

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI CESENA

Scuola di Ingegneria e Architettura
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
per l'Energia e l'Informazione

TECNICHE DI POSIZIONAMENTO TRAMITE
SENSORI INERZIALI

Elaborato in
Comunicazioni digitali

RELATORE:
Chiar.mo Prof.
DAVIDE DARDARI

PRESENTATA DA :
ALBERTO MUCCIOLI

SESSIONE III
ANNO ACCADEMICO 2016–2017

Indice

Introduzione	2
1 Tecniche di tracciamento della posizione	5
1.1 Configurazione dei sistemi inerziali	9
1.2 Accelerometri	11
1.3 Tipi di accelerometro.....	14
1.4 Errori caratteristici dei sensori MEMS.....	19
2 Modelli	23
2.1 Modello del movimento.....	24
2.2 Filtro di Kalman.....	27
2.3 Modello per l'emulazione del movimento delle misure di posizione su Matlab	31
2.4 Implementazione del filtro di Kalman su Matlab.....	34
2.5 Emulazione delle discontinuità delle misure di posizione.....	35
3 Risultati numerici	39
3.1 Calcolo dell'errore	39
3.2 Scenario di riferimento	40
3.3 Influenza del numero di correzioni sulla stima di posizione	43
3.4 Compromesso fra numero e durata delle correzioni.....	46
3.5 Influenza dei disturbi sulle misure di accelerazione.....	48
Conclusioni	51
Codice Matlab	52
Bibliografia	59

Introduzione

La localizzazione è il processo di monitoraggio e controllo della posizione di un oggetto da un'origine a una destinazione lungo un percorso. Il rapido sviluppo tecnologico in questo ambito ha aperto, negli ultimi anni, le porte a scenari sempre più diversi e specifici. Si pensi ad esempio alla *geolocalizzazione* tramite sistemi *GPS*, inizialmente molto costosa e poco diffusa, oggi alla portata di tutti ed utilizzata comunemente nei dispositivi come gli *smartphone* e in applicazioni come *GoogleMaps*.

Scenari come questi stanno assumendo un ruolo sempre più importante nella *navigazione indoor*, ossia il tracciamento della posizione all'interno di ambienti chiusi. Ad esempio, sistemi a movimenti autonomi come *robot* e *droni*, necessitano di una dettagliata ricostruzione della traiettoria percorsa in modo tale da interagire con l'ambiente circostante e compiere i giusti movimenti. Tuttavia, questo ambito della localizzazione può essere applicato non solo al movimento di oggetti e automi, ma anche a quello delle persone. Per esempio, un sistema di navigazione indoor può aiutare a migliorare l'esperienza dell'utente, fornendo informazioni utili e percorsi da percorrere per raggiungere specifici luoghi. Basti pensare per esempio ad edifici molto vasti come aeroporti, centri congressi, ospedali, stazioni ferroviarie, dove spesso risulta problematico individuare la propria posizione o raggiungere determinati punti di interesse. Queste sono solo alcune delle applicazioni in sviluppo grazie all'utilizzo di nuove tecniche di localizzazione e il continuo progresso tecnologico, a cui si sta assistendo in questi anni, permetterà in futuro la nascita di nuovi ambiti e studi in materia di localizzazione e navigazione.

Tuttavia in ambienti chiusi, dove il GPS non funziona, il problema della geolocalizzazione rimane aperto. Tale problema è stato affrontato attraverso lo sviluppo di diverse tecnologie radio caratterizzate da diverse prestazioni e costi. La più performante è la tecnologia *impulse-radio ultra-wideband (IR-UWB)* che offre potenzialmente accuratezze nell'ordine di poche decine di centimetri. In ogni caso nessuna tecnologia è in grado di garantire la copertura totale di un ambiente indoor a causa delle problematiche di propagazione radio in presenza di ostacoli.

Il seguente elaborato affronta l'ambito del tracciamento della posizione di un corpo in movimento, focalizzandosi su due soluzioni complementari, un metodo di radiolocalizzazione *IR-UWB* in grado di fornire una stima di posizione nelle zone coperte e le misure di un accelerometro (montato proprio sul corpo in movimento) in grado di rilevare le forze che determinano gli spostamenti stessi.

Infatti i segnali radio IR-UWB garantiscono elevata precisione proprio nei contesti in cui altre tecnologie (come il GPS) non riuscirebbero ad arrivare o risulterebbero molto attenuati. Le misure dell'accelerometro, d'altra parte, permettono di determinare la posizione in maniera rapida e indipendente, in quanto non necessitano di un sistema a cui appoggiarsi

In particolare, l'attività di tesi, si concentra sullo studio e la realizzazione di un processo che riesca a fondere queste due tecniche di localizzazione, per studiare il comportamento e la precisione finale al fine di ottenere una copertura totale dell'ambiente. L'approccio adottato, ossia della fusione di due tecnologie diverse (che prende il nome di *data fusion*), risulta molto utile quando una delle due tecniche non riesce più a stimare la posizione in modo corretto. Ad esempio, le misure radio di posizione del sistema IR-UWB, sono soggette a fenomeni di attenuazione e riflessione dovuti alla presenza di ostacoli. Viceversa, la stima di posizione effettuata tramite i valori misurati da un accelerometro, diverge rapidamente a causa degli errori di calcolo.

Questo elaborato è strutturato nel seguente modo. Nel *capitolo 1* si analizzano nel dettaglio le due tecniche di localizzazione, studiando come esse vengono realizzate e quali principi sfruttano, focalizzandosi anche sugli errori caratteristici. Nel *capitolo 2* si studiano dei modelli per realizzare la stima a partire dalle misure radio di posizione e quelle di accelerazione, successivamente si implementa un codice Matlab per realizzare delle simulazioni. Infine, nel *capitolo 3*, vengono raccolti i dati a seguito delle simulazioni effettuate, ipotizzando diversi scenari, con lo scopo di identificare la situazione migliore in cui sfruttare la tecnica di data fusion.

Capitolo 1

Tecniche di tracciamento della posizione

Il seguente capitolo si occupa di analizzare i due metodi di localizzazione utilizzati nell'elaborato per ricostruire la traiettoria di un corpo in movimento. Il primo metodo sfrutta la tecnologia di radiolocalizzazione denominata impulse radio ultra wide band (IR-UWB), il secondo utilizza una piattaforma di misure inerziali (Inertial Measurements Units-IMU o INS) in grado di rilevare, tramite appositi sensori, gli spostamenti. Gli ambienti interni sono caratterizzati da numerosi ostacoli, i quali possono causare interruzioni dei collegamenti o riflessioni dei segnali trasmessi. Pertanto sistemi di radiolocalizzazione come IR-UWB non sempre riescono a garantire una adeguata copertura o prestazione.

Per gli strumenti di localizzazione autonoma basati su piattaforma IMU invece, sono presenti errori di deriva dovuti a disturbi e a fenomeni di accumulazione degli errori che possono far degenerare le stime molto rapidamente. La tecnica che sfrutta le misure inerziali ai fini della navigazione e del tracciamento della posizione prende il nome di *tracking inerziale* (inertial tracking). Per queste ragioni si cerca di accoppiare le due tecnologie in un singolo sistema di localizzazione in cui metodi radio cooperano insieme a piattaforme IMU. Di seguito per comprenderne il funzionamento, analizzeremo le due tecnologie di localizzazione separatamente. In secondo luogo verranno studiati dei metodi per combinare e fondere queste due tecniche.

-IR-UWB Radiolocation. L'obiettivo della radiolocalizzazione è quello di determinare la posizione incognita di una o più entità in movimento appartenenti ad una rete wireless. Sfruttando la trasmissione di segnali radio, possono essere determinate informazioni sulla distanza e l'angolazione dell'oggetto di cui non si conosce la posizione. Questo è

permesso grazie ad alcune tecniche di radiolocalizzazione che sfruttano diversi algoritmi, come il TOA (time of arrival), AOA (Angle of arrival) o TDOA (time difference of arrival). Tutte queste tecniche si basano comunque su una rete di punti di riferimento fissi generalmente rappresentati dai trasmettitori dei segnali radio. Nel seguito verrà riportato solo il funzionamento a grandi linee della tecnica TOA, molto simile alle altre soluzioni precedentemente esposte. In questa tecnica la distanza fra trasmettitore e ricevitore viene determinata misurando il tempo che impiega il segnale radio a raggiungere la destinazione (il ricevitore) il quale si suppone sia montato sull'oggetto di cui si vuole ricavare la posizione incognita. Questa misura rappresenta dunque il tempo di arrivo (time of arrival o TOA). Conoscendo la velocità con la quale si propaga il segnale radio e il tempo impiegato per percorrere un certo tratto, si può ricavare la distanza fra trasmettitore e ricevitore.

Per determinare con esattezza la posizione, occorre conoscere la distanza da almeno 3 nodi di riferimento. Tale tecnica è chiamata trilaterazione e il suo funzionamento è riportato schematicamente in figura 1.1. Dal momento che verranno impiegati tre segnali differenti, occorre che questi siano sincronizzati fra loro. [1]

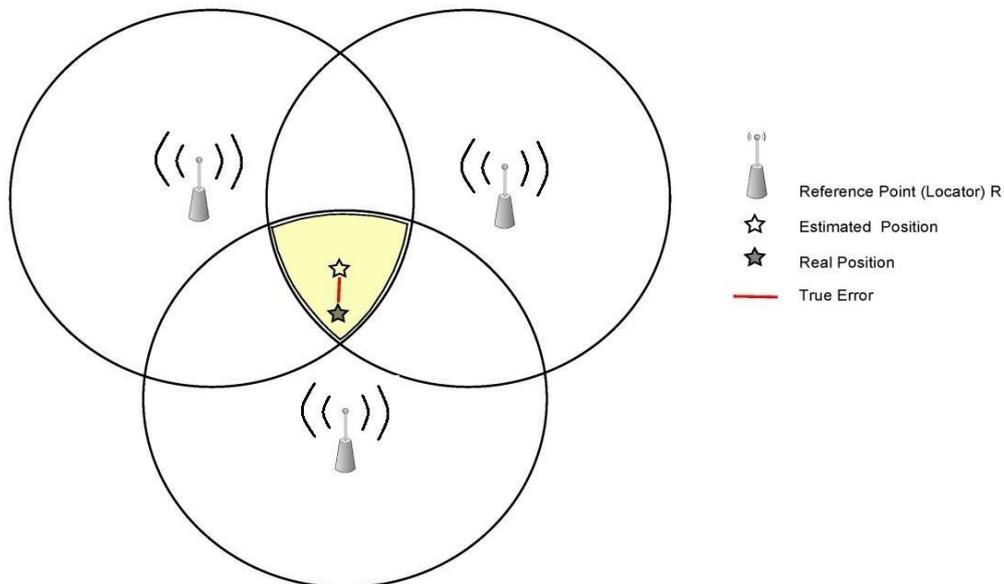


Figura 1.1: radiolocalizzazione mediante trilaterazione

La tecnica IR-UWB si basa sulla trasmissione di segnali impulsivi su un'ampia banda di frequenza con una densità spettrale di potenza molto bassa [2]. Tali caratteristiche sono ottenute mediante modulazione, ossia il processo di trasporto dell'informazione sul segnale impulsivo (segnale portante) modificando una o più proprietà del segnale. La modulazione è inoltre utilizzata per "separare" i vari segnali trasmessi nello spazio oppure per evitare le riflessioni che potrebbero causare interferenze. Per realizzare la modulazione vengono utilizzate diverse tecniche: on-off Keying (OOK), pulse amplitude modulation (PAM) e pulse width modulation (PWM).

I sistemi IMU. Con inertial measurement unit o IMU si intendono tutte quelle piattaforme in grado di implementare la navigazione inerziale, ossia una particolare tecnica che sfrutta le misure dei sensori posizionati sull'oggetto stesso da localizzare. In questo modo si rende la navigazione del tutto autonoma e indipendente da punti di riferimento esterni. Un tipico sistema IMU contiene un giroscopio e un accelerometro (ciascuno a tre assi), il primo utilizzato per la misura di velocità angolare, il secondo in grado di rilevare gli spostamenti del sistema. Spesso viene anche integrato un magnetometro per determinare l'orientamento sfruttando il campo magnetico terrestre. Processando i segnali da questi sensori, è possibile tracciare la posizione e l'orientamento del dispositivo. I recenti miglioramenti di tipo elettro-meccanici, hanno permesso ai sistemi IMU di diventare sempre più piccoli, integrati, leggeri e a basso costo, aumentandone l'interesse. Pertanto tali piattaforme trovano impiego in molti settori oltre a quello della navigazione, infatti i dati acquisiti possono essere utili anche per altri fini pratici [3]. Di seguito riportiamo alcuni esempi:

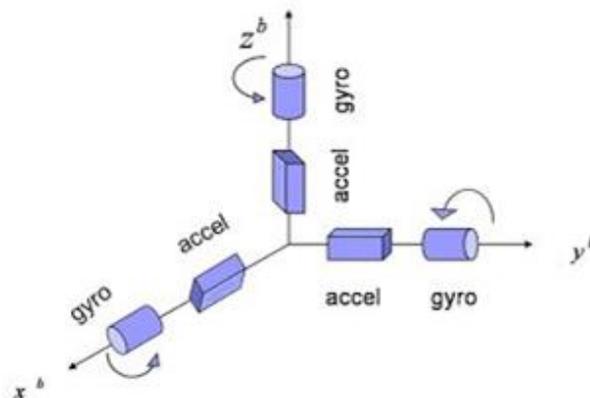


Figura 1.2: sistema di riferimento di un IMU

- In dispositivi come *smartphone, tablet e computer* l'accelerometro permette lo switching tra posizione verticale e orizzontale delle app che si stanno usando, oppure consente di determinare la velocità istantanea durante gli spostamenti. Il giroscopio invece viene utilizzato in combinazione con l'accelerometro per determinare l'orientamento del dispositivo, per realizzare foto sferiche o per implementare i comandi nei giochi.

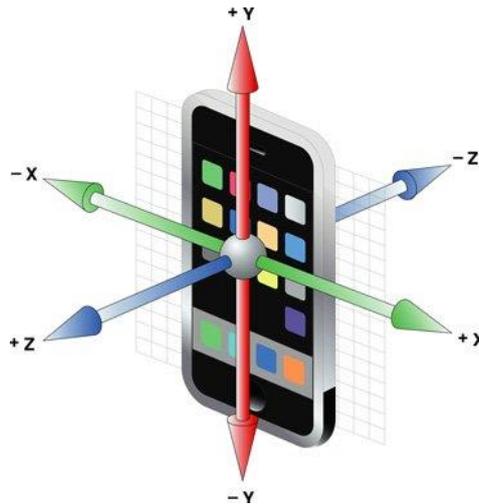


Figura 1.3: sistema di riferimento di uno smartphone che utilizza un sistema IMU

- In ambito *automobilistico* i sensori delle piattaforme inerziali permettono di attivare sistemi di sicurezza come gli *airbag*, rilevando le brusche variazioni di velocità che si verificano in situazioni di pericolo, come gli incidenti. Oltre a questo le piattaforme IMU trovano spazio in sistemi come l'*ESC (electronic stability control)* per controllare la stabilità dell'automobile in fase di sbandata, permettendo la regolazione della potenza del motore e frenando le singole ruote in modo da ristabilizzare l'assetto della vettura. I sistemi IMU inoltre, combinandosi con sensori di prossimità e radar stanno permettendo lo sviluppo delle tecnologie a guida autonoma.
- In *aeronautica*, i sistemi IMU sono fondamentali per monitorare lo stato di un velivolo, in particolare le rotazioni attorno ai tre assi principali (esprese tramite parametri come il rollio, il beccheggio e l'imbardata), per impostare e mantenere la traiettoria, per misurare l'altitudine.

1.1 Configurazione dei sistemi inerziali

I sistemi di posizionamento autonomi introdotti in precedenza e denominati IMU possono essere realizzati seguendo due tecniche diverse che verranno riportate di seguito. La differenza è rappresentata dal sistema di riferimento in cui operano giroscopi e accelerometri. In questo contesto si definisce body frame (x_b , y_b e z_b in figura 1.4) il sistema di riferimento locale a cui i sensori si riferiscono, mentre il global frame (x_g , y_g e z_g in figura 1.4) rappresenta il sistema di riferimento “fisso” tipicamente rappresentato dalla Terra. Pertanto l’oggetto in movimento avrà come riferimento il body frame, mentre “l’ambiente” nel quale si muove il sistema sarà individuato dal global frame.

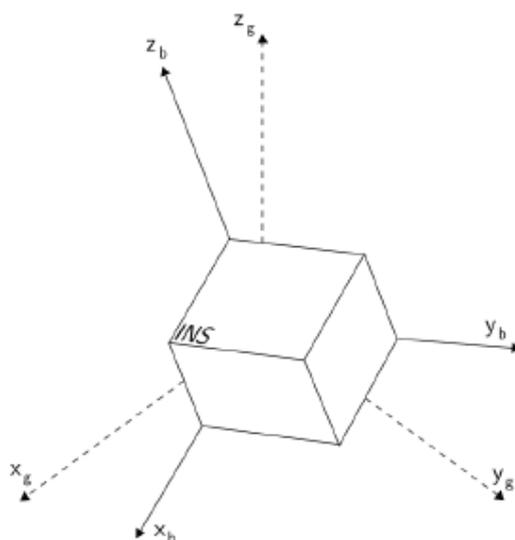


Figura 1.4: riferimento globale e riferimento locale

Nei sistemi a piattaforma stabile i sensori inerziali sono montati su una struttura isolata dai movimenti esterni, in maniera tale da essere allineati con il sistema di riferimento globale. Questo è ottenuto montando sulla piattaforma dei giunti cardanici che permettono al sistema di essere libero nei movimenti in tutti e tre gli assi. Vengono utilizzati dei giroscopi in grado di rilevare le rotazioni della piattaforma, i segnali ricavati da questi sensori vengono poi utilizzati per pilotare dei motori i quali, agendo sui giunti, riescono a tenere allineata la piattaforma al sistema di riferimento iniziale, annullando ogni rotazione. Leggendo la misura dell’angolo di pick-off fra i vari giunti è possibile tracciare le rotazioni, mentre per calcolare la posizione del dispositivo i segnali degli accelerometri vengono integrati due volte. Questa configurazione offre il vantaggio di determinare direttamente

i valori di rotazione tramite l'azione diretta dei giroscopi, senza passare per i calcoli matematici, dunque offre una maggior precisione nella stima della rotazione.

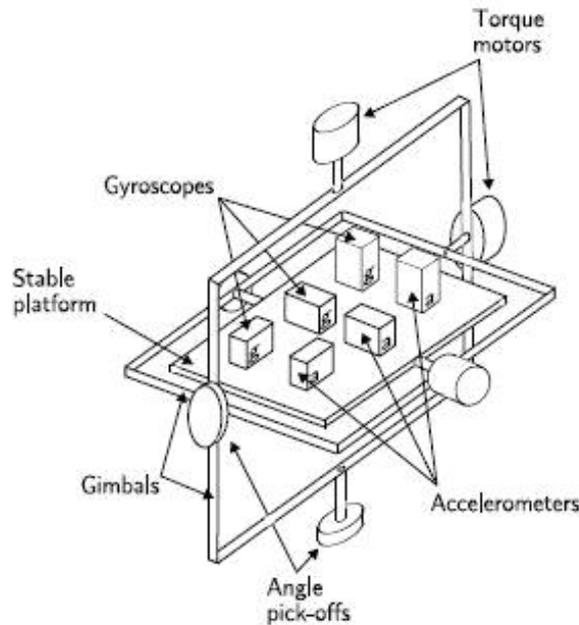


Figura 1.5: IMU a piattaforma stabile

Nei sistemi a piattaforma vincolata (anche denominati *strapdown systems*) i sensori inerziali sono fissati rigidamente sul dispositivo, quindi le misure sono effettuate seguendo il sistema di riferimento del corpo in movimento (ossia il body frame) piuttosto che quello del sistema globale. Per stabilire l'orientamento i segnali provenienti dai giroscopi vengono integrati, mentre per determinare la posizione i segnali elaborati dai tre accelerometri vengono convertiti in coordinate globali utilizzando l'orientamento precedentemente determinato con i giroscopi. Fatto questo le accelerazioni globali vengono integrate come nelle piattaforme stabili. Il principale vantaggio dei sistemi di tipo strapdown è rappresentato da una minore complessità meccanica a scapito di un aumento nella complessità computazionale. Pertanto questi sistemi sono diventati fisicamente sempre più piccoli e questo ne ha determinato la loro grande diffusione. Oggi i sistemi di tipo strapdown sono diventati la tipologia dominante.[4]

1.2 Accelerometri

Gli accelerometri rappresentano insieme a giroscopi e magnetometri, i sensori alla base del funzionamento delle piattaforme inerziali IMU. In questo elaborato per realizzare il tracciamento di posizione verranno utilizzati i dati provenienti da uno di questi sensori, ossia l'accelerometro. Di seguito vengono analizzati a fondo proprio i trasduttori di questa tipologia prima attraverso un modello fisico, descrivendo poi le tecnologie di realizzazione e infine considerando gli errori ai quali questi sensori sono sottoposti.

Un accelerometro è un sensore in grado di misurare l'accelerazione fisica a cui è sottoposto un oggetto quando vengono applicate delle forze. Per fare questo si utilizza una massa la quale, se sottoposta a sollecitazioni tende a muoversi. Misurando tale spostamento si possono ricavare i valori di velocità $v(t)$ e accelerazione $a(t)$ secondo le classiche leggi della dinamica:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (1)$$

dove $x(t)$ rappresenta lo spostamento.

Pertanto un accelerometro può essere modellato fisicamente tramite una massa di prova m collegata ad una molla con costante elastica k fissata ad un case come in figura. In parallelo, sempre connessa alla massa, si trova un elemento b che ha il compito di smorzare l'effetto di accelerazione e stabilizzare rapidamente il sistema.

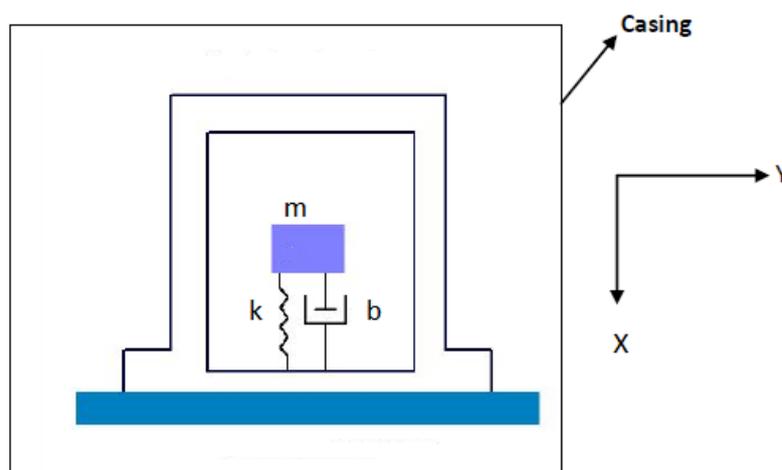


Figura 1.6: Modello fisico accelerometro

Per derivare il modello fisico si eguaglia la somma di tutte le forze agenti sulla massa di prova alla forza d'inerzia che agisce sempre sulla stessa massa. In questo modo si riesce a trattare un problema dinamico come uno statico e l'equazione del movimento può essere ottenuta mediante la formulazione diretta delle equazioni di equilibrio. Il sistema di forze, costituisce così un insieme di equazioni del secondo ordine.

$$F_{applicata} - F_{smorzamento} - F_{elastica} = F_{inerzia} \quad (2)$$

$$F_{inerzia} + F_{smorzamento} + F_{elastica} = F_{applicata} \quad (3)$$

sfruttando la seconda legge di Newton della dinamica $F = m a$ e le corrispondenti relazioni per la forza di smorzamento ed elastica si ricava :

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + k x(t) = m a(t) \quad (4)$$

Sfruttando la trasformata di Laplace, partendo dall'equazione precedentemente ricavata, è possibile ricavare la funzione di trasferimento di questo sistema. [5]

$$H(s) = \frac{X(s)}{A(s)} = \frac{m}{ms^2 + bs + k} = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_r s + \omega_r^2} \quad (5)$$

dove i parametri assumono il seguente valore:

$$\text{frequenza di risonanza } (\omega_r) = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

$$\text{rapporto di smorzamento } (\xi) = \frac{b}{2\sqrt{k m}} \quad (7)$$

$$\text{fattore di qualità } (Q) = \frac{\sqrt{k m}}{b} \quad (8)$$

Come appare evidente, i parametri appena esposti possono essere modificati cambiando i valori delle variabili del sistema. Ad esempio la frequenza di risonanza può essere aumentata alzando il valore della costante elastica k , oppure diminuendo la massa di prova m . Il fattore di qualità invece dipende direttamente dal coefficiente di smorzamento b e inversamente dalla massa e dalla costante elastica.

Risolvendo l'equazione si ricavano due differenti soluzioni per la funzione complementare dell'equazione differenziale, dipendenti dal valore di ξ .

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_r \pm \omega_r\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (9)$$

Quando $0 < \xi < 1$ il sistema è sottosmorzato ed è caratterizzato da continue oscillazioni, per $\xi = 1$ si smorza velocemente, mentre per $\xi > 1$ il sistema è sovrasmorzato e si attenua più lentamente.

Dalla funzione di trasferimento $H(s)$ precedentemente ricavata, sostituendo a s la variabile $j\omega$, è possibile ricavare il comportamento del sistema in funzione della pulsazione (o della frequenza). Questo passaggio è importante perché permette di individuare l'intervallo di frequenze della regione lineare nella quale siamo certi che può essere effettuata la lettura dei valori di accelerazione. Tale range di frequenze è chiamata *larghezza di banda (bandwidth)* e rappresenta un parametro fondamentale nella scelta dell'accelerometro. Infatti non potranno essere effettuate delle misure di accelerazione che variano con una frequenza maggiore della larghezza di banda.

Oltre a quelli già citati esistono anche altri parametri non strettamente legati al modello fisico dell'accelerometro, ma che ricoprono un ruolo importante nella scelta di questi trasduttori, di seguito vengono riportati i più significativi:

Il *range dinamico* è l'intervallo di valori di accelerazione che il sensore è in grado di rilevare e va dal più piccolo valore misurabile fino al massimo, prima che l'uscita venga distorta.

La *sensibilità* misura la più piccola variazione di accelerazione rilevabile dal sensore.

Zero g esprime il valore che si ha in uscita dall'accelerometro, quando non è applicata nessuna forza.

Applicazione	Range	Bandwidth
<i>Attivazione airbag</i>	$\pm 50g$	$\sim 1 \text{ kHz}$
<i>Vibrazioni di un motore</i>	$\pm 1g$	$> 10 \text{ kHz}$
<i>Controllo Pacemaker cardiaco</i>	$\pm 2g$	$< 50 \text{ Hz}$

Tabella 1.1: parametri caratteristici in funzione dell'utilizzo
g rappresenta l'accelerazione di gravità.

1.3 Tipi di accelerometro

La tecnologia con la quale un accelerometro viene realizzato ne influenza notevolmente il comportamento, per questo è importante analizzare le varie tipologie di questo sensore al fine di comprenderne gli ambiti in cui può essere utilizzato. Di seguito verranno studiate tre tipologie differenti, accelerometri *piezoelettrici*, a *effetto SAW* e *capacitivi*. In particolare ci soffermeremo su quest'ultima tipologia, in quanto è quella che più ha avuto modo di diffondersi negli ultimi anni grazie alla sua caratteristica di essere miniaturizzabile, a basso costo e facile da realizzare.

Accelerometri piezoelettrici

Gli accelerometri piezoelettrici sfruttano l'effetto *piezoelettrico* di alcuni materiali in grado di convertire cambiamenti meccanici in piccoli segnali elettrici. Anche in questo caso ci si può ricondurre alla struttura classica di un massa, sospesa da un elemento elastico, la quale agisce appunto sul materiale piezoelettrico. Quando viene esercitata una forza fisica sull'accelerometro, la massa di prova carica l'elemento piezoelettrico secondo la legge del moto di Newton. La forza esercitata sul materiale piezoelettrico può essere osservata nel cambiamento della tensione generata dal materiale piezoelettrico.

I materiali piezoelettrici usati per gli accelerometri si dividono in due categorie. La prima è rappresentata dai *materiali monocristallini* (in genere quarzo), ampiamente utilizzati in quanto offrono una lunga durata in termini di sensibilità. Nella seconda categoria invece rientrano i *materiali ceramici* i quali presentano una sensibilità maggiore rispetto ai cristalli ma un notevole degrado delle caratteristiche con il passare del tempo e quindi una minore longevità.

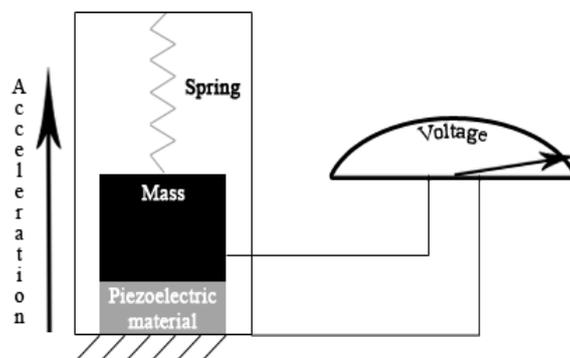


Figura 1.5: Principio di funzionamento accelerometro piezoelettrico

Gli accelerometri piezoelettrici presentano un ampio *range di frequenze* nel quale possono operare, trovando così impiego in molti ambiti, dalla misura di onde acustiche a bassa frequenza fino al campo degli ultrasuoni. Per come sono realizzati, questa categoria di accelerometri offre una notevole robustezza meccanica e termica, permettendo così di sopportare elevate sollecitazioni. Inoltre la tensione di uscita è lineare rispetto alle variazioni di accelerazione e questo permette una notevole semplificazione nei circuiti di condizionamento.

Accelerometri di tipo SAW

Questi tipo di accelerometri sfruttano le *onde acustiche di superficie* (surface acoustic wave o SAW) ossia delle onde acustiche che viaggiano sulla superficie di un materiale con una certa elasticità. Sono realizzati tramite una barra a sbalzo, posizionata in maniera opportuna, la quale ha la proprietà di oscillare ad una certa frequenza se sottoposta a torsioni. Da un lato, viene collegata alla barra una massa libera di muoversi, dall'altro è fissata al case del dispositivo. Quando viene applicata un'accelerazione lungo l'asse corrispondente, la barra si piega, questo fa sì che la frequenza dell'onda acustica di superficie cambi in proporzione alla sollecitazione e quindi dell'accelerazione. La difficoltà principale in questa tecnica è data dalla misurazione dei valori di frequenza dell'onda, non sempre facile da realizzare.

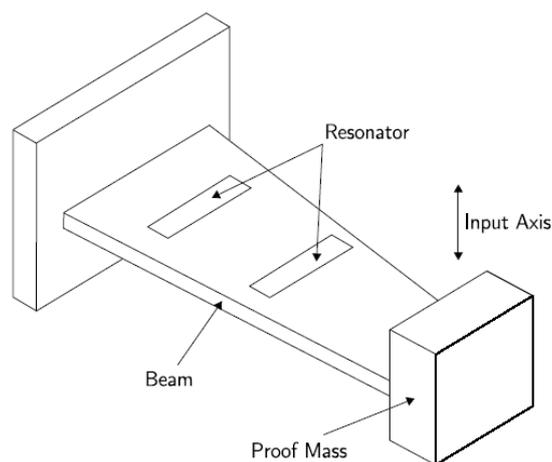


Figura 1.6: Accelerometro di tipo SAW

Accelerometri capacitivi di tipo MEMS

La sigla MEMS (Micro-electro-mechanical-systems) rappresenta una tecnologia che integra componenti meccanici ed elettrici in strutture con dimensioni del micrometro. L'aspetto chiave è la combinazione di tecnologie riguardanti l'ambito dei semiconduttori e quello della micro fabbricazione, con lo scopo di inserire tutti gli elementi elettronici e meccanici in un'unica struttura, su uno strato di silicio. I componenti principali di qualsiasi dispositivo MEMS sono gli elementi meccanici, il meccanismo di rilevamento e la parte di elaborazione (microcontrollore).

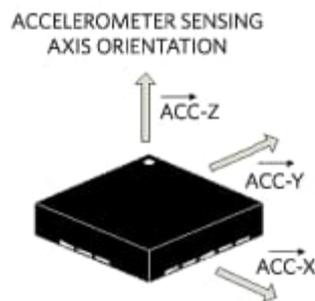


Figura 1.7: Accelerometro di tipo MEMS

I sensori di tipo MEMS trovano impiego anche come accelerometri. Un approccio comunemente utilizzato per monitorare le variazioni di accelerazione è la misura della capacità legata ad una massa in movimento. Questa tecnica di misura è facile da realizzare ed è caratterizzata da un'elevata accuratezza, stabilità e basse perdite. Non è soggetta a elevati disturbi e variazioni dovute alla temperatura. [6]

Il valore di capacità in un condensatore a facce piane parallele dipende da vari parametri, come la permittività elettrica del vuoto (ϵ_0), permittività del materiale (ϵ), la distanza fra i due piatti (d) e l'area delle due facce (A). La relazione è la seguente:

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{A}{d} = \epsilon a \frac{1}{d} \quad (10)$$

dove abbiamo assunto $\epsilon_0 \epsilon A = \epsilon a$ in quanto parametro costante che non varia nell'analisi.

La capacità può essere impostata come coppia singola o differenziale. In figura 1.8 riportiamo la configurazione a coppia differenziale, la quale è

realizzata tramite una singola massa mobile a cui viene collegata una superficie planare (che è posta in mezzo ai due elettrodi rappresentati dalla facce del condensatore). La massa viene poi collegata tramite una molla fra

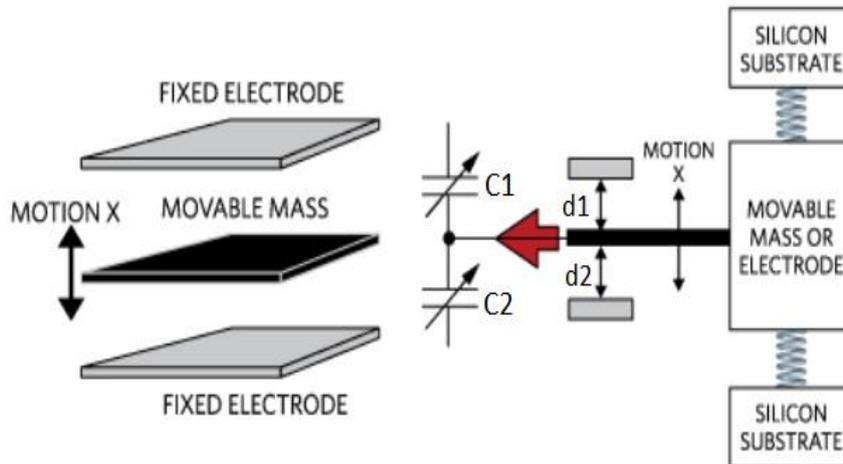


Figura 1.8: esempio di realizzazione accelerometro capacitivo

due substrati fissi di silicio. Un movimento di questa massa (lungo la direzione x) causa uno spostamento della superficie planare e la variazione delle distanze ($d1$ e $d2$) fra i due elettrodi, provocando una variazione di capacità ($C1$ e $C2$).

Calcolando la differenza tra $C2$ e $C1$ possiamo ricavare lo spostamento della massa e la sua direzione.

Di seguito vengono riportate le relazioni costitutive che legano la variazione di capacità allo spostamento lungo x , ricordando la prima equazione:

$$C1 = \epsilon a \frac{1}{x1} = \epsilon a \frac{1}{d+x} = C0 - \Delta C \quad C2 = \epsilon a \frac{1}{x2} = \epsilon a \frac{1}{d-x} = C0 + \Delta C \quad (11)$$

Se l'accelerazione è zero, lo spostamento è nullo, $x1$ è uguale a $x2$ così come le due capacità $C1$ e $C2$. Mentre se c'è spostamento sotto l'azione di forze la differenza di capacità vale:

$$C2 - C1 = 2\Delta C = 2 \epsilon a \frac{x}{d^2 - x^2} \quad (12)$$

Misurando ΔC , si può trovare lo spostamento risolvendo la seguente equazione algebrica non lineare.

$$\Delta C x^2 + \varepsilon a x - \Delta C d^2 = 0 \quad (13)$$

L'equazione può essere semplificata assumendo piccoli spostamenti e trascurando il termine $\Delta C x^2$, ottenendo la relazione seguente :

$$x \approx \frac{d^2}{\varepsilon a} \Delta C = d \frac{\Delta C}{C_0} \quad (14)$$

la quale permette di concludere che lo spostamento è direttamente proporzionale alla differenza di capacità. Tramite un opportuno circuito di condizionamento si riesce ad esprimere la variazione di capacità e quindi di dello spostamento, sotto forma di *tensione*. Lo spostamento della massa mobile causato dall'accelerazione crea una variazione di capacità estremamente piccola e difficile da rilevare. [7] Questo difetto si risolve con l'utilizzo di più elettrodi mobili e più coppie di capacità, tutti collegati in configurazione parallelo come riportato in figura 1.9. In tal modo otteniamo una maggiore variazione di capacità che può essere rilevata in modo più accurato e rende questa tecnica più fattibile.

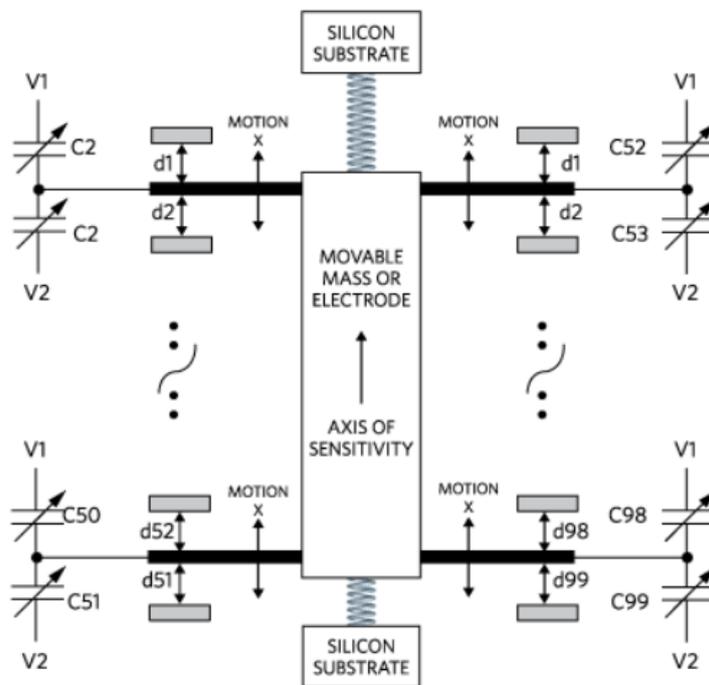


Figura 1.9: Esempio di configurazione in parallelo

Tipicamente gli accelerometri MEMS hanno un range di utilizzo che va da un minimo di $\pm 1.5g$ fino a valori di circa $\pm 5g$ (dove g esprime l'accelerazione di gravità), tale intervallo di funzionamento deve essere dimensionato in base alle sollecitazioni da rilevare. Ad esempio per misurare lo spostamento di un veicolo dobbiamo scegliere un intervallo di $\pm 2g$, mentre se trattiamo un sistema che si comporta in maniera brusca con forti accelerazioni, deve essere scelto un range più elevato.

Un parametro fondamentale in tutti gli accelerometri è la densità di rumore di tensione, che nella categoria dei MEMS assume valori che vanno da $500\mu g/\sqrt{Hz}$ per i più vecchi fino a $200\mu g/\sqrt{Hz}$ per gli accelerometri più recenti e precisi. Ne consegue che il valore efficace del rumore è proporzionale alla radice quadrata della banda di frequenza, questo significa che più veloci sono le variazioni di accelerazioni da monitorare e peggiore risulterà la stima. Pertanto le caratteristiche del rumore influenzano le prestazioni degli accelerometri, in particolare quando si deve rilevare valori inferiori di g poiché l'uscita assume valori più bassi.

1.4 Errori caratteristici dei sensori MEMS

In questo paragrafo vengono analizzati gli errori che si presentano negli accelerometri di tipo MEMS e il loro effetto sulle misure. Come vedremo nel capitolo 2 occorre integrare due volte i valori di accelerazione per determinare, a partire da questi, la posizione. Risulta quindi necessario, analizzare come questi disturbi influenzino le misure finali, quando sono sottoposti al processo di doppia integrazione. Di seguito viene dato un elenco degli errori caratteristici e il loro effetto sulle stime di posizione.

- **Errore costante.** La misura dell'accelerazione è influenzata da un *errore costante* (constant bias), ossia un offset nel valore in uscita dall'accelerometro rispetto al valore effettivo. Questa quantità costante, che chiameremo e , quando è integrata due volte causa un errore nella posizione che cresce con il quadrato del tempo. L'errore accumulato è il seguente $s(t) = e \cdot t^2/2$ dove t rappresenta il tempo di integrazione. Risulta possibile stimare questo errore misurando i valori medi forniti in uscita dall'accelerometro quando non è applicata nessuna forza. Per fare questo bisogna però considerare la forza di gravità la quale

agisce proprio come valore costante di accelerazione (lungo solo la direzione perpendicolare al suolo). Dunque per rilevare gli errori costanti bisogna conoscere la giusta orientazione del dispositivo rispetto al campo gravitazionale terrestre.

- **Instabilità del bias.** L'errore costante precedentemente esposto in realtà non è propriamente costante ma è soggetto a lente variazioni all'interno di un intervallo temporale (tipicamente di 100 secondi). Questo comportamento è dovuto prevalentemente al rumore di scintillazione causato dai componenti elettronici. Gli effetti di questa instabilità si manifestano solamente in regime di basse frequenze.
- **Rumore bianco** dovuto a fenomeni termo-meccanici. Rappresenta un disturbo aleatorio di natura termica e meccanica, modellato attraverso una sequenza di variabili aleatorie, non correlate, a valore medio nulla, che agisce sui campioni in uscita dal sensore. Ogni variabile aleatoria risulta distribuita con una varianza di valore σ^2 .

Per vedere quali effetti produce quest'ultimo rumore quando viene integrato, possiamo utilizzare al posto dell'integrale la tecnica dei rettangoli. Assumiamo che N_i sia l' i -esima variabile aleatoria nella sequenza del rumore bianco.

Ogni N_i è identicamente distribuito con media nulla $E(N_i) = E(N) = 0$ e varianza finita di valore $var(N_i) = var(N) = \sigma^2$. Per definizione di sequenza di rumore bianco la Covarianza $Cov = (N_i, N_j)$ risulta nulla per tutti gli $i \neq j$. Il risultato che si ottiene applicando la regola dei rettangoli per integrare il rumore bianco, che chiameremo $e(t)$, su un periodo $t = n \cdot \delta t$ è:

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \cong \delta t \sum_{i=1}^n N_i \quad (15)$$

dove n è il numero dei campioni ricevuti dal dispositivo durante il periodo t e δt è il tempo fra due campioni. Come abbiamo detto, i valori di accelerazione verranno integrati due volte per ricavare la posizione, di conseguenza anche gli errori verranno sottoposti a doppia integrazione utilizzando la relazione precedentemente scritta:

$$\int_0^t \int_0^t e(\tau) d\tau d\tau \cong \delta t \sum_{i=1}^n \delta t \sum_{j=1}^i N_j \quad (16)$$

la quale grazie alle proprietà sulle serie risulta uguale a :

$$\cong \delta t^2 \sum_{i=1}^n (n - i + 1) N_i \quad (17)$$

Usando le formule su valor medio $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ e di varianza $Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$ dove a e b sono costanti e X e Y sono variabili aleatorie, risulta per il valore medio:

$$E \left(\int_0^t \int_0^t e(t) d\tau d\tau \right) \cong \delta t^2 \sum_{i=1}^n (n - i + 1) E(N_i) = 0 \quad (18)$$

e per la varianza:

$$\begin{aligned} Var \left(\int_0^t \int_0^t e(t) d\tau d\tau \right) &\cong \delta t^4 \sum_{i=1}^n (n - i + 1)^2 Var(N_i) \\ &\cong \frac{\delta t^4 n (n - 1)(2n + 1)}{6} Var(N) \\ &\approx \frac{1}{3} \delta t \cdot t^3 \cdot \sigma^2 \quad (19) \end{aligned}$$

dove l'approssimazione assume che δt sia piccolo (ossia che la frequenza di campionamento si alta, approssimazione ritenuta valida nei moderni accelerometri di tipo MEMS).

Questa analisi mostra come il rumore bianco dell'accelerometro crea un errore casuale nel calcolo della posizione, con media zero e deviazione standard pari a:

$$\sigma_s(t) \approx \sigma \cdot t^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{\delta t}{3}} \quad (20)$$

la quale cresce proporzionalmente con $t^{3/2}$.

L'analisi degli errori a cui sono sottoposti questi sensori è importante in quanto la loro propagazione attraverso i processi di integrazione è il problema principale che affligge le tecniche di posizionamento tramite misure inerziali. Infatti gli errori presenti sulle misure di accelerazione sono sottoposti a doppia integrazione e questo è il motivo per cui in processi del genere si manifesta una rapida deriva o drift della stima effettuata. Questo giustifica la necessità di fondere la tecnica di tracking inerziale con un sistema di radiolocalizzazione, in quanto se ci affidassimo solo alla prima avremmo una stima di posizione che in poco tempo si discosta da quella reale.

Capitolo 2

Modelli

In molti casi, i processi di localizzazione trattati nel capitolo 1, presentano dei parallelismi con gli spostamenti realizzati dagli esseri umani. Valutare la velocità con cui si procede mentre si guida un'autovettura, comprendere gli spazi d'arresto o le manovre da effettuare, sono azioni che svolgiamo nella vita di tutti i giorni. Tuttavia, esistono sistemi in movimento (come robot e droni) che, non avendo una visione del mondo circostante, non possono essere indipendenti nei loro movimenti. Pertanto, è necessario fornire a questi sistemi un supporto che permetta loro di essere a conoscenza, in ogni istante, della propria posizione e di tener traccia dei movimenti effettuati.

L'elemento chiave in tutte le applicazioni di navigazione e tracciamento della posizione è rappresentato dal modello matematico del fenomeno fisico di movimento. Nel caso in cui si preferisce lavorare con una discretizzazione del tempo, l'approccio tipicamente utilizzato è quello dello spazio degli stati.

Esso, a partire dalla situazione presente e dalle misure effettuate, permette di caratterizzare a livello statistico lo stato futuro. Nella pratica lo stato presente è rappresentato dalle coordinate di un corpo e dalla sua velocità le misure rappresentano l'entità delle forze che causano il movimento [8]. Questo può essere modellato come segue:

$$x_{t+1} = Ax_t + B_u u_t + B_f f_t \quad (1)$$

$$y_t = h(x_t) + e_t \quad (2)$$

dove x_t è il vettore di stato, u_t le misure effettuate, f_t le forze incognite che determinano il movimento del corpo, y_t le misure di posizione ed e_t l'errore associato a queste ultime misure. Per le quantità e_t e f_t vengono assunte distribuzioni indipendenti con densità di probabilità note rispettivamente p_{e_t} e p_{f_t} .

Definiamo il vettore di stato del corpo in movimento. Supponiamo che esso si possa muovere solo su un piano, pertanto la posizione in ogni istante è determinata da una coppia di valori $x1_t$ e $x2_t$. Tale approssimazione è lecita se si pensa ad un sistema in movimento all'interno di un ambiente chiuso, nel quale non ci sono variazioni di altitudine. Ad esempio la terza coordinata non usata rappresenta l'asse perpendicolare al suolo e in questa condizione rimane costante.

Nello stato vengono inseriti anche i valori di velocità relativi alle due coordinate di posizione, risulta così il vettore di stato x_t :

$$x_t = \begin{pmatrix} x1_t \\ x2_t \\ x3_t = \dot{x}1_t \\ x4_t = \dot{x}2_t \end{pmatrix} \quad (3)$$

L'equazione (1) è chiamata *modello del movimento* (o *motion model*) e viene utilizzata per caratterizzare l'evoluzione della posizione partendo dai valori misurati di accelerazione tramite piattaforma IMU. Esso è il modello di riferimento che sarà utilizzato più spesso e ne verranno studiate le applicazioni e i limiti di utilizzo.

La relazione (2) prende il nome di *modello dell'osservazione* (*observation model*) e indica invece, le misure di posizione realizzate dal sistema di radiolocalizzazione UWB. Tali misure non saranno sempre disponibili e verranno utilizzate per compensare gli errori del modello (1).

2.1 Modello del movimento

I segnali di maggior importanza nella navigazione e nelle applicazioni di tracking sono legati alla posizione, alla velocità e all'accelerazione. Dalle equazioni classiche della cinematica dei corpi sappiamo che la derivata prima rispetto al tempo dello spostamento rappresenta la velocità, mentre la derivata seconda l'accelerazione ($\dot{p} = v$ e $\ddot{p} = a$). Quindi, per determinare la posizione, i valori di accelerazioni misurati durante il movimento e forniti in ingresso dalla piattaforma inerziale, devono essere integrati due volte.

$$v(t) = v_i + \int_0^t (a(t) - g) dt \quad (4)$$

$$p(t) = p_i + \int_0^t v(t) dt \quad (5)$$

dove v_i rappresenta la velocità iniziale e p_i la posizione iniziale. Si noti che ai valori di accelerazione $a(t)$ è stato sottratto il valore di accelerazione di gravità. Il processo appena descritto per determinare la posizione, è riportato nello schema in figura 2.1.

Assumendo costanti i valori di velocità v_o e a_o in un dato intervallo di tempo Ts , le relazioni (3) e (4) per ricavare la velocità v_f e la posizione p_f finale possono essere così riscritte:

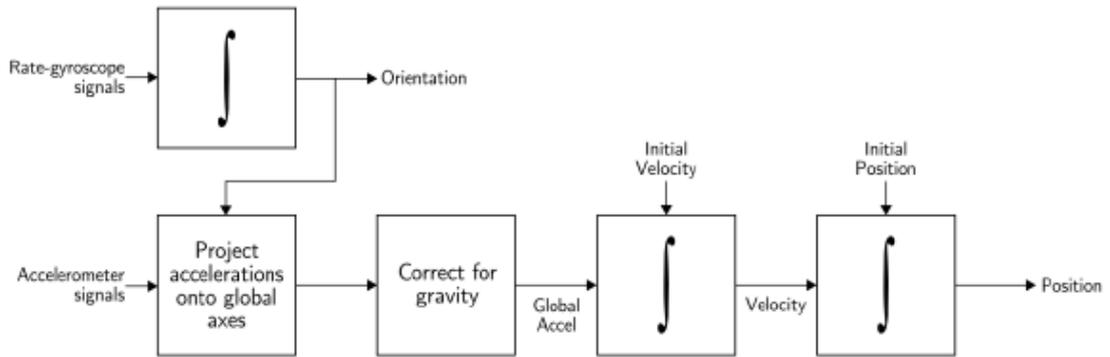


Figura 2.1 Algoritmo per la determinazione della posizione

$$v_f = v_i + a_o Ts \quad (6)$$

$$p_f = p_i + v_o Ts + \frac{1}{2} a_o Ts^2 \quad (7)$$

Le misure di accelerazione sono tipicamente affette da un offset (o bias) costante, pertanto la misura effettiva può essere espressa come:

$$a_{true,t}^{(1)} = a_t^{(1)} + \delta a_t^{(1)} \quad (8)$$

dove $a_t^{(1)}$ sono le misure effettuate e $\delta a_t^{(1)}$ rappresenta l'offset.

La posizione è estratta da un processo di calcolo a partire dall'accelerazione misurata, pertanto la presenza dell'offset su questa misura influenza il risultato finale. Quindi nel modello viene considerato anche la presenza di

questo errore. Le relazioni (5) e (6) vengono convertite in forma matriciale. [8]

$$\begin{pmatrix} p_{t+1}^{(1)} \\ v_{t+1}^{(1)} \\ \delta a_{t+1}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & Ts & \frac{Ts^2}{2} I \\ 0 & I & Ts I \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t^{(1)} \\ v_t^{(1)} \\ \delta a_t^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{Ts^2}{2} I \\ Ts I \\ 0 \end{pmatrix} a_t^{(1)} + \begin{pmatrix} \frac{Ts^3}{6} I \\ Ts^2 I \\ \frac{2}{Ts} I \end{pmatrix} f_t^{(1)} \quad (9)$$

nella quale:

I vettori formati dagli elementi $p_{t+1}^{(1)}, v_{t+1}^{(1)}, \delta a_{t+1}^{(1)}$ e $p_t^{(1)}, v_t^{(1)}, \delta a_t^{(1)}$ rappresentano rispettivamente lo stato attuale e lo stato precedente del sistema. Il primo risulta incognito il secondo è noto.

La prima matrice a secondo membro rappresenta *la matrice di transizione di stato* A. Essa definisce posizione e velocità in un certo istante, in assenza di ingressi.

La seconda rappresenta *la matrice di controllo* B_u e permette di inserire nello stato precedente i valori in ingresso (in questo caso di accelerazione) per determinare lo stato successivo del sistema. I valori di accelerazione rappresentano il vettore di controllo u_t definito nel paragrafo precedente.

La terza matrice rappresenta B_f e permette di inserire nel modello l'influenza delle forze incognite f_t che determinano il movimento del corpo.

Il modello appena descritto rappresenta uno strumento fondamentale nella stima della posizione, tuttavia questo è soggetto a disturbi ed errori non indifferenti, che possono mettere in discussione la stima stessa.

In primo luogo infatti è necessario considerare gli effetti dell'offset sulle misure di accelerazione, già considerati nel modello indicato nella (9). Inoltre i valori misurati dall'accelerometro sono affetti da errori di accuratezza, dovuti prevalentemente alla precisione dei sensori. Questi determinano un discostamento dei valori rilevati da quelli reali.

Entrambi gli errori vengono integrati due volte e causano, sulla stima finale, un errore complessivo direttamente proporzionale al tempo di integrazione (il loro effetto sulla posizione è già stato discusso nel paragrafo 1.5). A causa di questo e ai fenomeni di accumulazione degli errori citati, la stima diverge rapidamente con il passare del tempo e in pochi istanti di movimento.

In aggiunta, dal momento che i valori dovranno essere processati da un calcolatore, esiste anche un errore dovuto all'approssimazione dell'integrale tramite la regola dei rettangoli. Com'è già stato detto, per svolgere l'operazione di integrale, i valori di accelerazione si assumono costanti in un intervallo T_s , pari al tempo di acquisizione ed elaborazione di una singola misura. Nella realtà i valori di accelerazione si comportano diversamente e variano in maniera continua, pertanto questa approssimazione rappresenta una perdita di informazione.

L'insieme di tutti questi errori è il motivo principale per cui non si può affidare solo ed esclusivamente la stima ai valori misurati di accelerazione e al modello del movimento. Occorre definire un sistema in grado di correggere la posizione determinata quando gli errori iniziano ad essere troppo grandi.

Come vedremo, per risolvere questo problema verranno sfruttate le misure di posizione tramite radiolocalizzazione IR-UWB e il *filtro di Kalman*.

2.2 Filtro di Kalman

Nella pratica, la realizzazione di una stima di posizione si basa sulle misure reali, pertanto l'uscita di uno o più sensori è tipicamente affetta da rumore dovuto a vari fattori come disturbi, limiti costruttivi e quantizzazione dell'informazione. Nella realizzazione di uno stimatore dello stato in catena chiusa, in questo caso tempo continuo, risulta:

$$\hat{\dot{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B_u u(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (10)$$

la presenza del rumore è l'unica ragione che impedisce l'impiego di guadagni arbitrariamente alti e quindi di stime veloci e precise. Ci si è chiesti quindi se, conoscendo tutte le informazioni circa il rumore, è possibile scegliere il valore della matrice L in maniera ottima. Il *filtro di Kalman* è proprio l'elemento che riesce a soddisfare questa richiesta. [9]

Il filtro di Kalman è un set di equazioni matematiche che implementano uno stimatore del tipo predittore-correttore per determinare lo stato di un sistema lineare a partire da misurazioni indirette e incerte, ovvero quando le variabili di interesse possono essere misurate solo indirettamente. Le origini di tale filtro risalgono agli anni 60, infatti fu utilizzato nel programma Apollo per stimare la traiettoria della navicella dalla Terra alla Lune e

viceversa. Oggi trova spazio in applicazioni legate alla navigazione, in sistemi di visione a realtà aumentata e nell'elaborazione dei segnali. Consideriamo il sistema lineare continuo, dove $x(t)$ rappresenta il vettore di stato:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_u(t)u(t) + B_w(t)w(t) \quad (11)$$

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t) \quad (12)$$

L'espressione (12) riporta il modello dell'osservazione esposto all'inizio di questo capitolo. $H(t)$ è chiamata *matrice di osservazione* e ha il compito di modellare come vengono effettuate le misure di posizione, mentre $v(t)$ esprime i disturbi proprio su queste misure.

Il filtro di Kalman per fornire la soluzione cercata impone che vengano soddisfatte delle ipotesi. Infatti è necessario che $w(t)$ e $v(t)$ siano vettori di processi aleatori, dove ogni elemento è rappresentato da un processo aleatorio Gaussiano, stazionario, e a media nulla. Inoltre, i vettori $w(t)$ e $v(t)$ sono caratterizzati da matrici di covarianza rispettivamente denominate $Q(t)$ e $R(t)$.

Inoltre i rumori devono essere fra loro indipendenti e anche lo stato iniziale e deve essere rappresentato da una variabile casuale gaussiana di media e covarianza note.

Sotto queste ipotesi il filtro di Kalman è ottimo, nel senso che minimizza l'errore quadratico medio della stima, se il guadagno viene scelto come:

$$L(t) = P(t) H^T(t) V^{-1}(t) \quad (13)$$

dove $P(t)$ è la soluzione dell'equazione di Riccati

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)H^T(t)V^{-1}(t)H(t)P(t) + B_w(t)W(t)B_w^T(t) \quad (14)$$

con $P(t_0) = P_0$

e l'errore medio è rappresentato dalla:

$$E[e^T(t) e(t)] \quad (15)$$

dove $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ è la differenza fra la posizione vera e quella stimata

Il filtro di Kalman si adatta a risolvere il problema della stima dello stato anche di processi tempo discreti e tempo invarianti. In questo caso le equazioni (11) e (12) perdono la dipendenza dal tempo e risultano:

$$x_k = A x_{k-1} + B u_k + w_k \quad (16)$$

$$y_k = H x_k + v_k \quad (17)$$

Si definisce \hat{x}_k^- lo stato a priori stimato all'istante k sulla base della conoscenza del processo anteriore all'istante k e \hat{x}_k la stima dello stato a posteriori all'istante k , data la misura y_k di posizione allo stesso istante. Si definiscono rispettivamente gli errori di stima a priori e a posteriori come:

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (18)$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (19)$$

e le rispettive covarianze come:

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (20)$$

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (21)$$

Il filtro di Kalman stima lo stato del processo in certi istanti di tempo e quindi realizza un feedback sulla base delle misure rumorose.

Le equazioni del filtro di Kalman appartengono a due gruppi:

Il primo gruppo realizza la *predizione dello stato* e proietta in avanti lo stato corrente e la covarianza dell'errore al fine di ottenere una stima a priori per il successivo istante temporale. In particolare, partendo dall'istante temporale $k - 1$, si stima la posizione e l'errore all'istante k .

$$\hat{x}_k^- = A \hat{x}_{k-1}^- + B u_k \quad (22)$$

$$P_k^- = A P_{k-1}^- A^T + Q \quad (23)$$

Q rappresenta la matrice di covarianza w_k e si calcola come [10]:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} I \\ T_s I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{\dot{x}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{y}}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} I \\ T_s I \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

dove $\sigma_{\dot{x}_1}^2$ e $\sigma_{\dot{x}_2}^2$ denotano la varianza sull'accelerazione lungo la dimensione $x1$ e $x2$, T_s il tempo fra due misure consecutive e I la matrice identità 2×2 .

Il secondo gruppo implementa la fase di *aggiornamento* dello stato e realizza la retroazione, cioè incorpora le nuove misure nella stima a priori per ottenere una stima a posteriori migliorata. Prima viene calcolata la matrice dei guadagni di Kalman L_k , quindi le misure y_k sono usate per generare una stima dello stato a posteriori. Alla fine viene calcolata a posteriori la covarianza dell'errore.

$$L_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (25)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + L_k (y_k - H \hat{x}_k^-) \quad (26)$$

$$P_k = (I - L_k H) P_k^- \quad (27)$$

R è la matrice di covarianza di v_k calcolata come [10] :

$$R = \text{diag}(\sigma_{dA1,k}^2, \dots, \sigma_{dAL,k}^2) \quad (28)$$

dove $\sigma_{dAj,k}^2$ rappresenta la varianza della misura di posizione per il j -esimo nodo su un numero totale di nodi pari a L .

Dopo ciascuna coppia predizione-correzione, il processo è ripetuto con la precedente stima a posteriori per proiettare o predire la nuova stima a priori.

2.3 Modello per l'emulazione del movimento e delle misure di posizione su Matlab

Dopo aver studiato un modello adatto per stimare la posizione di un corpo in movimento e definito lo stimatore-correttore tramite l'uso del filtro di Kalman, occorre realizzarli entrambi nella pratica. Per fare questo, utilizzeremo la piattaforma Matlab, che permetterà di scrivere un codice per implementare il processo di stima e correzione. Nelle prove effettuate non studieremo il movimento vero e proprio di un corpo, ma ne verranno simulati i suoi spostamenti, dai quali saranno ricavati poi, i valori di accelerazione (simulando così le misure di un accelerometro). In questo paragrafo è riportato il codice Matlab che realizza una singola traiettoria casuale.

Inizialmente definiamo i parametri principali, da riga 19 a 40 di figura 2.2. w_0 è il termine che esprime l'imprevedibilità della traiettoria e compare poi nel calcolo della matrice di covarianza Q del processo aleatorio w , che simula le forze del movimento. Δ e σ rappresentano rispettivamente le deviazioni standard dei disturbi sulle misure di accelerazione e quelle di posizione. dt è il tempo che intercorre fra due misure consecutive. Successivamente viene definita la matrice di transizione di stato A utilizzata nel modello per realizzare la traiettoria del corpo in movimento, H la matrice delle osservazioni e infine la matrice di covarianza R del processo v che simula i disturbi sulle misure di posizione. Alla riga 41 viene fissato il numero di step della simulazione (`sim_steps`).

```
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parametri iniziali %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 w0=1; % parametro che moltiplica la matrice di
20 % covarianza di wk.
21 sigma=0.5; % dev standard disturbi sulle misure IR-UWB
22 delta=0.015; % dev standard disturbi delle misure dell'accelerometro
23 dt=0.5; % tempo fra due misure (Ts nella teoria)
24
25 A = [1 0 dt 0; % A è la matrice di transizione di stato
26 0 1 0 dt;
27 0 0 1 0;
28 0 0 0 1];
29
30 Q = w0*[dt^3/3 0 dt^2/2 0; % matrice di covarianza associata
31 0 dt^3/3 0 dt^2/2; % al rumore di processo e alle forze incognite
32 dt^2/2 0 dt 0;
33 0 dt^2/2 0 dt];
34
35 H = [1 0 0 0; % H è la matrice delle osservazioni
36 0 1 0 0];
37
38 R = sigma^2*eye(2); % matrice di covarianza associata
39 % al rumore delle misure IR-UWB
40
41 sim_steps=200; % numero di campioni della realizzazione
```

Figura 2.2: Emulazione del movimento, parametri iniziali

Una volta definiti i parametri iniziali, si può procedere all'emulazione di una traiettoria come esposto in figura 2.3. Vengono definiti prima di tutto (riga 58 e 59) la matrice X contenente i vettori di stato, quindi le coordinate della traiettoria e la matrice Y delle misurazioni di posizione.

Nel ciclo *for* dalla riga 63 a 65 viene generato inizialmente il processo aleatorio w che simula, per ogni elemento del vettore di stato, un valore casuale su una distribuzione di probabilità gaussiana. Tale processo viene poi sommato al modello del movimento, ossia al prodotto fra la matrice A e il vettore di stato iniziale x . In questo modo vengono imposti, punto per punto fino a *sim_steps*, dei valori delle coordinate x_1 e x_2 del vettore di stato, realizzando così una traiettoria completa.

Dalla riga 66 a 68 è creato il processo aleatorio v per sommare al modello delle misure $H \cdot x$, i disturbi e le imprecisioni del sistema di radiolocalizzazione. Infine alla riga 71 e 73, il vettore di stato x e quello delle misure di posizione y , vengono inseriti nelle rispettive matrici X e Y definite inizialmente.

```

57
58 - X = zeros(4,sim_steps); %matrice dei vettori di stato della traiettoria reale
59 - Y = zeros(2,sim_steps); %matrice delle misure di posizione
60
61
62 - for n=1:sim_steps
63     w = chol(Q)'*randn(size(A,1),1); % genero un processo aleatorio per simulare
64                                     %le forze incognite che determinano il movimento
65     x = A*x + w; %w viene sommato al vettore di stato
66     v=sigma*randn(2,1); %genero un rumore v modellato tramite una processo
67                         %aleatorio gaussiano con dev standard sigma.
68     y = H*x + v; %aggiungo v alle misure di posizione, simuliamo
69                 %così i disturbi sulle misure.
70
71     X(:,n) = x; %il vettore di stato x viene inserito nella matrice
72               %della traiettoria reale
73     Y(:,n) = y; %la misura di posizione rumorosa viene inserita
74               %nella matrice delle misure
75 - end

```

Figura 2.3: Emulazione del movimento

Il codice mostrato in figura 2.4 mostra invece come, a partire dai valori delle coordinate dei vettori di stato, è possibile realizzare una simulazione di misure dei valori di accelerazione. Come è già stato detto, derivando due volte lo spostamento si determina l'accelerazione manifestata durante lo stesso movimento.

Alla riga 80 e 83 vengono prelevati separatamente i valori delle coordinate x_1 e x_2 ed inseriti nei vettori $P1$ e $P2$.

Applicando l'operatore *diff* (riga 81 e 84) si realizza la derivata elemento per elemento dei vettori $P1$ e $P2$, determinando così la velocità puntuale su entrambe le direzioni. Fra la riga 89 e 95 si traslano tutti gli elementi dei

vettori delle velocità $V1$ e $V2$ appena ottenuti, questo perché l'operatore *diff* causa un disallineamento temporale (legato intrinsecamente a come viene svolta l'operazione di derivata).

```

77
78     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% calcolo i valori di accelerazione %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
79
80 -   P1=X(1,:);           %vengono prelevati i valori di posizione rispetto a x1
81 -   V1=1/dt*diff(P1);   %calcolo dei valori di velocità rispetto alla dimensione x1
82
83 -   P2=X(2,:);           %vengono prelevati i valori di posizione rispetto a x2
84 -   V2=1/dt*diff(P2);   %calcolo dei valori di velocità rispetto alla dimensione x2
85
86 -   V1_t=zeros(1,sim_steps); %definisco dei vettori di velocità traslati
87 -   V2_t=zeros(1,sim_steps);
88
89 -   for n=1:(sim_steps-1) %processo per traslare tutti i valori di velocità
90 -       V1_t(n+1)=V1(n);   %avanti di uno step n per allineare i valori rispetto
91 -       V2_t(n+1)=V2(n);   %al tempo
92 -   end
93
94 -   V1_t(1)=(P1(1)-0)/dt; %completo il nuovo vettore delle velocità
95 -   V2_t(1)=(P2(1)-0)/dt; %con il valore ottenuto rispetto al primo istante
96

```

Figura 2.4: Determinazione valori di velocità

Il processo appena descritto viene reiterato, figura 2.5, eseguendo la derivata della velocità e ottenendo così i valori di accelerazione legati effettivamente agli spostamenti svolti dal corpo in movimento. I valori ottenuti sono contenuti nel vettore $A1_t$ e $A2_t$.

```

98
99 -   A1=1/dt*diff(V1_t);   %calcolo dei valori di accelerazione rispetto alla dimensione x1
100 -   A2=1/dt*diff(V2_t);  %calcolo dei valori di accelerazione rispetto alla dimensione x2
101
102 -   A1_t=zeros(1,sim_steps); %definisco dei vettori di accelerazione traslati
103 -   A2_t=zeros(1,sim_steps);
104
105 -   for n=1:(sim_steps-1) %processo per traslare tutti i valori di accelerazione
106 -       A1_t(n+1)=A1(n);   %avanti di uno step n per allineare i valori rispetto
107 -       A2_t(n+1)=A2(n);   %al tempo
108 -   end
109
110 -   A1_t(1)=(V1_t(1)-0)/dt; %completo il nuovo vettore delle accelerazioni
111 -   A2_t(1)=(V2_t(1)-0)/dt; %con il valore ottenuto rispetto al primo istante
112

```

Figura 2.5: Determinazione dei valori di accelerazione

2.4 Implementazione del filtro di Kalman su Matlab

Per realizzare il filtro di Kalman, occorre riscrivere il set di istruzioni mostrate nel paragrafo 2.2, sottoforma di codice Matlab.

Prima di applicare il filtro di Kalman, vengono imposte le condizioni iniziali dello stato stimato m e della precisione P sulla stima come esposto in figura 2.6. Il primo è imposto inizialmente uguale al vettore di stato contenente tutti zeri (riga 237), il secondo alla matrice identità di dimensione 4x4.

Alla riga 242 viene creata prima la matrice mv che dovrà contenere i vettori di stato stimati dal filtro di Kalman, poi alla riga 243 viene creata Pv , che conterrà i vettori di precisione determinati a seguito del processo di correzione.

```
233 %%  
234 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FILTRO DI KALMAN %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
235 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
236  
237 - m0 = [0;0;0;0];           % posizione iniziale nota a priori  
238 - P0 = eye(4);             % valore iniziale precisione della stima  
239  
240 - m = m0;  
241 - P = P0;  
242 - mv = zeros(4,sim_steps); % matrice contenente la stima punto per punto  
243 - Pv = zeros(4,4,sim_steps); % matrice contenente la precisione della stima
```

Figura 2.6: Condizioni iniziali filtro di Kalman

Successivamente, in figura 2.7, è mostrato come viene scritto il set di istruzioni per realizzare il filtro di Kalman. Nell'implementazione del filtro, inizialmente, si determina la stima e la sua precisione a priori (riga 246 e 247).

Sfruttando le misure di posizione contenute in $Y(:,n)$ e facendo la differenza con lo stato stimato a priori, si determina l'innovazione (come mostrato alla riga 249). Calcolando il guadagno di Kalman e utilizzando l'innovazione, si corregge la posizione determinata in precedenza ottenendo la stima a posteriori (riga 251-253). Questa viene inserita nella matrice mv che raccoglie le coordinate di posizione stimate durante tutto il movimento.

```

244 -
245 - □ for n=1:(sim_steps)
246 -     m = A*m;           % stima della posizione a priori
247 -     P = A*P*A' + Q;   % calcolo della precisione della stima
248 -
249 -     v=(Y(:,n) - H*m); % calcolo dell'innovazione
250 -     S = H*P*H' + R;
251 -     K = P*H'/S;      % calcolo guadagno di Kalman
252 -     m = m + K*v;     % stima della posizione a posteriori
253 -     P = P - K*S*K';  % P calcolo della precisione a posteriori
254 -
255 -     mv(:,n) = m;     % lo stato a posteriori viene inserito nella matrice della stima
256 -     Pv(:,:,n) = P;  % la precisione viene inserita nella matrice corrispondente
257 -
258 - end
259 -

```

Figura 2.7: Filtro di Kalman

2.5 Emulazione delle discontinuità delle misure di posizione.

Dopo aver studiato, nel paragrafo 2.1, un modello adatto per stimare la posizione di un corpo in movimento, bisogna cercare di implementarlo nella pratica. Per fare questo, così come per il filtro di Kalman, utilizzeremo la piattaforma Matlab con la quale andremo a integrare due volte i valori di accelerazione forniti in ingresso.

L'implementazione di un codice Matlab che simuli il comportamento del sistema per la stima di posizione, è di fondamentale importanza per lo studio della navigazione inerziale. Infatti la condizione di migliore stima si verifica quando possiamo applicare sempre il filtro di Kalman, in quanto come è stato detto esso ha il ruolo di correttore. In questo contesto bisogna immaginare uno scenario nel quale le correzioni (e quindi le misure di posizione) non siano sempre disponibili, in modo tale da determinare la validità e i limiti di funzionamento delle sole misure inerziali. Per questo occorre applicare delle modifiche al codice, per emulare la discontinuità nella ricezione dei segnali contenenti la posizione esatta.

Negli intervalli di tempo in cui non sono presenti le misure di posizione, occorre utilizzare il modello del movimento espresso dalla relazione (9) definita nel paragrafo 2.1. Per semplicità non consideriamo i contributi dell'offset δa_t (in quanto richiederebbe un'analisi più approfondita) e il

vettore delle forze incognite f_t in quanto già implicitamente considerato nel vettore delle accelerazioni misurate a_t . Inoltre esplicitiamo i vettori x_t, x_{t+1} e le matrici identità I di dimensione 2×2 . Otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x1_{t+1} \\ x2_{t+1} \\ v1_{t+1} \\ v2_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Ts & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Ts \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1_t \\ x2_t \\ v1_t \\ v2_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ts^2/2 & 0 \\ 0 & Ts^2/2 \\ Ts & 0 \\ 0 & Ts \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a1_t \\ a2_t \end{pmatrix} \quad (29)$$

Nel seguito analizziamo la parte di codice (figura 2.8) per realizzare proprio il modello sopra descritto, mostrando come integrare anche la parte di correzione tramite il filtro di Kalman.

Come primo step alla riga 154, vengono racchiusi in un singolo elemento i valori di accelerazione misurati dalla piattaforma inerziale. Si forma così la matrice Acc contenente i vettori $A1_t$ (l'insieme dei valori misurati rispetto alla prima coordinata $x1$) e $A2_t$ (quelli misurati rispetto a $x2$). Ciascuno di questi vettori ha un numero di misure pari a sim_steps , ossia il numero di dati che vengono acquisiti in ingresso.

```

150
151      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% STIMA DELLA POSIZIONE CON %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
152      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% VALORI DI ACCELERAZIONE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
153
154 -   Acc=[A1_t;           % Il vettore Acc contiene i valori di accelerazione
155         A2_t];         % A1_t rappresenta i valori riferiti alla coordinata x1,
156                       % A2_t quelli riferiti a x2
157
158 -   As = [1 0 dt 0;    % As è la matrice di transizione di stato
159          0 1 0 dt;
160          0 0 1 0;
161          0 0 0 1];
162
163 -   Bs = [dt^2/2 0;   % Bs rappresenta la matrice di controllo
164          0 dt^2/2 ;
165          dt  0  ;
166          0  dt  ];
167
168 -   Ha = [1 0;        % Ha è la matrice utilizzata per sporcare le misure
169          0 1 ];      % di accelerazione con il rumore
170

```

Figura 2.8: Definizione matrici iniziali

Successivamente, dalla riga 158 alla 169 (sempre figura 2.8), vengono definite le varie matrici che saranno utilizzate nel modello del movimento. As rappresenta la matrice di transizione di stato mentre Bs la matrice di

controllo. Il dt indica invece il tempo fra una misura di accelerazione e l'altra e rappresenta il tempo che nel modello da noi utilizzato è stato chiamato T_s .

Nella parte di codice che va dalla riga 186 alla 191 (figura 2.9) vengono sommati gli effetti del rumore. Questo è realizzato a parte perché i valori di accelerazione sono stati calcolati senza la presenza dei disturbi, al contrario di quello che accade negli accelerometri. Pertanto per simulare una situazione reale viene aggiunto del rumore modellato tramite una variabile aleatoria gaussiana, con deviazione standard di valore δ .

```

183
184     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% aggiuntata disturbi sui valori di accelerazione %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
185
186 -   Acc_vera=zeros(2,sim_steps);           % nuovo vettore delle accelerazioni
187
188 -   for n=1:(sim_steps)                   % aggiunta dei disturbi sui valori
189 -       nu=delta*randn(2,1);              % in ingresso
190 -       Acc_vera(:,n)=Ha*Acc(:,n)+nu;
191 -   end
192

```

Figura 2.9: Aggiunta disturbi sulle misure di accelerazione

Prima di passare alla vera e propria stima della posizione occorre definire le condizioni iniziali del sistema, come mostrato dalla riga 196 alla 202 della figura 2.10. Si assume che il corpo in movimento parta dall'origine, pertanto le variabili x_{1_t} , x_{2_t} , v_{1_t} , v_{2_t} risultano poste tutte a zero. Allo stesso modo la matrice che contiene i valori di precisione della stima, nello stato iniziale, è posta uguale a $eye(4)$ ossia la matrice identità di dimensione 4.

```

193
194     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% processo di stima %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
195
196 -   coord0 = [0;0;0;0];                   % valore di posizione iniziale
197 -   prec0 = eye(4);                       % valore iniziale precisione della stima
198
199 -   coord = coord0;
200 -   prec = prec0;
201 -   coordvector = zeros(4,sim_steps);     % vettore contenente lo stato stimato
202 -   precvector = zeros(4,4,sim_steps);    % vettore contenente la precisione della stima
203

```

Figura 2.10: Condizioni iniziali del processo di stima

Successivamente si può procedere alla stima della posizione (esposta in figura 2.11). Alla riga 204 il ciclo *for* preleva i valori di accelerazione (in numero totale pari a sim_steps), i quali vengono poi utilizzati alla riga 205

per determinare lo stato presente tramite il modello del movimento espresso dalla (28).

Dalla riga 208 viene realizzato il processo di correzione della stima attraverso le misure di posizione e il filtro di Kalman, simile a quello realizzato nel paragrafo precedente. La condizione imposta attraverso l'*if* permette di fare intervenire il processo di correzione solo in certi istanti (nell'esempio per $n=50$ ossia dopo 5 sec dall'avvio) in modo da realizzare la discontinuità nelle misure di posizione.

```

203
204 - for n=1:(sim_steps)
205 -     coord = As*coord+B*Acc_vera(:,n); %stima dello stato attraverso il modello del movimento
206 -     prec = As*prec*As' + Qs;
207
208 -     if( (n>50 && n<=70) || (n>150 && n<=170) ) % condizione che attiva il processo di correzione
209 -                                     % tramite l'uso del filtro di Kalman
210 -     v=(Y(:,n) - Hs*coord); % calcolo dell'innovazione
211 -     S = Hs*prec*Hs' + Rs;
212 -     K = prec*Hs'/S; % calcolo del Kalman gain
213 -     coord = coord + K*v; % nuova posizione
214 -     prec = prec - K*S*K'; % P tiene conto dell'accuratezza della stima!
215
216 -     coordvector(:,n) = coord; % lo stato stimato tramite Kalman viene aggiunto a coordvector
217 -     precvector(:,n) = prec; % l'accurazetta della stima viene inserita in precvector
218
219 -     else
220 -     coordvector(:,n) = coord; % lo stato stimato tramite il modello del movimento viene aggiunto
221 -     % a coordvector
222 -     precvector(:,n) = prec; % l'accurazetta della stima viene inserita in precvector
223
224 -     end
225 - end

```

Figura 2.11: Processo di stima con discontinuità delle misure di posizione

La posizione determinata attraverso questo processo di calcolo viene poi inserita nella matrice *coordvector*, che rappresenta l'insieme degli stati stimati punto per punto durante il movimento del corpo.

Capitolo 3

Risultati numerici

In questo capitolo vengono esposti e analizzati i dati ricavati dalle simulazioni, ottenuti sfruttando la fusione fra le due tecniche di localizzazione (data fusion) viste nei capitoli precedenti. Lo scopo dello studio è quello di verificare la validità del modello per la stima della posizione e sotto quali condizioni esso garantisce un errore accettabile. In particolare si cerca la situazione migliore in cui applicare la radiolocalizzazione IR_UWB, abbinata al filtro di Kalman, con la quale correggere le stime di posizione.

L'elemento che permette di giudicare il processo di stima è rappresentato dall'errore calcolato proprio su quest'ultima.

3.1 Calcolo dell'errore

Siccome il movimento di un corpo è aleatorio, la valutazione dell'errore può essere solo di tipo probabilistico e deve essere svolta su un insieme molto ampio di stime (metodo di Monte Carlo). Per fare questo si sfrutta l'*errore quadratico medio* (Mean Squared Error o MSE). Esso indica la discrepanza quadratica media fra i valori dei dati osservati ed i valori dei dati stimati e permette di valutare la qualità di uno stimatore. La formula per calcolarne il valore è la seguente:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{n} \quad (1)$$

dove x_i rappresenta l' i -esima posizione effettiva all'interno della stessa traiettoria, \hat{x}_i la stima di posizione corrispondente effettuata, mentre n è il numero totale di misure effettuate durante il movimento del corpo.

Un ulteriore indice è la cosiddetta *radice dell'errore quadratico medio* (Root mean square Error o RMSE). Entrambi gli errori appena definiti non

sono quantità adimensionali, bensì assumono l'unità di misura della grandezza considerata (RMSE) ed il suo quadrato (MSE).

Come è già stato detto, il movimento del corpo è casuale, pertanto certe traiettorie potrebbero favorire il modello della stima, mentre altre potrebbero sfavorirlo. Dunque, per avere una visione certa, si realizzano più traiettorie diverse (in numero pari a M) con il metodo di Monte Carlo e se ne calcolano i vari MSE. Mediando tutti questi valori si ottiene il MSE_{medio}

$$MSE_{medio} = \frac{\sum_{j=1}^M MSE_j}{M} \quad (2)$$

dove MSE_j rappresenta il valore dell'MSE calcolata sulla j -esima traiettoria mediante la (1). Per far in modo che l'errore finale sia espresso in metri, calcoliamo la radice quadrata della quantità definita in precedenza e la denominiamo $RMSE_{medio}$.

$$RMSE_{medio} = \sqrt{MSE_{medio}} \quad (3)$$

$RMSE_{medio}$ è il valore di errore che prenderemo in considerazione nelle analisi effettuate nei prossimi paragrafi e sarà determinato su un numero M realizzazioni pari a 100.

3.2 Scenario di riferimento

Per avere un'idea qualitativa di come agisca la tecnica di data fusion sulla stima di posizione, è necessario visualizzare una realizzazione di questo processo. Per farlo, viene utilizzato il codice Matlab esposto nel capitolo 2. In tabella 3.1 vengono riportati i parametri iniziali di default per tutte le simulazioni, successivamente per studiarne il comportamento se ne varieranno i valori.

<i>sim_steps</i>	<i>Numero di passi della simulazione</i>	100
<i>dt</i>	<i>Tempo di acquisizione</i>	0,1 sec
<i>wo</i>	<i>Imprevedibilità della traiettoria</i>	1
<i>delta</i>	<i>Errore misure accelerazione</i>	0,015 m/s ²
<i>sigma</i>	<i>Errore misure di posizione</i>	0,5 m

Tabella 3.1

Di seguito viene definito il significato dei parametri appena fissati. Il numero sim_steps rappresenta la quantità totale dei passi della simulazione, dt il tempo di acquisizione (passo di simulazione), con questi due dati la durata del processo di movimento è pari a $sim_steps \cdot dt$, in tale intervallo di tempo la piattaforma rileva gli spostamenti e ricostruisce la traiettoria punto per punto. Il parametro w_0 rappresenta l'imprevedibilità della traiettoria emulata e modella l'ampiezza dell'intervallo in cui avvengono gli spostamenti. Successivamente vengono definiti il parametro $delta$, deviazione standard dei disturbi sulle misure di accelerazione (si misura in m/s^2) e $sigma$, la deviazione standard sulle misure di posizione (misurata in m). Inoltre, sempre per la stessa simulazione, supponiamo una situazione in cui ci siano 2 processi di correzione (presenza delle misure dal sistema IR-UWB), ciascuno di durata pari a 1 secondo. Il primo viene effettuato dopo 3 secondi dalla partenza, il successivo dopo 7 secondi.

Lanciando la simulazione con i dati appena fissati otteniamo l'andamento riportato in figura 3.1.

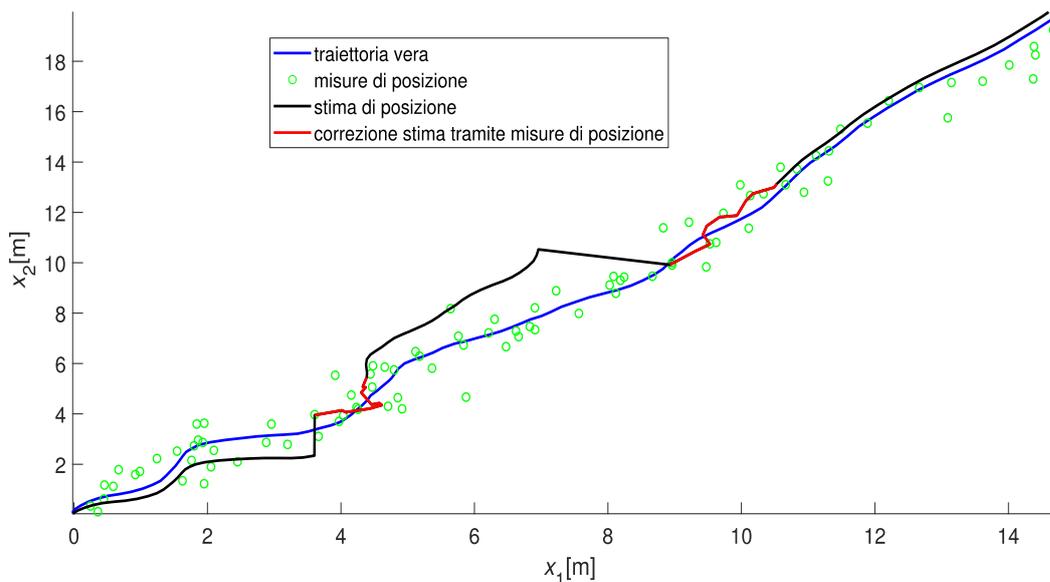


Figura 3.1: Esempio di traiettoria reale, della stima e delle correzioni tramite misure di posizione

L'esempio realizzato, replica il processo di localizzazione di un corpo in movimento all'interno di un ambiente in cui è presente un sistema IR-UWB, che fornisce misure di posizione molto accurate. Quando il corpo entra nel campo di ricezione di tali misure, fornite dal sistema IR_UWB, si riesce a correggere la stima di posizione. Quando questo non avviene, si ricorre alla stima realizzata tramite i valori misurati di accelerazione, la

quale, come sappiamo, è affetta da deriva e tende a perdere in accuratezza con il passare del tempo.

In blu è riportata la traiettoria reale di un corpo in movimento, l'asse x_1 rappresenta le coordinate di posizione rispetto alla prima dimensione, l'asse x_2 quelle riferite alla seconda dimensione (infatti si suppone che il movimento sia lungo solo due dimensioni).

In verde sono rappresentate le misure di posizione affette da disturbi.

La parte della traiettoria colorata in nero rappresenta la stima in assenza di misure di posizione, quindi basata solo da misure di accelerazione, appare evidente che essa si discosta sempre di più da quella reale con il procedere del movimento.

La parte in rosso corrisponde agli istanti temporali nei quali è presente la misura di posizione dal sistema IR-UWB, è chiaro che esse riavvicinano la stima alla traiettoria reale, apportando un miglioramento nella precisione finale.

Per valutare e comprendere come migliora la stima della posizione in funzione delle correzioni, in figura 3.2 è riportato l'andamento dell'errore durante il movimento. In questo caso l'errore, è calcolato semplicemente come la differenza assoluta fra la posizione vera e quella stimata.

L'andamento dell'errore, mappato separatamente per i due assi, x_1 (in blu) e x_2 (in rosso), è riportato nel grafico 3.2:

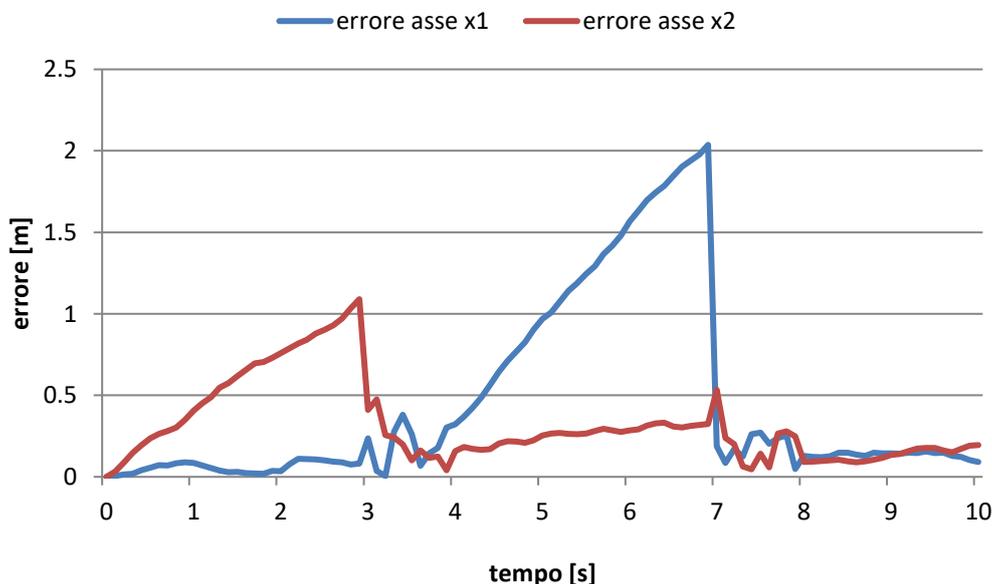


Figura 3.2: Andamento dell'errore in funzione del tempo rispetto ai due assi x_1 e x_2

Si nota che in prossimità degli intervalli in cui si realizza la correzione con il filtro di Kalman, l'errore cala notevolmente, per poi tornare a crescere quando si esce dalla zona in cui si ricevono più le misure di posizione.

A causa del contributo positivo che il processo di correzione fornisce alla stima, risulta importante valutare con accuratezza le situazioni in cui effettuare questi processi. Nei paragrafi seguenti viene effettuata proprio questa analisi.

3.3 Influenza del numero di correzioni sulla stima di posizione

In questo paragrafo si valuta l'influenza che hanno il numero e la durata delle correzioni, sulla stima della posizione. Chiaramente, ci aspettiamo che all'aumentare del numero di volte in cui il corpo è esposto al sistema IR-UWB, e quindi sia possibile avere misure di posizione precise, l'errore complessivo della stima di posizione diminuisca. I grafici ricavati nel seguito quantificano questo miglioramento.

Per prima cosa bisogna definire i dati della simulazione. Rispetto allo scenario visto in precedenza incrementiamo il numero *sim_steps* dei passi della simulazione portandolo a 600, in modo tale da aumentare la durata complessiva del movimento. I parametri *wo*, *delta*, *sigma* e *dt* vengono invece lasciati invariati.

In questo caso studiamo il comportamento dell'errore anche in funzione della durata delle correzioni. Occorre pertanto, definire il tempo di esposizione al sistema di radiolocalizzazione, che chiameremo *Te*. Esso può dipendere dalla velocità con cui si muove la piattaforma, oppure dalla portata dei segnali radio. Il grafico in figura 3.3 riporta l'andamento dell'errore nel caso $Te=1\text{ sec}$ e $Te=2\text{ sec}$

La linea in verde in figura 3.3 mostra il valore dell'errore della stima nella situazione migliore, ossia quando le misure di posizione sono sempre disponibili in ogni intervallo, ed intervengono in modo continuo nella correzione della stima effettuata con le misure inerziali. Questo è un riferimento, ci permette di capire quanto ci discostiamo dal caso ottimo e nella nostra situazione assume il valore di 0.39 m .

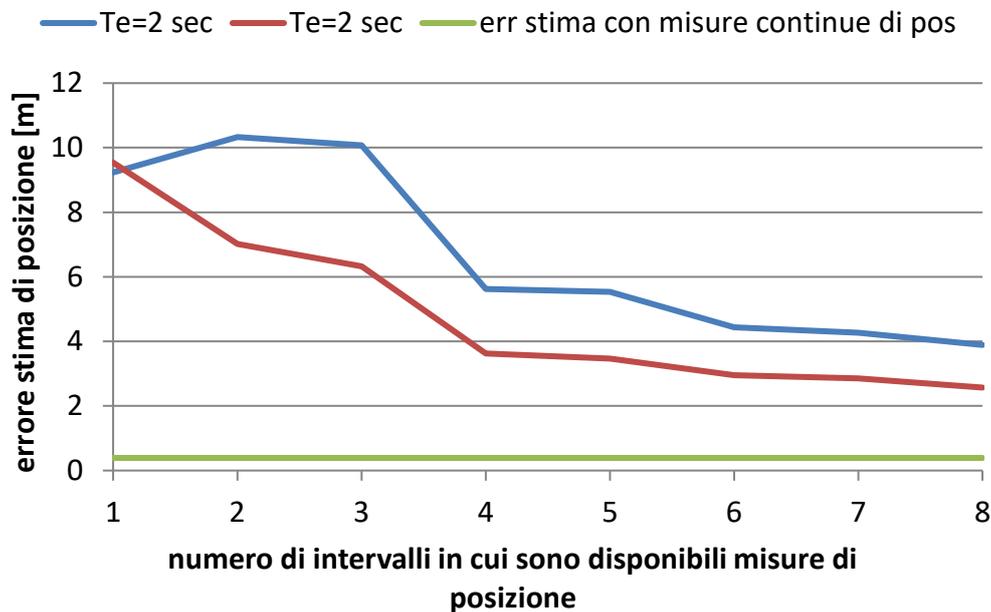


Figura 3.3: Andamento dell'errore in funzione del numero di correzioni e del tempo T_e nel caso $sim_steps=600$

L'asse delle ordinate tiene traccia dell'andamento dell'errore complessivo sull'insieme delle stime, calcolato come $RMSE_{medio}$ su un numero di realizzazioni pari a 100. Sull'asse delle ascisse, invece, troviamo il numero delle misure di posizione disponibili e quindi di correzioni della stima. Esse vengono distribuite ad intervalli regolari su tutto il processo. Ad esempio, quando viene svolta una sola correzione, essa avviene a metà del processo, ossia dopo 30 secondi dall'inizio del movimento. Quando sono svolte due misure, la prima è effettuata a 15 secondi dall'inizio, la seconda dopo altri 30 secondi.

L'analisi del grafico permette di concludere per il caso $T_e=1\ sec$ che :

- Un numero ristretto di correzioni, causa inaspettatamente un aumento (anche se di lieve entità) dell'errore sulla stima rispetto al caso in cui venga utilizzato solo il modello.
- Per un numero di correzioni pari a 3 o 4, si riesce a dimezzare l'errore iniziale, passando da un'imprecisione di circa 10 m ad una di 5m.
- Aumentando ulteriormente il numero di misure si assiste ancora ad un miglioramento della stima, ma molto meno marcato. L'errore continua ad attestarsi intorno ai 4m anche per un numero di correzioni pari a 7.

Mentre per il caso $T_e=2 \text{ sec}$:

- Non si presenta più il comportamento anomalo che si verificava inizialmente nel caso precedente. Infatti ora, anche un numero piccolo di misure e correzioni provoca da subito una diminuzione dell'errore della stima.
- In questo caso bastano 4 misure di posizione, effettuate sempre a intervalli regolari, per far scendere l'errore sotto il valore di $4m$. Nel caso precedente ne servivano ben 7.
- Con un numero di correzioni pari a 8 si riesce a raggiungere una precisione di circa $2.5 m$.

La stessa analisi può essere fatta anche per un percorso più lungo, in modo da verificare se le correzioni agiscono sempre allo stesso modo sulla precisione della stima. Mantenendo gli stessi valori sui parametri principali e fissando un tempo di esposizione pari a $T_e=2 \text{ sec}$ (in quanto $T_e=1 \text{ sec}$ darebbe comunque risultati peggiori), variamo il valore di sim_steps ponendolo uguale a 1000 . L'andamento dell'errore è riportato nel seguente grafico dalla linea in blu, mentre in rosso è rappresentata la precisione quando sono utilizzate solo le misure di posizione.

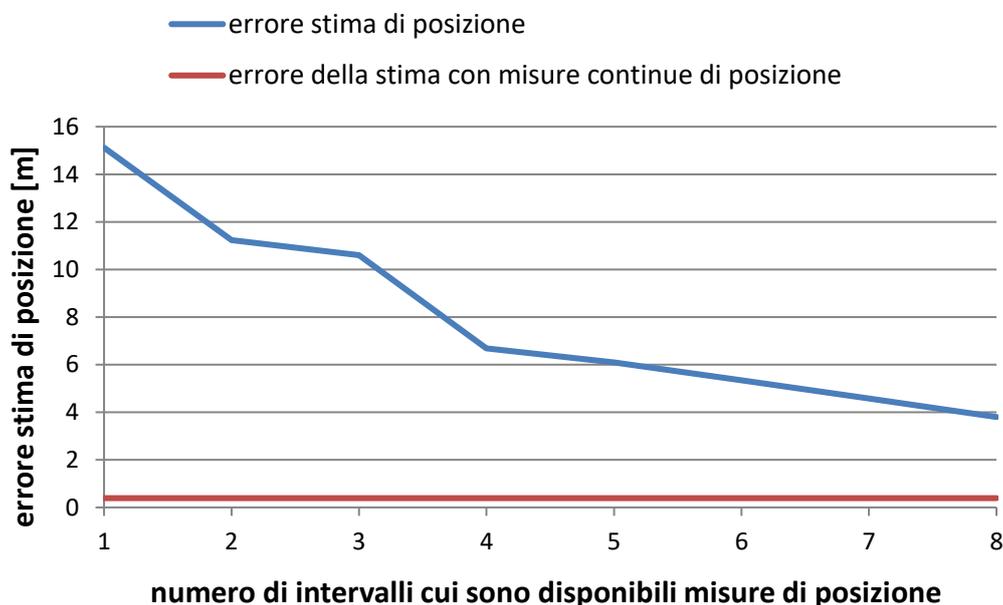


Figura 3.4: Andamento dell'errore in funzione del numero di correzioni nel caso $sim_steps=1000$

Dunque, per un percorso più lungo, si può affermare che:

- L'errore iniziale, in assenza di correzioni è aumentato. Sul percorso di 60 secondi avevamo un errore iniziale intorno ai 9 metri, mentre per un nuovo percorso di durata di circa 1 minuto e 60 secondi (1000 *sim_steps*), l'errore nella fase iniziale si attesta sui 15 metri.
- Il comportamento dell'errore è simile a quello tenuto nel percorso di minore durata, pertanto si può affermare che le correzioni hanno lo stesso impatto anche in percorsi più lunghi.
- Anche se l'errore iniziale è molto maggiore, con lo stesso numero di correzioni si possono ottenere precisioni simili a quelle dei casi precedenti. Ad esempio nell'ultimo caso, con 7 processi di aggiustamento della stima si ottiene un errore pari a 3.8 m, solo 1 m di differenza rispetto ad un percorso di 1 minuto più corto.

3.4 Compromesso fra numero e durata delle correzioni

Nel paragrafo precedente è stato mostrato come il numero delle correzioni e la loro durata, svolgano un ruolo fondamentale nella precisione finale della stima di posizione. Questi due aspetti ci spingono a valutare se sia meglio avere poche misure di posizione ma più durature, oppure misure più frequenti ma dalla durata minore.

Il numero delle correzioni è intrinsecamente correlato con l'estensione del sistema IR-UWB che fornisce le misure di posizione precise, ossia con la quantità di nodi fisici che permettono al sistema in movimento di ricevere misure. Al contrario, la durata è legata alla complessità dello scenario considerato in termini di ostacoli come muri.

Per risolvere il quesito che ci siamo posti, dobbiamo confrontare le due differenti situazioni a parità del tempo complessivo di esposizione al sistema IR-UWB. Fissiamo quindi per il *caso 1* due misure di posizione dalla durata di 10 secondi l'una, la prima dopo 12,5 secondi mentre la seconda a 37,5 secondi dalla partenza. Per il *caso 2* invece, effettuiamo 20 processi di correzione distribuiti ad intervalli regolari, dalla durata ciascuno di 1 secondo. I parametri principali della simulazione vengono riportati mantenuti come nei casi precedenti se non per *sim_steps* che è assunto pari a 500.

Realizzando un numero di traiettorie pari a 100 per entrambi i casi otteniamo i seguenti valori dell' $RMSE_{medio}$ riportati nella tabella 3.2.

$RMSE_{medio}$	
Caso 1	2,86 m
Caso 2	0,71 m

Tabella 3.2

Il dato finale sull'errore mostra come il *caso 1* sia notevolmente peggiore rispetto al *caso 2*. Possiamo analizzare e visualizzare in un grafico come varia l'errore fra la traiettoria vera e quella stimata, in funzione del tempo. Per fare questo prendiamo solo una traiettoria specifica e calcoliamo, istante per istante, la differenza fra la posizione vera e quella stimata. Successivamente determiniamo l'errore come il valore assoluto di questa differenza. L'andamento di questo errore è riportato, per i primi 250 *steps*, nel grafico nella pagina successiva.

Si può dedurre e visualizzare immediatamente che nel *caso 1* (grafico in blu) l'errore si accumula fino all'istante di tempo in cui si riceve la misura di posizione, ossia a 12,5 secondi. Passati 10 secondi e terminate le misure di posizione l'errore torna a crescere.

Nel *caso 2* le continue misure di posizione, anche se brevi, non permettono all'errore di accumularsi garantendo sempre una buona qualità della stima.

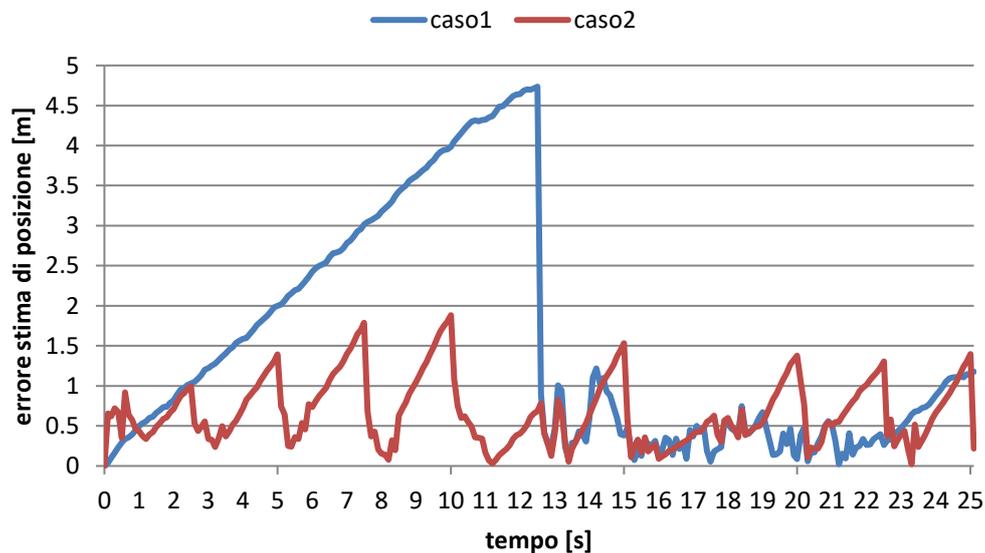


Figura 3.5: Andamento dell'errore sulla pozione in funzione del tempo nel *caso 1* e nel *caso 2*

L'esempio appena analizzato, anche se si riferisce solo ad una specifica traiettoria, permette di capire perché il caso2 sia notevolmente migliore del caso1 e giustifica i valori di $RMSE_{medio}$ ottenuti all'inizio di questo paragrafo.

In conclusione a questo paragrafo, si può affermare che è molto importante ridurre gli intervalli di tempo in cui non ho misure di posizione, al fine di tenere controllata la deriva della stima causata dall'accumulazione degli errori. Pertanto, la precisione finale della stima è legata alla disponibilità di copertura delle misure di posizione. Un'analisi di questo tipo deve essere effettuata sempre in sede di progetto di un sistema di localizzazione come quello discusso in questa trattazione. Valutare come si comporta l'errore con il procedere del movimento risulta fondamentale nella realizzazione del sistema IR-UWB. Se l'errore degenera troppo rapidamente, occorrerà inserire altri nodi in modo tale da creare una copertura maggiore delle misure di posizione.

3.5 Influenza dei disturbi sulle misure di accelerazione.

Un parametro fondamentale per la valutazione della precisione della stima è rappresentato dall'errore sulle misure di accelerazione. Nel nostro contesto una piattaforma IMU fornisce, tramite un accelerometro, le misure di accelerazione dalle quali poi ricostruiamo la traiettoria percorsa dal corpo in movimento. Chiaramente, più le misure procurate sono affette da disturbi e imprecisioni, più la stima effettuata si allontana da quella reale.

Come è già stato discusso nel capitolo 1, negli accelerometri sono presenti due tipi di errori, il primo è rappresentato dall'offset, il secondo dal rumore bianco. Nella trattazione svolta per la stima è stato considerato solo il secondo tipo di errore, il quale è di natura casuale in quanto dovuto a fenomeni termici, meccanici ed elettrici.

Siccome i valori utilizzati nel modello sono stati simulati, non sono presenti i disturbi che si riscontrerebbero nella realtà. Per questo, ai valori di accelerazione, sono stati aggiunti dei disturbi modellati attraverso un processo aleatorio gaussiano (il procedimento è riportato e commentato nel capitolo 2).

Risulta necessario quantificare l'entità dei disturbi tramite la deviazione standard del processo aleatorio definito in precedenza. Tale valore di deviazione standard è calcolato a partire dai parametri caratteristici degli

accelerometri reali, come la *densità spettrale di rumore sull'accelerazione* e la *larghezza di banda*.

Nel seguito si prendono come riferimento le grandezze presenti nel datasheet dell'accelerometro LIS331DLH realizzato dalla *STMicroelectronics* .[11] La densità spettrale, che chiameremo An , vale $218 \mu g/\sqrt{Hz}$ dove g rappresenta l'accelerazione di gravità. La larghezza di banda è ottenibile dividendo per 2 la frequenza di campionamento (che chiameremo $f_{campionamento}$). Tale valore di frequenza può essere scelto dall'utente su differenti intervalli come 50, 100, 400 e 100Hz

La deviazione standard, chiamata *delta*, si calcola come segue:

$$\delta = \sqrt{(An)^2 \cdot (larghezza\ di\ banda)} \quad (4)$$

ad esempio se prendiamo come larghezza di banda $100Hz$ otteniamo:

$$\delta = \sqrt{(218\mu g/Hz)^2 \cdot \left(\frac{100Hz}{2}\right)} = 0,015\ m/s^2 \quad (5)$$

Una volta caratterizzato l'entità del disturbo, è importante valutare come il variare di questo, influenzi la stima di posizione finale. Infatti non possiamo aspettarci che tutti gli accelerometri in commercio presentino le stesse identiche caratteristiche. Per questo cerchiamo di ricostruire come varia l'errore sulla stima al variare della grandezza dei disturbi, modellata tramite la variabile aleatoria e la sua deviazione standard *delta*.

Il grafico in figura 3.6 è stato ricavato per un numero di *sim_steps* ridotto a 200, il tempo di campionamento dt così come l'errore sulle misure di posizione *sigma* sono stati lasciati invariati rispetto al caso precedente. Per la correzione si utilizzano due misure di posizione dalla durata ciascuna di 2 secondi, la prima posta a 5 secondi dalla partenza, la seconda dopo 15. Sono stati resi variabili il parametro w_0 per l'incertezza della traiettoria e l'errore *delta* sulle misure di accelerazione.

I 3 andamenti riportati nel grafico in figura 3.6 risultano dipendenti dal parametro w_0 , esso infatti tiene conto della vastità del movimento simulato. Con $w_0=1$ la traiettoria effettiva varia da 0 a circa 100m, con $w_0=0,1$ varia in un range fino a 50m mentre con $w_0=0,01$ lo spazio percorso non va oltre i 10m.

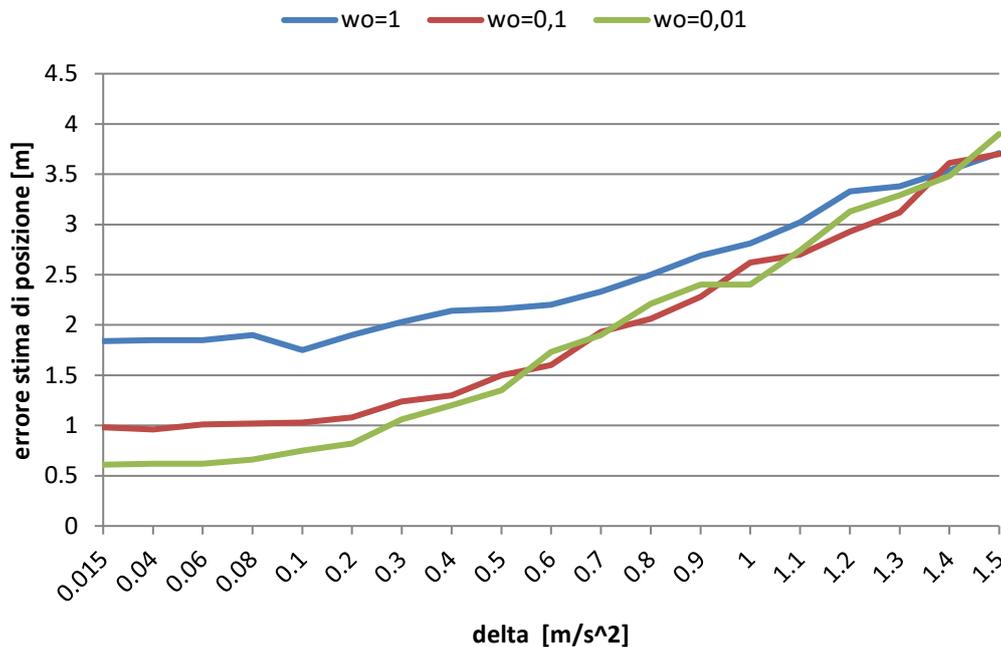


Figura 3.6: Andamento dell'errore in funzione nel caso $sim_steps=500$ con ω_0 e δ variabili

Dall'analisi del grafico si deduce:

- In tutti e tre i casi, l'errore finale sulla stima rimane pressoché invariato nell'intervallo fra i valori $0,015$ e $0,080 \text{ m/s}^2$ del parametro δ . Questa conclusione è importante in quanto, per l'accelerometro scelto, i datasheet forniscono un valore massimo di errore sui valori misurati di accelerazione (quindi di δ) pari a $0,08 \text{ m/s}^2$ e un valore minimo di $0,015 \text{ m/s}^2$. Quindi, si può affermare che per il caso preso di riferimento, l'aumento dei disturbi nelle misure dell'accelerometro (dovuto ad esempio alla scelta di una larghezza di banda maggiore) non influisce sulla stima di posizione finale. La stessa situazione non è necessariamente identica per altri sensori, i quali potrebbero essere meno precisi e avere valori di δ maggiori, causando un peggioramento nella stima finale.
- Possiamo notare che a parità del valore di δ , la stima migliora per i percorsi meno ampi. Questo è deducibile dal fatto che, una minor presenza di disturbi sulle misure di accelerazione permette di stimare meglio dei movimenti meno ampi e bruschi. Tale comportamento svanisce man mano che il valore di δ aumenta.

Conclusioni

La trattazione appena eseguita può essere ritenuta soddisfacente sia dal punto di vista teorico, ma anche da quello tecnico. Infatti, l'elaborato fornisce una solida base di partenza per l'analisi e l'implementazione di un sistema di localizzazione che sfrutti la tecnica di data fusion fra misure inerziali e di posizione. Nella prima parte dell'elaborato sono state trattate le due tecniche di localizzazione separatamente, in particolare focalizzandosi sulle piattaforme IMU e su una sua parte fondamentale, gli accelerometri. Di questi, si è studiato il modello fisico, i processi per realizzare la misura e gli errori caratteristici. Nella seconda parte si sono analizzati i modelli dinamici e di osservazione con cui stimare la traiettoria basandosi sull'implementazione con il filtro di Kalman. Sulla base di questo studio, si è sviluppato un codice *Matlab* per l'emulazione del movimento e del processo di stima. Infine, nella terza parte si sono esposti e analizzati i dati raccolti dalle simulazioni. Questi dati sono utili per quantificare come la disponibilità di misure dirette di posizione, possa contrastare gli errori di deriva della stima effettuata tramite sole misure inerziali, e delineare le linee guida per la realizzazione di un sistema di localizzazione indoor, basato sulla tecnica di data fusion. Nella parte finale sono stati esaminati anche gli effetti sulla stima, dei disturbi presenti nelle misure di accelerazione, questi legati prevalentemente alle caratteristiche degli accelerometri scelti per realizzare le misure inerziali.

L'analisi effettuata in questo elaborato, lascia aperte diverse strade di approfondimento della tecnica utilizzata. Ad esempio, le simulazioni svolte, non contemplano la presenza dell'offset sulle misure di accelerazione, aspetto che influenza non di poco la stima nella realtà. Un approccio per risolvere questa problematica potrebbe essere quello di inserire nel modello del movimento anche il contributo dell'offset sulle accelerazioni, ripetere le analisi e confrontare gli errori ottenuti con il caso già analizzato. In aggiunta, dal momento che i risultati sono stati ottenuti per una traiettoria simulata via software, si potrebbe pensare utilizzare le misure provenienti da un dispositivo reale applicato ad un corpo in movimento. Anche in questo caso potrebbe essere realizzato un confronto con la trattazione svolta in questo elaborato, per visualizzarne analogie e differenze.

Appendice A

Codice Matlab

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Tracciamento della posizione tramite misure inerziali e di posizione
% Studente: Alberto Muccioli
% Università di Bologna- Campus di Cesena
% Corso di Ingegneria Elettronica per l'energia e l'informazione
% Realatore prof. Davide Dardari
% Marzo 2018
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

close all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parametri iniziali %%%%%%%%%%
w0=1; % parametro che moltiplica la matrice di
      % covarianza di wk.
sigma=0.5; % dev standard disturbi sulle misure IR-UWB
delta=0.015; % dev standard disturbi delle misure dell'accelerometro
dt=0.1; % tempo fra due misure (Ts nella teoria)

A = [1 0 dt 0; % A è la matrice di transizione di stato
      0 1 0 dt;
      0 0 1 0;
      0 0 0 1];

Q = w0*[dt^3/3 0 dt^2/2 0; % matrice di covarianza associata
        0 dt^3/3 0 dt^2/2; % al rumore di processo e alle forze incognite
        dt^2/2 0 dt 0;
        0 dt^2/2 0 dt];

H = [1 0 0 0; % H è la matrice delle osservazioni
      0 1 0 0];

R = sigma^2*eye(2); % matrice di covarianza associata
      % al rumore delle misure IR-UWB

sim_steps=200; % numero di campioni della realizzazione

m0 = [0;0;0;0]; %valori iniziali del vettore di stato e della matrice
P0 = eye(4); %della precisione della stima

%definizione delle caratteristiche dei grafici%
l1=animatedline('Color',[0 0 1],'Linewidth',2);
l2=animatedline('Color',[0 1 0],'marker','o','LineStyle','none');
l3=animatedline('Color',[1 0 0],'Linewidth',2);
l4=animatedline('Color',[1 1 0]);
```

```

l6=animatedline('Color',[0 0 0],'Linewidth',2);

xlabel('\it x}_1');
ylabel('\it x}_2');
legend('True Trajectory','Measurements','KF','no filter','pos from acceleration');

X = zeros(4,sim_steps); %matrice dei vettori di stato della traiettoria reale
Y = zeros(2,sim_steps); %matrice delle misure di posizione
x=m0;

for n=1:sim_steps
    w = chol(Q)*randn(size(A,1),1); % genero un processo aleatorio per simulare
                                     %le forze incognite che determinano il
movimento
    x = A*x + w; %w viene sommato al vettore di stato
    v=sigma*randn(2,1); %genero un rumore v modellato tramite una processo
                        %aleatorio gaussiano con dev standard sigma.
    y = H*x + v; %aggiungo v alle misure di posizione, simuliamo
                %così i disturbi sulle misure.

    X(:,n) = x; %il vettore di stato x viene inserito nella matrice
                %della traiettoria reale
    Y(:,n) = y; %la misura di posizione rumorosa viene inserita
                %nella matrice delle misure
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% calcolo i valori di accelerazione %%%%%%%%%%%
P1=X(1,:); %vengono prelevati i valori di posizione rispetto a x1
V1=1/dt*diff(P1); %calcolo dei valori di velocità rispetto alla dimensione x1

P2=X(2,:); %vengono prelevati i valori di posizione rispetto a x2
V2=1/dt*diff(P2); %%calcolo dei valori di velocità rispetto alla dimensione x2

V1_t=zeros(1,sim_steps); %definisco dei vettori di velocità traslati
V2_t=zeros(1,sim_steps);

for n=1:(sim_steps-1) %processo per traslare tutti i valori di velocità
    V1_t(n+1)=V1(n); %avanti di uno step n per allineare i valori rispetto
    V2_t(n+1)=V2(n); %al tempo
end

V1_t(1)=(P1(1)-0)/dt; %completo il nuovo vettore delle velocità
V2_t(1)=(P2(1)-0)/dt; %con il valore ottenuto rispetto al primo istante

A1=1/dt*diff(V1_t); %calcolo dei valori di accelerazione rispetto alla
dimensione x1
A2=1/dt*diff(V2_t); %calcolo dei valori di accelerazione rispetto alla

```

dimensione x2

```
A1_t=zeros(1,sim_steps); %definisco dei vettori di accelerazione traslati
A2_t=zeros(1,sim_steps);

for n=1:(sim_steps-1)      %processo per traslare tutti i valori di accelerazione
    A1_t(n+1)=A1(n);      %avanti di uno step n per allineare i valori rispetto
    A2_t(n+1)=A2(n);      %al tempo
end

A1_t(1)=(v1_t(1)-0)/dt; %completo il nuovo vettore delle accelerazioni
A2_t(2)=(v2_t(1)-0)/dt; %con il valore ottenuto rispetto al primo istante
```

```
axis([min(x(1,:)) max(x(1,:)) min(x(2,:)) max(x(2,:))]);
```

%tracciamento grafici della traiettoria emulata e delle misure di posizione

```
for n=1:sim_steps
    addpoints(11,x(1,n),x(2,n));
    addpoints(12,y(1,n),y(2,n));
    drawnow limitrate
    pause (0.02);
end
```

%% STIMA DELLA POSIZIONE CON %%%
%% VALORI DI ACCELERAZIONE %%%

```
Acc=[A1_t;      % Il vettore Acc contiene i valori di accelerazione
     A2_t];     % A1_t rappresenta i valori riferiti alla coordinata x1,
               % A2_t quelli riferiti a x2
```

```
As = [1 0 dt 0; % As è la matrice di transizione di stato
      0 1 0 dt;
      0 0 1 0;
      0 0 0 1];
```

```
Bs = [dt^2/2 0; % Bs rappresenta la matrice di controllo
      0 dt^2/2 ;
      dt 0 ;
      0 dt ];
```

```
Ha = [1 0;      % Ha è la matrice utilizzata per sporcare le misure
      0 1 ];    % di accelerazione con il rumore
```

```
Qs = w0*[dt^3/3 0 dt^2/2 0;
         0 dt^3/3 0 dt^2/2;
         dt^2/2 0 dt 0;
         0 dt^2/2 0 dt];
```

```

Hs = [1 0 0 0;
      0 1 0 0];

Rs = sigma^2*eye(2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% aggiuanta disturbi sui valori di accelerazione %%%%%%%%%%%%%%%

Acc_vera=zeros(2,sim_steps);      % nuovo vettore delle accelerazioni

for n=1:(sim_steps)                % aggiunta dei disturbi sui valori
    nu=delta*randn(2,1);           % in ingresso
    Acc_vera(:,n)=Ha*Acc(:,n)+nu;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% processo di stima %%%%%%%%%%%%%%%

coord0 = [0;0;0;0];               % valore di posizione iniziale
prec0 = eye(4);                   % valore iniziale precisione della stima

coord = coord0;
prec = prec0;
coordvector = zeros(4,sim_steps); % vettore contenente lo stato stimato
precvector = zeros(4,4,sim_steps); % vettore contenente la precisione della stima

for n=1:(sim_steps)
    coord = As*coord+Bs*Acc_vera(:,n); %stima dello stato attraverso il modello
    del movimento
    prec = As*prec*As' + Qs;

    if( (n>50 && n<=70) || (n>150 && n<=170) ) % condizione che attiva il
    processo di correzione                                     % tramite l'uso del filtro di
    Kalman
        v=(Y(:,n) - Hs*coord); % calcolo dell'innovazione
        S = Hs*prec*Hs' + Rs;
        K = prec*Hs'/S;         % calcolo del Kalman gain
        coord = coord + K*v;    % nuova posizione
        prec = prec - K*S*K';   % P tiene conto dell'accuratezza della stima!

        coordvector(:,n) = coord; % lo stato stimato tramite Kalman viene aggiunto
    a coordvector
        precvector(:,n) = prec; % l'accurazetta della stima viene inserita in
    precvector
        addpoints(16,coordvector(1,n),coordvector(2,n));
        drawnow limitrate
        pause(0.08);

    else
        coordvector(:,n) = coord; % lo stato stimato tramite il modello del
    movimento viene aggiunto
                                     % a coordvector

```

```

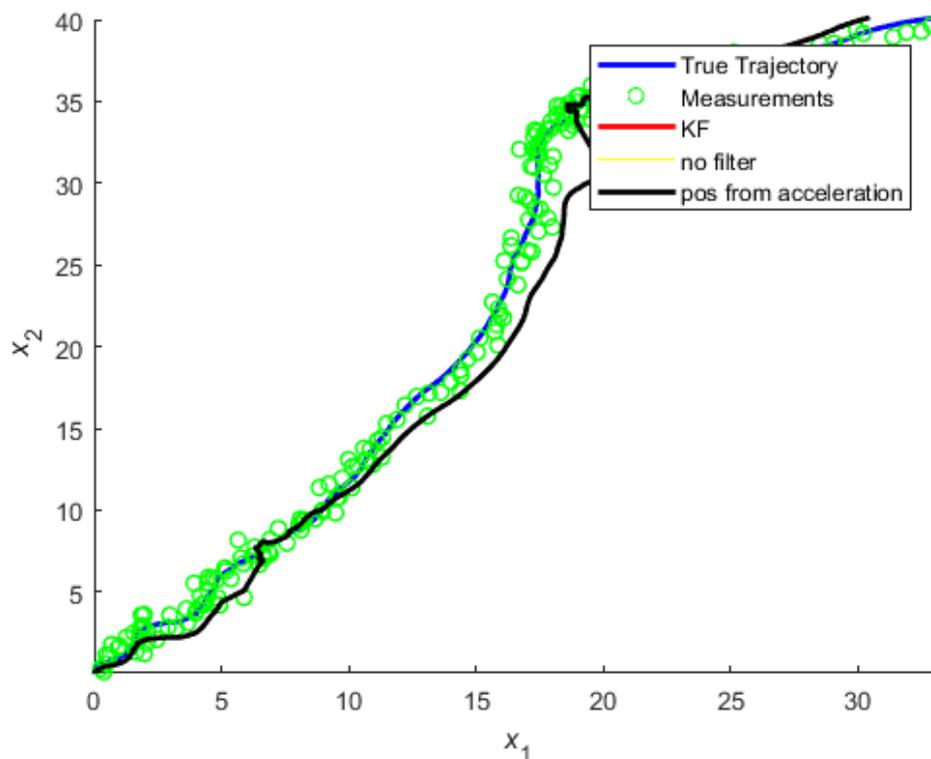
    precvector(:, :, n) = prec; % l'accuratezza della stima viene inserita in
    precvector
    addpoints(16, coordvector(1, n), coordvector(2, n));
    drawnow limitrate
    pause(0.08);
    end
end

%calcolo errore della stima
rmse_stima = sqrt(mean(sum((coordvector(1:2, :) - x(1:2, :)).^2, 1)));

s=sprintf('errore [m] stima con due misure di posizione RMSE=%.2f', rmse_stima);
disp(s);

```

errore [m] stima con due misure di posizione RMSE=1.74



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FILTRO DI KALMAN %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

m0 = [0;0;0;0]; % posizione iniziale nota a priori
P0 = eye(4); % valore iniziale precisione della stima

m = m0;
P = P0;

```

```

mv = zeros(4,sim_steps); % matrice contenente la stima punto per punto
Pv = zeros(4,4,sim_steps); % matrice contenente la precisione della stima

for n=1:(sim_steps)
    m = A*m; % stima della posizione a priori
    P = A*P*A' + Q; % calcolo della precisione della stima

    v=(Y(:,n) - H*m); % calcolo dell'innovazione
    S = H*P*H' + R;
    K = P*H'/S; % calcolo guadagno di Kalman
    m = m + K*v; % stima della posizione a posteriori
    P = P - K*S*K'; % P calcolo della precisione a posteriori

    mv(:,n) = m; % lo stato a posteriori viene inserito nella matrice della
    stima
    Pv(:,:,n) = P; % la precisione viene inserita nella matrice corrispondente

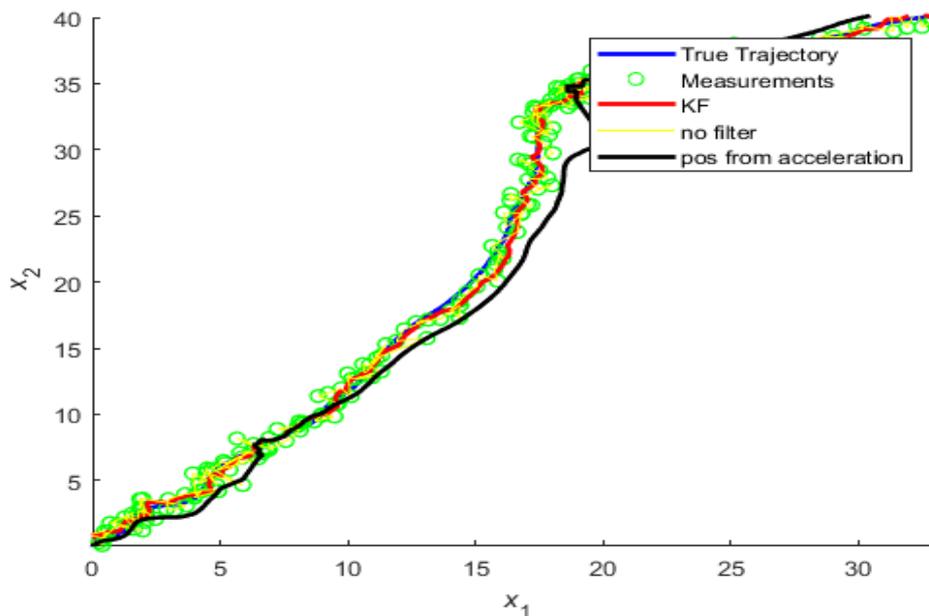
    addpoints(13,mv(1,n),mv(2,n));
    addpoints(14,Y(1,n),Y(2,n));
    drawnow limitrate
    pause(0.08);
end

%calcolo errore della stima effettuata con continue misure di posizione
rmse_kf = sqrt(mean(sum((mv(1:2,:) - x(1:2,:)).^2,1)));

s=sprintf('errore [m] stima con misure continue di posizione RMSE=%.2f',rmse_kf);
disp(s);

```

errore [m] stima con misure continue di posizione RMSE=0.39



Bibliografia

- [1] Lukasz Zwirello, Tom Schipper, Marlene Harter, and Thomas Zwick, *UWB Localization System for Indoor Applications: Concept, Realization and Analysis*, Institute of Technology (KIT), Karlsruhe, Germany, February 2012.
- [2] Abdulrahman Alarifi, AbdulMalik Al-Salman, Mansour Alsaleh, *Ultra Wideband Indoor Positioning Technologies: Analysis and Recent Advances*.
- [3] A. D. KING, *Inertial Navigation - Forty Years of Evolution*, Marconi Electronic System Ltd.
- [4] Oliver J. Woodman, *An introduction to inertial navigation*, Technical Report, UCAM-CL-TR-696, University of Cambridge, August 2006.
- [5] Akila Kannan, *Design and modeling of MEMS-based accelerometer with pull in analysis*, Anna University, Electrical and Electronics Engineering, 2008.
- [6] Matej Andrejašic, *MEMS accelerometers*, Seminar, University of Ljubljana, Faculty for mathematics and physics, March 2008.
- [7] Majid Dadafshar, *Accelerometer and Gyroscopes Sensors: Operation, Sensing, and Applications*, <https://www.maximintegrated.com>, March 2014.
- [8] Fredrik Gustafsson, Fredrik Gunnarsson. Niclas Bergman. Urban Forsell, Jonas Jansson, Rickard Karlsson, Per-Johan Nordlund, *Particle Filters for Positioning, Navigation and Tracking*, Final version for IEEE Transactions on Signal Processing.
- [9] Luigi Biagiotti, *Stima dello stato in presenza di disturbi: il filtro di Kalman*, Università degli studi di Modena e Reggio Emilia, Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica
- [10] Davide Dardari, Emanuela Falletti, Marco Luise, *Satellite and Terrestrial Radio Positioning Techniques*, Elsevier publisher, 2012.
- [11] STMicroelectronics, *Datasheet for LIS331DHL MEMS digital output motion sensors*, 2009.