

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

L'aritmetica di Peano e i teoremi di
incompletezza

Tesi di Laurea in Matematiche complementari

Relatore:
Piero Plazzi

Presentata da:
Giacomo Gualandi

Seconda Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Il palo non conta

A. Bicocchi

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è presentare i risultati di incompletezza ottenuti da Gödel negli anni '30 del Novecento con particolare attenzione all'aritmetizzazione.

Nello specifico la tesi è strutturata nel seguente modo:

- nel primo capitolo introduciamo la teoria del primo ordine che prende il nome di aritmetica di Peano PA , ne forniamo gli assiomi formali e osserviamo come questi sembrano in grado di descrivere completamente l'aritmetica.
- Nel secondo capitolo introduciamo le funzioni ricorsive primitive e μ -ricorsive, le quali saranno uno strumento indispensabile per dimostrare il teorema di Gödel per PA ; inoltre introdurremo il concetto di funzione rappresentabile in PA e relazione esprimibile in PA fornendo delle argomentazioni teoriche che ci porteranno a ritenere che gli assiomi formali introdotti nel primo capitolo siano degli assiomi naturali per PA , e che le funzioni μ -ricorsive siano tutte e sole le funzioni effettivamente computabili (Tesi di Church).
- Il terzo capitolo è totalmente dedicato all'aritmetizzazione di PA , la quale permette di rimpiazzare asserzioni fatte sul sistema formale PA con asserzioni numeriche, e ci permette di dimostrare teoremi su PA lavorando con funzioni e relazioni numeriche.
- Nel quarto e ultimo capitolo dimostreremo il primo teorema di incompletezza di Gödel per PA e osserveremo come tale teorema non si applichi solo a PA , ma ad ogni sua estensione ricorsivamente assiomatizzabile e consistente, e che quindi non esiste un insieme di assiomi capace di generare una teoria nella quale è possibile dimostrare ogni "verità" dell'aritmetica.

Indice

1	L'aritmetica di Peano:	
	Teoria formale dei numeri	1
1.1	Un sistema di assiomi	1
2	Funzioni e relazioni numeriche	6
2.1	Funzioni ricorsive primitive e funzioni ricorsive	7
2.2	Casi speciali di IV e V	9
2.3	Alcune funzioni ricorsive primitive	11
2.4	Relazioni ed insiemi ricorsivi primitivi	13
2.5	Funzioni μ -ricorsive	18
3	L'artimetizzazione. I numeri di Gödel	21
4	Teorema di Gödel per <i>PA</i>	33

Capitolo 1

L'aritmetica di Peano: Teoria formale dei numeri

1.1 Un sistema di assiomi

La teoria dei numeri (aritmetica) è insieme alla geometria la teoria più immediatamente intuitiva di tutti i rami della matematica. Perciò non c'è da meravigliarsi se il tentativo di formalizzare la matematica e di fornire ad essa una fondazione rigorosa comincia con la teoria dei numeri. La prima presentazione semi-assiomatrica di questo argomento venne fornita da Dedekind e da Peano ed è nota sotto la denominazione di *postulati di Peano*. Tali assiomi si possono formulare nel seguente modo:

P1. 0 è un numero naturale.

P2. Se x è un numero naturale, esiste sempre un altro numero naturale (denotato da x') chiamato il *successivo immediato* di x .

P3. $0 \neq x'$ per ogni numero naturale x , zero non è il successivo di alcun numero naturale.

P4. Se $x' = y'$, allora $x = y$, numeri naturali diversi hanno successivi diversi.

P5. Se Q è una proprietà che vale o non vale per ogni numero naturale, e se:

- 0 gode della proprietà Q ,
- ogni volta che un numero naturale x gode della proprietà Q , allora x' gode della proprietà Q ,

allora tutti i numeri naturali godono della proprietà Q .

A questo punto è immediatamente ovvio che gli assiomi espressi sopra sono espressi in termini di alcuni concetti intuitivi, come ad esempio il concetto di proprietà; ciò non ci consente di considerare tale sistema un sistema formalizzato in modo rigoroso. Costruiremo perciò una teoria del primo ordine con uguaglianza, che chiameremo PA , che si fonda sui postulati di Peano e che sembra essere adeguata per dimostrare tutti i risultati fondamentali della teoria elementare dei numeri.

La teoria del primo ordine con uguaglianza PA ha un'unica lettera predicativa, ossia quella dell'uguaglianza che indichiamo come al solito con il simbolo (infisso) $=$, una costante individuale a_1 e tre lettere funzionali f_1^1, f_1^2 ed f_2^2 . Scriveremo t' invece di $f_1^1(t)$, $t + s$ invece di $f_1^2(t, s)$ e $t \cdot s$ invece di $f_2^2(t, s)$, e indicheremo con il simbolo 0 la costante individuale a_1 .

Ogni termine chiuso del tipo $0^{n' \dots'}$ si chiama numerale, e se gli apici sono n viene indicato con \bar{n} .

Gli assiomi propri di PA sono:

PA1. $0 \neq (x_1)'$ (cfr. $P3$)

PA2. $(x_1)' = (x_2)' \implies x_1 = x_2$ (cfr. $P4$)

PA3. $x_1 + 0 = x_1$

PA4. $x_1 + (x_2)' = (x_1 + x_2)'$

PA5. $x_1 \cdot 0 = 0$

PA6. $x_1 \cdot (x_2)' = (x_1 \cdot x_2) + x_1$

PA7. Per ogni fbf $\mathcal{A}(x)$ di PA , dove $\mathcal{A}(x)$ indica una fbf con variabili libere, in cui le sostituzioni sono del tipo $\mathcal{A}[x|t]$,

$$\mathcal{A}(0) \implies (\forall x(\mathcal{A}(x) \implies \mathcal{A}(x')) \implies \forall x \mathcal{A}(x)) \quad (\text{cfr. } P5)$$

Osservazione 1.

1. Si noti che gli assiomi $PA1 - PA6$ sono fbf particolari, mentre $PA7$ è uno schema di assiomi che sta per un numero infinito di assiomi. Tuttavia $PA7$, che chiameremo *principio di induzione matematica*, non può corrispondere completamente al postulato $P5$, dal momento che quest'ultimo si riferisce in modo intuitivo alle 2^{\aleph_0} proprietà (intese come sottoinsiemi) dei numeri naturali, mentre $PA7$ può solo coinvolgere le proprietà definite dalle fbf di PA , che sono un'infinità numerabile.
2. Vediamo che nei nostri assiomi della teoria del primo ordine non mettiamo assiomi che equivalgono agli assiomi di Peano $P1$ e $P2$, questo perchè tali assiomi vengono inglobati nel nostro sistema grazie alla presenza dello 0 come costante individuale e f_1^1 come lettera funzionale. Gli assiomi $PA3 - PA6$ sono equazioni ricorsive per l'addizione e la moltiplicazione. Dedekind e Peano non avevano bisogno di assumerle dal momento che ammettevano l'uso della teoria intuitiva degli insiemi, dalla quale è dimostrabile l'esistenza di operazioni $+$ e \cdot che soddisfano $PA3 - PA6$. Si possono considerare equivalentemente come assiomi di PA le chiusure universali di $PA1 - PA7$.
3. Osserviamo esplicitamente che da $PA7$, per MP , si può ottenere la *regola di induzione*: da $\mathcal{A}(0)$ e da $\forall x(\mathcal{A}(x) \implies \mathcal{A}(x'))$ si può derivare $\forall x \mathcal{A}(x)$.
4. Si noti che l'interpretazione nella quale

- a. L'insieme degli interi non-negativi sia il dominio,
- b. il numero intero 0 sia l'interpretazione del simbolo 0,
- c. l'operazione di successivo immediato (addizione di 1) sia l'interpretazione della funzione ' (cioè di f_1^1),
- d. le ordinarie operazioni di addizioni e moltiplicazione siano le interpretazioni di + e ·,
- e. l'interpretazione della lettera predicativa = sia la relazione di identità,

è intuitivamente un modello normale di PA . Questo è chiamato il *modello standard* di PA , e qualsiasi modello normale di PA che non sia isomorfo con il modello standard sarà chiamato modello *non-standard* di PA .

Sorge a questo punto spontanea la domanda, esistono modelli non-standard di PA ?

Cerchiamo ora di rispondere a tale domanda; per fare questo enunci-amo senza dimostrare un risultato della logica dei predicati che afferma il seguente:

Teorema 1.1. Un insieme di enunciati Γ è consistente se e soltanto se ogni $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito è consistente

In altri termini il teorema appena enunciato ci dice che: se ogni sottoinsieme finito di un insieme Γ di enunciati, in un linguaggio del primo ordine, genera una teoria consistente allora anche tutto l'insieme di enunciati Γ genera una teoria consistente il viceversa è ovvio.

Vediamo come possiamo utilizzare questo risultato per provare che se PA ammette il modello standard ne ammette anche uno non-standard.

Definiamo quindi, partendo dagli assiomi di PA già detti, la relazione di minore nel seguente modo

$$\delta_{<} : \forall x_0 \forall x_1 (x_0 < x_1 \iff \exists x_2 (x_1 = x_0 + x_2 \wedge x_2 \neq 0))$$

A questo punto sia ω un nuovo simbolo di costante e valga

$$\bar{n} < \omega$$

dove \bar{n} è un qualsiasi numerale e si consideri PA_ω , la teoria generata da $PA \cup \{\bar{n} < \omega; n = 0, 1, \dots\}$.

Verifichiamo ora che la nuova teoria da noi introdotta è consistente: per ciò basta che ogni sottoinsieme finito dell'insieme delle formule che genera PA_ω ammetta un modello, in base al teorema 1.1.. Preso uno qualunque di questi sottoinsiemi finiti, le formule che lo compongono saranno un sottoinsieme finito degli assiomi di PA unito a un sottoinsieme finito dei nuovi assiomi introdotti: risulta quindi evidente che interpretando i simboli comuni a PA e a PA_ω nel modo standard e interpretando ω come un numero che soddisfa i nuovi assiomi (tale numero esiste in quanto i nuovi assiomi sono un numero finito) ottengo un modello per il nostro sottoinsieme.

Da questo risultato appena dimostrato e dal teorema sopra enunciato ne segue che PA_ω è consistente, e quindi ammette un modello che sarà anche un modello di PA ; risulta evidente che tale modello non può essere isomorfo al modello standard, in quanto ammette un elemento maggiore, e quindi diverso, a tutti i numeri corrispondenti ai numerali \bar{n} .

5. Osservo infine che nella trattazione fino ad ora esposta non viene mai affermato che PA sia una teoria consistente, anche se a livello intuitivo ne abbiamo fornito un modello che la renderebbe tale. Questo non è stato fatto in quanto le giustificazioni formali che ci portano ad affermare che il modello standard sia un modello di PA poggiano sulla teoria degli insiemi, considerata da molti troppo precaria per servire da fondamento a una dimostrazione di consistenza; inoltre non abbiamo neanche dimostrato formalmente che gli assiomi di PA sono veri per l'interpretazione standard, ma abbiamo considerato ciò come intuitivamente ovvio.

Per queste ragioni quando la consistenza di PA interviene in una dimostrazione noi la considereremo come un'assunzione esplicita e non dimostrata.

Capitolo 2

Funzioni e relazioni numeriche

Lo scopo di questo capitolo consiste nel mostrare come in PA si possono descrivere mediante formule le usuali funzioni e relazioni numeriche, dimostrandone le proprietà, ma procediamo con ordine.

Una funzione numerica è una funzione ovunque definita i cui argomenti e i cui valori sono numeri naturali, e una relazione numerica è una relazione i cui argomenti sono numeri naturali. D'ora in poi ometteremo spesso gli aggettivi “numerico” e “naturale” sottointendendoli.

Una relazione numerica $R(x_1, \dots, x_n)$ si dice *esprimibile* in PA se e solo se esiste una fbf $A(x_1, \dots, x_n)$ di PA con n variabili libere tali che: per ogni $(n + 1)$ -pla di numeri k_1, \dots, k_n ,

- 1) se $R(k_1, \dots, k_n)$ è vera, allora $\vdash_{PA} A(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$;
- 2) se $R(k_1, \dots, k_n)$ è falsa, allora $\vdash_{PA} \neg A(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$.

Per esempio la relazione numerica di uguaglianza è espressa in PA dalla fbf $x_1 = x_2$. Infatti, se $k_1 = k_2$, si ha che $\overline{k_1}$ è lo stesso di $\overline{k_2}$ e da questo è possibile provare che $\vdash_{PA} \overline{k_1} = \overline{k_2}$, analogamente se $k_1 \neq k_2$ è possibile provare che $\vdash_{PA} \overline{k_1} \neq \overline{k_2}$.

Una funzione numerica $f(x_1, \dots, x_n)$ si dice *rappresentabile* in PA se e solo se esiste una fbf $A(x_1, \dots, x_{n+1})$ di PA con le variabili libere x_1, \dots, x_{n+1} tali che per ogni $(n + 1)$ -pla di numeri k_1, \dots, k_{n+1} :

1) se $f(k_1, \dots, k_n) = k_{n+1}$, allora $\vdash_{PA} A(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, \overline{k_{n+1}})$;

2) $\vdash_{PA} \exists! x_{n+1} A(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, x_{n+1})$

Se in questa definizione si sostituisce al posto della 2) la 2'), $\vdash_{PA} \exists! x_{n+1} A(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, allora la funzione si dirà *fortemente rappresentabile* in PA . In tal caso A definisce la funzione f in PA . Si noti che dai risultati generali sulla logica dei predicati sappiamo che da 2') deriva 2), perciò ogni funzione fortemente rappresentabile è anche rappresentabile.

Se $R(x_1, \dots, x_n)$ è una relazione, allora la funzione caratteristica $C_R(x_1, \dots, x_n)$ si definisce nel modo seguente:

$$C_R(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } R(x_1, \dots, x_n) \text{ è vera,} \\ 1 & \text{se } R(x_1, \dots, x_n) \text{ è falsa.} \end{cases}$$

Proposizione 2.1. $R(x_1, \dots, x_n)$ è esprimibile in PA se e solo se $C_R(x_1, \dots, x_n)$ è (fortemente) rappresentabile in PA .

Dimostrazione. Supponiamo che $R(x_1, \dots, x_n)$ sia esprimibile in PA per mezzo della fbf $A(x_1, \dots, x_n)$; risulta allora che $C_R(x_1, \dots, x_n)$ è fortemente rappresentabile in PA mediante la fbf;

$$(A(x_1, \dots, x_n) \wedge x_{n+1} = 0) \vee (\neg A(x_1, \dots, x_n) \wedge x_{n+1} = \bar{1})$$

Viceversa, se $C_R(x_1, \dots, x_n)$ è rappresentabile in PA per mezzo di una fbf $B(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ allora $R(x_1, \dots, x_n)$ è esprimibile in PA per mezzo della fbf $B(x_1, \dots, x_n, 0)$. \square

2.1 Funzioni ricorsive primitive e funzioni ricorsive

Lo studio della rappresentabilità delle funzioni in PA conduce a una classe di funzioni numeriche che risultano essere di grande importanza nella logica matematica. In questa sezione vogliamo definire questa classe di funzioni e

iniziare a prendere familiarità con le funzioni che la compongono, in quanto saranno fondamentali nella dimostrazione dei risultati che ci interessano.

Definizione 2.1.

1) *Le seguenti funzioni sono dette funzioni iniziali:*

I. *La funzione zero: $Z(x) = 0$ per tutti gli x .*

II. *La funzione successore: $N(x) = x + 1$ per tutti gli x .*

III. *Le funzioni di proiezione: $U_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ per tutti gli x_1, \dots, x_n .*

2) *Le seguenti regole servono per ottenere funzioni nuove a partire da funzioni date:*

IV. *Sostituzione:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n));$$

si dice ottenuta per sostituzione dalle funzioni $g(y_1, \dots, y_m)$, $h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)$.

V. *Ricorsione semplice:*

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)). \end{cases}$$

Qui è ammesso anche il caso $n = 0$, per cui abbiamo

$$\begin{cases} f(0) = k & (\text{dove } k \text{ è un numero fissato}) \\ f(y + 1) = h(y, f(y)). \end{cases}$$

Diremo di aver ottenuto f da g e da h (o, se $n = 0$, solo da h e k) per ricorsione semplice. Notiamo anche che f è ben definita, in quanto il valore di $f(x_1, \dots, x_n, 0)$ è dato dalla prima equazione, e se noi conosciamo già il valore di $f(x_1, \dots, x_n, y)$, possiamo ottenere allora, per mezzo della seconda equazione, $f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$, e così a ritroso per un numero finito $y + 1$ di passi.

Osserviamo esplicitamente che la funzione zero che noi abbiamo detto essere per definizione una funzione primitiva sarebbe ottenibile anche dallo schema di ricorsione semplice nel seguente modo:

$$Z(0) = 0$$

$$Z(y + 1) = U_2^2(y, Z(y)) = Z(y)$$

Definizione 2.2. *Una funzione $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ si dice ricorsiva primitiva se e solo se può essere ottenuta da funzioni iniziali attraverso un numero finito di sostituzioni IV e di ricorsioni semplici V.*

In altri termini una funzione f si dice ricorsiva primitiva se e solo se esiste una sequenza di funzioni f_0, \dots, f_n tali che $f_n = f$, e per $0 \leq i \leq n$, o f_i è una funzione iniziale o f_i deriva da precedenti funzioni nella sequenza per applicazione della regola IV (sostituzione) o della regola V (ricorsione semplice).

2.2 Casi speciali di IV e V

Dimostriamo che è possibile aggiungere variabili e anche identificare variabili in qualsiasi funzione ricorsiva primitiva ottenendo ancora una funzione dello stesso tipo.

Precisamente è possibile ottenere funzioni ricorsive primitive da altre funzioni ricorsive primitive (nei discorsi seguenti useremo spesso la seguente notazione $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, anche per $n = 0$) mediante:

A) Identificazione di due, o più, variabili: se

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_k, x_i, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n$$

e g è ricorsiva primitiva, in $n+1$ variabili, lo è anche f , siccome

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(U_1^n(\vec{x}), \dots, U_k^n(\vec{x}), U_i^n(\vec{x}), U_{k+1}^n(\vec{x}), \dots, U_n^n(\vec{x}))$$

In particolare se g è in due variabili ed è ricorsiva primitiva, lo è anche

$$f(x) = g(x, x) = g(U_1^1(x), U_1^1(x)).$$

B) Permutazione di variabili. Sia σ una permutazione su $\{1; \dots; n\}$ e g una funzione ricorsiva di n variabili: allora lo è anche

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = g(U_{\sigma(1)}^n(\vec{x}), \dots, U_{\sigma(n)}^n(\vec{x}))$$

Ad esempio se g è in due variabili ed è ricorsiva primitiva, lo è anche $f(x, y) = g(y, x)$.

C) Sostituzione di una singola variabile. Se g è ricorsiva primitiva in $n+1$ variabili e h è ricorsiva primitiva in m variabili, ad esempio se $n = 0$ e $m = 1$ si ha che

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= g(x_1, h(y_1)) \\ &= g(U_1^2(x_1, h(y_1)), U_2^2(x_1, h(y_1))). \end{aligned}$$

è ricorsiva primitiva in $n+m$ variabili, naturalmente si può iterare questo procedimento per n e m qualsiasi.

D) Inserimento di variabili fittizie. Se g è ricorsiva primitiva di n variabili, e f è una funzione ricorsiva primitiva di $n+1$ variabili definita da

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n) = g(U_1^{n+1}(\vec{x}, y), \dots, U_n^{n+1}(\vec{x}, y))$$

è ricorsiva primitiva; iterando, si ha il caso di più variabili fittizie $y = (y_1, \dots, y_m)$.

Utilizzando questa versione della sostituzione si vede immediatamente che $Z(x_1, \dots, x_n) = 0$ è ricorsiva primitiva per ogni $n \geq 2$, in quanto si ottiene inserendo $n-1$ variabili fittizie nella funzione zero $Z(x)$ la quale è ricorsiva primitiva.

Le regole viste ora sono semplici conseguenza dirette della regola IV, vediamo ora alcune semplici conseguenza della regola V.

E) Ricorsione senza parametri in g :

$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = f_0(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y + 1) = g_1(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) = g(U_2^2(\vec{x}, y), f(\vec{x}, y)) = g(y, f(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

F) Ricorsione uniforme in y :

$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = f_0(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y + 1) = g_1(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) = g(\vec{x}, U_2^2(y, f(\vec{x}, y))) = g(\vec{x}, f(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

Si possono ovviamente combinare i due casi ed ottenere E-F

$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = f_0(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y + 1) = g(f(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

Vediamo che da queste regole di calcolo che abbiamo appena dimostrato segue che tutte le funzioni costanti (in una, e quindi per D) in n variabili) sono ricorsive primitive, infatti

$$\begin{cases} c(0) = c \\ c(y + 1) = U_1^1(c(y)) = c(y) \end{cases}$$

2.3 Alcune funzioni ricorsive primitive

Vediamo ora come le regole derivate precedentemente ci permettono di verificare che molte funzioni utilizzate generalmente sono ricorsive primitive. Dimostriamo per prima cosa la seguente:

Proposizione 2.2. *Le seguenti sono funzioni ricorsive primitive:*

- a) $x + y$; b) $x \cdot y$; c) x^y ; d) $\delta(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$;
- e) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ 0 & \text{se } x < y \end{cases}$; f) $|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases}$;
- g) $sg(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$; h) $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$;
- i) $x!$; j) $\min(x, y) = \text{minimo tra } x \text{ e } y$; k) $\min(x_1, \dots, x_n)$;
- l) $\max(x, y) = \text{massimo tra } x \text{ e } y$; m) $\max(x_1, \dots, x_n)$;
- n) $re(x, y) = \text{resto della divisione di } y \text{ con } x$;
- o) $qu(x, y) = \text{quoziente della divisione di } y \text{ con } x$.

Dimostrazione. Verrà mostrato che solo alcune delle funzioni scritte nell'enunciato sono ricorsive primitive, questo per dare un'idea generale della tecnica di dimostrazione e per mettere in risalto alcuni dettagli, per una dimostrazione più dettagliata si rimanda a [M, cap. 03].

a) Regola di ricorsione semplice, la funzione somma è ricorsiva perchè coincide con f_+

$$\begin{cases} x + 0 = x \text{ ossia } f_+(x, 0) = U_1^1(x) \\ x + (y + 1) = N(x + y) \text{ ossia } f_+(x, y + 1) = N(f(x, y)) \end{cases}$$

La funzione N è la funzione successore, che è una funzione primitiva, in quanto funzione iniziale.

b) Regola di ricorsione semplice

$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0 \text{ ossia } g(x, 0) = 0 \\ x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x \text{ ossia } g(x, y + 1) = f(x, g(x, y)) \end{cases}$$

In questo caso la funzione f è la funzione di addizione, già mostrata ricorsiva primitiva.

c) Regola di ricorsione semplice

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{y+1} = (x^y) \cdot x \end{cases}$$

Si noti che con questa costruzione $0^0 = 1$.

n) Regola di ricorsione semplice

$$\begin{cases} re(x, 0) = 0 \\ re(x, y + 1) = N(re(x, y)) \cdot sg(|x - N(re(x, y))|) \end{cases}$$

o) Regola di ricorsione semplice

$$\begin{cases} qu(x, 0) = 0 \\ qu(x, y + 1) = qu(x, y) + \overline{sg}(|x - N(re(x, y))|). \end{cases}$$

Si osservi che da n) e da o) si ottengono re, qu tali che $0 \leq re(x, y) < x$ se $x \neq 0$ e $y = qu(x, y) \cdot x + re(x, y)$ con la convenzione che se $x = 0$ allora $re(0, y) = y$ e $qu(0, y) = 0$.

□

Definizione 2.3. *Definiamo somme e prodotti limitati nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} \sum_{y < 0} f(\vec{x}, y) &= 0 \\ \sum_{y < z'} f(\vec{x}, y) &= \sum_{y < z} f(\vec{x}, y) + f(\vec{x}, z) \\ \sum_{y \leq z} f(\vec{x}, y) &= \sum_{y < z'} f(\vec{x}, y) \\ \prod_{y < 0} f(\vec{x}, y) &= 1 \\ \prod_{y < z'} f(\vec{x}, y) &= \prod_{y < z} f(\vec{x}, y) \cdot f(\vec{x}, z) \\ \prod_{y \leq z} f(\vec{x}, y) &= \prod_{y < z'} f(\vec{x}, y) \end{aligned}$$

Si evince immediatamente dalla definizione che le somme e i prodotti limitati sono funzioni ricorsive primitive.

2.4 Relazioni ed insiemi ricorsivi primitivi

Per $n \leq 1$ si considerano relazioni n -arie $\mathcal{R}^{(n)} \subseteq \mathbb{N}^n$ (dove per $n = 1$ si parla di insiemi o proprietà); $\mathcal{R}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ sostituisce spesso, nella notazione del calcolo dei predicati, l'espressione $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^{(n)}$.

Da qui in avanti se n risulterà chiaro dal contesto, o se è ininfluente, verrà omesso e si scriverà $\mathcal{R}(x_1, \dots, x_n)$ per indicare $\mathcal{R}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$.

Definizione 2.4. \mathcal{R} si dice *ricorsiva primitiva* se lo è $C_{\mathcal{R}}$, ossia se lo è la sua funzione caratteristica.

Ricordiamo che la funzione caratteristica di un relazione \mathcal{R} n-aria $C_{\mathcal{R}}$ è definita nel seguente modo:

$$C_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{R}(x_1, \dots, x_n) \text{ è vera,} \\ 1 & \text{se } \mathcal{R}(x_1, \dots, x_n) \text{ è falsa.} \end{cases}$$

Esempio 2.1. La relazione $x_1 = x_2$ è ricorsiva primitiva, infatti la funzione caratteristica di tale relazione è $sg(|x_1 - x_2|)$, la quale è ricorsiva primitiva per la proposizione 2.2..

Esempio 2.2. Se consideriamo la relazione di divisibilità, indicata con $x_1 \mid x_2$, definita come “esiste h naturale per cui $x_2 = h \cdot x_1$ ”, si ha che tale relazione è ricorsiva primitiva, in quanto la sua funzione caratteristica è $C_{\mid}(x_1, x_2) = sg(re(x_1, x_2))$.

Noto anche che $sg(re(0, x_2)) = sg(x_2)$, e quindi 0 non divide x_2 qualunque valore di x_2 non nullo si prenda, ma $0 \mid 0$.

Esempio 2.3. Sia $D(x)$ il numero dei divisori di x , se $x > 0$. Allora $D(x)$ è ricorsiva primitiva, poichè

$$D(x) = \sum_{y \leq x} \overline{sg}(re(y, x))$$

Esempio 2.4. La relazione $Pr(x)$, se x è un numero primo, è ricorsiva primitiva, poichè

$$C_{Pr}(x) = sg((D(x) - 2) + \overline{sg}(|x - 1|) + \overline{sg}(x))$$

Si ricorda che x è un numero primo se e solo se ha esattamente due divisori (condizione verificata tramite $(D(x) - 2)$) ed è diverso da 0 e da 1 (condizione verificata tramite $\overline{sg}(|x - 1|)$ e $\overline{sg}(x)$).

Osservazione 2. Se f è una funzione n-aria allora è anche una relazione (n+1)-aria, inoltre vale che:

f ricorsiva primitiva (come funzione) $\implies C_f$ è ricorsiva primitiva

In effetti

$$C_f(x, y) = sg(|y - f(x)|)$$

Si noti che con C_f viene indicata la funzione caratteristica della relazione $(n+1)$ -aria definita tramite la funzione n -aria f .

Date delle relazioni numeriche, si possono applicare ad esse i connettivi del calcolo proposizionale per ottenere nuove relazioni. Useremo qui gli stessi simboli ($\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff$), tranne quando possono sorgere delle confusioni tra questi simboli in quanto essi occorrono nel nostro metalinguaggio aritmetico e in quanto occorrono nelle nostre teorie del primo ordine. Per esempio, se $R_1(\vec{x})$ e $R_2(\vec{x})$ sono relazioni, allora $R_1(\vec{x}) \vee R_2(\vec{x})$ è una nuova relazione che vale per \vec{x} se e solo se vale o $R_1(\vec{x})$ oppure $R_2(\vec{x})$, ossia vale se e solo se $\vec{x} \in R_1 \cap R_2$.

Proposizione 2.3. *Le relazioni ottenute da relazioni ricorsive primitive per mezzo di connettivi proposizionali sono a loro volta ricorsive primitive.*

Dimostrazione. Supponiamo che $R_1(x_1, \dots, x_n)$ e $R_2(x_1, \dots, x_n)$ siano relazioni ricorsive primitive. Allora le funzioni caratteristiche C_{R_1} e C_{R_2} sono ricorsive primitive. Ma $C_{\neg R_1}(x_1, \dots, x_n) = 1 - C_{R_1}(x_1, \dots, x_n)$, quindi $\neg R_1$ è ricorsiva primitiva.

Anche $C_{R_1 \vee R_2}(x_1, \dots, x_n) = C_{R_1}(x_1, \dots, x_n) \cdot C_{R_2}(x_1, \dots, x_n)$; così $R_1 \vee R_2$ è ricorsiva primitiva.

Poichè sappiamo che il sistema $\{\neg, \vee\}$ è adeguato a definire tutti i connettivi proposizionali, ciò basta per dimostrare il teorema. \square

Per mezzo delle relazioni ricorsive primitive si può introdurre un altro schema di costruzione di funzioni ricorsive primitive, la definizione per casi.

Proposizione 2.4. *Sia*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) & \text{se vale } R_1(x_1, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, \dots, x_n) & \text{se vale } R_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots & \\ \dots & \\ g_k(x_1, \dots, x_n) & \text{se vale } R_k(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Se le funzioni g_1, \dots, g_k e le relazioni R_1, \dots, R_k sono ricorsive primitive, e se per ogni x_1, \dots, x_n esattamente una delle relazioni $R_1(x_1, \dots, x_n), \dots, R_k(x_1, \dots, x_n)$ è vera, allora f è ricorsiva primitiva.

Dimostrazione.

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1, \dots, x_n) \cdot \overline{sg}(C_{R_1}(x_1, \dots, x_n)) + \dots + \\ + \dots + g_k(x_1, \dots, x_n) \cdot \overline{sg}(C_{R_k}(x_1, \dots, x_n)).$$

Si osservi che non è necessario supporre R_k ricorsiva primitiva, in quanto $R_k = \neg(R_1 \vee \dots \vee R_{k-1})$. \square

Definizione 2.5. *Sia \mathcal{R} una relazione $(n+1)$ -aria (con $n \neq 0$), $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x, y)$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$ che può eventualmente mancare; si possono costruire nuove relazioni $\forall y_{\leq z} \mathcal{R}(x, y)$ e $\exists y_{\leq z} \mathcal{R}(x, y)$ per quantificazione limitata su y , ponendo:*

$$(x, z) \in \forall y_{\leq z} \mathcal{R}(x, y) \text{ se e solo se valgono tutte le } \mathcal{R}(x, k) \text{ con } 0 \leq k \leq z$$

$$(x, z) \in \exists y_{\leq z} \mathcal{R}(x, y) \text{ se e solo se vale almeno una tra le } \mathcal{R}(x, k) \text{ con } 0 \leq k \leq z$$

Osservazione 3. Si ha subito che le funzioni caratteristiche C_{\forall} e C_{\exists} delle due nuove relazioni sono date da:

$$C_{\forall}(x, z) = sg(|\sum_{y \leq z} C_{\mathcal{R}}(x, y) - 0|) = sg(\sum_{y \leq z} C_{\mathcal{R}}(x, y)) \\ C_{\exists}(x, z) = \prod_{y \leq z} C_{\mathcal{R}}(x, y).$$

L'osservazione appena dimostrata dimostra il seguente:

Teorema 2.1. *Se \mathcal{R} è ricorsiva primitiva lo sono anche le sue quantificazioni limitate.*

Un risultato analogo si ha per $\forall y_{<z}$ e per $\exists y_{<z}$ con adattamenti ovvi nel caso in cui $z = 0$.

Definizione 2.6. *Data una relazione \mathcal{R} $(n+1)$ -aria con $n \geq 0$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x, y)$, si può definire una funzione per mezzo dell'operatore μ di minimo limitato applicato a \mathcal{R} nel modo seguente:*

$$\begin{cases} g(x, z) = \text{minimo } y \leq z \text{ tale che } \mathcal{R}(x, y) \text{ vale, se un tale } y \text{ esiste;} \\ g(x, z) = z \text{ se non esiste } y \leq z \text{ tale che } \mathcal{R}(x, y). \end{cases}$$

In tale caso utilizzeremo la seguente notazione $g(x, z) = \mu y_{\leq z} \mathcal{R}(x, y)$.

Si ha il seguente:

Teorema 2.2. *Se \mathcal{R} è ricorsiva primitiva, lo è anche $g(x, y) = \mu y_{\leq z} \mathcal{R}(x, y)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\prod_{u \leq y} C_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n, u)$ ha valore 1 per tutti gli y tali che $\mathcal{R}(x_1, \dots, x_n, u)$ è falsa per ogni $u \leq y$, e ha valore 0 se esiste almeno un $u \leq y$ per cui $\mathcal{R}(x_1, \dots, x_n, u)$ vale.

Ne viene da se che:

$$\sum_{y < z} \left(\prod_{u \leq y} C_{\mathcal{R}}(x_1, \dots, x_n, u) \right)$$

è proprio la funzione g , in quanto conta il numero di naturali, a partire da 0, senza però includere il primo $y < z$ per cui vale $\mathcal{R}(x_1, \dots, x_n, y)$ (in quanto per tale valore la produttoria è nulla) quindi se un tale y esiste la funzione assume proprio quel valore, se invece tale y non esiste allora assume il valore z . Osserviamo infine, per completare la dimostrazione, che la funzione da noi introdotta è ricorsiva primitiva, da cui anche la funzione g lo è. \square

2.5 Funzioni μ -ricorsive

Estendiamo ora l'insieme delle funzioni ricorsive primitive a quello delle funzioni μ -ricorsive. Per prima cosa ampliamo la definizione 3.1 definendo il μ -operatore.

Definizione.

VI. μ -operatore: supponiamo che $g(x_1, \dots, x_n, y)$ ($n \geq 1$) sia una funzione tale che per ogni x_1, \dots, x_n esista almeno un y tale che $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, una funzione g siffatta si dice regolare in y . Denotiamo con $\mu y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$ il piú piccolo numero y tale che $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$. Sia $f(x_1, \dots, x_n) = \mu y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$, allora si dice che f è stata ottenuta da g per mezzo del μ -operatore, se vale la precedente ipotesi su g : per ogni (x_1, \dots, x_n) vi è almeno un y tale che $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$.

Definizione 2.7. Una funzione f si dice ricorsiva se e solo se può essere ottenuta da funzioni iniziali per mezzo di un numero finito di applicazioni della sostituzione IV, della ricorsione semplice V e del μ -operatore VI.

Osserviamo subito che questa differisce dalla definizione di funzione ricorsiva primitiva solo per l'aggiunta di possibili applicazioni del μ -operatore. Perciò una qualsiasi funzione ricorsiva primitiva è ricorsiva.

Osservazione 4.

A) Gli schemi derivati in precedenza sono ancora applicabili a funzioni ricorsive dando luogo a funzioni ricorsive, questo è immediato in quanto gli schemi derivati in precedenza sono semplici casi speciali delle regole di sostituzione e ricorsione semplice.

B) Si può definire μ -ricorsiva una relazione $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N}^n$ se $C_{\mathcal{R}}$ è μ -ricorsiva. In tal caso è facile vedere che:

$$f \text{ è } \mu\text{-ricorsiva} \iff f \text{ è } \mu\text{-ricorsiva come relazione}$$

Infatti sappiamo che $C_f(x, y) = sg(|y - f(x)|)$ (dove f qui è visto sia come una relazione che come una funzione) quindi se f , vista come funzione, è μ -ricorsiva anche vista come relazione lo sarà.

Viceversa se f , vista come relazione, è μ -ricorsiva allora, per definizione, abbiamo che C_f è μ -ricorsiva, ma ora sappiamo dalla definizione di funzione che deve valere la seguente proprietà:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \exists! y \in \mathbb{N} \mid f(x_1, \dots, x_n) = y$$

quindi, siccome C_f è la funzione caratteristica $y = f(x)$ è regolare l'equazione in y $C_f(x, y) = 0$, quindi possiamo applicare il μ -operatore, inoltre dalla proprietà detta segue immediatamente che:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y (C_f(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$$

in quanto l' y che verifica la relazione è unico, ed è quindi il minimo.

C) Le operazioni su relazioni, e quindi in particolare su insiemi, e la definizione per casi di funzioni, applicate nel caso di funzioni μ -ricorsive, danno funzioni e relazioni μ -ricorsive.

D) Consideriamo relazioni $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ regolari in y , cioè tali che:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \exists y \in \mathbb{N} (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathcal{R}$$

(cioè $\mathcal{R}(x_1, \dots, x_n, y)$ vale). Allora si può generalizzare (apparentemente, in quanto è una definizione equivalente) la regola VI a relazioni regolari in y , cioè se definiamo

$$g(x_1, \dots, x_n) = \mu y (\mathcal{R}(x_1, \dots, x_n, y))$$

e \mathcal{R} è μ -ricorsiva allora lo è anche g , $\mathcal{R}(x_1, \dots, x_n, y)$ equivale a $C_{\mathcal{R}} = 0$.

L'importanza della μ -ricorsività è dovuta al seguente risultato:

Teorema 2.3. *Ogni funzione ricorsiva è rappresentabile in PA e viceversa.*

La dimostrazione di questo risultato la si può trovare in [M, cap. 03], segue immediatamente.

Corollario 2.1. *Ogni relazione ricorsiva è esprimibile in PA.*

Questo teorema afferma che la classe delle funzioni μ -ricorsive, in *PA* coincide con quelle rappresentabili, in *PA*.

Veidamo ora la principale applicazione alla logica della ricorsività, ossia il risultato di Gödel sulla essenziale incompletezza dei sistemi formali che contengono l'aritmetica ordinaria.

Capitolo 3

L'artimetizzazione. I numeri di Gödel

In una teoria arbitraria del primo ordine K , associamo a ciascun simbolo u di K un numero naturale $g(u)$, chiamato il numero di Gödel, o gödeliano, di u , nel modo seguente:

$$\begin{aligned}g\left(\left(\right)\right) &= 3 ; & g\left(\left(\right)\right) &= 5 ; & g\left(\left(\right)\right) &= 7 ; & g\left(\left(\right)\right) &= 9 ; & g\left(\left(\right)\right) &= 11 \\g\left(x_k\right) &= 5 + 8k \text{ per } k = 1, 2, \dots \\g\left(a_k\right) &= 7 + 8k \text{ per } k = 1, 2, \dots \\g\left(f_x^n\right) &= 9 + 8(2^n 3^k) \text{ per } k, n \geq 1 \\g\left(A_k^n\right) &= 11 + 8(2^n 3^k) \text{ per } k, n \geq 1.\end{aligned}$$

Così simboli diversi hanno gödeliani differenti, e ogni numero di Gödel è un numero naturale dispari.

Data un'espressione $u_1 u_2 \dots u_r$, definiamo il suo numero di Gödel come $g(u_1 u_2 \dots u_r) = 2^{g(u_1)} 3^{g(u_2)} \dots p_{r-1}^{g(u_r)}$, dove p_i è l' i -esimo primo e $p_0 = 2$.

Esempio 3.1.

$$g(A_1^2(x_1, x_2)) = 2^{g(A_1^2)} 3^{g(\left(\right)} 5^{g(x_1)} 7^{g(\left(\right)} 11^{g(x_2)} 13^{g(\left(\right)} = 2^{107} 3^3 5^{13} 7^7 11^{21} 13^5$$

Si noti che espressioni differenti hanno gödeliani differenti, per l'unicità della scomposizione in fattori primi dei numeri naturali. Inoltre espressioni e simboli hanno differenti numeri di Gödel, poichè le prime hanno numeri di Gödel pari e i secondi numeri di Gödel dispari. (Osserviamo anche esplicitamente che un simbolo, considerato come espressione, ha gödeliano diverso dal suo gödeliano come simbolo).

Se abbiamo una sequenza arbitraria di espressioni e_1, e_2, \dots, e_r , possiamo assegnare a questa sequenza un numero di Gödel ponendo $g(e_1, e_2, \dots, e_r) = 2^{g(e_1)} 3^{g(e_2)} \dots p_{r-1}^{g(e_r)}$. Sequenze differenti di espressioni hanno numeri di Gödel differenti. Dal momento che un numero di Gödel di una sequenza di espressioni è pari e l'esponente del 2 nella sua scomposizione in fattori primi è pari, esso differisce dai numeri di Gödel dei simboli e delle espressioni.

Perciò g è una funzione biunivoca dall'insieme dei simboli di K , espressioni di K , e dalle sequenze di espressioni di K , nell'insieme dei numeri naturali. Osserviamo però che il codominio di g non è l'intero insieme dei naturali; ad esempio si vede immediatamente che 10 non è gödeliano.

Questa correlazione di numeri con simboli, espressioni e sequenze di espressioni fu originariamente inventata da Gödel per *aritmerizzare*, ossia per rimpiazzare asserzioni intorno a un sistema formale con asserzioni numeriche equivalenti, ed esprimere poi queste asserzioni nel sistema formale; ovviamente bisogna sottolineare che l'assegnazione dei numeri di Gödel qui fornita non è assolutamente unica.

Per rendere più facile l'aritmetizzazione introdotta operiamo il seguente cambiamento notazionale, da ora in avanti indicheremo il simbolo \forall con $(\)$, quindi per indicare ad esempio $\forall x$ scriveremo (x) , inoltre i connettivi si intenderanno espressi in termini di $\{\neg, \implies\}$, il quale sappiamo essere un insieme adeguato.

Proposizione 3.1. *Sia K una teoria del primo ordine in cui assumiamo che le seguenti proprietà numeriche siano ricorsive primitive (ricorsive):*

a) $IC(x)$: x è il numero di Gödel di una costante individuale di K ;

b) $FL(x)$: x è il numero di Gödel di una lettera funzionale di K ;

c) $PL(x)$: x è il numero di Gödel di una lettera predicativa di K .

In particolare le assunzioni a)-c) della proposizione 3.1 valgono per una teoria del primo ordine K che ha soltanto un numero finito di costanti individuali, lettere funzionali e lettere predicative. Infatti in tal caso $IC(x)$, $FL(x)$ e $PL(x)$ sono ricorsive primitive. Per esempio, se le costanti individuali di K sono $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$ allora $IC(x)$ se e solo se:

$$x = 7 + 8j_1 \vee x = 7 + 8j_2 \vee \dots \vee x = 7 + 8j_n.$$

In particolare quindi le assunzioni a)-c) valgono per PA , e sono ricorsive primitive.

Allora le relazioni e funzioni seguenti sono ricorsive primitive (ricorsive).

Dimostrazione.

1. $EVar(x)$: x è il numero di Gödel di una espressione formata da una variabile. Osserviamo che x è un tale numero di Gödel se e solo se:

$$(\exists z)_{z < x} (1 \leq z \wedge x = 2^{5+8z})$$

è vera, e questa sappiamo essere ricorsiva primitiva.

2. Definiamo $Arg_T(x) = (qu(8, x-9))_0$, dove se x è un numero intero positivo, e $x = p_0^{a_0} p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ è la sua scomposizione in fattori primi, con $(x)_i$ denotiamo l'esponente a_i di tale scomposizione, allora Arg_T è ricorsiva primitiva.

Infatti tutto quello che ci resta da provare è che la funzione appena introdotta sia ricorsiva primitiva, ora se $x = 1$, $(x)_i$ è nullo per tutti gli i . Se $x = 0$ poniamo arbitrariamente $(x)_i = 0$. Allora la funzione $(x)_i$ è ricorsiva primitiva, poichè $(x)_i = \mu y_{y < x} (p_i^y \mid x \wedge \neg(p_i^{y+1} \mid x))$, se $x > 1$. Osservo infine che se x è il numero di Gödel di una lettera funzionale f_j^n , allora $Arg_T(x) = n$.

Definiamo $Arg_P(x) = (qu(8, x-11))_0$, allora anche Arg_P è ricorsiva primitiva, inoltre se x è il numero di Gödel di una lettera predicativa A_j^n , allora $Arg_P = n$.

3. $MP(x, y, z)$: l'espressione \mathcal{A} con numero di Gödel z è diretta conseguenza delle espressioni $\mathcal{A}, \mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ con numeri di Gödel x e y per Modus Ponens.

Questa relazione è utile in connessione alla (8) perchè MP si applica propriamente a fbf \mathcal{A}, \mathcal{B} , detto questo risulta evidente che ciò vale se e solo se

$$y = 2^3 * x * 2^{11} * z * 2^5$$

Se $x = 2^{a_0} 3^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ e $y = 2^{b_0} 3^{b_1} \dots p_m^{b_m}$, allora il numero ottenuto mediante l'operatore binario $*$ è il seguente:

$$x * y = 2^{a_0} 3^{a_1} \dots p_k^{a_k} p_{k+1}^{b_0} p_{k+2}^{b_1} \dots p_{k+1+m}^{b_m}$$

inoltre si dimostra anche che $*$ è una funzione ricorsiva primitiva (vedi [M, cap. 03]). Dal discorso appena fatto segue che la relazione $MP(x, y, z)$ è ricorsiva primitiva.

4. $Gen(x, y)$: l'espressione con numero di Gödel y deriva dall'espressione con numero di Gödel x per generalizzazione.

Questa relazione è utile in connessione alla (8) perchè Gen si applica propriamente a fbf.

Per prima cosa ricordiamo cosa afferma la regola di generalizzazione, ossia che $(x_i)\mathcal{A}$ segue da \mathcal{A} , detto questo risulta evidente che ciò vale se e solo se

$$(\exists v)_{v < y} (EVar(v) \wedge y = 2^3 * v * 2^5 * x)$$

Osserviamo che qui si è utilizzata la notazione introdotta in precedenza.

5. $EIC(x)$: x è il numero di Gödel di una espressione costituita da una costante individuale, questo avviene se e solo se

$$(\exists y)_{y < x} (IC(y) \wedge x = 2^y)$$

$EFL(x)$: x è il numero di Gödel di una espressione costituita da una lettera funzionale, questo avviene se e solo se

$$(\exists y)_{y < x} (FL(y) \wedge x = 2^y)$$

$EPL(x)$: x è il numero di Gödel di una espressione costituita da una lettera predicativa, questo avviene se e solo se

$$(\exists y)_{y < x} (PL(y) \wedge x = 2^y)$$

Osserviamo che queste sono ricorsive primitive (ricorsive), ciò si vede immediatamente applicando le ipotesi alla teoria delle relazioni ricorsive già sviluppata (vedi teorema 2.2).

6. $Trm(x)$: x è il numero di Gödel di un termine di K . Questo vale se e solo se o x è il gödeliano di una espressione formata da una variabile o una costante individuale o se esistono una lettera funzionale f_k^n e termini t_1, \dots, t_n tali che x è il numero di Gödel di $f_k^n(t_1, \dots, t_n)$. Ma ciò vale se e solo se vi è una sequenza di espressioni

$$f_k^n \quad f_k^n(\quad f_k^n(t_1, \quad f_k^n(t_1, t_2, \quad \dots \quad f_k^n(t_1, \dots, t_n) \quad f_k^n(t_1, \dots, t_n)$$

Questa sequenza di $(n+3)$ espressioni può essere rappresentata dal suo numero di Gödel y , che sarà

$$y = 2^{g(f_k^n)} 3^{g(f_k^n)} 5^{g(f_k^n(t_1))} \dots p_{n+2}^{g(f_k^n(t_1, \dots, t_n))} = 2^{g(f_k^n)} 3^{g(f_k^n)} 5^{g(f_k^n(t_1))} \dots p_{n+2}^x$$

Dalla scrittura del numero y risulta evidente che y è prodotto di primi minori o uguali a p_{n+2} elevati a numeri minori di x , quindi sicuramente $y < (p_{n+2}^x)!$, ma ora, siccome $n + 2 < x$ varrà anche $y < (p_x^x)!$. Si noti anche che $n = Arg_T((x)_0)$, dal momento che $(x)_0$ è il gödeliano di f_k^n . Detto ciò risulta che $Trm(x)$ è equivalente alla seguente relazione:

$$EVar(x) \vee EIC(x) \vee (\exists y)_{y < (p_x^x)!} \left[x = (y)_{lh(y)-1} \wedge EFL((y)_0) \wedge lh(y) = \right. \\ \left. = Arg_T((x)_0) + 3 \wedge ((y)_1)_1 = 3 \wedge ((u)_{u < lh(y)}(u > 1 \wedge u \leq Arg_T((x)_0)) \implies$$

$$\begin{aligned} \implies & (\exists v)_{v < x} ((y)_u = (y)_{u-1} * v * 2^7 \wedge Trm(v)) \wedge (\exists v)_{v < x} ((y)_{lh(y)-2} = \\ & = (y)_{lh(y)-3} * v \wedge Trm(v)) \wedge (y)_{lh(y)-1} = (y)_{lh(y)-2} * 2^5 \Big]. \end{aligned}$$

Vediamo per prima cosa di definire tutte le funzioni che compaiono all'interno della relazione, allora l'unica funzione non ancora definita è lh , sia allora $lh(x)$ il numero di esponenti diversi da zero nella scomposizione in fattori primi di x , poniamo poi $lh(0) = 0$. Si ha che lh è ricorsiva primitiva, infatti sia $R(x, y)$ la relazione ricorsiva primitiva $Pr(y) \wedge (y \mid x) \wedge (x \neq 0)$, allora

$$lh(x) = \sum_{y \leq x} \overline{sg}(C_R(x, y))$$

Così $Trm(x)$ risulta essere ricorsiva primitiva (ricorsiva), in quanto la formula precedente contiene $Trm(v)$ solo per $v < x$ (per la dimostrazione di questo risultato consultare [M, cap. 03]).

7. $Atfml(x)$: x è il numero di Gödel di una fbf atomica di K . Questo vale se e solo se vi sono termini t_1, \dots, t_n e una lettera predicativa A_k^n tale che x è il gödeliano di $A_k^n(t_1, \dots, t_n)$. Ma ciò vale se e solo se vi è una sequenza di espressioni

$$A_k^n \quad A_k^n(\quad A_k^n(t_1, \quad A_k^n(t_1, t_2, \quad \dots \quad A_k^n(t_1, \dots, t_n) \quad A_k^n(t_1, \dots, t_n)$$

Questa sequenza di $(n+3)$ espressioni si può rappresentare con il suo gödeliano y . A questo punto si ragiona come nel caso precedente e si ottiene che $Atfml(x)$ è ricorsiva primitiva (per vedere esplicitamente la fbf [M, cap. 03]).

8. $Fml(y)$: y è il numero di Gödel di una fbf di K . Prima di procedere con la scrittura della relazione che descrive $Fml(y)$, ricordiamo cos'è una fbf, le formule ben formate si definiscono nel modo seguente:

- a) Ogni formula atomica è una fbf.
- b) Se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono fbf e y è una variabile, allora $(\neg \mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \implies \mathcal{B})$, e $(y)\mathcal{A}$ sono fbf.

- c) Un'espressione è una fbf solo se tale risulta in base alle condizioni a) e b)

Dopo la definizione di fbf appena ricordata risulta più chiaro che $Fml(y)$ è equivalente alla seguente relazione:

$$Atfml(y) \vee (\exists z)_{z < y} \left[(Fml(z) \wedge y = 2^3 * 2^9 * z * 2^5) \vee (Fml((z)_0) \wedge Fml((z)_1) \wedge y = 2^3 * (z)_0 * 2^{11} * (z)_1 * 2^5) \vee (Fml((z)_0) \wedge EVar((z)_1) \wedge y = 2^3 * (z)_1 * 2^5 * (z)_0) \right]$$

È questa relazione risulta essere ricorsiva primitiva, in quanto contiene $Fml(z)$ solo per $z < y$.

9. a) $Sost_1(\gamma, u, v)$: $(\gamma)_0$ è il gödeliano del risultato della sostituzione nell'espressione con numero di Gödel $(\gamma)_1$ del termine con numero di Gödel u in tutte le occorrenze libere della variabile con numero di Gödel v .

$$\begin{aligned} & Trm(u) \wedge EVar(v) \wedge ((\gamma)_1 = v \wedge (\gamma)_0 = u) \vee \\ & \vee ((\exists w)_{w < (\gamma)_1} ((\gamma)_1 = 2^w \wedge (\gamma)_1 \neq v \wedge (\gamma)_0 = (\gamma)_1)) \vee \\ & \vee (\exists z)_{z < (\gamma)_1} (\exists w)_{w < (\gamma)_1} (Fml(w) \wedge (\gamma)_1 = 2^3 * v * 2^5 * w * z \wedge \\ & \wedge (\exists \alpha)_{\alpha < (\gamma)_0} (\gamma)_0 = 2^3 * v * 2^5 * w * \alpha \wedge Sost_1(2^\alpha 3^z, u, v)) \vee \\ & \vee ((\neg (\exists z)_{z < (\gamma)_1} (\exists w)_{w < (\gamma)_1} (Fml(w) \wedge (\gamma)_1 = 2^3 * v * 2^5 * w * z)) \wedge \\ & \wedge (\exists \alpha)_{\alpha < (\gamma)_0} (\exists \beta)_{\beta < (\gamma)_0} (\exists z)_{z < (\gamma)_1} (1 < z \wedge (\gamma)_1 = ((\gamma)_1)_0 * z \wedge \\ & \wedge (\gamma)_0 = \alpha * \beta \wedge Sost_1(2^\alpha 3^{((\gamma)_1)_0}, u, v) \wedge Sost_1(2^\beta 3^z, u, v))) \end{aligned}$$

Ancora una volta siccome all'interno della relazione appena scritta la funzione $Sost_1$ compare solo applicata a valori minori di $(\gamma)_1$ la relazione è ricorsiva primitiva (ricorsiva).

- b) $Sost(x, y, u, v)$: x è il numero di Gödel del risultato della sostituzione del termine di gödeliano u in tutte le occorrenze libere

della variabile con numero di Gödel v nella espressione con numero di Gödel y . Questo è equivalente a $Sost_1(2^x 3^y, u, v)$.

- c) $So(y, u, v)$ sia il numero di Gödel del risultato della sostituzione del termine con numero di Gödel u in tutte le occorrenze libere della variabile con numero di Gödel v nell'espressione con numero di Gödel y . Allora, posto $(h(y) = p_{u \cdot y})^{u \cdot y}$

$$So(y, u, v) = \mu x_{x < h(y)} Sost(x, y, u, v)$$

Quindi, per quanto già provato, risulta che So è ricorsiva primitiva (ricorsiva).

10. a) $Lib(u, x)$: u è il numero di Gödel di una fbf o di un termine di K che contiene libera la variabile con numero di Gödel x .

$$(Fml(u) \vee Trm(u)) \wedge EVar(x) \wedge \neg Sost(u, u, 2^{5+8x}, x)$$

cioè la sostituzione nella fbf con numero di Gödel u di una variabile differente da quella con numero di Gödel x in tutte le occorrenze libere della variabile con numero di Gödel x produce un'espressione differente.

- b) $Lib_1(u, v, w)$: u è il numero di Gödel di un termine che è libero per la variabile con numero di Gödel v nella fbf con numero di Gödel w .

$$Trm(u) \wedge EVar(v) \wedge Fml(w) \wedge \left[Atfml(w) \vee (\exists y)_{y < w} (w = 2^3 * 2^9 * y * 2^5 \wedge Lib_1(u, v, y)) \vee (\exists y)_{y < w} (\exists z)_{z < w} (w = 2^3 * y * 2^{11} * z * 2^5 \wedge Lib_1(u, v, y) \wedge Lib_1(u, v, z)) \vee (\exists y)_{y < w} (\exists z)_{z < w} (w = 2^3 * 2^3 * z * 2^5 * y * 2^5 \wedge EVar(z) \wedge (z \neq v \implies Lib_1(u, v, y) \wedge (Lib(u, z) \implies \neg Lib(y, v))) \right]$$

11. Nelle relazioni che vedremo in seguito si parla di schemi di assiomi, dove con schema di assiomi intendiamo i 5 schemi di assiomi logici di ogni teoria del primo ordine, ossia (vedi [M, cap. 02]):

- 1) $\mathcal{A} \implies (\mathcal{B} \implies \mathcal{A})$
- 2) $(\mathcal{A} \implies (\mathcal{B} \implies \mathcal{C})) \implies ((\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \implies (\mathcal{A} \implies \mathcal{C}))$
- 3) $(\neg \mathcal{B} \implies \neg \mathcal{A}) \implies ((\neg \mathcal{B} \implies \mathcal{A}) \implies \mathcal{B})$
- 4) $(x_i)\mathcal{A}(x_i) \implies \mathcal{A}(t)$, se $\mathcal{A}(x_i)$ è una fbf di K e t è un termine di K libero per x_i in $\mathcal{A}(x_i)$. Si noti che t può essere identico a x_i dando gli assiomi $(x_i)\mathcal{A}(x_i) \implies \mathcal{A}(x_i)$.
- 5) $(x_i)(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \implies (\mathcal{A} \implies (x_i)\mathcal{B})$ se \mathcal{A} è una fbf di K che non contiene occorrenze libere di x_i .

Vediamo ora le relazioni che utilizzano questi schemi di assiomi:

- a) $Ass_1(x)$: x è il numero di Gödel di un esempio dello schema di assiomi 1).

$$(\exists u)_{u < x} (\exists v)_{v < x} (Fml(u) \wedge Fml(v) \wedge \wedge x = 2^3 * u * 2^{11} * 2^3 * v * 2^{11} * u * 2^5 * 2^5).$$

- b) $Ass_2(x)$: x è il numero di Gödel di un esempio dello schema di assiomi 2).

$$(\exists u)_{u < x} (\exists v)_{v < x} (\exists w)_{w < x} (Fml(u) \wedge Fml(v) \wedge Fml(w) \wedge \wedge x = 2^3 * 2^3 * u * 2^{11} * 2^3 * v * 2^{11} * w * 2^5 * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * 2^3 * u * 2^{11} * v * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * u * 2^{11} * w * 2^5 * 2^5 * 2^5).$$

- c) $Ass_3(x)$: x è il numero di Gödel di un esempio dello schema di assiomi 3).

$$(\exists u)_{u < x} (\exists v)_{v < x} (Fml(u) \wedge Fml(u) \wedge \wedge x = *2^3 * 2^3 * 2^3 * 2^9 * v * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * 2^9 * v * 2^5 * 2^5 * 2^{11} * *2^3 * 2^3 * 2^3 * 2^9 * v * 2^5 * 2^{11} * u * 2^5 * 2^{11} * v * 2^5 * 2^5).$$

- d) $Ass_4(x)$: x è il numero di Gödel di un esempio dello schema di assiomi 4).

$$(\exists u)_{u < x} (\exists v)_{v < x} (\exists w)_{w < x} (Fml(u) \wedge Trm(v) \wedge EVar(w) \wedge \wedge Lib_1(v, w, u) \wedge x = 2^3 * 2^3 * 2^3 * w * 2^5 * u * 2^5 * 2^{11} * *So(u, v, w) * 2^5).$$

e) $Ass_5(x)$: x è il numero di Gödel di un esempio dello schema di assiomi 5).

$$(\exists u)_{u < x} (\exists v)_{v < x} (\exists w)_{w < x} (Fml(u) \wedge Fml(v) \wedge EVar(w) \wedge \wedge \neg Lib(u, w) \wedge x = 2^3 * 2^3 * 2^3 * w * 2^5 * 2^3 * u * 2^{11} * v * * 2^5 * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * u * 2^{11} * 2^3 * 2^3 * w * 2^5 * v * 2^5 * 2^5 * 2^5).$$

f) $LAss(y)$: y è il numero di Gödel di un assioma logico.

$$Ass_1(y) \vee Ass_2(y) \vee Ass_3(y) \vee Ass_4(y) \vee Ass_5(y).$$

□

Proposizione 3.2. *Se una teoria del primo ordine K non solo soddisfa le assunzioni a)-c) della proposizione 3.1, ma anche la seguente assunzione:*

d) *la proprietà $PrAss(y)$, y è il numero di Gödel di un assioma specifico di K , è ricorsiva primitiva (ricorsiva),*

allora le seguenti relazioni sono ricorsive primitive (ricorsive).

Dimostrazione.

12. $Ass(y)$: y è il numero di Gödel di un assioma si K . Ciò avviene se e solo se vale la seguente relazione

$$LAss(y) \vee PrAss(y).$$

13. a) $Di(y)$: y è il numero di Gödel di una dimostrazione in K . Allora $Di(y)$ è equivalente a:

$$\begin{aligned} & (\exists w)_{w < y} (y = 2^w \wedge Ass(w)) \vee (\exists u)_{u < y} (\exists w)_{w < lh(u)} (\exists v)_{v < y} (Di(u) \wedge \\ & \wedge y = u \cdot (plh(u))^v \wedge Gen((u)_w, v)) \vee (\exists u)_{u < y} (\exists w)_{w < lh(u)} (\exists z)_{z < lh(u)} (\exists v)_{v < y} \\ & (Di(u) \wedge y = u \cdot (plh(u))^v \wedge MP((u)_z, (u)_w, v)) \vee \\ & \vee (Di(u) \wedge y = u * 2^v \wedge Ass(v)). \end{aligned}$$

E questa è ricorsiva primitiva (ricorsiva), in quanto $Di(v)$ compare solo per $v < y$.

- b) $Dim(y, x)$: y è il numero di Gödel di una dimostrazione della fbf con numero di Gödel x . Allora $Dim(y, x)$ è equivalente a

$$Di(y) \wedge (x = (y)_{lh(y)-1}).$$

□

Osservazione 5. Vediamo ora che PA soddisfa l'assunzione d, in particolare per PA $PrAss$ è ricorsiva primitiva. Siano a_1, \dots, a_6 i numeri di Gödel degli assiomi $PA1 - PA6$; inoltre u è numero di Gödel di un esempio dello schema d'assiomi $PA7$ se e solo se:

$$\begin{aligned} & (\exists v)_{v < u} ((\exists y)_{y < u} (EVar(v) \wedge Fml(y) \wedge u = 2^3 * So(y, 2^{15}, v) * 2^{11} * \\ & * 2^3 * 2^3 * 2^3 * v * 2^5 * 2^3 * y * 2^{11} * So(y, 2^{57} * 2^3 * v * 2^5, v) * 2^5 * \\ & * 2^5 * 2^{11} * 2^3 * 2^3 * v * 2^5 * y * 2^5 * 2^5)) \end{aligned}$$

denotiamo quest'ultima formula con $A_7(u)$: allora x è un assioma specifico di PA se e solo se

$$x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_6 \vee A_7(x).$$

Proposizione 3.3. *Per la teoria del primo ordine PA oltre alle relazioni e funzioni a)-d), e 1)-13) anche le seguenti sono ricorsive primitive.*

Dimostrazione.

14. a) $Nu(y)$: y è il numero di Gödel di un numerale di PA .

$$y = 2^{15} \vee (\exists x)_{x < y} (Nu(x) \wedge y = 2^{57} * 2^3 * x * 2^5).$$

- b) $Num(y)$ = il numero di Gödel di \bar{y} .

$$\begin{aligned} Num(0) &= 2^{15} \\ Num(y + 1) &= 2^{57} * 2^3 * Num(y) * 2^5. \end{aligned}$$

15. a) $W_1(u, y)$: u è il numero di Gödel di una fbf $\mathcal{A}(x_1)$ che contiene la variabile libera x_1 , e y è il numero di Gödel di una dimostrazione di $\mathcal{A}(\bar{u})$. Questo è equivalente a:

$$Fml(u) \wedge Lib(u, 2^{13}) \wedge Dim(y, So(u, Num(u)), 2^{13}).$$

b) $W_2(u, y)$: u è il numero di Gödel di una fbf $\mathcal{A}(x_1)$ che contiene la variabile libera x_1 , e y è il numero di Gödel di una dimostrazione di $\neg\mathcal{A}(\bar{u})$. Questo è equivalente a:

$$Fml(u) \wedge Lib(u, 2^{13}) \wedge Dim(y, So(2^3 * 2^9 * u * 2^5, Num(u), 2^{13})).$$

□

Capitolo 4

Teorema di Gödel per PA

Sia K una teoria qualunque del primo ordine con gli stessi simboli di PA . Allora K si dice ω -consistente se e solo se, per ogni fbf $\mathcal{A}(x)$ di K , se $\vdash_K \mathcal{A}(\bar{n})$ per ogni numero naturale n , allora non accade che $\vdash_K (\exists x)\neg\mathcal{A}(x)$. Se si accetta l'interpretazione standard come un modello di PA , allora PA è ω -consistente, ma noi formuleremo sempre in modo esplicito l'assunzione che PA è ω -consistente quando tale ipotesi viene usata in una dimostrazione.

Proposizione 4.1. *Se K è ω -consistente, allora K è consistente.*

Per la dimostrazione di questo facile risultato rimandiamo a [M, cap. 03].

Per la proposizione 3.3, 15a) la relazione $W_1(u, y)$ è ricorsiva primitiva e così, per il corollario 2.1, W_1 è esprimibile in PA per mezzo di una fbf $\mathcal{W}_1(x_1, x_2)$ con due variabili libere x_1, x_2 , cioè se $W_1(k_1, k_2)$, allora $\vdash_{PA} \mathcal{W}_1(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ e, se $\text{non-}W_1(k_1, k_2)$, allora $\vdash_{PA} \neg\mathcal{W}_1(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$. Consideriamo la fbf:

$$(\spadesuit) \quad (x_2)\neg\mathcal{W}_1(x_1, x_2).$$

Sia m il numero di Gödel della fbf (\spadesuit) . Sostituiamo \bar{m} al posto di x_1 in (\spadesuit) per ottenere la fbf chiusa:

$$(\spadesuit\spadesuit) \quad (x_2)\neg\mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2).$$

Si ricordi che $W_1(u, y)$ vale se e solo se u è il numero di Gödel di una fbf $\mathcal{A}(x_1)$

con la variabile libera x_1 , e y è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di $\mathcal{A}(\bar{u})$. Ora se m è il numero di Gödel di (✕) e (✕✕) deriva da (✕) sostituendo \bar{m} al posto della variabile x_1 , si ha che,

(I) $W_1(m, y)$ vale se e solo se y è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di (✕✕) .

Proposizione 4.2. *(Teorema di Gödel per PA)*

1) Se PA è consistente, allora la fbf (✕✕) non è dimostrabile in PA .

2) Se PA è ω -consistente, allora la fbf $\neg(\text{✕✕})$ non è dimostrabile in PA .

(Quindi, per la proposizione enunciata precedentemente, se PA è ω -consistente, la fbf chiusa (✕✕) non è né dimostrabile né refutabile in PA . Tale fbf si dice essere una proposizione indecidibile in PA o indipendente da PA .)

Dimostrazione.

- 1) Supponiamo PA consistente, e supponiamo che $\vdash_{PA} (x_2)\neg\mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$. Sia k il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di questa fbf. Per la (I) precedente, $W_1(m, k)$. Dal momento che \mathcal{W}_1 esprime W_1 in PA , abbiamo che $\vdash_{PA} \mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{k})$. Da $(x_2)\neg\mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$, per la regola di particolarizzazione, si deduce che $\neg\mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{k})$. Così $\mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{k})$ e $\neg\mathcal{W}_1(\bar{m}, \bar{k})$ sono dimostrabili in PA , il che contraddice l'ipotesi, ovvero la consistenza di PA .
- 2) Supponiamo che PA sia ω -consistente, e supponiamo che $\vdash_{PA} \neg(x_2)\neg\mathcal{W}(\bar{m}, x_2)$, cioè $\vdash_{PA} \neg(\text{✕✕})$. Per la proposizione 5.1, PA è consistente, sicché non vale $\vdash_{PA} (\text{✕✕})$. Perciò per ogni numero naturale n , n non è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di (✕✕) , cioè per la (I), per ogni n , $W_1(m, n)$ è falsa. Così per ogni n , $\vdash_{PA} \neg\mathcal{W}(\bar{m}, \bar{n})$. Se supponiamo che $\mathcal{A}(x_2)$ sia $\neg\mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$, allora per la ω -consistenza di PA , deriva che non si ha $\vdash_{PA} (\exists x_2)\neg\neg\mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$; quindi non accade $\vdash_{PA} (\exists x_2)\mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$. Ma questo contraddice la nostra assunzione che $\vdash_{PA} (\exists x_2)\mathcal{W}_1(\bar{m}, x_2)$.

□

L'interpretazione standard della formula indecidibile (✕✕) : $(x_2) \neg \mathscr{W}_1(\bar{m}, x_2)$ è piuttosto importante. Poichè \mathscr{W}_1 esprime la relazione W_1 in PA , (✕✕) afferma, secondo l'interpretazione standard, che $W_1(m, x_2)$ è falsa per ogni numero naturale x_2 . Ora per la (I) questo significa che non esiste una dimostrazione in PA della (✕✕) . In altre parole (✕✕) afferma la sua indimostrabilità in PA . Ora per il teorema di Gödel, se PA è consistente, allora (✕✕) è in effetti indimostrabile in PA , e così (✕✕) è vera per l'interpretazione standard. Perciò (✕✕) è vera per i numeri naturali secondo l'interpretazione usuale, ma è indimostrabile in PA . Questo ci potrebbe far credere che il teorema di Gödel sia valido soltanto perchè il sistema assiomatico PA che è stato scelto all'inizio risulta ora essere troppo debole e che, se noi rendessimo più potente PA aggiungendo nuovi assiomi, allora il nuovo sistema potrebbe essere completo. Per esempio si potrebbe aggiungere la fbf vera (✕✕) a PA per ottenere un sistema più potente PA_1 . Tuttavia qualsiasi funzione ricorsiva, essendo rappresentabile in PA , è anche rappresentabile in PA_1 ; e analogamente le proposizioni 3.1-3.3 sono ovviamente valide quando sostituiamo PA_1 a PA . Ma questo è tutto ciò di cui abbiamo bisogno per la derivazione del risultato di Gödel; quindi se PA_1 è ω -consistente, allora PA_1 ha anche un enunciato indecidibile \mathscr{B} . (\mathscr{B} ha la forma $(x_2) \neg (\mathscr{W}_1)_{PA_1}(\bar{k}, x_2)$, ma naturalmente \mathscr{B} sarà differente da (✕✕) , dal momento che la relazione W_1 per PA_1 è differente dalla relazione W_1 per PA , e perciò la fbf $(\mathscr{W}_1)_{PA_1}$ e il numerale \bar{k} che appaiono in \mathscr{B} sono differente da \mathscr{W}_1 e dal numerale \bar{m} di (✕✕) .)

Osservazione 6. Analizzando la dimostrazione appena fatta risulta che il teorema di Gödel non si limita a PA , infatti se K è una teoria del primo ordine con gli stessi simboli di PA , una condizione sufficiente per poter dimostrare il teorema di Gödel per K è che:

- la relazione W_1 (vedi proposizione 3.3, 15), rimpiazzando ovunque PA con K nella definizione, sia esprimibile in K .

La condizione scritta sopra sarà sicuramente soddisfatta se W_1 è ricorsiva e ogni relazione ricorsiva è esprimibile in K . Dalle dimostrazioni delle propo-

sizioni 3.1-3.3 si evince che W_1 sarà ricorsiva se l'assunzione $d)$ della proposizione 3.2 vale per K , cioè, se la proprietà $PrAss_K$ di essere un numero di Gödel di un assioma proprio di K è ricorsiva. Perciò otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 4.3. Sia K una teoria del primo ordine con gli stessi simboli di PA . Supponiamo anche che valgono le seguenti condizioni per K :

1. ogni relazione ricorsiva è esprimibile in K ,
2. L'insieme $PrAss_K$ dei numeri di Gödel degli assiomi propri di K è ricorsivo.

Allora vale il teorema di Gödel per K , cioè se K è ω -consistente, allora K ha un enunciato indecidibile.

Se chiamiamo una teoria K *ricorsivamente assiomatizzabile* se e solo se esiste una teoria K' avente gli stessi teoremi di K tale che l'insieme $PrAss_{K'}$ dei numeri di Gödel degli assiomi propri di K' sia ricorsivo.

Corollario 4.1. Ogni estensione ω -consistente ricorsivamente assiomatizzabile di PA è soggetta al teorema di Gödel, e perciò ha un enunciato indecidibile.

Il teorema di Gödel richiede l'assunzione della ω -consistenza, ma come è stato dimostrato da Rosser, rendendo più complesso l'argomento è sufficiente assumere soltanto la consistenza.

Nella proposizione 3.3, 15b) la relazione $W_2(u, y)$ è stata dimostrata essere ricorsiva primitiva e così, per il corollario 2.1, W_2 è esprimibile in PA per mezzo di una fbf $\mathscr{W}_2(x_1, x_2)$. Consideriamo ora la fbf:

$$(\blacktriangle) \quad (x_2)(\mathscr{W}_1(x_1, x_2) \implies (\exists x_3)(x_3 \leq x_2 \wedge \mathscr{W}_2(x_1, x_3))).$$

Sia n il numero di Gödel di (\blacktriangle) . Sostituiamo \bar{n} al posto di x_1 in (\blacktriangle) per ottenere la fbf chiusa:

$$(\blacktriangle\blacktriangle) \quad (x_2)(\mathscr{W}_1(\bar{n}, x_2) \implies (\exists x_3)(x_3 \leq x_2 \wedge \mathscr{W}_2(\bar{n}, x_3))).$$

Si noti che $W_1(u, y)$ (rispettivamente $W_2(u, y)$) vale se e solo se u è il numero di Gödel di una fbf $\mathcal{A}(x_1)$ contenente la variabile libera x_1 , e y è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di $\mathcal{A}(\bar{u})$ (rispettivamente $\neg\mathcal{A}(\bar{u})$). Poichè n è il numero di Gödel di (\blacktriangle) abbiamo:

(II) $W_1(n, y)$ vale se e solo se y è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di $(\blacktriangle\blacktriangle)$.

(III) $W_2(n, y)$ vale se e solo se y è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di $\neg(\blacktriangle\blacktriangle)$.

Proposizione 4.4. (*Teorema di Gödel-Rosser*) *Se PA è consistente, allora $(\blacktriangle\blacktriangle)$ e $\neg(\blacktriangle\blacktriangle)$ sono entrambe indimostrabili in PA , quindi PA contiene un enunciato indecidibile.*

La dimostrazione di questo risultato non sarà svolta in questa presentazione, per chiunque volesse consultarla si rimanda a [M, cap. 03].

Anche la proposizione indecidibile di Rosser $(\blacktriangle\blacktriangle)$ ha un'interessante interpretazione standard. Per la (II) e la (III) si ha che $W_1(n, x_2)$ significa che x_2 è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di $(\blacktriangle\blacktriangle)$, e $W_2(n, x_3)$ significa che x_3 è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di $\neg(\blacktriangle\blacktriangle)$. Perciò $(\blacktriangle\blacktriangle)$ afferma che, se vi è una dimostrazione in PA di $(\blacktriangle\blacktriangle)$, vi è allora una dimostrazione in PA , con numero di Gödel più piccolo, di $\neg(\blacktriangle\blacktriangle)$. Ora il teorema di Gödel-Rosser mostra che, se PA è consistente, $(\blacktriangle\blacktriangle)$ è vera per l'interpretazione standard.

Osservazione 7.

1. Sia $Neg(x) = 2^3 * 2^9 * x * 2^5$. Allora se x è il numero di Gödel di una fbf \mathcal{A} , $Neg(x)$ è il numero di Gödel di $(\neg\mathcal{A})$. Evidentemente anche Neg è ricorsiva, e quindi rappresentabile in PA per mezzo di una fbf $\mathcal{N}eg(x_1, x_2)$. Si ricordi ora che $Dim(y, x)$ è la relazione che vale se e solo se x è il numero di Gödel di una fbf \mathcal{A} di PA e y è il numero di Gödel di una dimostrazione in PA di \mathcal{A} .

Ricordiamo anche che Dim è ricorsiva primitiva, quindi è esprimibile

in PA per mezzo di una qualche fbf $Dim(x_1, x_2)$.

Sia Con_{PA} la fbf:

$$(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)\neg(Dim(x_1, x_3) \wedge Dim(x_2, x_3) \wedge Neg(x_3, x_4))$$

In modo intuitivo, secondo l'interpretazione standard, Con_{PA} afferma che non esiste in PA nessuna dimostrazione di una fbf e della sua negazione, e questo è vero se e solo se PA è consistente. Ora la proposizione indecidibile di Gödel (⌘⌘) significa, secondo l'interpretazione standard, che (⌘⌘) non è dimostrabile in PA . Quindi la fbf $Con_{PA} \implies (\text{⌘⌘})$ afferma che se PA è consistente, allora (⌘⌘) non è dimostrabile in PA . Ma questo coincide proprio con la prima metà del teorema di Gödel. Il ragionamento metamatematico usato nel teorema di Gödel può essere espresso ed eseguito all'interno dello stesso PA così da ottenere una dimostrazione in PA di $Con_{PA} \implies (\text{⌘⌘})$. Perciò $\vdash_{PA} Con_{PA} \implies (\text{⌘⌘})$. Ma per teorema di Gödel se PA è consistente allora (⌘⌘) non è dimostrabile in PA . Perciò se PA è consistente allora Con_{PA} non è dimostrabile in PA , cioè, se PA è consistente non è dimostrabile in PA una fbf che afferma la consistenza di PA . Questo è il *secondo teorema di Gödel*.

Più in generale se K è una teoria del primo ordine con gli stessi simboli di PA per la quale Neg e Dim sono esprimibili e vale il teorema di Gödel si può ripetere questo ragionamento, quindi il secondo teorema di Gödel è applicabile a una qualunque estensione ricorsivamente assiomatizzabile e ω -consistente di PA .

2. Per chiarire almeno in parte il concetto della completezza è bene dire che esistono versioni deboli dell'aritmetica *complete*, ad esempio una di queste è l'aritmetica del successore T_s , ossia una teoria che ha come simboli 0 e (\prime) soltanto, e definita tramite i seguenti assiomi (vedi [L, cap. 21]):

$$P_s1 \quad x_1 \neq 0 \implies \exists x_2(x_1 = (x_2)') \quad (\text{cfr. } P2)$$

P_s2 $0 \neq x'$ (cfr. $P3$)

P_s3 $(x_1)' = (x_2)' \implies x_1 = x_2$ (cfr. $P4$)

P_s4 Per ogni fbf $\mathcal{A}(x)$ di PA , dove $\mathcal{A}(x)$ indica una fbf, del linguaggio T_s , con variabili libere, in cui le sostituzioni sono del tipo $\mathcal{A}[x|t]$,
 $\mathcal{A}(0) \implies (\forall x (\mathcal{A}(x) \implies \mathcal{A}(x'))) \implies \forall x \mathcal{A}(x)$ (cfr. $P5$)

Allora sicuramente l'insieme dei numeri naturali definiti con la consueta operazione di successore e la costante 0 è un modello per questa teoria, ma con lo stesso ragionamento utilizzato nell'osservazione 1.4 si può vedere che anche questa teoria ammette almeno un modello non isomorfo al modello standard.

Nonostante questo però la teoria del successore si dimostra essere una teoria completa. La ragione di ciò è da ricercarsi nel fatto che la teoria del successore è una teoria povera nel linguaggio di base, ossia è una teoria che permette di definire e studiare poche proprietà, infatti è possibile dimostrare la seguente:

Proposizione 4.5. Gli unici sottoinsiemi di \mathbb{N} definibili nella teoria del successore sono gli insiemi finiti e gli insiemi cofiniti (vedi [L, cap. 21]).

Dire che $A \subseteq \mathbb{N}$ è definibile significa dire che esiste una fbf \mathcal{A} , di T_s , tale che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathcal{A}(x)\}$. Dalla quale segue che:

Corollario 4.2. L'operazione di addizione non è definibile nella teoria del successore.

Questa osservazione mostra come sia possibile creare una teoria aritmetica completa, ma mostra anche che questo viene fatto a scapito della capacità della teoria di descrivere in maniera soddisfacente le proprietà di \mathbb{N} .

Bibliografia

[L] G. Lolli: *Introduzione alla logica formale* , Bologna, Il Mulino, 1991

[M] E. Mendelson: *Introduzione alla logica matematica* , Torino, Bollati
Boringhieri, 1972