u,g,\sigma,\tau)| < \epsilon \tag{2.2}$$

per ogni $\sigma \in P_{[a,b]}$ tale che $|\sigma| < \delta$ e per ogni $\tau \in T_\sigma$. La (2.1) definisce l'integrale di Riemann-Stieljes di u relativamente a g.

Dimostrazione. Per provare l'esistenza del limite utilizzo il criterio di Cauchy cioè provo che $\forall\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$|S(u,g,\sigma',\tau') - S(u,g,\sigma'',\tau'')| < \epsilon$$

per ogni $\sigma', \sigma'' \in P_{[a,b]}$ tale che $|\sigma'|, |\sigma''| < \delta$, per ogni $\tau' \in T_{\sigma'}$ e per ogni $\tau'' \in T_{\sigma''}$. Fisso $\epsilon > 0$, poichè $u \in C([a,b])$,dal teorema di Heine-Kantor segue che u è uniformemente continua su $[a,b]$, cioè $\forall\epsilon' > 0\ \exists\ \delta' > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ con $|x_1 - x_2| < \delta'$,vale $|u(x_1) - u(x_2)| < \epsilon'$.Sia $\epsilon' = V_{[a,b]}(g)\epsilon$, se pongo $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ e scelgo $|\sigma'|$e $|\sigma''|$ abbastanza piccoli si ha:

$$|S(u,g,\sigma',\tau') - S(u,g,\sigma'',\tau'')| \leq \epsilon' \sum_{k=1}^{n} |(g(t_k) - g(t_{k-1})) \leq \epsilon' V_{[a,b]}(g) = \epsilon$$

Ciò prova il teorema. □

Osservazione 3. Nelle condizioni precedenti se $g \in C^1([a,b])$ risulta:

$$\int_a^b u(t)dg(t) = \int_a^b u(t)g'(t)dt \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Poichè $g \in C^1([a,b])$ allora $g \in C^1([t_k, t_{k-1}])$ $\forall k = 1, .., n$.Dal teorema del valor medio di Lagrange,per ognuno di questi sottointervalli $\exists\tau_k \in]t_k, t_{k-1}[$:

$$g'(\tau_k) = \frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$$

Ma allora:

$$S(u,g,\sigma,\tau) = \sum_{k=1}^{n} u(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u(\tau_k)g'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) = S(ug', id, \sigma, \tau)$$

La (1.2) segue passando al limite per $|\sigma| \to 0$. □

L'integrale di Riemann-Stieltjes gode delle seguente propietà:

Proposizione 2.0.5. *Siano $u, v \in C([a,b])$, $f, g \in BV([a,b])$ e $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Allora valgono:*

(i)

$$\int_a^b (u\lambda + v)d(f + g\mu) = \lambda \int_a^b udf + \lambda\mu \int_a^b udg + \int_a^b vdf + \mu \int_a^b vdg$$

(ii) se $u \leq v$ e g monotona crescente allora

$$\int_a^b udg \leq \int_a^b vdg$$

(iii)

$$|\int_a^b udg| \leq max|u|V_{[a,b]}(g)$$

(iv) per $c \in]a,b[$ vale:

$$\int_a^b udg = \int_a^c udg + \int_c^b udg$$

2.1 Esempi

Esempio 2.1. Calcoliamo l'integrale di Riemann-Stieltjes:

$$\int_0^t u(s)dS(s)$$

dove u è generica funzione continua e $S(t) = 1_{[T_1,\infty[}(t)$ dove $T_1 > 0$.Sia $\sigma = \{t_0, .., t_N\}$ una partizione dell'intervallo $[0,t]$ e sia $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Osserviamo che:

- nel caso in cui $t < T_1$ allora le somme di Riemann-Stieltjes

$$S(u, S, \sigma, \tau) = 0$$

perchè l'applicazione $S(s) = 0$ su $[0, t]$. Ne segue:

$$\int_0^t u(s) dS(s) = 0$$

- Se invece $t > T_1$ si ha:

$$\sum_{k=1}^{N} u(\tau_k)(S(t_k) - S(t_{k-1})) = u(\tau_k) \tag{2.4}$$

dove τ_k e $T_1 \in [t_{k-1}, t_k]$,con $|u(\tau_k) - T_1| < |\sigma|$.
Di conseguenza,passando al limite per $|\sigma| \to 0$,la somma di Riemann-Stieltjes converge a $u(T_1)$.L'integrale di Riemann-Stiltjes è quindi ben definito, indipendente dalla partizione e dalla scelta di τ_k.

In conclusione:

$$\int_0^t u(s) dS(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq T_1 \\ u(T_1) & \text{se } t \geq T_1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Osservazione 4. Esaminiamo la convergenza delle somme di Riemann-Stieltjes nel caso in cui u sia discontinua.Consideriamo il caso in cui $T_1 \in \sigma$; se $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k = T_1[$ si ha:

$$\sum_{k=1}^{N} u(\tau_k)(S(t_k) - S(t_{k-1})) = u(\tau_k) \longrightarrow u(T_1-) \tag{2.6}$$

al tendere a zero del parametro di finezza $|\sigma|$.
Se $\tau_k = T_1$, (2.6) tende a $u(T_1)$,ma allora *l'integrale di Riemann-Stieltjes è ben definito(e indipendente dalla scelta di τ_k^n) se e solo se u è continua da sinistra.*

2.2 Integrale di Lebesgue-Stieltjes

E' possibile estendere l'integrale (2.5) a funzioni discontine nel senso di Lebesgue-Stieltjes utilizzando il seguente teorema:

Teorema 2.2.1. *(Teorema di estensione di Carathéodory) Sia S un insieme,*Σ_0 *un'algebra su S (vedi* (A.1)*) e sia*

$$\Sigma := \sigma(\Sigma_0)$$

Se $\mu_0 : \Sigma_0 \to [0, \infty]$ *è una misura su (S,*Σ_0*) allora esiste una misura* μ *su (S,*Σ*) tale che:*

$$\mu = \mu_0 \quad su \quad \Sigma_0$$

Se $\mu_0(S) < \infty$ *tale estensione è unica.*

Sia g una funzione crescente,definiamo:

$$\mu_g(]a, b[) = g(b-) - g(a+), \qquad a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

Utilizzando il teorema di Carathéodory,possiamo estendere μ_g ad una misura su $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ chiamata misura di Lebesgue-Stieltjes indotta da g.Nel caso in cui $g(t) = t$ troviamo la misura di Lebesgue,mentre se $g = S$ dell'esempio precedente,troviamo la delta di Dirac centrata in T_1.In tal caso poniamo $\mu_s = \delta_{T_1}$ Per ogni funzione deterministica u,l'integrale di Lebesgue-Stieltjes è dato da:

$$\int_{[0,t]} u(s)dS(s) = \int_{[0,t]} u(s)\delta_{T_1}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq T_1 \\ u(T_1) & \text{se } t \geq T_1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Nel caso in cui u è continua,l'integrale di Lebesgue-Stieltjes coincide con l'integrale di Riemann-Stieltjes.

2.3 Formula di Itô

Proviamo ora un risultato fondamentale del calcolo stocastico il quale estende i risultati classici riguardanti il concetto di primitiva e il suo ruolo nel calcolo dell'integrale di Riemann.

Teorema 2.3.1 (Formula di Itô). *Siano $F \in C^1([a,b] \times \mathbb{R})$ e $g \in BV \cap C([a,b])$,allora vale:*

$$F(b, g(b)) - F(a, g(a)) = \int_a^b (\partial_t F)(t, g(t))dt + \int_a^b (\partial_g F)(t, g(t))dg(t) \quad (2.8)$$

Dimostrazione. Se considero una qualsiasi partizione σ dell'intervallo $[a, b]$, vale:

$$F(b, g(b)) - F(a, g(a)) = \sum_{k=1}^{N} F(t_k, g(t_k)) - F(t_{k-1}, g(t_{k-1})) =$$

(uso il fatto che g è continua e applico il teorema del valor medio)

$$= \sum_{k=1}^{N} \partial_t F(t'_k, g(t''_k))(t_k - t_{k-1}) - \partial_g F(t'_k, g(t''_k))(g(t_k) - g(t_{k-1}))$$

Passando al limite per $|\sigma|$ che tende a zero ottengo la tesi. □

Esempio 2.2. (1) Nel caso in cui $F(t, g) = g$, applicando la (1.4) si ha:

$$g(b) - g(a) = \int_a^b dg(t)$$

e quindi, nel caso in cui g$\in C^1$,ritroviamo il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt$$

(2) Se $F(t, g) = f(t)g$ si ha:

$$f(b)g(g) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)dg(t)$$

che estende la formula di integrazione per parti al caso g $\in BV \cap C([a, b])$.

(3) La formula di Itô permette inoltre il calcolo esplicito di alcuni integrali.Ad esempio,se considero $F(t, g) = g^2$ ottengo

$$\int_a^b g(t)dg(t) = \frac{1}{2}(g^2(b) - g^2(a))$$

2.3.1 Estensione della formula di Itô

Ora vediamo una estensione della formula di Ito al caso in cui g sia una funzione a variazione limitata e càdlàg,ossia continua da destra con limite sinistro finito.

Teorema 2.3.2 (Estensione della formula di Itô). *Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e X una funzione càdlàg a variazione limitata.Allora si ha:*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \sum_{0<s\leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s) \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Iniziamo col mostrare che la serie in (2.9) converge. Poichè X ha variazione limitata $\Rightarrow$ la serie ha un insieme numerabile di termini (vedi proposizione 1.0.3) e $\underset{s\in[0,t]}{sup} |X_s| =: ||X||_\infty < \infty$.

$$\sum_{0\leq s<t} |f(X_s) - f(X_{s-}) - \Delta X_s f'(X_{s-})| \leq \sum_{0\leq s<t} |f(X_s) - f(X_{s-})| + |\Delta X_s f'(X_{s-})| \tag{2.10}$$

Poichè $f \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in C^1([X_{s-}, X_s])$ ma allora,dal teorema del valor medio di Lagrange, $\exists\ \xi \in (X_{s-}, X_s)$ tale che:

$$f'(\xi) = \frac{f(X_s) - f(X_{s-})}{\Delta X_s}$$

Ne segue che:

$$(2.10) \leq 2 \underset{y\leq||X||_\infty}{sup} |f'(y)| \sum_{0\leq s<t} |\Delta X_s| \leq 2 \underset{y\leq||X||_\infty}{sup} |f'(y)| V_{[0,t]}(x) < \infty \tag{2.11}$$

Seconda parte della dimostrazione:
Consideriamo il caso in cui X ha un solo punto di discontinuità t. Poniamo $X'_s = X_{s-}$, $X'_0 = X_0$ e $X'_s = X'_{s-}$ se $s < t$,mentre $X'_t = X_t - \Delta X_t$ dove $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.Cosi facendo si ha che $X' \in$ BV $\cap$ C($[0,t]$) $\Rightarrow$ uso la formula standard di Itô e trovo:

$$f(X'_t) - f(X'_0) = \int_0^t f'(X'_s)dX'_s \tag{2.12}$$

Per ogni partizione σ dell'intervallo $[0,t]$ e per ogni scelta di punti τ con $\tau_k \in [t_k, t_{k-1}]$ si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} f'(X'_{\tau_k})(X'_{t_k} - X'_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n-1} f'(X'_{\tau_k})(X'_{t_k} - X'_{t_{k-1}}) + f'(X'_{\tau_k})(X'_t - X'_{t_{n-1}}) \tag{2.13}$$

Ma $X'_t = X_t - \Delta X_t$,ne segue:

$$(2.13) = \sum_{k=1}^{n-1} f'(X'_{\tau_k})(X'_{t_k} - X'_{t_{k-1}}) + f'(X'_{\tau_n})(X_t - \Delta X_t - X'_{t_{n-1}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f'(X'_{\tau_k})(X'_{t_k} - X'_{t_{k-1}}) + f'(X'_{\tau_k})(X_t - X'_{t_{n-1}}) - f'(X'_{\tau_n})\Delta X_t =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f'(X'_{\tau_k})(X'_{t_k} - X'_{t_{k-1}}) - f'(X'_{\tau_k})\Delta X_t$$

Quest'ultima espressione,per $|\sigma| \to 0$, tende a:

$$\int_0^t f'(X'_s)dX(s) - f'(X'_t)\Delta X_t = \int_0^t f'(X_{s-})dX(s) - f'(X_{t-})\Delta X_t$$

In conclusione:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_{s-})dX(s) + f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-})\Delta X_t \tag{2.14}$$

che era ciò che volevo dimostrare.
Il caso generale puo essere provato utilizzato un argomento di limite combinato alla stima (2.11). □

Osservazione 5. Se considero come f l'applicazione $F \in C^1([a,b]\times\mathbb{R})$,procedendo esattamente come nella seconda parte della dimostrazione del teorema precedente, utilizzando però la formula di Itô classica (2.8),possiamo riscrivere la (2.9) in questo modo:

$$F(t,X_t) - F(0,X_0) = \int_0^t (\partial_t F)(s,X_{s-})ds + \int_0^t (\partial_X F)(s,X_{s-})dX(s)+$$

$$+ \sum_{0<s\leq t} (F(s,X_s) - F(s,X_{s-}) - \partial_X F(s,X_{s-})\Delta X(s))$$

Riportandola alle notazioni della (2.8) troviamo:

$$F(b,g(b)) - F(a,g(a)) = \int_a^b (\partial_t F)(t,g(t-))dt + \int_a^b (\partial_g F)(t,g(t-))dg(t)+$$

$$+\sum_{0<s\leq t} (F(s,g(s)) - F(s,g(s-)) - \partial_g F(s,g(s-))\Delta g(s)) \qquad (2.15)$$

dove,in questo caso,la g è una funzione càdlàg a variazione limitata sull'intervallo [a,b].

Esempio 2.3. 1. Se considero F(t,g(t))=f(t)g, trovo la seguente relazione:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(t)g(t-)dt + \int_a^b f(t)dg(t)+$$

$$+\sum_{0<s\leq t} (f(s)g(s) - f(s)g(s-) - f(s)(g(s) - g(s-))$$

che estende la formula di integrazione per parti al caso in cui g è una càdlàg a variazione limitata.

2. Utilizzo la (2.14) nel caso in cui $f = x^2$ e la X è la seguente funzione:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ e^{-t} & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \qquad (2.16)$$

Si ha:

$$e^{-2} - 1 = 2\int_0^1 X_{s-}dX(s) + e^{-2} - 1 - 2(e^{-1})$$

Da cui:

$$e^{-1} = \int_0^1 X_{s-}dX(s)$$

Capitolo 3

Processi di Poisson

I processi di Poisson costituiscono un esempio fondamentale di processi stocastici con salto.Per arrivare alla definizione,consideriamo una successione $(\tau_n)_{n\geq 1}$ di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$ (A.4.1),scriviamo:

$$(\tau_n) \sim Exp_\lambda, \quad n \geq 1$$

Consideriamo un modello i cui salti accadono in maniera casuale dove τ_n denota l'intervallo di tempo tra l'n-esimo salto e il precedente.Ne segue che il primo salto si ha all'istante τ_1,il secondo avviene τ_2 unità di tempo dopo τ_1 e cosi via. Per ogni n$\in \mathbb{N}$,poniamo:

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} \tau_k \tag{3.1}$$

T_n rappresenta quindi il tempo dell'n-esimo salto.Si ha che:

$$E[T_n - T_{n-1}] = E[\tau_n] = \frac{1}{\lambda}, \quad n \in \mathbb{N}$$

in quanto τ_n ha distribuzione esponenziale di parametro λ.La precedente relazione mi dice che $\frac{1}{\lambda}$ è la distanza media tra due salti successivi,oppure può essere interpretata dicendo che mi aspetto λ salti in un intervallo di tempo unitario;per tale ragione λ si dice parametro di intensità.

Lemma 3.0.3. *Per ogni n,la variabile T_n ha densità di probabilità:*

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} 1_{\mathbb{R}\geq 0}(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Per induzione su n: se $n = 1$ $f_{T_1}(t) = f_{\tau_1}(t)\lambda t e^{-\lambda t}$,ma questo è vero perchè τ_1 ha distribuzione esponenziale di parametro λ. Ora supponendola vera per n,la dimostriamo per n+1.Dall'indipendenza dei $\{\tau_n\}$ segue:

$$f_{T_{n+1}}(t) = f_{T_n+\tau_{n+1}}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{T_n}(s) f_{\tau_{n+1}}(t-s)ds =$$

$$= \int_0^{\infty} t\lambda e^{-s\lambda} \frac{(s\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda(t-s)} 1_{t-s>0} = \frac{\lambda^{n+1} e^{-t\lambda}}{(n-1)!} \int_0^t s^{n-1} ds$$

Da cui segue la tesi. □

Definizione 3.1. (Processo di Poisson) Il Processo di Poisson con intensità λ è il processo

$$N_t = \sum_{n\geq 1} n 1_{[T_n, T_{n+1}[}(t), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{3.3}$$

dove T_n è definito da (3.1).

Il processo N_t conta quindi il numero di salti che avvengono fino all'istante t (N_t non può quindi assumere valori negativi).

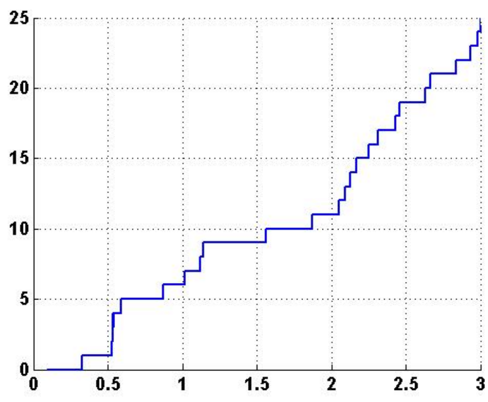

Figura 3.1: Processo di Poisson di intensità $\lambda = 10$

Dalla (3.1) segue immediatamente che le traiettorie $t \to N_t(\omega)$ sono funzioni continue da destra con limite sinistro finito: N è quindi un processo càdlàg.

Proposizione 3.0.4. *Sia* $(N_t)_{t\geq 0}$ *un processo di Poisson di intensità* λ. *Allora:*

1. *per ogni* $t \geq 0$,N_t *ha distribuzione:*
$$P(N_t = n) = e^{(-\lambda t)}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$
e,in particolare
$$E[N_t] = \lambda t, \qquad var(N_t) = \lambda t$$

2. *N ha incrementi indipendenti,cioè per ogni* $0 \leq t_1 < .. < t_n$, *le variabili aleatorie* $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, .., N_{t_N} - N_{t_{N-1}}$ *sono indipendenti*

3. *N ha incrementi stazionari,cioè*
$$N_t - N_s = N_{t-s}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il punto 1:
$$P(t \geq T_{n+1}) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{(n)!} =$$
Integro per parti:
$$= -\big[e^{(-\lambda s)}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\big]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} =$$
$$= -e^{(-\lambda t)}\frac{(\lambda t)^n}{n!} + P(t \geq T_n)$$
In conclusione:
$$P(N_t = n) = P(t \geq T_n) - P(t \geq T_{n+1}) = e^{(-\lambda t)}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
□

Osservazione 6. Dalla precedente proposizione segue che:
$$E[N_{t+1} - N_t] = E[N_1] = \sum_{n\geq 1} nP(N_1 = n) = e^{-\lambda}\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \lambda \qquad (3.4)$$
che conferma il fatto,gia visto in precedenza,che λ rappresenta il numero di salti che mi aspetto in un intervallo di tempo unitario.

3.1 Compensated Poisson Process

Osservazione 7. Sia (F_t) la filtrazione generata da un processo di Poisson N.Utilizzando le propietà dell'attesa condizionata (A.2.2) e l'indipendenza degli incrementi del processo di Poisson si ha,per ogni $t > s \geq 0$:

$$E[N_t|F_s] = E[N_t - N_s + N_s|F_s] = E[N_t - N_s|F_s] + E[N_s|F_s] =$$

$$= E[N_t - N_s] + N_s = \lambda(t - s) + N_s \tag{3.5}$$

Come conseguenza della (3.5) si ha:

$$E[N_T - \lambda t|F_s] = \lambda(t - s) + N_s - \lambda t = N(s) - \lambda s \tag{3.6}$$

cioè il processo $N_t - \lambda t$ è una martingala (A.5);tale processo viene chiamato compensated poisson process.La seguente figura ne mostra un esempio:

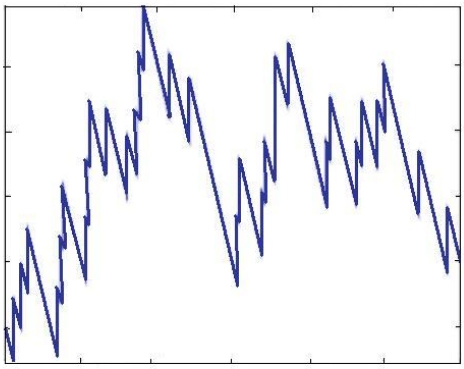

Figura 3.2: Esempio di compensated poisson process

Capitolo 4

Applicazioni

Ora vediamo delle applicazioni dell'integrale di Riemann-Stieltjes a processi stocastici di Poisson.
Consideriamo un processo stocastico $(S_t)_{t\geq 0}$, così definito:

$$S_t = \lambda t - N_t$$

con N processo di Poisson di intensità λ.Poichè -S è un compensated Poisson process allora S è una martingala. Intuitivamente S è un investimento che da,in media,guadagno zero.Infatti gli incrementi dati dal fattore λt sono compensati dalle perdite date da $-N_t$ che rappresentano l'indice di rischio.Matematicamente ciò è espresso dalla seguente relazione:

$$E[S_t] = E[\lambda t - N_t] = \lambda t - [N_t] = 0$$

Indichiamo con T_n i tempi dei salti del processo S e consideriamo la strategia di investimento:

$$u_t = 1_{[0,T_1]}(t) \tag{4.1}$$

che consiste nel comprare il titolo a tempo $t = 0$,a prezzo zero,per poi venderla al tempo del primo salto T_1.Osserviamo che u è una applicazione continua da sinistra,quindi l'integrale di Riemann-Stieltjes di u rispetto ad S è ben definito.[1]Sia:

$$G_t := \int_0^t u_s dS_s$$

Consideriamo una generica partizione $\sigma = \{t_0, .., t_N\}$ dell'intervallo $[0, t]$ e $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$.Se $t < T_1$

$$\sum_{k=1}^{n} u_{\tau_k}(S_{t_k} - S_{t_{k-1}}) = S_t - S_0$$

Se $t > T_1$ vado incontro a due possibilità:
T_1 apparterrà ad un certo intervallo,sia $T_1 \in [t_{k-1}, t_k]$.Allora:

1. se $\tau_k \in]T_1, t_k]$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} u_{\tau_k}(S_{t_k} - S_{t_{k-1}}) = S_{t_{k-1}} - S_0$$

2. se $\tau_k \in [t_{k-1}, T_1]$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} u_{\tau_k}(S_{t_k} - S_{t_{k-1}}) = S_{t_k} - S_0$$

In ogni caso $|t_h - T_1| < |\sigma|$ dove $h \in \{k-1, k\}$ e $|\sigma|$ è il parametro di finezza.Quindi

$$G_t = S_{t \wedge T_1} - S_0 = \lambda(t \wedge T_1) - N_{t \wedge T_1} = \lambda(t \wedge T_1) - 1_{\{t \geq T_1\}} \tag{4.2}$$

Poichè la u è continua da sinistra,l'integrale di Lebesgue-Stieltjes coincide con quello di Riemann-Stieltjes.
G rappresenta il guadagno della stratedia u,precisamente il primo termine di (4.2) rappresenta il guadagno dato dall'incremento positivo λt,mentre il secondo rappresenta la perdita data dai salti del processo di Poisson che avvengono in maniera casuale.Per tale motivo non sono possibili opportunità

[1]Nell'osservazione (4) avevamo visto che l'integrale di Riemann-Stieltjs di una generica funzione u rispetto ad $S^* = 1_{[T_1,\infty[}(t)$ è ben definito se e solo se u è continua da sinistra.In questo caso la S è una somma di funzioni del tipo S^*,quindi tale risultato continua a valere

di arbitraggio: matematicamente ciò è espresso dal fatto che G è una martingala.Utilizzando il teorema di optional sampling (A.5.2) e il fatto che S è una martingala,si ha infatti:

$$E[G_t - G_s|F(s)] = E[S_{t\wedge T_1} - S_{s\wedge T_1}|F(s)] = 0, \quad s \leq t$$

Osserviamo inoltre che,in questo caso,G gode di una propietà fondamentale:se il processo S_t è una martingala,allora il processo G, che rappresenta il guadagno della strategia u,è ancora una martingala.Tale risultato può essere generalizzato nel modo seguente:

Proposizione 4.0.1. *In uno spazio di probabilità con filtrazione* $(\Omega, F, P, (F_n))$ (*vedi* (A.1) *e* (A.9)),*consideriamo il processo stocastico* $S := (S_t)_{t\in[0,T]}$.
Se S *è una martingala allora,per ogni processo predicibile* ϕ (*ossia per ogni processo* ϕ F_{n-1} *misurabile per ogni* $n \geq 1$), $G_t := \int_0^t \phi dS$ *è ancora una martingala.*

Nel nostro caso,il processo predicibile ϕ è costituito dalla strategia d'investimento u che è continua da sinistra.Dal punto di vista finanziario,dire che la strategia è predicibile significa che si decide come investire in base alle informazioni che si hanno a quel momento.Quindi,in altri termini,considerare una strategia continua da sinistra equivale a dire che non siamo in grado di predirre i salti del processo di Poisson,cioè non siamo in grado di evitare il rischio di caduta del titolo.

Ora consideriamo la seguente strategia:

$$u_t = 1_{[0,T_1[}(t)$$

e sia S il processo definito precedentemente. La strategia u consiste nel comprare al tempo zero,a prezzo zero,il titolo per poi 'venderlo a destra' prima del salto.Osserviamo che,in questo caso,u è una funzione càdlàg e quindi l'integrale di Riemann-Stieltjes di u rispetto ad S è indefinito.Utilizziamo quindi l'integrale di Lebesgue-Stieltjes e otteniamo:

$$G_t := \int_{[0,t]} u_s dS_s = \lambda \int_{[0,t]} u_s ds - \int_{[0,t]} u_s dN_s =$$

$$= \lambda(t \wedge T_1) - \sum_{n \geq 1} u_{T_n} 1_{\{t \geq T_n\}} = \lambda(t \wedge T_1) \tag{4.3}$$

in quanto $u_{T_1} = 0$ perchè u è continua da destra.Ora il guadagno G_t è strettamente positivo per ogni $t > 0$: ciò significa che la u è una strategia d'arbitraggio e che G non è più una martingala.
Considerare quindi una strategia u continua da destra equivale a dire che siamo in grado di predirre i salti del processo di Poisson N e quindi possiamo evitare il rischio di caduta del titolo. Ne segue che u, da un punto di vista finanziario, non è una strategia accettabile. Perdendo inoltre la predicibilità della strategia, perdiamo anche la propietà fondamentale che se S_t è una martingala allora lo è anche il processo G_t.

Appendice A

Richiami su spazi di probabilità,valore atteso,processi stocastici e martingale

A.1 Spazi di probabilità

Definizione A.1. Uno spazio di probabilità è una terna (Ω,F,P) dove Ω è un insieme non vuoto,F è una σ-algebra e P è una misura di probabilità.
Una σ-algebra F è una famiglia di sottoinsiemi di Ω tali che:

1. $\Omega \in$ F
2. Se $A \in$ F $\Rightarrow A^c \in$ F,dove con A^c denotiamo l'insieme complementare di A.
3. Se (A_n) è una successione in F $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in F$

Se sostituiamo il punto 3 con il seguente:

3'. Se A,B $\in$ F $\Rightarrow A \cup B \in$F parliamo di algebra.

Esempio A.1. Se condideriamo il lancio di un dado a sei faccie:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (intuitivamente gli elementi di Ω rappresentano gli stati possibili), $F = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ è una σ-algebra.

Una misura di probabilità P è un'applicazione $P : F \to [0, 1]$ t.c:

1. $P(\emptyset) = 0$,$P(\Omega) = 1$
2. Se (A_n) è una successione disgiunta in F $\Rightarrow P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

Esempio A.2. Se $\Omega = \mathbb{R}$,con $\mathbb{B}$ indichiamo la σ-algebra di Borel che è la più piccola σ-algebra che contiene gli intervalli del tipo $]a, b[$.

Definizione A.2. Dato uno spazio di probabilità (Ω, F, P),una variabile aleatoria X è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $X^{-1}(H) \in$ F,$\forall H \in \mathbb{B}$.

Osservazione 8. $X^{-1}(H) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in H\} \Rightarrow$ Notazione:$P(X \in H) := P(X^{-1}(H))$

Definizione A.3. In uno spazio di probabilità (Ω, F, P) sia X una variabile aleatoria.Chiamo σ-algebra generata da X e la indico con $\sigma(X)$,la più piccola σ-algebra che contiene $X^{-1}(H)$, $H \in \mathbb{B}$ (cioè la piu piccola σ-algebra per cui X è variabile aleatoria).

Esempio A.3. Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ed $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria cosi definita:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se 2 divide } \omega \\ -1 & \text{se 2 non divide } \omega \end{cases}$$

Si ha:

$$X^{-1}(H) = \begin{cases} \emptyset & \text{se 1,-1} \notin \text{H} \\ \Omega & \text{se 1,-1} \in \text{H} \\ \{2, 4, 6\} & \text{se 1} \in \text{H,-1} \notin \text{H} \\ \{1, 3, 5\} & \text{se 1} \notin \text{H,-1} \in \text{H} \end{cases}$$

In conclusione: $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$.

Osservazione 9. In probabilità una σ-algebra viene interpretata come un insieme di informazioni della variabile X.

Osservazione 10. Dalla definizione seguono immediatamente:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y], \qquad E[aX] = aE[X]$$

dove a$\in \mathbb{R}$.

Definizione A.4. In (Ω, F, P) diciamo che:

(i) A,B$\in$ F sono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(ii) $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ σ-algebre di Ω sono indipendenti se $\forall A \in \mathcal{G}$ e $\forall B \in \mathcal{H}$, A e B sono indipendenti

(iii) X,Y variabili aleatorie sono indipendenti se lo sono $\sigma(X)$ e $\sigma(Y)$

A.2 Valore atteso e attesa condizionata

Definizione A.5. Consideriamo una variabile aleatoria X su (Ω, F, P) tale che $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$.Allora $X = \sum_{k=1}^{n} x_k 1_{A_k}$ dove $A_k = X^{-1}(\{x_k\})$. Si chiama valore atteso di X:

$$E[X] := \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k) \tag{A.1}$$

Proposizione A.2.1. *Se X, Y sono variabili aleatorie indipendenti si ha:*

$$E[XY] = E[X]E[Y] \tag{A.2}$$

Dimostrazione. Basta considerare il caso in cui $X = 1_A$,$Y = 1_B$, A,B$\in$ F. Infatti,in generale,X e Y sono somma di funzioni indicatrici e poichè il valore atteso è lineare,se dimostro la tesi in questo particolare caso posso subito generalizzare.
Poichè X,Y indipendenti$\Rightarrow$ A,B indipendenti,ne segue:

$$E[XY] = E[1_A 1_B] = E[1_{A \cap B}] = P(A \cap B) = P(A)P(B) = E[X]E[Y]$$

$\square$

Osservazione 11. Se X,Y sono variabili aleatorie indipendenti e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni misurabili,allora f$\circ$ X e g$\circ$ Y sono variabili aleatorie indipendenti.

Definizione A.6. Chiamo varianza di X:

$$var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Osservazione 12. Vale la seguente relazione:

$$var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y) \tag{A.3}$$

dove $cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
Osserviamo che: se X e Y sono indipendenti,anche $X - E[X]$ e $Y - E[Y]$ lo sono,infatti basta considerare l'applicazione $f(\xi) = \xi - E[\xi]$ e usare l'osservazione precedente.In questo caso:

$$cov(X, Y) = E[X - E[X]]E[Y - E[Y]] = 0$$

In conclusione,se X e Y sono indipendenti, si ha:

$$var(X + Y) = var(X) + var(Y) \tag{A.4}$$

Definizione A.7. In uno spazio di probabilità (Ω,F,P) consideriamo B$\in$ F con $P(B) > 0$.Definiamo:

1.
$$E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP \quad \in \mathbb{R}$$

2.
$$E[X|\sigma(B)](\omega) = \begin{cases} E[X|B] & \text{se } \omega \in B \\ E[X|B^c] & \text{se } \omega \in B^c \end{cases}$$

Osservazione 13. Z=$E[X|\sigma(B)]$ gode di due propietà:

(i) Z è $\sigma(B)$-misurabile, cioè $Z^{-1}(H) \in \sigma(B)$, $\forall H \in \mathbb{B}$.

(ii)

$$\int_G ZdP = \int_G XdP, \quad \forall G \in \sigma(B)$$

Inoltre se W è una variabile aleatoria che soddisfa i e ii allora W=Z.

Dimostrazione. (i) $Z^{-1}(H) \in${∅,Ω,B,B^c}$=\sigma(B)$,$\forall H \in \mathbb{B}$.

(ii) Consideriamo il caso in cui G=B:

$$\int_B ZdP = \int_B E[X|B]dP = \int_B (\frac{1}{P(B)} \int_B XdP)dP = \int_B XdP$$

in quanto $\int_B XdP \in \mathbb{R}$.

Ora dimostro l'unicità:siano W e Y variabili aleatorie che verificano i e ii.Allora si ha:

$$\int_G (Y - W)dP = 0, \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

Dal punto i segue che l'evento $\{Y > W\} \in \mathcal{G}$,ma allora

$$\int_{\{Y>W\}} (Y - W)dP \geq 0$$

tranne se $P(\{Y > W\}) = 0$. □

Definizione A.8. In uno spazio di probabilità (Ω,F,P) sia $\mathcal{G}$ una σ-algebra contenuta in F.Diciamo che $E[X|\mathcal{G}]$ è l'unica variabile aleatoria tale che:

1. è $\mathcal{G}$-misurabile.

2. $$\int_G XdP = \int_G E[X|\mathcal{G}], \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

D'ora in avanti ci limitiamo al caso in cui $\mathcal{G} = \sigma(Y)$,con Y variabile aleatoria.

Proposizione A.2.2. *Nelle condizioni precedenti,*$E[X|\mathcal{G}]$ *gode delle seguenti propietà:*

(i) Se X *è* $\mathcal{G} - mis \Rightarrow X = E[X|\mathcal{G}]$

(ii) *Se* $\sigma(X)$ *e* $\mathcal{G}$ *sono indipendenti* $\Rightarrow E[X] = E[X|\mathcal{G}]$

(iii) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$

(iv) $E[aX + Y|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}], a \in \mathbb{R}$

(v) *Se* Y *è* $\mathcal{G} - mis \Rightarrow E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$

(vi) *Se* $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$

(vii) *Se* Y *è indipendente da* X *e* $\mathcal{G} \Rightarrow E[XY|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]E[Y]$

A.3 Processi stocastici e martingale

Definizione A.9. Un processo stocastico è una successione $(X_n)_{n=0,..,N}$ dove $\forall$ n,$X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ è una variabile aleatoria su (Ω,F,P).Definiamo:

$$F_n^* := \sigma(X_0, .., X_n) \quad n = 0, .., N$$

Diciamo che $(F_n^*)_{n=0,..,N}$ è la filtrazione naturale per il processo $(X_n)_{n=0,..,N}$.
Osserviamo che $F_n^* \subseteq F_{n+1}^* \subseteq F$.
In generale, una famiglia crescente di sotto σ-algebre di F è detta filtrazione.

Definizione A.10. Un processo stocastico $(X_n)_{n\geq 0}$ si dice adattato alla filtrazione $(F_n)_{n\geq 0}$ se, $\forall n \geq 0$, X_n è F_n-mis. In altri termini, il processo si dice adattato se $F_n^* \subseteq F_n$ per ogni n.

Definizione A.11. In uno spazio di probabilità (Ω,F,P,(F_n)),dove (F_n) è una filtrazione, una martingala è un processo stocastico $(X_n)_{n\geq 0}$ tale che:

$$X_{n-1} = E[X_n|F_{n-1}], \quad \forall n \geq 1 \tag{A.5}$$

Osservazione 14. Osserviamo che:

1. $X := (X_n)_{n\geq 0}$ è adattato,cioèX_n è F_n-mis per ogni $n \geq 1$.

2. Dalla (A.5) segue che:

$$X_k = E[X_{k+1}|F_k] = E[E[X_{k+2}|F_{k+1}]|F_k] = E[X_{k+2}|F_k]$$

   Dopo un numero finito di passi si ha:

$$E[X_n|F_k] = X_k, \quad \forall k \leq n \tag{A.6}$$

3.

$$E[X_k] = E[E[X_n|F_k] = E[X_n] \quad \forall k \leq n$$

   ma allora $E[X_n]$ è costante indipendente da n: per tale motivo si dice che una martingala è un processo stocastico costante in media.
   Osserviamo inoltre che la definizione di martingala dipende dalla filtrazione e dalla misura di probabilità P.

Osservazione 15. Sia $X := (X_n)_{n\geq 0}$ un processo stocastico.Fissato $\omega \in \Omega$,il processo può essere visto come un'applicazione:

$$\phi : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}^d, \quad \phi(n) = X_n(\omega)$$

Tale funzione si dice traiettoria del processo X.

A.4 Cenni sulla variabili aleatorie continue

In uno spazio di probabilità (Ω,F,P) consideriamo una variabile aleatoria X.Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile,$\varphi \geq 0$ con:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$$

Diciamo che X ha densità φ se per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata vale:

$$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(y)dy$$

Osservazione 16. Se $f = 1_H$,$H \in \mathbb{B}$ si ha:

$$E[1_H(x)] = E[f(X)] = \int_H \varphi(x)dx$$

Ma $E[1_H] := P(X \in H)$,quindi:

$$P(X \in H) = \int_H \varphi(x)dx \tag{A.7}$$

A.4.1 Distribuzione esponenziale

Dato $\lambda > 0$,diciamo che una variabile aleatoria X ha distribuzione esponenziale di parametro λ se X ha densità:

$$\varphi_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x), \quad x \in R$$

Osserviamo che:

1. $$E[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \big[- x e^{-\lambda x} \big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

2. $$var(X) = E[(X - \frac{1}{\lambda})^2] = E[X^2] - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$= \big[- x^2 e^{-\lambda x} \big]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

A.5 Teorema di optional sampling

Definizione A.12. In uno spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, F, P, (F_n))$, un tempo di arresto è una variabile aleatoria $\nu : \Omega \to \{0, 1, .., N\}$ tale che $\{\nu = n\} = \{\omega \in \Omega, \nu(\omega) = n\} \in F_n$,$\forall n \geq 0$. Dato un processo stocastico $X = (X_n)$,si definisce il processo arrestato:

$$X_n^\nu(\omega) = X_{\nu \wedge n}(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{se } n \leq \nu(\omega) \\ X_{\nu(\omega)}(\omega) & \text{se } n > \nu(\omega) \end{cases} \tag{A.8}$$

Lemma A.5.1. *E' possibile dimostrare che: se X è un processo stocastico e ν un tempo d'arresto,allora valgono:*

1. *Se X è adattato$\Rightarrow X^\nu$ è adattato.*

2. *Se X è una martingala$\Rightarrow X^\nu$ è una martingala.*

Utilizzando questo risultato si dimostra il teorema di optional sampling:

Teorema A.5.2. *(Teorema di optional sampling) Sia X una martingala e ν un tempo d'arresto tale che n$\leq \nu \leq$ N.Allora:*

$$E[X^{\nu}|F_n] = X_n \tag{A.9}$$

Dimostrazione. $X_n = X_n^{\nu}$ perchè,per ipotesi,$n \leq \nu$.Inoltre,X_n^{ν} è una martingala e quindi:

$$X_n^{\nu} = E[X_N^{\nu}] = E[X^{\nu}|F_n]$$

□

Bibliografia

[1] Andrea Pascucci. Calcolo stocastico per la finanza. Springer,2008.

[2] Williams D.W. Probability with martingale. Cambridge University,1991

[3] P.Cannarsa, T.D'Aprile. Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale. Springer,2008

[4] R.Cont, P.Tankov. Financial modelling with jump processes. Chapman & hall/crc financial mathematics series.

Ringraziamenti

Giunto alla fine di questa tesi voglio ringraziare il prof.Pascucci per la disponibilità e pazienza che ha dimostrato e tutte le persone che mi sono state vicine in questi tre anni. In particolare,vorrei ringraziare noemi,lele,sara per avermi fatto trascorrere dei momenti indimenticabili in loro compagnia e per aver reso questi anni passati insieme bellissimi.Un ringraziamento di cuore va inoltre a davide,claudia e silvia per avermi aiutato a finire questo percorso di studi e per avere condiviso come me,nel bene e nel male,la passione per matematica. Ringrazio infine la mia famiglia per avermi appoggiato moralmente e finanziariamente in questi anni,con la speranza che continueranno a farlo.