Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

UNA PROSPETTIVA VARIAZIONALE SULLA CONTROLLABILITA'

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Angelo Favini

Presentata da:
Giovanni Rabitti

II Sessione
Anno Accademico 2009-2010

Indice

Introduzione **2**

1 Problema variazionale elementare classico **3**
1.1 Premessa 3
1.2 Problema integrale ordinario 4
1.3 Il problema del controllo ottimo 7

2 Approccio variazionale di Pedregal **13**
2.1 Lemma di Palais-Smale 14
2.2 Il caso di ODE 15
2.3 Il caso PDE 17

3 La situazione non lineare **21**
3.1 Applicazione al problema di Cauchy per ODE 24

Bibliografia **28**

Introduzione

Il nostro primo obiettivo é di descrivere la procedura di soluzione standard per una classe di problemi di controllo ottimo. Restringiamo le nostre considerazioni al caso in cui lo stato del sistema sia definito dal problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria di primo ordine. Una funzione a valori in un dato intervallo é il controllo. Un funzionale integrale rappresenta il criterio di ottimalitá. Verrá dedotta la condinezione necessaria per l'ottimalitá nella forma del principio del minimo.

Secondo scopo di questa tesi é presentare un nuovo approccio a problemi variazionali basato sulla minimizzazione di un adatto funzionale errore, che consente di misurare quanto é distante una funzione ammissibile dall'essere soluzione dell'equazione di stato. Questa nuova filosofia si basa sull'impostare condizioni al bordo, iniziali e finali, sulla classe di funzioni ammissibili, ed osservare quanto queste funzioni si discostino dall'essere una soluzione della legge di stato. Questa strategia porta a considerare una struttura analitica funzionale diversa da quella standard, ma permette di mostrare che il principio di unica continuazione ï¿½ equivalente all'esatta controllabilitá. Perció, il principio di unica continuazione puó essere interpretato come il fatto che i minimi locali del funzionale errore devono presentarsi ad errore zero.

Capitolo 1

Problema variazionale elementare classico

1.1 Premessa

Prima di tutto, un problema di controllo ottimo riguarda un modello matematico del processo in questione, che viene generalmente rappresentato da un'equazione o un sistema di equazioni nelle incognite *funzioni di stato*. Poiché il processo in questione viene supposto controllabile, l'equazione di stato deve includere un parametro chiamato *controllo*, appositamente definito. Nella pratica, la sc elta del controllo é generalmente dovuta a condizioni tecniche, tecnologiche o economiche. Per questa ragione, si presuppone che il controllo appartenga ad un insieme di controlli ammissibili U, regione di R^q. Scegliendo un controllo ammissibile, possiamo determinare il modo in cui il processo si svilupperá. Sia $J = J(x, u, t)$ il criterio di ottimalitá per il controllo scelto. Allora il problema di controllo consiste nel trovare un controllo $u \in U$ che minimizza il funzionale J su U.

Consideriamo un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad t \in (0, T),$$

con condizione iniziale

$$x(0) = x_0.$$

Qui $x = x(t)$ é la funzione di stato, $u = u(t)$ é il controllo, f é una funzione nota, x_0 é lo stato iniziale del sistema. Supponiamo che l'insieme dei controlli ammissibili sia

$$U = \{u | u_1 < u < u_2, t \in (0, T)\},$$

dove u_1 e u_2 sono valori conosciuti.

Risolvendo il problema di Cauchy per qualche valore u, possiamo determinare l'evoluzione del sistema, cioé la funzione del sistema di stato ad ogni istante.
La funzione integrale

$$J(u) = \int_0^T F(t, u(t))dt,$$

definita sulla classe di funzioni U, rappresenterá il criterio ottimale, dove F é una funzione nota. Introduciamo quindi il vincolo integrale dalla forma

$$J_\gamma(u) \leq 0 \quad (1 \leq \gamma \leq p), \tag{1.1}$$

dove

$$J_\gamma(u) = g_\gamma + \int_0^T F_\gamma(t, u(t))dt \qquad (\gamma = 1, ..., p),$$

e $g_1, ..., g_p$ sono costanti. In entrambi i casi la funzione u puó essere soggetta a vincoli dalla forma

$$\phi_\alpha(t, u(t)) \leq 0 \quad (1 \leq \alpha \leq m).$$

I risultati sono poi estesi a problemi che coinvolgono parametri. Questi risultati sono poi di una sufficiente generalitá per essere applicati a problemi di controllo ottimo, che sono lineari nelle variabili di stato.

1.2 Problema integrale ordinario

Consideriamo il problema di minimizzare il funzionale

$$J(u) = \int_0^T F(t, u(t))dt$$

sulla classe dei controlli ammissibili U.

Definiamo ora la regione $R_0 = (0, T) \times U$ di tutte le coppie $(t, u(t))$ dove le funzioni $u(t)$ sono continue a tratti sull'intervallo fissato $0 \leq t \leq T$ e gli elementi $(t, u(t))$ di R_0 hanno la proprietá che dato un punto $(\bar{t}, \bar{u})$ in R_0 c'é un arco continuo

$$\bar{u}_k(t) \qquad (\bar{t} - \epsilon \leq t \leq \bar{t} + \epsilon;\ k = 1, ..., q)$$

i cui elementi $(t, \bar{u}(t))$ stanno in R_0 con $\bar{u}_k(t) = \bar{u}_k$. La funzione F é supposta almeno continua su R_0.

Un insieme R_0 che gode delle proprietá appena descritte si chiama *insieme ammissibile*, ed i suoi elementi (t, u) si chiamano *elementi ammissibili.* Una funzione $u(t)$ con $(0 \leq T \leq T)$ sará detta *ammissibile* se gli elementi $(t, u(t))$ sono ammissibili. Un insieme aperto stellato é ammissibile. L'insieme dei punti (t, u) con t su un intervallo $t' \leq t \leq t''$ ed u su un insieme arbitrario in un u-spazio é ammissibile.

Teorema 1.2.1. *Una funzione $u_0(t)$, con $0 \leq t \leq T$ minimizza $J(u)$ nella classe U di funzioni ammissibili se e solo se la disuguaglianza*

$$F(t, u) \geq F(t, u_0(t)) \tag{1.2}$$

vale per ogni elemento (t, u) in R_0.

Supponiamo che u_0 minimizzi $J(u)$ in U. Allora $F(t, u_0(t))$ é una funzione continua in t su $0 \leq t \leq T$. Se R_0 é aperto e la derivata $F_t(t, u)$ esiste ed ï¿½ continua su R_0, allora

$$F(t, u_0(t)) = \int_0^t F_t(s, u_0(s))ds + c \tag{1.3}$$

su $0 \leq t \leq T$, dove c é costante.

La prima conclusione nel Teorema 1.2.1 ci dice che per minimizzare J sulla classe di funzioni ammissibili, minimizziamo per ogni t la funzione integranda $F(t, u)$ sulla classe di elementi ammissibili (t, u).

La seconda conclusione nel Terema 1.2.1 é una conseguenza del seguente

Teorema 1.2.2. *Sia $u_0(t)$ una funzione continua a tratti su $0 \leq t \leq T$ e sia R_δ la classe di tutti gli elementi (t, u) della forma $(t, u_0(t + h))$, dove*

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq t + h \leq T, \quad |h| < \delta \tag{1.4}$$

e δ é un numero positivo. Sia $F(t, u)$ una funzione continua su R_δ con derivata parziale $F_t(t, u)$ continua su R_δ. Se vale la disuguaglianza

$$F(t, u) \geq F(t, u_0(t)) \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{1.5}$$

per ogni (t, u) *in* R_δ*, allora l'equazione*

$$F(t, u_0(t)) = \int_0^t F_t(s, u_0(s))ds + c \tag{1.6}$$

vale per $0 \leq t \leq T$*, dove* c *é costante.*

Teorema 1.2.3. *Supponiamo che* u_0 *minimizzi* J_0 *sulla classe delle funzioni ammissibili* u *che soddisfano* (1.1)*. Allora esistono dei moltiplicatori* $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, ..., \lambda_p$ *non tutti nulli, tali che:*

(i) La disuguaglianza $\lambda_\gamma \geq 0$ *vale se* $J_\gamma(u_0) \leq 0$*; l'uguaglianza vale se* $J_\gamma(u_0) < 0$*;*

(ii) La funzione

$$F = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i F_i$$

é tale che la disuguaglianza

$$F(t, u) \geq F(t, u_0(t)) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

vale per ogni elemento ammissibile (t, u)*. Di piú, la funzione* F *é continua in* t *lungo* u_0*. Viceversa, se esistono dei moltiplicatori* $\lambda_0 > 0, \lambda_1, ..., \lambda_p$ *tali che verifichino* (*i*) *e* (*ii*)*, allora* u_0 *minimizza* J_0 *nella classe di funzioni ammissibili* u *che soddisfano* (1.1)

Questo teorema stabilisce che se u_0 é una soluzione del nostro problema, allora esistono moltiplicatori $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, ..., \lambda_p$ per cui u_0 ha minimo a

$$J = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i J_i$$

nella classe delle funzioni ammissibili. Viceversa, se questi moltiplicatori esistono con $\lambda_0 > 0$, possiamo supporre $\lambda_0 = 1$. Pertanto si ha $J(u_0) = J_0(u_0)$ e

$$J(u) = J_0(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i J_i(u) \geq J_0(u_0) = J(u_0).$$

Se (1.1) vale, abbiamo, da (*i*),

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i J_i \leq 0.$$

Di conseguenza,

$$J_0(u) \geq J_0(u_0)$$

soggetta alle condizioni (1.1). Questo prova l'ultima affermazione del teorema.

1.3 Il problema del controllo ottimo

Consideriamo un problema di controllo su un intervallo di tempo fissato, lineare sulle variabili di stato. A questo fine consideriamo un insieme di $n+q$ funzioni

$$(\ x_i(t),\ u_k(t)\ ) \qquad (0 \leq t \leq T;\ i = 1, ..., n,\ k = 1, ..., q).$$

Al fine di semplificare le notazioni, questo insieme di $n+q$ funzioni sará denotato con X. Le prime n componenti $x_i(t)$ sono chiamate *variabili di stato* e le ultime q componenti $u_k(t)$ hanno il nome di *variabili di controllo*. Introduciamo quindi la notazione vettoriale

$$(\ x(t),\ u(t)\ ) \qquad (0 \leq t \leq T).$$

Richiediamo che le funzioni $u(t)$ siano continue a tratti e che gli elementi $(t, u(t))$ appartengano ad un insieme ammissibile R_0. Le variabili di stato sono richieste continue e con derivate continue sull'intervallo $0 \leq t \leq T$. Se $x(t)$ e $u(t)$ hanno queste proprietá, allora $X(t) := (x(t), u(t))$ sará un *arco ammissibile*.
Supponiamo che sia dato un insieme di integrali

$$I_\rho(x) = g_\rho + \int_0^T (M_{\rho j}(t) x_i(t) + L_\rho(t, u(t)))dt \qquad (\rho = 0, 1, ..., p) \tag{1.7}$$

dove g_ρ sono costanti, $M_{\rho j}(t)$ sono continue su $0 \leq t \leq T$ e $L_\rho(t, u)$ sono continue sull'insieme ammissibile R_0. Inoltre sia dato un insieme di equazioni differenziali

$$\dot{x_i} = A_{ij}(t) x_j + f_i(t, u) \qquad (i, j = 1, ..., n), \tag{1.8}$$

dove $A_{ij}(t)$ sono continue su $0 \leq t \leq T$ e $f_i(t, u)$ sono continue su R_0.
Il problema é quindi trovare un arco che minimizza $I_0(x)$ tra gli archi ammissibili

$$X(t) = (\ x(t),\ u(t)\ ) \qquad (0 \leq t \leq T).$$

che soddisfano le equazioni differenziali (1.7) e le condizioni

$$x_i(0) = \alpha_i, \qquad x_i(T) = \beta_i, \tag{1.9}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{p'} I_\gamma(x) \leq 0, \qquad \sum_{\gamma=p'}^{p} I_\gamma(x) = 0. \tag{1.10}$$

Il problema viene generalmente affrontato nel modo seguente: per trovare un controllo $u(t)$ che trasferisce lo stato iniziale $x_i(0) = \alpha_i$ allo stato finale $x_i(T) = \beta_i$ lungo una traiettoria definita da (1.7) e soggetto alle relazioni (1.9) in modo da minimizzare $I_0(x)$. Il problema descritto qui puó essere trasformato in uno del tipo descritto nel paragrafo precedente. A questo fine osserviamo per prima cosa che se $q_{\rho j}(t)$ sono funzioni di classe C^1, allora

$$J_\rho(x) = I_\rho(x) + d_\rho + \int_0^T (\dot{q}_{\rho j} x_i + q_{\rho j} \dot{x}_i) dt \tag{1.11}$$

dove

$$d_\rho = q_{\rho j}(T)\beta_j - q_{\rho j}(0)\alpha_j$$

ha lo stesso valore di $I_\rho(x)$ se (1.9) vale. Se, poi, valgono (1.8), le J_ρ possono essere scritte nella forma

$$J_\rho(x) = g_\rho + d_\rho + \int_0^T (\overline{M}_{\rho j} x_i(t) + F_\rho(t,u)) dt,$$

dove

$$F_\rho(t,u) = L_\rho(t,u) - q_{\rho j}(t) f_j(t,u)$$

e

$$\overline{M}_{\rho j} = M_\rho - \dot{q}_{\rho j} - q_{\rho i} Aij.$$

Siano ora $q_{\rho j}(t)$ le soluzioni del sistema

$$M_{\rho j} = \dot{q}_{\rho j} + q_{\rho i} Aij, \quad q_{\rho j}(T) = 0.$$

Allora $\overline{M}_{\rho j} \equiv 0$, e

$$J_\rho(x) = g_\rho + d_\rho + \int_0^T F_\rho(t, u(t)) dt$$

é indipendente da x. Di conseguenza scriveremo $J_\rho(u)$ invece di $J_\rho(x)$. Si ottiene quindi $J_\rho(u) = I_\rho(x)$, ogniqualvolta che le condizioni (1.8) e (1.9) valgono. Pertanto il problema di controllo qui considerato resta inalterato se gli integrali I_ρ sono sostituiti

dagli integrali J_ρ definiti precedentemente.
Consideriamo ora la classe degli archi ammissibili C

$$X(t) = \ (\ x(t),\ u(t)\ ) \qquad (0 \le t \le T)$$

che soddisfano il seguente problema di Cauchy

$$\dot{x}_i = A_{ij}(t)x_j + f_i(t,u), \qquad x_i(0) = \alpha_i.$$

Siano $Z_{ij}(t)(i,j = 1,...,n)$ le soluzioni del sistema

$$\dot{Z}_{ij} + Z_{ih}A_{hj} = 0, \quad Z_{ij}(T) = \delta_{ij}$$

e poniamo

$$J_{p+i}(u) = g_{p+i} + \int_0^T F_{p+i}(t,u(t))dt,$$

dove

$$g_{p+i} = Z_{ij}(0)\alpha_i - Z_{ij}(T)\beta_j,$$

$$F_{p+i}(t,u) = Z_{ij}(t)f_j(t,u).$$

Se x sta in C, allora:

$$J_{p+i}(u) = g_{p+i} + \int_0^T Z_{ij}(\dot{x}_j - A_{jh}x_h)dt$$

$$= g_{p+i} + \int_0^T (Z_{ij}\dot{x}_j + \dot{Z}_{ih}x_h)dt$$

Quindi un controllo ammissibile

$$u(t) \in U \qquad (0 \le t \le T)$$

soddisfa le condizioni

$$J_{p+i}(u) = 0 \qquad (i = 1,...,n)$$

se e solo se la corrispondente soluzione del problema di Cauchy

$$x(t) \qquad 0 \le t \le T$$

verifica $x(T) = \beta$. Questo prova il seguente

Lemma 1.3.1. *L'arco ammissibile*

$$X_0 = \ (\ x_0(t),\ u_0(t)\ ) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

é una soluzione del problema di controllo descritto sopra se e solo se $u_0(t)$ minimizza J_0 nella classe delle funzioni ammissibili di controllo U con

$$J_\gamma(u) \leq 0 \quad (1 \leq \gamma \leq p'), \qquad J_\gamma(u) = 0 \quad (p' \leq \gamma \leq p+n).$$

Applicando il Teorema (1.2.3.) al problema definito qui, esistono moltiplicatori $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, ..., \lambda_{p+n}$ non tutti nulli, tali che la disuguaglianza

$$F(t,u) \geq F(t,u_0(t)) \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{1.12}$$

vale ogniqualvolta che (t,u) é ammissibile. Qui

$$F = \sum_{\sigma=0}^{p+n} \lambda_\sigma F_\sigma.$$

Di piú, $\sum_{\gamma=1}^{p'} \lambda_\gamma \geq 0$, con $\lambda_\gamma = 0$ se $J_\gamma(u_0) < 0$. Ponendo

$$p_i(t) = \lambda_\rho q_{\rho i}(t) - \lambda_{p+j} Z_{ji}(t) \qquad (i = 1, ..., n),$$

si vede da (1.11) che F si puó riscrivere

$$F = \sum_{\rho=1}^{p} \lambda_\rho L_\rho - \sum_{i=1}^{n} p_i f_i, \tag{1.13}$$

e che

$$\dot{p}_i + p_j A_{ji} = \lambda_\rho M_{\rho i}.$$

I risultati precedenti suggeriscono il seguente

Teorema 1.3.2. *Supponiamo che*

$$X_0(t) = \ (\ x_0(t),\ u_0(t)\ ) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

sia una soluzione del problema di controllo descritto all'inizio di questa sezione. Allora esiste una funzione $F(t,u)$ della forma (1.13) *tale che* (1.12) *vale per ogni elemento* *ammissibile (t,u) su $0 \le t \le T$. I moltiplicatori $\lambda_0 \ge 0$, λ_γ, $p_i(t)$ non si annullano contemporaneamente su $0 \le t \le T$. Inoltre, $\lambda_\gamma \ge 0$ $(1 \le \gamma \le p')$ con $\lambda_\gamma = 0$ se $I_\gamma(x_o) < 0$. Se esiste una costante $\delta > 0$ tale che $(t+h, u_0(t))$ é ammissibile ogni volta che $0 \le t \le T$, $0 \le t+h \le T$, $|h| \le \delta$ e se L_ρ, f_i hanno derivate parziali continue rispetto a t su R_0 allora*

$$F(t, u_0(t)) = \int_0^t \frac{dF}{dt}(s, u_0(s))ds + c,$$

dove c é costante.

Il risultato appena ottenuto puó essere riscritto in modo diverso. Per questo introduciamo la funzione Hamiltoniana

$$H(t,x,u,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i(A_{ji}x_i + f_i) - \sum_{\rho=1}^{p} \lambda_\rho(M_{\rho i}x_i + L_\rho). \tag{1.14}$$

Allora, da (1.13),

$$H(t,x,u,p(t)) = \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i(t)x_i - F(t,u).$$

Segue che

$$\dot{p}_i = -\frac{dH}{dx_i} = -p_jA_{ji} + \lambda_\rho M_{\rho i}.$$

In termini della funzione H, i risultati descritti nel Teorema (1.3.2) prendono la forma data dal seguente

Teorema 1.3.3. *Supponiamo che x_0 risolva il problema di controllo considerato qui. Allora esistono dei moltiplicatori $\lambda_0 \ge 0$, λ_γ, $p_i(t)$, non tutti nulli contemporaneamente, tali che se H é definita da (1.14) si ha*

$$\dot{x}_i = \frac{dH}{dp_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{dH}{dx_i}$$

lungo x_0 con $p_i = p_i(t)$. Inoltre, la disuguaglianza

$$H(t, x_0(t), u, p(t)) \le H(t, x_0(t), u_0(t), p(t))$$

vale per tutti gli insiemi ammissibili (t, u) *con* t *in* $0 \leq t \leq T$. *Di piú,* $\lambda_\gamma \geq 0 (1 \leq \gamma \leq p')$ *con* $\lambda_\gamma = 0$ *se* $I_\gamma < 0$. *Se esiste una costante* $\delta > 0$ *tale che* $(t + h, u_0)$ *é ammissibile ogniqualvolta che* $0 \leq t \leq T$, $0 \leq t + h \leq T$, $|h| \leq \delta$ *e se* H *ha derivata parziale* $\frac{dH}{dt}$ *continua rispetto a* t*, allora*

$$H = \int_0^t \frac{dH}{dt} ds + costante$$

lungo x_0 *con* $p_i = p_i(t)$. *Se* R_0 *é aperto e* H *possiede derivate continue parziali rispetto a* u_k*, allora*

$$\frac{dH}{du_k}(t, x_0(t), u, p(t)) = 0 \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Il principio enunciato nel Teorema (1.3.3) é il principio del minimo di Pontryagin.

Capitolo 2

Approccio variazionale di Pedregal

Come abbiamo visto nella prima parte, quando si é interessati a problemi di controllo, si lavora sempre con le soluzioni dell'equazione di stato, richiedendo in qualche modo che una di esse raggiunga lo stato finale del sistema. Questo punto di vista differisce sostanzialmente: non verrá applicata la legge di stato dall'inizio, ma si imporranno le condizioni iniziali, al bordo e finali, e fra tutti i campi conformi con tutte queste, ne cercheremo una che é soluzione dell'equazione di stato. Per ogni funzione che soddisfa i vincoli $(iniziali, albordoefinali)$, definiamo un funzionale errore creato apposta per misurare la distanza di una tale funzione dall'essere soluzione dell'equazione di stato. La soluzione del problema di controllo sará quindi equivalente a minimizzare l'errore e mostrare che si annulla in certe funzioni ammissibili. Da questo punto di vista, il problema di controllo si trasforma in un problema di ottimizzazione.
A causa della natura di questo approccio, la scelta dell'ambiente analitico funzionale é cruciale. Pertanto, i risultati finali differiranno dai risultati classici sulla controllabilitá precedentemente esposti, essenzialmente a causa della natura dell'approccio e delle sue richieste sullo spazio funzionale. Piú specificatamente, le classi ammissibili richiedono per costruire il funzionale errore:

- una conveniente norma integrale sul dominio Lipschitz $Q = (0,T) \times \Omega \subset \mathbf{R}^{N+1}$;
- le tracce delle funzioni ed eventualmente alcune derivate temporali devono essere definite su adeguate porzioni del bordo

$$\partial Q = \{0\} \times \Omega \ \cup \ \{T\} \times \Omega \ \cup \ (0,T) \times \partial\Omega$$

.

Verranno trattate tre situazioni lineari classiche:

1. Un problema lineare controllato da un ordinario sistema differenziale:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad in\ (0,T), \qquad X(0) = x_0$$

dove x: $(0,T) \to \mathbf{R}^N$, A é una matrice $N \times N$, e B una matrice $N \times m$ (possibilmente che dipenda dal tempo). Si deve trovare un controllo u: $(0,T) \to \mathbf{R}^m$ tale che porti il sistema a $x(T) = x_T$, per una desiderabile condizione finale x_T

2. Un problema controllato dall'equazione lineare del calore:

$$u_t(t,x) = div[A(x)\nabla u(t,x)] \qquad in\ Q$$

,

$$u(t,x) = 0 \quad in\ (0,T) \times \Gamma_0, \qquad u(0,x) = u_0(x) \quad in\ \Omega$$

dove un controllo definito sulla parte del bordo $(0,T) \times \Gamma_1$ deve condurre il sistema a $u(T,x) = u_T(x)$. Qui $\partial\Omega$ é l'unione disgiunta di Γ_0 e Γ_1.

3. Un problema controllato dall'equazione lineare delle onde:

$$u_{tt}(t,x) = div[A(x)\nabla u(t,x)] \qquad in\ Q,$$

$$u(t,x) = 0 \quad in\ (0,T) \times \Gamma_0, \qquad u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x) \quad in\ \Omega,$$

dove un controllo definito definito sulla parte del bordo $(0,T) \times \Gamma_1$ deve condurre il sistema a $u(T,x) = U_0(x)$, $u_t(T,x) = U_1(x)$.

2.1 Lemma di Palais-Smale

Il seguente lemma é fatto su misura per quello che abbiamo in mente di fare.

Lemma 2.1.1. *Sia E: $B \to \boldsymbol{R}$ un funzionale definito su uno spazio di Banach riflessivo B tale che*

(i) E é limitato inferiormente: $E(x) \geq M$ per un $M \in \boldsymbol{R}$.

(ii) E é debolmente inferiormente semicontinuo:

$$E(x) \leq \liminf_{j\to\infty} E(x_j) \qquad per \quad x_j \longrightarrow x$$

.

(iii) E é quasi coercivo in senso che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni successione x_j con $||x_j|| \to \infty$, possiamo sempre trovare y_j con $||y_j|| \leq C$ e $E(y_j) \leq E(x_j)$ per ogni j.

allora esiste almeno un minimizzante per E.

Lo stesso risultato vale se il funzionale é definito per x in un sottospazio chiuso e affine di B.

2.2 Il caso di ODE

Consideriamo il problema di controllo

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad in\ (0,T), \qquad x(0) = x_0$$

dove

x: $(0,T) \to \mathbf{R}^N$, A é una matrice $N \times N$, e B una matrice $N \times m$ e u: $(0,T) \to \mathbf{R}^m$, x é lo stato e u il controllo. per semplicitá, consideriamo il caso in cui A e B sono matrici costanti. Dato x_T, vogliamo sapere se si puó trovare un controllo u tale che la soluzione del problema a valore iniziale soddisfi $x(T) = x_T$. Supponiamo che π sia la proiezione ortogonale sul sottospazio $Im(B)^\perp$. Quindi l'esistenza di un tale controllo u é equivalente a trovare lo stato x tale che

$$\pi(x' - Ax) = 0 \quad in\ (0,T), \qquad X(0) = x_0, x(T) = x_T.$$

Ora definiamo la funzione residuo come $y(t) = \pi(x'(t) - Ax(t))$: essa appartiene a $L^2(0,T)$, pertanto ha senso considerare l'integrale

$$E(x) = \int_0^T \frac{1}{2}|y(t)|^2 dt$$

come una misura della distanza di x dall'essere soluzione dell'equazione di stato. Nella diretta riformulazione, x sará soluzione del problema di controllo se e solo se l'estremo inferiore m del problema variazionale:

$$\text{minimizzare } x \in \Lambda : \qquad E(x) = \int_0^T \frac{1}{2}|\pi(x'(t) - Ax(t))|^2 dt$$

, é un minimo e si annulla, dove l'insieme delle classi ammissibili Λ é dato da

$$\Lambda = \{x \in H^1(0,T) : x(0) = x_0, x(T) = x_T\} = \bar{x} + H_0^1(0,T),$$

dove $\bar{x}$ é un campo concreto in A, per esempio

$$\bar{x}(t) = x_0 + \frac{t}{T}(x_T - x_0)$$

. Si noti che il funzionale errore $E(x)$ non é coercivo in H_0^1 perché la proiezione π é singolare. Non possiamo usare il metodo diretto a causa dell'assenza di coercivitá. Possiamo comunque mostrare l'esistenza di minimizzanti applicando direttamente il lemma: pertanto, preso un arbitrario $x \in H_0^1(0,T)$ si ha ottiene $r \in R$ che le funzioni reali

$$g(r) = E(\bar{x} + rx) = E(\bar{x}) + r^2 E(x) + r \int_0^T \pi(\bar{x}' - A\bar{x}) \cdot \pi(x' - Ax)dt$$

sono sempre parabole degeneri, ma é sempre vero che

$$g(0) \leq \lim_{|r|\to\infty} g(r)$$

, poiché queste parabole possono solo degenerare in una linea orizzontale. Concludiamo dunque grazie al lemma che esistono minimizzanti per il problema sopra.
Il passo successivo consiste nel mostrare che sotto certe condizioni vale $m = 0$, approfittando di condizioni ottimali. Pertanto, calcoliamo la derivata $E'(x)$: se $X = -E'(x)$ é una derivata, allora $X \in \Lambda_0 = H_0^1(0,T)$ e

$$[X'(t) + \pi^\top \pi(x'(t) - Ax(t))]' + A^\top \pi^\top \pi(x'(t) - Ax(t)) = X(t) \quad in(0,T)$$

. Questa é soluzione del problema variazionale:

$$\text{minimizzare } X \in H_0^1(0,T): \qquad \int_0^T [\frac{1}{2}(|X'|^2 + |X|^2) + \pi(x' - Ax) \cdot \pi(X' - AX)]^2 dt$$

. Si noti che il calcolo di questa derivata é piú complicato che porre solamente

$$X(t) = [\pi(x'(t) - Ax(t))]' + A^\top \pi(x'(t) - Ax(t))$$

a causa della regolaritá di $X \in \Lambda_0 = H_0^1(0,T)$, che deve essere assicurata. Siccome $\pi^\top = \pi$ e $\pi^2 = \pi$, allora la legge differenziaqle scritta sopra diventa:

$$[X'(t) + \pi(x'(t) - Ax(t))]' + A^\top \pi(x'(t) - Ax(t)) = X(t) \quad in(0,T).$$

Supponiamo $E'(x) = 0$ in modo da ottenere, posto $X \equiv 0$

$$[\pi(x'(t) - Ax(t))]' + A^\top \pi(x'(t) - Ax(t)) = 0 \quad in(0,T).$$

Se poniamo $y = \pi(x' - Ax)$, allora $y' + A^\top y = 0$, cosi che

$$y(t) = e^{-A^\top t} y_0,$$

per qualche fisso vettore y_0. Sia Id_N la matrice identitá di dimensione N. Poiché vale $(Id_N - \pi)\pi = 0$, e

$$y(t) = e^{-A^\top t} y_0 = \pi(x'(t) - Ax(t)),$$

concludiamo che

$$(Id_N - \pi)e^{-A^\top t} y_0 \equiv 0 \quad in\ (0, T).$$

Questa identitá vale se e solo se il rango della matrice

$$((Id_N - \pi)|(Id_N - \pi)A^\top|(Id_N - \pi)(A^\top)^2|...|(Id_N - \pi)(A^\top)^{N-1})$$

é N, quando $y_0 = 0$. In questo caso $y(t) = 0$ e x é una soluzione del problema di controllabilitá

$$\pi(x'(t) - Ax(t)) = 0 \quad in\ (0, T), \qquad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

Se esprimiamo questa condizione sul rango in termini della forma iniziale del problema, notiamo che é equivalente a

$$rank(B^\top|B^\top A^\top|B^\top(A^\top)^2|...|B^\top(A^\top)^{N-1}) = N,$$

che é la tipica condizione (cfr. [3]) per la controllabilitá del problema iniziale a tempo positivo T con condizione iniziale e finale x_0 e x_T.

2.3 Il caso PDE

Introduciamo ora il problema di controllabilitá per l'equazione del calore. Le funzioni $u(t, x)$ della classe ammissibile Λ devono soddisfare:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(T, x) = u_T(x) \quad in\ \Omega, \qquad u(t, x) = 0 \quad in\ (0, T) \times \Gamma_0.$$

Poiché il controllo su $(0, T) \times \Gamma_1$ sará ottenuto da una restrizione, abbiamo bisogno che Λ appartenga ad una classe di funzioni in $Q = (0, T) \times \Omega$ con tracce ben definite su ∂Q. Inoltre, per misurare gli errori e le derivate degli errori, sono necessarie norme integrali su tutto Q. La scelta piú semplice per soddisfare tutte queste richieste é prendere Λ come sottinsieme di $H^1(Q)$. Poiché Λ non é vuoto, bisogna imporre condizioni di regolaritá ai dati iniziali e finali: precisamente, deve esistere un campo $U \in H^{\frac{1}{2}}(\partial Q)$.
Per definire il funzionale errore $E\ \ \Lambda \to R^+$, ci avvantaggerá la struttura dell'equazione di stato. Dati $t \in (0, T)$ e $u \in \Lambda$, bisogna determinare $v(t, \cdot)$ risolvendo il problema

$$u_t(t, \cdot) = div[A(x)\nabla u(t, \cdot) + \nabla v(t, \cdot)] \quad in\Omega, \quad v(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega).$$

Si noti che questo 'funzionale errore' $v(t,\dot{})$ appartiene a $L^2((0,T);H_0^1)$. Definiamo

$$E(u) = \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v(t,x)|^2 dxdt.$$

Come prima, se m é un estremo inferiore dell'errore su Λ, allora bisogna affrontare due questioni: provare che l'estremo inferiore é un minimo e, attraverso l'ottimalitá, trovare le condizioni che assicurano che un tale minimo si annulli. Il lemma si rivelerá utile anche in questa situazione.
Infine, introduciamo brevemente la situazione dell'equazione delle onde. In questo caso, le funzioni ammissibili $u(t,x)$ in Λ devono verificare

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad u(T,x) = U_0(x), \quad u_t(T,x) = U_1(x) \quad in\ \Omega,$$

in aggiunta a

$$u(t,x) = 0 \quad in\ (0,T) \times \Gamma_0.$$

Di nuovo, il controllo su $(0,T) \times \Gamma_1$ sará determinato dalla restrizione di un'appropriata funzione di Λ, cosi che le funzioni in Λ devono avere restrizioni ben definite sul bordo di Q, ma pure u_t ristretto a $\{0\} \times \Omega$ e a $\{T\} \times \Omega$ deve essere ben definito. Questo ci porta a considerare lo spazio di Hilbert

$$H = H^{2,1}_{t,x}((0,T) \times \Omega)$$

delle funzioni con due derivate temporali (deboli) e un gradiente di spazio (debole). La norma integrale é data da

$$||u||_H^2 = \int_0^T \int_\Omega [u_{tt}(t,x)^2 + u_t(t,x)^2 + |\nabla u(t,x)|^2 + u(t,x)^2] dxdt.$$

Come sopra, il funzionale errore $v(t,x)$ é definito per $t \in (0,T)$ attraverso

$$u_{tt}(t,\cdot) = div[A(x)\nabla u(t,\cdot) + \nabla v(t,\cdot)] \quad in\ \Omega, \quad v(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega).$$

Di nuovo $v \in L^2((0,T);H_0^1)$ e prendiamo

$$E(u) = \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v(t,x)|^2 dxdt.$$

Per sottolineare i vantaggi maggiori del nostro approccio variazionale, focalizziamo l'attenzione su una situazione generale , a piú dimensioni e a problema non omogeneo (i coefficienti A dipendono da$x$).
Sia $\Omega \in R^N$ un dominio regolare di R^N il cui bordo é unione disgiunta $\partial Q = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Sia $T > 0$ dato e consideriamo il problema di controllabilitá esatta di trovare $w(t, x)$ per $(t, x) \in (0, T) \times \Gamma_1$ cosi che la soluzione del problema soddisfi

$$u_t = div[A(x)\nabla u] \qquad in\ (0, T) \times \Omega,$$

$$u(0, t) = u_0(x) \qquad in\ \Omega,$$

$$u(t, x) = 0 \quad in (0, T) \times \Gamma_0, \qquad u(t, x) = w(t, x) \qquad in\ (0, t) \times \Gamma_1$$

con $u(t, x) = U_0(x)$ in Ω, dove U_0 é uno dato stato finale desiderabile. Per quanto riguarda il campo a valori matriciali $A : \Omega \to M_{N\times N}$, assumiamo solamente le ipotesi di limitatezza e di coercivitá:

$$c|\lambda|^2 \leq \lambda^\top A\lambda \leq C|\lambda|^2, \qquad 0 < c < C,$$

oltre alla simmetria di $A^\top = A$.
Si consideri la classe Λ di funzioni $u \in H^1((0, T) \times \Omega)$ con

$$u(o, t) = u_0(x), \quad u(T, x) = U_0(x) \qquad in\ \Omega,$$

$$u(t, x) = 0 \quad in\ (0, T) \times \Gamma_0.$$

e si consideri l'insieme delle variazioni ammissibili $U \in H^1((0, T) \times \Omega)$ tali che

$$U(0, t) = U(T, x) = 0 \quad in\ \Omega,$$

$$U(t, x) = 0 \quad in\ (0, T) \times \Gamma_0.$$

Assumiamo che u_0 e U_0 siano tali che Λ non sia vuoto in modo tale che esiste un $\bar{u} \in \Lambda$.
Per $u \in \Lambda$, risolviamo il problema per $v \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$

$$u_t = div[A(x)\nabla u + \nabla v] \qquad in\ \Omega,$$

per $t \in (0, T)$ e poniamo

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |\nabla v(t, x)|^2 dxdt.$$

Calcoliamo la derivata $U = -E'(u)$: é immediato trovare

$$(U_t - v)_t + div[\nabla U - A\nabla v] = U \qquad in\ (0, T) \times \Omega$$

$$U(0, x) = U(T, x) = 0 \qquad in\ \Omega,$$

$$U(t, x) = 0 \qquad in\ (0, T) \times \Gamma_0, \qquad \frac{\partial U}{\partial n}(t, x) = n^\top A\nabla v \qquad in\ (0, T) \times \Gamma_1.$$

Grazie al lemma che sopperisce alla mancanza di coercivitá, si arriva immediatamente al seguente

Teorema 2.3.1. *Sia $T > 0$ e sia dato $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$. Il problema di controllabilitá per l'equazione del calore ha soluzione se e solo se l'unica funzione $v(t,x)$ soluzione debole di*

$$v_t = div[A(x)\nabla v] \qquad in\ (0,T) \times \Omega,$$

$$v(t,x) = 0 \qquad in\ (0,T) \times \Omega \setminus \Gamma_1, \qquad n^\top A \nabla v = 0 \quad in\ (0,T) \times \Gamma_1$$

é la funzione triviale $v \equiv 0$.

In modo simile si mostra il caso per l'equazione delle onde. Esaminiamo il problema di trovare un controllo $v(t,x)$ per $t \in (0,T) \times \Gamma_1$, in modo tale che la soluzione del problema

$$u_{tt} = div[A(x)\nabla u] \qquad in\ (0,T) \times \Omega,$$

$$u(0,t) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x)\ in\ \Omega,$$

$$u(t,x) = 0 \quad in (0,T) \times \Gamma_0, \qquad u(t,x) = v(t,x) \qquad in\ (0,t) \times \Gamma_1$$

soddisfi $u(T,x) = U_0(x),\ u_t(T,x) = U_1(x)$ in Ω.

Teorema 2.3.2. *Sia $T > 0$ e sia dato $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$. Il problema di controllabilitá per l'equazione delle onde ha soluzione se e solo se l'unica funzione $v(t,x)$ tale che*

$$v_{tt} = div[A(x)\nabla v] \qquad in\ (0,T) \times \Omega,$$

$$v(t,x) = 0 \qquad in\ (0,T) \times \Omega \setminus \Gamma_1, \qquad n^\top A \nabla v = 0 \quad in\ (0,T) \times \Gamma_1$$

in senso debole é la funzione triviale $v \equiv 0$.

Capitolo 3

La situazione non lineare

Come illustrazione della versatilitá dell'approccio di Pedregal per trattare alcune situazioni non lineari, verranno mostrati alcuni risultati relativi ad un problema non lineare controllato da un'equazione differenziale ordinaria.
Supponiamo di voler trovare una soluzione del problema di controllabilitá

$$F(x(t), x'(t)) = 0 \qquad in\ (0, T), \qquad x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T.$$

La funzione $F(x, z) : R^N \times R^N \to R^N$ viene supposta liscia per cominciare e avente un grande insiemi di zeri

$$Z = (x, z) \in R^N \times R^N : \ F(x, z) = 0.$$

In particolare, la derivata di F rispetto a t é singolare molto spesso. Il nostro approccio variazionale si concentra sul problema di ottimizzazione

$$\text{minimizzarein } x : \qquad E(x) = \int_0^T \frac{1}{2} |F(x(t), x'(t))|^2 dt$$

soggetto a

$$x \in W_{1,1}(0, T), \qquad x(0) = x_0, \ x(T) = x_T.$$

L'obiettivo é quello di provare che esistono minimizzanti per questo problema variazionale, e che il minimo valore effettivamente si annulla. Questo é equivalente a risolvere il problema di controllabilitá. La strategia é basata su due questioni che sono state precedentemente indicate:

- l'esistenza dei minimizzanti richiede coercivitá o in senso classico o in un contesto dove si puó applicare il lemma.

- dopo aver dimostrato l'esistenza, l'ottimalitá dei minimizzanti locali x sono soluzione del problema di controll abilitá perché hanno errore $E(x) = 0$.

Nello specifico richiediamo che

(1) F sia liscia

(2) F sia coerciva: esistono costanti $C > 0, M_1, M_0$ tali che

$$|F(x, z)| \geq C|z| - M_1|x| - M_0.$$

(3) F sia convessa: $|F(x, z)|^2$ é convessa in 0 per ogni $x \in R^N$.

(4) Proprietá di unica continuazione: l'unica soluzione del problema

$$-\frac{d}{dt}(F(x(t), x'(t))F_z(x(t), x'(t))) + F(x(t), x'(t))F_x(x(t), x'(t)) \quad in\ (0, T).$$

con $x(0) = x_0$ e $x(T) = x_T$ sono tali che $F(x(t), x'(t)) \equiv 0$ in $(0, T)$.

Proposizione 3.0.3. *Sotto le precenti ipotesi su F, il problema di controllabilitá posto all'inizio di questa sezione ha soluzione.*

Dimostrazione. Sia $x \in W^{1,1}(0, T)$ a valori in R^N tale che $E(x)$ sia convergente. Dal limite inferiore di F, e per un arbitrario $t \in (0, T)$, si ha

$$|x(t) - x(0)| \leq int_0^t|x'(s)|ds \leq \frac{1}{C}\int_0^T |F(x(s), x'(s))|ds + \frac{M_1}{C}\int_0^t |x(s)|ds + \frac{M_0}{C}t$$

Ancora di piú,

$$|x(t) - x_0| \leq \frac{\sqrt{T}}{C}E(x) + \frac{M_1}{C}\int_0^t |x(s)|ds + \frac{M_0}{C}T.$$

Dal lemma di Gronwall, si conclude che

$$|x(t)| \leq [|x_0| + \frac{M_0}{C}T + \frac{\sqrt{T}}{C}E(x)]e^{\frac{M_1 T}{C}},$$

per ogni t. In particolare, questo fornisce un limite per x_T cosi che il problema di controllabilitá é risolvibile. Se si riconduce questa espressione al limite inferiore su F, si conclude che esiste una costante D con

$$\int_0^T |x'(s)|^2 ds \leq \frac{D}{C^2}[E(x) + \int_0^T |x(s)|^2 ds + TM_0^2].$$

Pertanto, $x \in H^1((0,T); R^N)$. Inoltre, se $\{x_j\}$ é minimizzante, allora esiste un limite debole $x \in H^1((0,T); R^N)$ che é ammissibile, cioé $x(0) = x_0, x(T) = x_T$. Per la convessitá di F, si conclude che questo limite x é un minimizzante per l'errore $E(x)$.
Questo minimizzante x deve essere una soluzione del corrispondente sistema di Eulero-Lagrange. Per il principio di unica continuazione, si ottiene che necessariamente $F(x, x') \equiv 0$ e x é soluzione del problema di controllabilitá. $\square$

Proposizione 3.0.4. *Oltre alle ipotesi precedenti, assumiamo*

(1) si abbiano i limiti superiori

$$|F(x,z)F_z(x,z)| \le C(x)(1+|z|), \qquad |F_x(x,z)| \le C(x)|F_z(x,z)|.$$

per una funzione C localmente limitata.

(2) $FF_z = 0$ solo quando F_z non é singolare e definita (o positiva o negativa) quando $F \neq 0$.

Allora i minimizzanti x di E sono tali che o $F(x, x') \equiv 0$ o non si annulla in $(0,T)$.

Dimostrazione. L'idea base della dimostrazione é che ogni volta che F_z non é singolare, se poniamo

$$z(t) = F(x(t), x'(t))F_z(x(t), x'(t)),$$

allora l'equazione di Eulero-Lagrange puó essere riscritta come

$$-z'(t) + z(t)A(t) = 0, \qquad A(t) = F_z(x(t), x'(t))^{-1}F_x(x(t), x'(t)).$$

cosi che non si annulli mai. Comunque, una dimostrazione rigorosa é piú laboriosa poiché, per ipotesi, F_z é singolare esattamente quando F si annulla.
Sia come prima x un minimizzante dell'errore $E(x)$ e sia (t_0, t_1) un sottointervallo di $(0,T)$ dove $\frac{\partial F}{\partial z}(x(t), x'(t))$ non si annulla, in modo che in particolare $F(x(t), x'(t))$ non puó essere zero in (t_0, t_1). Sia $y(t)$ la soluzione del problema lineare

$$F_z(x(t), x'(t))y'(t) + F_x(x(t), x'(t))y(t) = F_z(x(t), x'(t))F(x(t), x'(t))$$

in (t_0, t_1), con $y(t_1) = 0$. Dalle stime delle ipotesi sopra, la funzione y é ben definita ed é localmente limitata nello stesso intervallo. Moltiplicando y con l'equazione di Eulero-Lagrange per x, e integrando per parti, si ottiene

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} [\overline{F}(s)\overline{F}_z(s)y'(s) + \overline{F}(s)\overline{F}_x(s)y(s)]ds - \overline{F}(t_0)\overline{F}_z(t_0)y(t_0),$$

dove $\overline{G}(s) = G(x(s), x'(s))$ per un campo G. É equivalente a

$$\overline{F}(t_0)\overline{F}_z(t_0)y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(s), x'(s))F_z(x(s), x'(s))F(x(s), x'(s))ds.$$

Questo vale finché la non singolaritá di F_z é garantita nell'intervallo (t_0, t_1). Ma possiamo certamente prendere t_0 convergente al punto dove $\overline{F}$ si annulla, se questo punto esiste. In questo caso, a causa della definitivitá della derivata parziale F_z, $F(x(s), x'(s)) \equiv 0$ in (t_0, t_1). L'arbitrarietá di questo intervallo implica la tesi. □

3.1 Applicazione al problema di Cauchy per ODE

Vogliamo applicare alcuni risultati precedenti al problema dinamico del tipo

$$F(x(t), x'(t)) = 0 \qquad in\ (0, T)$$

assieme a condizioni iniziali e/o finali per alcune componenti del vettore incognito $x(t)$. Prenderemo H come un sottospazio appropriato di $H^1(0, T)$. Vale a dire, se x^* é una funzione in $H^1(0, T)$ che soddisfa le condizioni al bordo, allora H é sottospazio di $H^1(0, T)$ tale che $x + x^*$ soddisfi sempre le condizioni sopra. Per definitivitá, verrá considerato sempre un problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$. Supponiamo i seguenti vincoli sulla F cosi che tutti i funzionali e le equazioni differenziali saranno ben definiti

$$|F(x, p)| \leq C(x)(1 + |p|),$$

$$|F_x(x, p)| \leq C_1(x)(1 + |p|), \quad |F_p(x, p)| \leq C_2(x),$$

dove le C sono funzioni localmente limitate.
Poniamo $E: \ H \to R$ il funzionale errore associato

$$E(x) = \frac{1}{2}\int_0^T |F(x(t), x'(t)|^2 dt.$$

Si procede per gradi analizzando le principali proprietá di E, e aggiungengo ipotesi successivamente se si riveleranno necessarie.

- E é coercivo e non negativo. Supponiamo che F sia coerciva secondo la forma

$$F(x,p) \geq c|p| - M_1|x| - M_0, \qquad c, M_1, M_0 > 0,$$

Allora per ogni $x \in X$ si ha

$$|x(t)| \leq |x(t) - x_0| + |x_0| \leq \int_0^t |x'(s)|ds + |x_0|.$$

usando le ipotesi di coercivitá, si ottiene

$$|x(t)| \leq |x_0| + \frac{1}{c}\int_0^T |F(x(s), x'(s)|ds + \frac{M_1}{c}\int_0^t |x(s)|ds + \frac{M_0}{c}T.$$

Di piú,

$$|x(t)| \leq |x_0| + \frac{1}{c}E(x) + (M_0 + \frac{1}{2})\frac{T}{c} + \frac{M_1}{c}\int_0^t |x(s)|ds.$$

Dal lemma di Gronwall si conclude che

$$|x(t)| \leq [|x_0| + \frac{1}{c}E(x) + M_0 + \frac{1}{2})\frac{T}{c}]e^{M_1 T/c}, \qquad t \in (0,T).$$

Questa stima uniforme implica che il funzionale errore é coercivo.

- E é C^1. Differenziamo $E(x + \epsilon y)$ rispetto a ϵ per $y \in H$. Sotto l'adatta ipotesi di liscezza su F, come indicato sopra, vale

$$E'(x)y = \int_0^T [\overline{F}(s)\overline{F}_x(s)y(s) + \overline{F}(s)\overline{F}_p(s)y'(s)]ds,$$

dove per semplicitá si é posto $\overline{F}(s) = F(x(s), x'(s))$, e lo stesso per le derivate perziali. Per determinare $E'(x)$, é sufficiente trovare il minimo di $E'(x)y$ su y sotto il vincolo che la norma di y in H é 1. Questo problema é equivalente a risolvere

$$\text{minimizzare} y \in H : \qquad \int_0^T [\overline{F}(s)\overline{F}_x(s)y(s) + \frac{1}{2}|y'(s) + \overline{F}(s)\overline{F}_p(s)|^2]ds,$$

L'unico minimizzante di questo problema é dato dall'unica soluzione del problema

$$\frac{\partial}{\partial t}[\overline{F}(t)\overline{F}_p] + y'(t)] = \overline{F}(t)\overline{F}_x(t), \quad y(0) = 0, \overline{F}(T)\overline{F}_p(T) + y'(T) = 0.$$

Si noti che la presenza di una condizione trasversale al punto libero finale T. La soluzione del problema puó essere trovata esplicitamente. Dopo alcuni conti si trova

$$y(t) = -\int_0^t \overline{F}(s)[s\overline{F}_x(s) + \overline{F}_p(s)]ds - \int_t^T \overline{F}(s)\overline{F}_x(s)ds.$$

In questo modo si ottiene la formula esplicita

$$E'(x) = \int_0^t \overline{F}(s)[s\overline{F}_x](s) + \overline{F}_p(s)]ds - t\int_t^T \overline{F}(s)\overline{F}_x](s)ds.$$

- $E'(x) = 0$ implica $E(x) = 0$. A questo fine sfruttiamo l'equazione differenziale sopra. Se $E'(x) = -y = 0$, allora

$$\frac{\partial}{\partial t}[\overline{F}(t)\overline{F}_p(t)] = \overline{F}(t)\overline{F}_x(t), \qquad \overline{F}(T)\overline{F}_p(T) = 0.$$

  Supponiamo che $F_p(x,p)$ sia sempre invertibile (é una matrice $N \times N$), e poniamo

$$z(t) = \overline{F}(t)\overline{F}_p(t), \qquad w(t) = \overline{F}_p^{-1}(t)\overline{F}_x(t).$$

  Allora

$$z'(t) = z(t)w(t), \qquad z(T) = 0.$$

  Questo implica che $z \equiv 0$, e di nuovo a causa della non singolaritá di $\overline{F}_p(x,p)$, si conclude che $\overline{F} \equiv 0$ e $E(x) = 0$.

- E gode della proprietá NFO (non-finer oscillation property), ovvero per ogni successione debolmente convergente $\{u_j\} \subset H$, nessuna sottosuccessione delle sue immagini $\{E(u_j)\}$ oscilla in una scala piú fine.
  In questo modo la derivata temporale $E'(x)$ é calcolata molto facilmente

$$\frac{d}{dt}E'(x) = \overline{F}(t)\overline{F}_p(t) + \int_t^T \overline{F}(s)\overline{F}_x ds.$$

  Piú esplicitamente, si ha

$$\frac{d}{dt}E'(x) = F(x(t), x'(t))F_p(x(t), x'(t)) + \int_t^T F(x(s), x'(s))F_x(x(s), x'(s))ds.$$

  Pertanto vediamo che $E'(x)$ é un operatore Nemyckii piú una perturbazione compatta, e quindi gode della proprietá NFO.

Si puó riassumere la discussione nel seguente

Teorema 3.1.1. *Sia $F: R^N \times R^N \to R^N$ una mappa che goda delle seguenti proprietá:*

1. *Regolaritá: F é differenziabile.*

2. *Limitatezza: esistono funzioni localmente limitate $C_i(x), i = 0, 1, 2$ tali che*

$$|F(x,p)| \leq C_0(x)(1 + |p|), \qquad |F_x(x,p)| \leq C_1(1 + |p|), \qquad |F_p(x,p)| \leq C_2(x).$$

- *Coercivitá: esistono costanti positive* c, M_1, M_0 *tali che*

$$F(x,p) \geq c|p| - M_1|x| - M_0.$$

- *Non singolaritá:* F_p *non é mai singolare.*

Allora esiste un'unica soluzione assolutamente continua del Problema di Cauchy

$$F(x(t), x'(t)) = 0, \qquad \textit{in } (0,T), \qquad x(0) = x_0.$$

Bibliografia

[1] M.R. Hestens, *Calcolus of variations and optimal control theory*, Wiley, New York, 1966

[2] D. Burghes, A. Graham, *Introduction to control theory, including Optimal Control*, Ellis Hoorwood series in mathematics and its application, Halsted Press, 1980

[3] A. Bensoussan, G. Da Prato, M. Delfour e S.K. Mitter, *Representation and control of infinite dimensional systems*, Vol.2, Birkhauser, 1993

[4] P.Pedregal, *A variational perspective on controllability*, Vol.26, Inverse Problems, 2010

[5] P.Pedregal, *On a Generalization of Compact Operators and its Application to the Existence of Critical Points Without Convexity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.197, Springer Verlag, 2010, 965-983

[6] D.Vasiliu, B.Yan, *(PS)-weak lower semicontinuity in one dimension: A necessary and sufficient condition*, Nonlinear Analysis, Vol. 66, Elsevier, 2007

[7] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Vol. 2, Springer Verlag, 1990