

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Analisi di Fourier: Teoria e Applicazioni

Tesi di Laurea in **Analisi Matematica**

Presentata da **Mattia Tani**

Relatore:
Chair.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Correlatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
Elena Loli Piccolomini

**Sessione seconda
Anno Accademico
2009/2010**

*A tutti gli amici
che mi hanno accompagnato
in questi anni di università*

*”Uno scienziato degno di questo nome,
e soprattutto un matematico,
prova lavorando la stessa impressione di un artista;
la gioia che gli dà il suo lavoro
è altrettanto grande e della medesima natura”
- Henri Poincaré*

Introduzione

Scopo di questa tesi è lo studio di alcune trasformate integrali, in particolare quella di Fourier, e della loro applicazione ad altri problemi matematici. In particolare, viene descritto il ruolo fondamentale dell'analisi di Fourier nella costruzione di un metodo - appartenente alla famiglia dei metodi spettrali - adatto alla risoluzione numerica delle equazioni differenziali con condizioni di periodicità.

Il primo capitolo è interamente dedicato alla teoria della trasformata di Fourier. Vengono toccati diversi argomenti, in particolare la proprietà di invertibilità e i teoremi di Paley-Wiener.

Nel secondo capitolo vengono trattate, più brevemente, altre due trasformate integrali, quelle di Laplace e di Mellin. Ancora una volta l'attenzione è posta sui teoremi che ne garantiscono l'invertibilità.

Nel terzo capitolo, a conclusione di questa prima parte della tesi, si mostrano alcune applicazioni, interne all'analisi stessa, di queste trasformate. In particolare, la derivazione della soluzione fondamentale dell'equazione del calore e di quella di Kolmogorov.

Nel quarto capitolo, parte centrale della tesi, viene presentata una classe di metodi numerici usati per la risoluzione delle equazioni differenziali: i metodi spettrali. Dopo una descrizione generale di questi metodi, la trattazione si focalizza su quel metodo spettrale che utilizza l'analisi di Fourier per ricavare una funzione che approssimi la soluzione esatta dell'equazione. Viene prima illustrato il caso di una griglia di punti infinita (caso ideale) per poi passare al caso di una griglia limitata con condizione di periodicità. Par-

icolare attenzione viene posta sulla relazione fra regolarità della soluzione e accuratezza del metodo, la quale deriva direttamente dai risultati di analisi ricavati in precedenza.

Infine, nel quinto ed ultimo capitolo, vengono presentati due problemi, un'equazione alle derivate parziali con condizioni iniziali assegnate e un'equazione agli autovalori (problema dell'oscillatore armonico). Questi sono affrontati sia con gli strumenti dell'analisi sia con il metodo spettrale appena descritto, e i risultati sono oggetto di valutazione.

Indice

1	Trasformata di Fourier	7
1.1	Definizione e proprietà fondamentali	8
1.2	Teoremi di invertibilità puntuale	9
1.3	Estensione dell'operatore \mathcal{F} a L^2	16
1.4	Trasformata di Fourier e derivate deboli	20
1.5	Teoremi di Paley-Wiener	21
2	Oltre Fourier: trasformate di Laplace e Mellin	31
2.1	Trasformata di Laplace	31
2.1.1	Regione di convergenza e di assoluta convergenza	32
2.1.2	Alcune proprietà della trasformata di Laplace	37
2.1.3	Regolarità	39
2.1.4	Invertibilità	41
2.2	Trasformata di Mellin	45
3	Trasformate integrali ed equazioni differenziali	49
3.1	Problema di Cauchy per l'equazione del calore	49
3.2	Problema di Dirichlet per il laplaciano su un settore angolare	51
3.3	Equazione di Kolmogorov	52
4	Metodi spettrali di Fourier	57
4.1	Metodi di collocazione spettrale	58
4.1.1	Scelta delle funzioni di base	61
4.1.2	Approssimazione delle derivate	62

4.2	Metodi spettrali e analisi di Fourier	67
4.2.1	Trasformata di Fourier semidiscreta	67
4.2.2	Interpolante a banda limitata	69
4.2.3	Approssimazione della derivata prima	69
4.3	Metodi spettrali su un dominio periodico	72
4.3.1	Trasformata di Fourier discreta (DFT)	75
4.3.2	Interpolante e matrice di differenziazione	76
4.3.3	Derivate di ordine superiore	81
4.4	Regolarità e accuratezza spettrale	83
4.5	Metodi spettrali su un dominio illimitato	93
4.5.1	Troncamento del dominio	94
4.5.2	Funzioni di base con dominio illimitato	94
4.5.3	Cambio di coordinate	95
5	Applicazione dei metodi spettrali	97
5.1	Equazione del trasporto	97
5.2	Equazione agli autovalori: oscillatore armonico quantistico . .	100
A	Derivate deboli	107
B	Programmi MATLAB	111

Capitolo 1

Trasformata di Fourier

Introduciamo in questo capitolo lo strumento principale di questa trattazione: la trasformata di Fourier. I teoremi che dimostreremo o richiameremo qui saranno di importanza fondamentale nei capitoli successivi.

Anzitutto, si definisce la trasformata di Fourier per funzioni L^1 . Ne vengono richiamati brevemente i risultati fondamentali, e ci si sofferma invece maggiormente sui teoremi che garantiscono condizioni di invertibilità *puntuale*. Si costruisce poi l'estensione della trasformata a L^2 , dimostrando la biiettività del nuovo operatore.

Il cuore di questo primo capitolo è dedicata allo studio della relazione fra regolarità di una funzione e velocità di decrescenza della sua trasformata di Fourier. Per prima cosa si dimostra che la derivabilità in senso debole (la cui definizione e i teoremi fondamentali legati ad essa sono richiamati in un'appendice) implica la decrescenza polinomiale; secondariamente, si focalizza l'attenzione sulle funzioni analitiche e si dimostra (teoremi di Paley-Winer) sotto quali condizioni la trasformata di una funzione ha decrescenza esponenziale o addirittura supporto compatto.

1.1 Definizione e proprietà fondamentali

Definizione 1.1. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definiamo la *trasformata di Fourier* di u come

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, x \rangle} u(x) dx \quad (1.1)$$

Denotiamo anche $\hat{u} = \mathcal{F}[u]$.

Osservazione 1. Si noti che la definizione è ben posta, in quanto la funzione $x \rightarrow e^{-i\langle k, x \rangle} u(x)$ è sommabile per ogni k .

Vediamo alcune proprietà immediate:

1. $a, b \in \mathbb{C}$, $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}[au + bv] = a\mathcal{F}[u] + b\mathcal{F}[v] \quad (1.2)$$

2. $\hat{u}(k)$ è uniformemente continua. Infatti

$$\begin{aligned} |\hat{u}(k+h) - \hat{u}(k)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, x \rangle} (e^{-i\langle h, x \rangle} - 1) u(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle h, x \rangle} - 1| |u(x)| dx \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine, per il teorema della convergenza dominata, tende a 0 per $h \rightarrow 0$, *uniformemente* in k . Pertanto \hat{u} è uniformemente continua.

3. \hat{u} è limitata. Precisamente,

$$|\hat{u}(k)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = \|u\|_1 \quad (1.3)$$

Osservazione 2. Dalle osservazioni precedenti, segue che la trasformazione $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ è un operatore lineare e continuo.

4. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora $\mathcal{F}[u(x - x_0)](k) = \hat{u}(k)e^{ikx_0}$.

Enunciamo ora alcuni teoremi che useremo in seguito, omettendone la dimostrazione. Si tratta di risultati molto classici, e possono essere trovati in qualunque testo di analisi sull'argomento. Si vedano, ad esempio, [1] e [4].

Teorema 1.1.1 (Riemann-Lebesgue). $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\lim_{\|k\| \rightarrow \infty} \hat{u}(k) = 0 \quad (1.4)$$

Teorema 1.1.2. Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\hat{v}(y)dy \quad (1.5)$$

Teorema 1.1.3 (Trasformata di Fourier e derivate). Sia $v(x) = ix_i u(x)$, e supponiamo $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\partial_{k_i} \hat{u}(k) = \hat{v}(k) \quad (1.6)$$

Inoltre, se $\partial_{x_i} u(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\mathcal{F} [\partial_{x_i} u] (k) = -ik \hat{u}(k) \quad (1.7)$$

Teorema 1.1.4 (Convoluzione). Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sia $u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy$. Allora $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\widehat{u * v}(k) = \hat{u}(k)\hat{v}(k) \quad (1.8)$$

1.2 Teoremi di invertibilità puntuale

Cerchiamo ora delle condizioni affinché la trasformata di Fourier sia invertibile *puntualmente*. Più precisamente, nota la funzione \hat{u} , vogliamo capire sotto quali ipotesi su u e x possiamo risalire al valore di $u(x)$. Arriveremo a dimostrare che, se due funzioni hanno la stessa trasformata di Fourier, allora sono uguali quasi dappertutto.

I seguenti due teoremi trovano la loro origine nella teoria delle serie di Fourier. Essi corrispondono, rispettivamente, alle condizioni di Dini e di Jordan per la convergenza della serie di una funzione periodica ([2]).

Poniamo

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{ikx} \hat{u}(k) dk$$

Teorema 1.2.1 (Dini). *Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$, e sia x tale che $f(x) \in \mathbb{R}$. Supponiamo esista $\delta > 0$ tale che la funzione*

$$f_x(y) = \frac{u(x+y) + u(x-y)}{2y} - \frac{u(x)}{y}$$

sia sommabile sull'intervallo $]0, \delta]$. Allora

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_r(x) = u(x)$$

Dimostrazione. Si ha

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{ikx} \hat{u}(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} u(t) dt \right) dy$$

Scambiando gli integrali

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \left(\int_{-r}^r e^{i(x-t)y} dy \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \frac{\sin(r(x-t))}{x-t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t) \frac{\sin(rt)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [u(x+t) + u(x-t)] \frac{\sin(rt)}{t} dt$$

Siccome

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \tag{1.9}$$

risulta

$$\begin{aligned}\varphi_r(x) - f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f_x(y)}{y} \sin(ry) dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta_\epsilon} \frac{f_x(y)}{y} \sin(ry) dy + \frac{2}{\pi} \int_{\delta_\epsilon}^{+\infty} \frac{f_x(y)}{y} \sin(ry) dy\end{aligned}$$

dove $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta_\epsilon} f_x(y) \sin(ry) dy \right| < \epsilon$$

Si noti che abbiamo usato l'ipotesi di sommabilità della funzione $f_x(y)$ in un intorno destro dello zero. Consideriamo

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_{\delta_\epsilon}^{+\infty} \frac{f_x(y)}{y} \sin(ry) dy &= \frac{1}{\pi} \int_{\delta_\epsilon}^{+\infty} \frac{u(x+y) + u(x-y)}{y} \sin(ry) dy + \\ &+ \frac{2u(x)}{\pi} \int_{\delta_\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin(ry)}{y} dy\end{aligned}$$

Dimostriamo che entrambi gli integrali tendono a zero per $r \rightarrow +\infty$.

Poniamo

$$g(y) = \frac{u(x+y) + u(x-y)}{y} \chi_{[\delta_\epsilon, +\infty[}$$

dove $\chi_{[\delta_\epsilon, +\infty[}$ indica la funzione caratteristica dell'intervallo $[\delta_\epsilon, +\infty[$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\delta_\epsilon}^{+\infty} \frac{u(x+y) + u(x-y)}{y} \sin(ry) dy &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \sin(ry) dy = \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{I}m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iry} g(y) dy &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{I}m(\hat{g})(r) = 0\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il lemma di Riemann-Lebesgue. Inoltre, in base alla (1.9)

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\delta_\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin(ry)}{y} dy = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{r\delta_\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = 0$$

Concludendo, abbiamo dimostrato che per ogni $\epsilon > 0$

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} |\varphi_r(x) - f(x)| < \epsilon$$

e ciò prova il teorema. □

Teorema 1.2.2 (Jordan). *Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$, e sia $x \in \mathbb{R}$ tale che in un opportuno intorno di x le funzioni $\Re u$ e $\Im u$ sono a variazione limitata, allora*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_r(x) = \frac{u(x_+) + u(x_-)}{2}$$

dove

$$u(x_+) = \lim_{y \rightarrow x^+} u(y) \quad e \quad u(x_-) = \lim_{y \rightarrow x^-} u(y)$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre u a valori reali, in quanto possiamo ragionare separatamente per $\Re u$ e $\Im u$.

Ripercorrendo i passi della dimostrazione precedente, possiamo affermare che $\varphi_r(x) \rightarrow \frac{u(x_+) + u(x_-)}{2}$ per $r \rightarrow +\infty$ se e solo se, fissato $\delta > 0$ abbastanza piccolo, risulta

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \left[\frac{u(x+t) + u(x-t)}{2} - \frac{u(x_+) + u(x_-)}{2} \right] \frac{\sin(rt)}{t} dt = 0$$

Dimostriamo che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^\delta [u(x+t) - u(x_+)] \frac{\sin(rt)}{t} dt = 0$$

Supponiamo δ abbastanza piccolo, in modo che $u|_{[x-\delta, x+\delta]}$ sia a variazione limitata. Ricordiamo che una funzione è a variazione limitata se e solo se è differenza di funzioni monotone crescenti, pertanto non è restrittivo supporre

che u abbia tale proprietà, e di conseguenza anche la funzione $t \rightarrow u(x+t) - u(x)$. Allora, per il secondo teorema della media integrale ¹ esiste $c \in]0, \delta[$ tale che

$$\int_0^\delta [u(x+t) - u(x_+)] \frac{\sin(rt)}{t} dt = [u(\delta_-) - u(x_+)] \int_c^\delta \frac{\sin(rt)}{t} dt$$

Come già visto, l'ultimo integrale tende a zero per $r \rightarrow +\infty$. Infatti

$$\int_c^\delta \frac{\sin(rt)}{t} dt = \int_{rc}^{r\delta} \frac{\sin(t)}{t} dt \rightarrow 0$$

Ragionando in modo analogo, si prova che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^\delta [u(x-t) - u(x_-)] \frac{\sin(rt)}{t} dt = 0$$

e quindi il teorema è dimostrato.

Teorema 1.2.3 (Sommabilità secondo Gauss). *Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni x punto di Lebesgue per u si ha*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, k \rangle} \hat{u}(k) e^{-\frac{\|k\|^2}{r^2}} dk = u(x)$$

Dimostrazione. Sia $g(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{r^2}\right)$. Si verifica facilmente che

$$\hat{g}(k) = r\sqrt{\pi} e^{-\frac{r^2 k^2}{4}}$$

Pertanto, posto $G(x) = \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{r^2}\right)$, si ha

$$\widehat{G}(x) = (r\sqrt{\pi})^n e^{-\frac{r^2 \|x\|^2}{4}}$$

Posto

¹Il secondo teorema della media integrale afferma quanto segue:

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con f monotona e g continua. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a_+) \int_a^c g(t)dt + f(a_-) \int_c^b g(t)dt$$

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(k) e^{i\langle x, k \rangle} G(k) dk$$

Applicando il teorema 1.1.2

$$\begin{aligned} \varphi_r(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(k) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, y \rangle} e^{i\langle x, y \rangle} G(y) dy \right) dk = \\ &= \left(\frac{r\sqrt{\pi}}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} u(k) e^{-\frac{r^2\|x-k\|^2}{4}} dk = \left(\frac{r\sqrt{\pi}}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} u(k+x) e^{-\frac{r^2\|k\|^2}{4}} dk \end{aligned}$$

Siccome

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{r^2\|k\|^2}{4}} dk = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2 k_j^2}{4}} dk_j = \frac{2}{r} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{r} \right)^n$$

possiamo scrivere

$$\varphi_r(x) - u(x) = \left(\frac{r\sqrt{\pi}}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} [u(k+x) - u(x)] e^{-\frac{r^2\|k\|^2}{4}} dk$$

Passando alle coordinate sferiche, l'ultimo integrale diventa

$$\left(\frac{r\sqrt{\pi}}{2\pi} \right)^n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2\rho^2}{4}} \lambda(\rho) d\rho \quad (1.10)$$

dove

$$\lambda(\rho) = \rho^{n-1} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [u(x+\rho z) - u(x)] (\sin \vartheta_1)^{n-2} \dots \sin \vartheta_{n-2} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1}$$

con $z = z(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$ vettore di norma 1.

Ora, sia x punto di lebesgue per la funzione u . Per definizione

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, \delta))} \int_{B(x, \delta)} u(x+y) - u(x) dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, \delta))} \int_0^\delta \lambda(\rho) d\rho = 0$$

e quindi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_n}{\delta^n} \int_0^\delta \lambda(\rho) d\rho = 0 \quad (1.11)$$

con c_n costante.

In base alla (1.11), posto $\Lambda(t) = c_n \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$ e fissato $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 \leq \Lambda(t) \leq \epsilon t^n \quad \forall t \in [0, \delta]$$

Riprendiamo la (1.10), tralasciando la costante $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\right)^n$

$$\begin{aligned} \varphi_r(x) - u(x) &\approx r^n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2 \rho^2}{4}} \lambda(\rho) d\rho = r^n \int_0^\delta e^{-\frac{r^2 \rho^2}{4}} \lambda(\rho) d\rho + \\ &+ r^n \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{r^2 \rho^2}{4}} \lambda(\rho) d\rho = I_r(\delta) + J_r(\delta) \end{aligned}$$

Consideriamo $I_r(\delta)$. Integrando per parti

$$\begin{aligned} I_r(\delta) &= r^n [e^{-\frac{r^2 t^2}{4}} \Lambda(t)]_0^\delta - r^n \int_0^\delta \Lambda(t) e^{-\frac{r^2 t^2}{4}} \left(-\frac{r^2 t}{2}\right) dt = \\ &= r^n e^{-\frac{r^2 \delta^2}{4}} \Lambda(\delta) + \frac{1}{2} r^{n+2} \int_0^\delta t \Lambda(t) e^{-\frac{r^2 t^2}{4}} dt \leq \epsilon \left((r\delta)^n e^{-\left(\frac{r\delta}{2}\right)^2} + 2^{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t^2} dt \right) \end{aligned}$$

Siccome l'espressione fra parentesi è limitata sia in δ che in r , esiste una costante M per cui

$$I_r(\delta) < \epsilon M$$

Inoltre, riscrivendo l'integrale $J_r(\delta)$ in coordinate cartesiane, otteniamo

$$\begin{aligned} J_r(\delta) &= \int_\delta^{+\infty} \lambda(t) e^{-\frac{r^2 t^2}{4}} dt = r^n \int_{\mathbb{R}^n - B(x, \delta)} [u(x+y) - u(x)] e^{-\frac{r^2 \|y\|^2}{4}} dy \\ &= r^n \int_{\mathbb{R}^n - B(x, \delta)} u(x+y) e^{-\frac{r^2 \|y\|^2}{4}} dy + r^n u(x) \int_{\mathbb{R}^n - B(x, \delta)} e^{-\frac{r^2 \|y\|^2}{4}} dy \leq \\ &\leq r^n e^{-\left(\frac{r\delta}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}^n - B(x, \delta)} |u(x+y)| dy + u(x) \int_{\mathbb{R}^n - B(x, r\delta)} e^{-\frac{\|y\|^2}{4}} dy \end{aligned}$$

Siccome le funzioni u e $\exp(-\frac{\|y\|^2}{4})$ sono sommabili, quest'ultima somma converge a zero per $m \rightarrow +\infty$ per ogni fissato δ .

□

Corollario 1.2.4 (Formula di inversione). *Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tale che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora, per ogni x punto di Lebesgue per u (e quindi in particolare quasi dappertutto), si ha*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, k \rangle} \hat{u}(k) dk \quad (1.12)$$

Questa espressione è nota come 'formula di inversione'.

Dimostrazione. Sia x punto di Lebesgue per u . In base al teorema 1.2.3,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, k \rangle} \hat{u}(k) e^{-\frac{\|k\|^2}{r^2}} dk = u(x)$$

Infatti, siccome

$$\left| e^{i\langle x, k \rangle} \hat{u}(k) e^{-\frac{\|k\|^2}{r^2}} \right| \leq \hat{u}(k) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

si può portare il limite dentro l'integrale, e si ottiene l'asserto. □

Corollario 1.2.5. *Siano $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tali che $\hat{u}(k) = \hat{v}(k) \forall k \in \mathbb{R}^n$. Allora $u(x) = v(x)$ quasi dappertutto.*

Equivalentemente, la trasformazione $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ è iniettiva.

Dimostrazione. In base al teorema 1.2.3, si ha

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, k \rangle} \widehat{(u-v)}(k) e^{-\frac{\|k\|^2}{r^2}} dk = (u-v)(x) \quad q.d.$$

Perciò $u(x) = v(x)$ q.d. □

1.3 Estensione dell'operatore \mathcal{F} a L^2

Vogliamo estendere la nozione di trasformata di Fourier alle funzioni L^2 , per le quali la definizione (1.4) non è ben posta.

Per ottenere una nuova definizione che sia coerente con la precedente, consideriamo un sottospazio W denso in L^2 sul quale l'operatore \mathcal{F} sia ben

definito. A questo punto, usando il teorema del prolungamento continuo, possiamo estendere \mathcal{F} a tutto lo spazio. Esistono diverse scelte possibili per il sottospazio W . In questa trattazione, prendiamo $W = L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esso è incluso in L^2 ed è denso, in quanto contiene le funzioni semplici a supporto compatto, l'insieme delle quali è denso in L^2 . Per poter procedere, abbiamo prima bisogno di un teorema.

Teorema 1.3.1 (Parseval). *Sia $u \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\|u\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{u}\|_2 \quad (1.13)$$

Dimostrazione. Poniamo

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) \overline{u(y)} dy$$

Tale funzione è sommabile e continua. Infatti

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) \overline{u(y)} dy \right| dx \leq \|u\|_1^2 \\ |h(x+z) - h(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [u(x+z+y) - u(x+y)] \overline{u(y)} dy \right| \leq \\ &\leq \|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+y+z) - u(x+y)| dy \end{aligned}$$

Per il teorema della continuità in media per funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$, l'ultimo integrale tende a 0 per $z \rightarrow 0$.

Studiamo ora la trasformata di Fourier di h .

$$\begin{aligned} \hat{h}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, x \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) \overline{u(y)} dy \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, y \rangle} \overline{u(y)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, x+y \rangle} u(x+y) dx \right) dy = \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, y \rangle} u(y) dy} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k, t \rangle} u(t) dt = \overline{\hat{u}(k)} \hat{u}(k) = |\hat{u}(k)|^2 \end{aligned}$$

²Infatti, presa $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ risulta $|f(x)|^2 \leq \|f\|_\infty |f(x)|$ q.d., e quindi $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Per il teorema 1.2.3

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, k \rangle} \hat{h}(k) e^{-\frac{\|k\|^2}{r^2}} dk = h(x)$$

Per la continuità di h , questa formula vale per ogni x . In particolare, se $x = 0$ (ricordiamo che $\hat{h}(k) = |\hat{u}(k)|^2$)

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(k)|^2 e^{-\frac{\|k\|^2}{r^2}} dk = h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^2 dy$$

Per il teorema della convergenza monotona possiamo portare il limite dentro l'integrale, ottenendo finalmente

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(k)|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^2 dy$$

□

Dunque, abbiamo che $\mathcal{F} : L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2$ è un operatore lineare, continuo e (a meno di una costante trascurabile) isometrico.

Pertanto, per il teorema del prolungamento continuo, \mathcal{F} si estende ad un operatore lineare, continuo e (sostanzialmente) isometrico definito su tutto L^2 . Per semplicità, denotiamo questa estensione ancora una volta con \mathcal{F} .

La ragione per cui l'estensione della trasformata di Fourier a L^2 è così importante è che essa gode di una proprietà fondamentale, enunciata dal seguente teorema.

Teorema 1.3.2. *L'operatore \mathcal{F} è una biezione di $L^2(\mathbb{R}^n)$ in se stesso.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che \mathcal{F} è iniettivo. Resta da provare che è suriettivo.

Sia $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo la trasformata di Fourier di $u^{(2)}$ (tale funzione è continua e a supporto compatto, quindi in particolare è L^1). Per la (1.7)

$$\widehat{u^{(2)}}(k) = -k^2 \hat{u}(k)$$

Per il lemma di Riemann-Lebesgue $\widehat{u^{(2)}}(k) \rightarrow 0$ per $\|k\| \rightarrow +\infty$, e quindi $\hat{u}(k) = o(\frac{1}{k^2})$. Siccome $\hat{u}(k)$ è anche continua su \mathbb{R}^n , ne segue che $\hat{u}(k) \in$

$L^1(\mathbb{R}^n)$. Per la formula di inversione (che vale per ogni x , in quanto u è continua)

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, k \rangle} \hat{u}(k) dk = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, k \rangle} \hat{u}(-k) dk = \mathcal{F}[\hat{u}(-k)]$$

Quindi $C_0^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$, e siccome C_0^2 è denso in L^2 , ci resta da provare che $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ è chiuso. Ne verrà che $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sia $f_k \in \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$, $f_k = \widehat{\phi_k}$, $f_k \xrightarrow{L^2} f$. Si ha che

$$\|\phi_k - \phi_h\|_2 = \|f_k - f_h\|_2 \longrightarrow 0 \quad k, h \rightarrow +\infty$$

Dunque la successione ϕ_k è di Cauchy e quindi converge a $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Per la continuità dell'operatore \mathcal{F} , si ha $\mathcal{F}[\phi] = f$.

Pertanto $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ è chiuso e il teorema è provato. □

Osservazione 3. Per quanto dimostrato l'operatore \mathcal{F} è dotato di inverso, che denotiamo con \mathcal{F}^{-1} . Si verifica facilmente che

$$\|\mathcal{F}^{-1}[u]\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|u\|_2^2 \quad (1.14)$$

Concludiamo questa sezione ricavando una relazione che lega direttamente \hat{u} alla funzione u , per $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Nel seguente teorema ricaviamo una rappresentazione simile alla (1.4) sebbene non altrettanto semplice.

Teorema 1.3.3 (Plancherel). *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Posto*

$$\phi_r(x) = \int_{\|x\| < r} e^{-ikx} u(x) dx \quad (1.15)$$

si ha che $\phi_r \xrightarrow{L^2} \hat{u}$. Analogamente, posto

$$\psi_r(x) = \int_{\|x\| < r} e^{ikx} \hat{u}(x) dx \quad (1.16)$$

si ha che $\psi_r \xrightarrow{L^2} u$

Dimostrazione. Poniamo

$$u_r(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } \|x\| \leq r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il supporto di u_r è compatto, perciò $u_r \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e in più $u_r \xrightarrow{L^2} u$. Osserviamo che risulta $\hat{u}_r = \phi_r$, e dunque per il teorema di Plancherel

$$\|\phi_h - \phi_k\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|u_h - u_k\|_2 \longrightarrow 0 \quad h, k \rightarrow +\infty$$

La successione ϕ_r è di Cauchy e quindi per la completezza di L^2 esiste ϕ tale che $\phi_r \xrightarrow{L^2} \phi$.

Se $u_r \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni r , allora ϕ è per definizione la trasformata di Fourier di u . Nel caso generale, basta prendere $v_r \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tale che $v_r \xrightarrow{L^2} u$.

Si ha $\|u_r - v_r\|_2 \leq \|u_r - u\|_2 + \|u - v_r\|_2 \longrightarrow 0$, e quindi $\|\phi_r - \hat{v}_r\| \rightarrow 0$.

Allora per definizione $\phi = \mathcal{F}[u]$ e la (1.15) è dimostrata.

La (1.16) si dimostra in maniera del tutto analoga. □

Osservazione 4. Ricordiamo che se $\phi_r \xrightarrow{L^2} \phi$, allora in particolare esiste una sottosuccessione ϕ_{r_k} tale che $\phi_{r_k}(x) \longrightarrow \phi(x)$ q.d.

1.4 Trasformata di Fourier e derivate deboli

Il teorema 1.1.3 esprime il rapporto fra la trasformata di Fourier e l'operazione di derivazione. In particolare ci dice che se la funzione u è di classe $C^\nu(\mathbb{R}^n)$ allora $\hat{u}(k)$ tende a zero più rapidamente di $|k|^{-\nu}$, per $k \rightarrow +\infty$.

Questo fatto, che già abbiamo usato nella dimostrazione del teorema 1.3.2, sarà di importanza cruciale nella teoria dei metodi spettrali. A tale fine, cerchiamo ora di estendere il teorema 1.1.3 al caso delle derivate deboli.

Teorema 1.4.1. *Sia $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni α multindice, $|\alpha| < p$,*

$$\widehat{u^{(\alpha)}}(k) = (-ik)^\alpha \hat{u}(k) \quad q.d.$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u^{(\alpha)}}(y) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u^{(\alpha)}(y) \hat{\varphi}(y) dy$$

Per il teorema 1.1.3, $\hat{\varphi} \in C^\infty \cap L^2(\mathbb{R}^n) \subset H^p(\mathbb{R}^n)$, e dunque possiamo applicare il teorema di integrazione per parti su H^p (si veda l'appendice 1).

Si ha

$$\begin{aligned} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \hat{\varphi}^{(\alpha)}(y) dy &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \mathcal{F} [x \rightarrow (-ix)^\alpha \varphi(x)](y) dy = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y) (-iy)^\alpha \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y) (iy)^\alpha \varphi(y) dy \end{aligned}$$

Sottraendo l'ultima espressione all'integrale di partenza, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{u^{(\alpha)}}(y) - (iy)^{(\alpha)} \hat{u}(y) \right) \varphi(y) dy = 0$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Quindi abbiamo la tesi. □

1.5 Teoremi di Paley-Wiener

Abbiamo visto il legame che c'è fra la regolarità di una funzione e il comportamento asintotico della sua trasformata di Fourier. Vogliamo approfondire ulteriormente questo legame, restringendo la nostra analisi alle funzioni analitiche. I risultati che seguono sono noti come *teoremi di Paley-Wiener*. Dimostreremo che se una funzione u può essere estesa ad una funzione U olomorfa su una striscia del piano complesso, e tale che la norma $\|U(\cdot + iy)\|_2$ è limitata al variare di y , allora $\hat{u}(k)$ tende a zero con velocità esponenziale per k sufficientemente grande.

Per di più, se la funzione U è intera (cioè olomorfa su tutto \mathbb{C}), e la sua velocità di crescita (asintotica) non è superiore a quella esponenziale, allora \hat{u} è a supporto compatto.

Lemma 1.5.1. *Siano $a, b > 0$, e sia U una funzione olomorfa sulla striscia del piano complesso $\{z; -a < \Im m(z) < b\}$. Se esiste una costante C tale che, per $y \in (-a, b)$, vale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x + iy)|^2 dx \leq C$$

allora, posto $U(x + iy) = U_y(x)$

$$\widehat{U}_y(k) = \widehat{U}_0(k)e^{-ky} \quad (1.17)$$

per $y \in (-a, b)$.

Dimostrazione. Fissato $y \in (-a, b)$, poniamo $F(z) = U(z)e^{-ik(z-iy)}$, con $k \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Sia $r > 0$, consideriamo la poligonale γ avente come estremi i punti r , $r + iy$, $-r + iy$, $-r$. Per il teorema di Cauchy si ha

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 0 \quad (1.18)$$

Dimostriamo ora che il contributo all'integrale lungo i lati paralleli all'asse immaginario tendono a 0 per $r \rightarrow +\infty$. Si ha

$$\left| \int_r^{r+iy} F(z) dz \right|^2 = \left| \int_0^y U(r + is)e^{k(s-y) - ikr} ds \right|^2 \leq \int_0^y |U(r + is)|^2 ds \int_0^y e^{2k(s-y)} ds$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder. Posto $M(r) = \int_0^y |U(r + is)|^2 ds$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^y |U(\tau + is)|^2 ds \right) d\tau = \\ &= \int_0^y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |U(\tau + is)|^2 d\tau \right) ds \leq C |y| \end{aligned}$$

La funzione M è sommabile, e siccome $\int_{-\infty}^{+\infty} M(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} M(\tau) - M(-\tau) d\tau$, esiste una successione $r_m \rightarrow +\infty$ tale che $M(r_m) + M(-r_m) \rightarrow 0$.

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\int_0^y U(\pm r_m + is) e^{k(s-y) - ik\pm r_m} ds \longrightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Considerando la (1.18) e prendendo $r = r_m$, si ha dunque che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(e^{-ky} \int_{-r_m}^{r_m} e^{-ikx} U(x) dx - \int_{-r_m}^{r_m} e^{-ikx} U(x + iy) dx \right) = 0$$

Per il teorema di Plancherel sappiamo che, a meno di sottosuccessioni

$$\begin{aligned} e^{-ky} \int_{-r_m}^{r_m} e^{-ikx} u(x) dx &\longrightarrow e^{-ky} \widehat{U}_0(k) & q.d. \\ \int_{-r_m}^{r_m} e^{-ikx} U(x + iy) dx &\longrightarrow \widehat{U}_y(k) & q.d. \end{aligned}$$

e dunque il lemma è provato. □

Teorema 1.5.2. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R})$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. u è la restrizione ad \mathbb{R} di una funzione U olomorfa sulla striscia del piano complesso $\{z; \Im z < a\}$ e che soddisfa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x + iy)|^2 dx \leq C \quad (1.19)$$

- 2.

$$u_a(k) = e^{a|k|} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.20)$$

Dimostrazione. (2) \Rightarrow (1)

Consideriamo

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k) e^{ikz} dk \quad (1.21)$$

Verifichiamo che U soddisfa le richieste del punto (1). Anzitutto, U è ben definita su $|\Im z| < a$. Infatti,

$$\hat{u}(k)e^{ikz} = (\hat{u}(k)e^{a|k|})(e^{-a|k|}e^{ikz})$$

La funzione $\hat{u}(k)e^{ikz}$ è dunque prodotto di funzioni L^2 (la prima lo è per l'ipotesi, la seconda lo è perché $|\operatorname{Im} z| < a$) e quindi è integrabile.

Inoltre U è olomorfa, in quanto

$$\frac{d}{dz}\hat{u}(k)e^{ikz} = (ik)\hat{u}(k)e^{ikz} \in L^1(\mathbb{R})$$

e per la formula di inversione si ha che $U|_{\mathbb{R}} = u$. Applicando il teorema di Parseval otteniamo la seconda parte dell'asserto. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_a(k)|^2 \leq \|u_a\|_{L^2}^2$$

(1) \Rightarrow (2)

Nella notazione precedente, $U_y(x) = U(x+iy)$ (quindi in particolare $U_0 = u$).

Per il lemma 1.5.1, $\widehat{U}_y(k) = \hat{u}(k)e^{-ky}$. Posto $|y| < a$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 e^{2a|k|} dk = \int_{-\infty}^0 |\hat{u}(k)|^2 e^{-2ak} dk + \int_0^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 e^{2ak} dk$$

Consideriamo il primo integrale. Per il lemma di Fatou

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 |\hat{u}(k)|^2 e^{-2ak} dk &= \int_{-\infty}^0 \lim_{y \rightarrow a^-} |\hat{u}(k)|^2 e^{-2yk} \leq \liminf_{y \rightarrow a^-} \int_{-\infty}^0 |\hat{u}(k)|^2 e^{-2yk} dk \leq \\ &\leq \liminf_{y \rightarrow a^-} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 e^{-2yk} dk = \liminf_{y \rightarrow a^-} \left\| \widehat{U}_y \right\|_2^2 = \liminf_{y \rightarrow a^-} \|U_y\|_2^2 \leq C \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_0^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 e^{2ak} dk \leq C$$

e quindi il teorema è dimostrato. \square

Osservazione 5. Avremmo chiaramente potuto sostituire le condizioni ‘simmetriche’ del teorema 1.5.2 con condizioni ‘asimmetriche’.

Più precisamente, si dimostra che la condizione (1.19) per $-a_1 < y < a_2$ è equivalente a

$$(e^{a_1 k} + e^{-a_2 k}) \hat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R})$$

Teorema 1.5.3. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R})$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Esiste una funzione U , olomorfa nel semipiano complesso $\{z; \Im m(z) > 0\}$ e tale che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x + iy)|^2 dx \leq C \quad y > 0 \quad (1.22)$$

e

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(x + iy) - u(x)|^2 dx = 0 \quad (1.23)$$

- 2.

$$\hat{u}(k) = 0 \quad \text{per } k < 0$$

Dimostrazione. (2) \Rightarrow (1)

Come nel teorema precedente definiamo $U(z)$ usando la (1.21). In base alle ipotesi su u , $U(z)$ è ben definita e olomorfa su $\{z; \Im m z > 0\}$. Fissato dunque $y > 0$, per quanto già dimostrato $U(x + iy)$ è la trasformata di Fourier inversa di $e^{-ky} \hat{u}(k)$, e per il teorema di Parseval

$$\|U(x + iy)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{u}(k) e^{-ky}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{u}(k)\|_2$$

che prova la (1.22). Inoltre

$$\|U(x + iy) - u(x)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{u}(k)(e^{-ky} - 1)\|_2 \longrightarrow 0$$

per $y \rightarrow 0^+$, dove il passaggio al limite è giustificato dal teorema della convergenza dominata.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Sia $U_1(x) = U(x + i)$. Fissato y , $-1 < y < +\infty$, applicando il lemma 1.5.1 si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{U}_1(k) \right|^2 e^{-2ky} dk = \left\| \widehat{U}_1(k) e^{-ky} \right\|_2^2 = 2\pi \|U(x + i + iy)\|_2^2 \leq C \quad (1.24)$$

Per $y \rightarrow +\infty$, la (4.9) implica chiaramente che $\widehat{U}_1(k) = 0$ (q.d.) per $k < 0$. Siccome

$$\widehat{U}_y(k) = \widehat{U}_1(k) e^{k(1-y)}$$

applicando la (1.23) e il teorema di Parseval

$$0 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \|U_y - u\|_2 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{U}_1(k) e^{k(1-y)} - \hat{u}(k) \right\|_2 = \left\| \widehat{U}_1(k) e^k - \hat{u} \right\|_2$$

Dunque, nel senso di $L^2(\mathbb{R})$, $\hat{u}(k) = \widehat{U}_1(k) e^k$, e ciò implica $\hat{u}(k) = 0$ per $k < 0$.

□

Osservazione 6. Nella dimostrazione (1) \Rightarrow (2) in realtà non è necessario supporre la (1.23). Infatti, se supponiamo semplicemente che U sia olomorfa nel semipiano e soddisfi la (1.22), allora per il lemma di Fatou anche $\widehat{U}_1(k) e^k \in L^2(\mathbb{R})$. Infatti

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{U}_1(k) e^k \right|^2 dk &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y \rightarrow -1^+} \left| \widehat{U}_1(k) \right|^2 e^{-2ky} dk \\ &\leq \liminf_{y \rightarrow -1^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{U}_1(k) \right|^2 e^{-2ky} dk < +\infty \end{aligned}$$

Allora $\widehat{U}_1(k)e^k$ sarà la trasformata di Fourier di una funzione, che denotiamo con u . Sfruttando la (1.22) e il teorema di Parseval, otteniamo

$$\begin{aligned} \|U(x+iy) - u(x)\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{U}_1(k)e^{k(1-y)} - \widehat{U}_1(k)e^k \right\|_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{U}_1(k)e^k(e^{-ky} - 1) \right\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{per } y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

E quindi abbiamo ricavato la (1.23) come una conseguenza anziché come un'assunzione.

Enunciamo ora un lemma che ci permette di estendere la validità di questo teorema. La dimostrazione, che qui omettiamo, può essere trovata su [4] e si ottiene come conseguenza del teorema di Phragmén-Lindelöf³.

Lemma 1.5.4. *Sia U funzione olomorfa in un intorno del semipiano chiuso $\{z; \operatorname{Im} z \geq 0\}$, e supponiamo che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x)|^2 dx < +\infty \quad (1.25)$$

e che, per $0 < \theta < \pi$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ |U(re^{i\theta})|}{r} = 0 \quad (1.26)$$

³Il teorema di Phragmén-Lindelöf è un'estensione del principio del massimo a funzioni olomorfe su un dominio non limitato. In letteratura esistono diverse varianti di questo teorema, che ai fini di questa trattazione può essere espresso come segue.

Sia u una funzione olomorfa sul dominio angolare $D = \{z = re^{i\theta}; r > 0, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ e continua su ∂D . Supponiamo che

1. Esiste $M > 0$ tale che $|u(z)| \leq M$ per ogni $z \in \partial D$.

2. Vale

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ |u(re^{i\theta})|}{r} = 0$$

per $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

Allora $|u(z)| \leq M$ per ogni $z \in D$. Sostanzialmente questo teorema afferma che se u ha una velocità asintotica di crescita che è minore di quella esponenziale, allora per u vale il principio del massimo.

dove \log^+ indica la parte positiva della funzione logaritmo. Allora vale la (1.22).

Teorema 1.5.5. *Sia U una funzione intera, e sia $a > 0$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. $U|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$|U(z)| = o(e^{a|z|}) \quad |z| \rightarrow +\infty \quad (1.27)$$

2. Esiste una funzione $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{u}(k) = 0$ per $|k| > a$ tale che

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{u}(k) e^{ikz} dk \quad (1.28)$$

Dimostrazione. (2) \Rightarrow (1)

Si ha

$$|U(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}(k)e^{-ky}\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}\|_2 \left(\int_{-a}^a e^{-2ky} dk \right)^{\frac{1}{2}}$$

Osserviamo che

$$\int_{-a}^a e^{-2ky} dk = \frac{1}{2y} (e^{2ay} - e^{-2ay}) \leq \frac{e^{2a|y|}}{|y|}$$

Da ciò segue

$$|U(z)| \leq \frac{e^{a|y|}}{2\pi\sqrt{|y|}} \|\hat{u}\|_2$$

Che ovviamente implica la (1.27). Inoltre, per il teorema di Parseval

$$\|U|_{\mathbb{R}}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{u}\|_2 < +\infty$$

e quindi $U|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$.

(1) \Rightarrow (2)

Supponiamo per ora che la funzione $u = U|_{\mathbb{R}}$ sia limitata. Allora la funzione $G(z) = e^{iaz}U(z)$ è intera, e siccome U verifica la (1.27) nel semipiano $\{z; \Im z > 0\}$, si ha che $G(iy) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow +\infty$. Allora per il teorema di Phragmén-Lindelöf, G è limitata in tutto il semipiano.

G verifica le condizioni del lemma 1.5.4. Pertanto, dal teorema 1.5.3 deduciamo che \hat{g} è supportata su $(0, +\infty)$.

In base alla relazione fra U e G si ha $g(x) = e^{iax}u(x)$. Dunque $\hat{u}(k) = \hat{g}(k+a)$, che ovviamente implica $\hat{u}(k) = 0$ per $k < -a$. Se poniamo poi $F(z) = e^{-iaz}U(z)$, ragionando in modo analogo troviamo che $\hat{u}(k) = 0$ per $k > a$.

Abbiamo dimostrato che il supporto di $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ è compatto, e ciò implica in particolare che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre, fissato y , la funzione e^{-ky} è limitata sull'intervallo $[-a, a]$. Ne deriva che la funzione $\hat{u}(k)e^{-ky} = \widehat{U}_y(k)$ è integrabile, e quindi per la formula di inversione possiamo scrivere

$$U(x+iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{ikx} (\hat{u}(k)e^{-ky}) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{u}(k)e^{ikz} dk$$

E questo prova la (1.28). Nel caso generale, ossia senza supporre che u sia limitata, consideriamo

$$U_\varphi(z) = \varphi * U = \int U(z-x)\varphi(x)dx$$

dove $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$. U_φ soddisfa le condizioni del punto 1 ed è limitata su \mathbb{R} . Infatti

$$|U_\varphi(t)| = \left| \int U(t-x)\varphi(x)dx \right| \leq \|U|_{\mathbb{R}}\|_2 \|\varphi\|_2$$

Pertanto posto $u_\varphi = U_\varphi|_{\mathbb{R}}$ per quanto già dimostrato si ha $\widehat{u}_\varphi(k) = 0$ per $|k| > a$.

Ora, siccome $\widehat{u}_\varphi(k) = \hat{u}(k)\hat{\varphi}(k)$, per l'arbitrarietà di φ deve necessariamente valere $\hat{u}(k) = 0$ per $|k| > a$. Il resto della dimostrazione è esattamente identica al caso precedente.

□

Capitolo 2

Oltre Fourier: trasformate di Laplace e Mellin

2.1 Trasformata di Laplace

Abbiamo visto, alla fine del capitolo precedente, la possibilità di estendere la trasformata di Fourier al piano complesso, (si consideri, ad esempio, l'espressione (1.21)). Tale estensione prende il nome di *trasformata di Laplace*. In questa sezione, cercheremo di delineare le caratteristiche principali di questa trasformata.

Definizione 2.1. Sia $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$, e sia $z \in \mathbb{C}$. Se esiste in \mathbb{C} il limite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-zt} f(t) dt \quad (2.1)$$

definiamo la *trasformata di Laplace* di f in z come il valore di questo limite. In simboli,

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (2.2)$$

$\mathcal{L}[f](z)$ è detta anche trasformata *unilatera* di Laplace.

Analogamente, se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ si definisce la trasformata bilatera di Laplace come

$$\mathcal{L}_1[f](z) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow +\infty} \int_{-T_2}^{T_1} e^{-zt} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (2.3)$$

se tale limite esiste in \mathbb{C} .

Osservazione 7. La trasformata di Laplace è lineare. Più precisamente, se esiste $\mathcal{L}[f](z)$ e $\mathcal{L}[g](z)$ allora esiste $\mathcal{L}[f + g](z)$ e vale

$$\mathcal{L}[f + g](z) = \mathcal{L}[f](z) + \mathcal{L}[g](z)$$

Inoltre, per $c \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[cf](z) = c\mathcal{L}[f](z)$$

Osservazione 8. Come già accennato, esiste una relazione tra la trasformata di Fourier e quella di Laplace. Precisamente, se la funzione $\phi_x(t) = e^{-xt} f(t)$ è sommabile su \mathbb{R} , allora per $z = x + iy$ si ha

$$\mathcal{L}_1[f](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} \phi_x(t) dt = \mathcal{F}[\phi_x](y) \quad (2.4)$$

2.1.1 Regione di convergenza e di assoluta convergenza

Cerchiamo di capire, assegnata una funzione f , per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ esiste la sua trasformata di Laplace, e per quali valori la funzione $e^{-zt} f(t)$ è addirittura sommabile (si noti che questa condizione non è richiesta per l'esistenza della trasformata di Laplace). Troveremo che l'insieme degli z con tale proprietà è un semipiano.

Osserviamo preliminarmente che se esiste $\mathcal{L}[f](z_0)$, allora esiste anche $\mathcal{L}[f](z)$ con $\Re z > \Re z_0$. Per dimostrarlo, poniamo

$$G(t) = \int_0^t e^{-z_0\tau} f(\tau) d\tau$$

si ha che per definizione $G(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](z_0)$.

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^T e^{-zt} f(t) dt = e^{-(z-z_0)T} G(T) + (z - z_0) \int_0^T e^{-(z-z_0)t} G(t) dt$$

Per $T \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} G(t) dt$$

Infatti, $e^{-(z-z_0)T} G(T) \rightarrow 0$ per $T \rightarrow +\infty$, poiché G è limitata (in quanto continua e convergente per $t \rightarrow +\infty$).

Teorema 2.1.1 (Ascissa di convergenza). *Sia $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$. Allora esiste $a_c \in \overline{\mathbb{R}}$, detta ascissa di convergenza, tale che $\mathcal{L}[f](z)$ esiste per ogni z con $\Re z > a_c$ e non esiste per $\Re z < a_c$.*

Posto

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

e

$$F(\infty) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) & \text{se tale limite esiste in } \mathbb{C} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora

$$a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |F(t) - F(\infty)| \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che se $\Re z > a_c$, allora esiste $\mathcal{L}[f](z)$.

Integrando per parti ¹, si ha

$$\int_0^T e^{-zt} f(t) dt = e^{-zT} F(T) + z \int_0^T e^{-zt} F(t) dt =$$

¹Ricordiamo che, presa $f \in L^1(\mathbb{R})$ e posto

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

si ha $F'(x) = f(x)$ quasi dappertutto.

$$F(\infty) + e^{-zT}[F(T) - F(\infty)] + z \int_0^T e^{-zt}[F(t) - F(\infty)]$$

dove abbiamo usato il fatto che $z \int_0^T e^{-zt} F(\infty) dt = (1 - e^{-zT}) F(\infty)$.

Supponiamo $a_c \in \mathbb{R}$. Allora si verifica facilmente che, comunque fissato $\epsilon > 0$, esiste $M_\epsilon > 0$ tale che

$$|F(T) - F(\infty)| \leq M_\epsilon e^{(a_c + \epsilon)T} \quad \forall t \geq 0$$

E quindi

$$|e^{-zT}[F(T) - F(\infty)]| \leq M_\epsilon e^{-T(\Re z - a_c - \epsilon)}$$

Per ϵ abbastanza piccolo, $\Re z > a_c + \epsilon$, dunque la funzione $T \rightarrow e^{-zT}[F(T) - F(\infty)]$ è sommabile e tende a zero per $T \rightarrow +\infty$. Dunque, passando al limite nell'espressione sopra

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-zt} f(t) dt = F(\infty) + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} [F(t) - F(\infty)] dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

Supponiamo ora $a_c = -\infty$. Allora per ogni $r > 0$ esiste $M_r > 0$ tale che

$$|F(t) - F(\infty)| \leq M_r e^{-rt} \quad \forall t \geq 0$$

Ripetendo il ragionamento appena usato, si dimostra che $\mathcal{L}[f](z)$ esiste per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Dimostriamo ora che se $\Re z < a_c$ non esiste la trasformata di Laplace in z . Per farlo, supponiamo che esista $\mathcal{L}[f](z_0)$ e dimostriamo che $\Re z_0 \geq a_c$. Poniamo come prima

$$G(t) = \int_0^t e^{-z_0 \tau} f(\tau) d\tau \quad t \geq 0$$

Se $\Re z_0 \geq 0$, consideriamo

$$F(t) = \int_0^t e^{z_0 \tau} G'(\tau) d\tau = e^{z_0 t} G(t) - z_0 \int_0^t e^{z_0 \tau} G(\tau) d\tau$$

Quindi

$$F(t) - F(\infty) = e^{z_0 t} [G(t) - F(\infty)] - z_0 \int_0^t e^{z_0 \tau} [G(\tau) - F(\infty)] d\tau$$

Essendo, $G(t)$ continua e convergente per $t \rightarrow +\infty$, esiste $M > 0$ tale che $|G(t) - F(\infty)| < M$ per ogni $t \geq 0$. Risulta

$$\begin{aligned} |F(t) - F(\infty)| &\leq M e^{t \Re z_0} + |z_0| M \int_0^t e^{\tau \Re z_0} d\tau = \\ &= e^{t \Re z_0} \left(M + |z_0| M \frac{1 - e^{-t \Re z_0}}{\Re z_0} \right) \leq C e^{t \Re z_0} \end{aligned}$$

Se invece $\Re z_0 < 0$, sappiamo dall'osservazione che $\int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau$ converge e il suo valore è $F(\infty)$, pertanto

$$F(\infty) - F(t) = \int_t^{+\infty} e^{z\tau} G'(\tau) d\tau = -e^{zt} G(t) - z_0 \int_t^{+\infty} e^{z\tau} G(\tau) d\tau$$

dove ancora una volta abbiamo integrato per parti. Ragionando come prima, possiamo affermare che $G(t) \leq M$, e quindi

$$\begin{aligned} |F(\infty) - F(t)| &\leq M e^{t \Re z_0} + |z_0| M \int_t^{+\infty} e^{\tau \Re z_0} d\tau = \\ &= e^{t \Re z_0} \left(M - M \frac{|z_0|}{\Re z_0} \right) \leq C e^{t \Re z_0} \end{aligned}$$

Concludendo, in entrambi i casi si ha

$$\frac{1}{t} \log |F(t) - F(\infty)| \leq \Re z_0 + \frac{1}{t} \log C$$

e quindi, facendo il limite, si ottiene $a_c \leq \Re z_0$.

□

Corollario 2.1.2 (Ascissa di convergenza assoluta). *Sia f come nelle ipotesi del teorema precedente. Allora, posto*

$$H(t) = \int_0^t |f(\tau)| d\tau \quad t > 0$$

e

$$H(\infty) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) & \text{se tale limite esiste in } \mathbb{C} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora si definisce

$$a_{ac} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |H(t) - H(\infty)|$$

Si ha che la funzione $e^{-zt}f(t)$ è sommabile su $[0, +\infty[$ per $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z > a_{ac}$ e non lo è per $\Re z < a_{ac}$. a_{ac} è detta ascissa di convergenza assoluta.

Inoltre, vale $a_c \leq a_{ac}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella del teorema precedente, sostituendo f con $|f|$. Il fatto che valga $a_c \leq a_{ac}$ è ovvio.

□

Osservazione 9. Finora abbiamo parlato di convergenza e assoluta convergenza solo per la trasformata di Laplace unilatera. Servendoci di quanto già dimostrato, estendiamo ora questi concetti alla trasformata bilatera.

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, e siano a_c^+ e a_{ac}^+ le ascisse di convergenza di $\mathcal{L}[f]$.

Formalmente si ha

$$\int_{-\infty}^0 e^{-zt}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{zt}f(-t)dt$$

Consideriamo la funzione $t \rightarrow f(-t)$. Siano $-a_c^-$ e $-a_{ac}^-$ le ascisse di convergenza relativa a quest'ultima funzione.

Possiamo scrivere

$$\int_{-T_1}^{T_2} e^{-zt}f(t)dt = \int_0^{T_2} e^{-zt}f(t)dt + \int_0^{T_1} e^{-(-z)t}f(-t)dt$$

Per $T_1, T_2 \rightarrow +\infty$, sappiamo che il primo integrale converge se $\Re z > a_c^+$. Il secondo integrale invece, dato che il segno di z all'esponente è invertito, converge se $-\Re z > -a_c^-$, o equivalentemente se $\Re z < a_c^-$.

Possiamo concludere che la trasformata bilatera di f converge sulla striscia del piano complesso definita da $a_c^+ < \Re z < a_c^-$ (ammesso che valga $a_c^+ < a_c^-$: se così non è, la trasformata bilatera non converge mai), e diverge al di fuori di essa.

Siano ora a_{ac}^+ e $-a_{ac}^-$ le ascisse di convergenza assoluta dei due integrali. Ragionando allo stesso modo, troviamo che la regione di convergenza assoluta di $\mathcal{L}[f]$ è la striscia $a_{ac}^+ < \Re z < a_{ac}^-$.

Vale ovviamente $a_c^+ \leq a_{ac}^+$ e $a_{ac}^- \leq a_c^-$.

2.1.2 Alcune proprietà della trasformata di Laplace

Abbiamo osservato nel capitolo precedente che la trasformata di Fourier ha la proprietà di mutare derivate in polinomi, così come la proprietà di mutare una convoluzione in un semplice prodotto. Vediamo ora come tali proprietà si estendono alla trasformata di Laplace.

Teorema 2.1.3. *Sia $f \in L_{loc}^1([0, +\infty[)$, derivabile in senso debole. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, supponiamo esista $\mathcal{L}[f](z_0)$ e valga*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-z_0 t} \tilde{f}(t) = 0$$

con \tilde{f} assolutamente continua e $f = \tilde{f}$ quasi dappertutto (Appendice 1). Allora esiste $\mathcal{L}[f'](z_0)$ e vale

$$\mathcal{L}[f'](z_0) = -\tilde{f}(0) + z_0 \mathcal{L}[f](z_0) \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $e^{-z_0 t}$ è limitata su ogni intervallo $[0, T]$. Allora siccome $f' \in L_{loc}^1$, possiamo usare il teorema di integrazione per parti (Appendice 1)

$$\int_0^T e^{-z_0 t} f'(t) dt = [e^{-z_0 t} \tilde{f}(t)]_0^T + z_0 \int_0^T e^{-z_0 t} f(t) dt$$

dove \tilde{f} è assolutamente continua e $\tilde{f} = f$ q.d. Facendo il limite per $T \rightarrow +\infty$, otteniamo

$$\mathcal{L}[f](z_0) = -\tilde{f}(0) + z_0 \mathcal{L}[f](z_0)$$

□

Osservazione 10. L'ipotesi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-z_0 t} \tilde{f}(t) = 0$$

non è superflua. Infatti può accadere che esista $\mathcal{L}[f](z_0)$, ma che al contempo $e^{-z_0 t} f(t)$ non abbia limite per $t \rightarrow +\infty$. Consideriamo ad esempio $z_0 = 0$ e $f(t) = \sin(e^t)$. Si ha

$$\int_0^T \sin(e^t) dt = \int_1^{e^T} \frac{\sin y}{y} dy \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$$

ma naturalmente $\sin(e^t)$ non ha limite per $t \rightarrow +\infty$.

Teorema 2.1.4. *Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, e sia x_0 tale che le funzioni $e^{-x_0 t} f(t)$ e $e^{-x_0 t} g(t)$ siano sommabili su \mathbb{R} . Allora, per $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z = x_0$, esiste $\mathcal{L}_1[f * g]$ e vale*

$$\mathcal{L}_1[f * g](z) = \mathcal{L}_1[f](z) \cdot \mathcal{L}_1[g](z)$$

Dimostrazione. Siccome le funzioni $e^{-x_0 t} f(t)$ e $e^{-x_0 t} g(t)$ sono sommabili, lo è anche la loro convoluzione, espressa da

$$t \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z(t-\tau)} f(t-\tau) e^{-z\tau} g(\tau) d\tau = e^{-zt} (f * g)(t)$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1[f * g](z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} (f * g)(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z(t-\tau)} f(t-\tau) e^{-z\tau} g(\tau) d\tau \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\tau} g(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z(t-\tau)} f(t-\tau) dt \right) d\tau = \mathcal{L}_1[f](z) \cdot \mathcal{L}_1[g](z) \end{aligned}$$

□

2.1.3 Regolarità

Teorema 2.1.5. *Sia $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$, e sia $a_c < +\infty$ l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}[f]$. Preso un qualunque numero positivo maggiore di a_c , sia z_0 , e un angolo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, consideriamo il settore angolare*

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z - z_0)| \leq \alpha\}$$

Allora $\mathcal{L}[f]$ converge uniformemente su A

Dimostrazione. Consideriamo

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-z_0\tau} f(\tau) d\tau \quad t \geq 0$$

Allora, siccome $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](z_0)$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $T_\epsilon > 0$ tale che

$$|\phi(t) - \phi(t')| < \epsilon \quad \forall t, t' > T_\epsilon$$

Sia ora $z \in A$. In particalora si ha $\Re z > \Re z_0$. Consideriamo

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} e^{-z\tau} f(\tau) d\tau &= \int_t^{+\infty} e^{-(z-z_0)\tau} f(\tau) e^{-z_0\tau} d\tau = \\ &= [e^{-(z-z_0)\tau} \phi(\tau)]_{\tau=t}^{\tau=+\infty} + (z - z_0) \int_t^{+\infty} e^{-(z-z_0)\tau} \phi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Siccome vale

$$(z - z_0) \int_t^{+\infty} e^{-(z-z_0)\tau} d\tau = e^{-(z-z_0)t}$$

si ha che, per ogni $t > 0$,

$$\int_t^{+\infty} e^{-z\tau} f(\tau) d\tau = (z - z_0) \int_t^{+\infty} e^{-(z-z_0)\tau} [\phi(\tau) - \phi(t)] d\tau$$

Per ogni $t > T_\epsilon$ risulta

$$\left| \int_t^{+\infty} e^{-z\tau} f(\tau) d\tau \right| \leq \epsilon |z - z_0| \int_t^{+\infty} e^{-\Re(z-z_0)\tau} d\tau =$$

$$= \epsilon \frac{|z - z_0|}{\Re(z - z_0)} e^{-\Re(z - z_0)t} \leq \epsilon \frac{|z - z_0|}{\Re(z - z_0)} \leq \frac{\epsilon}{\cos \alpha}$$

Infatti

$$\frac{\Re(z - z_0)}{|z - z_0|} = \cos[\arg(z - z_0)] \geq \cos \alpha$$

□

Teorema 2.1.6. *Sia $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$, e sia $a_c < +\infty$ l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}[f]$. Allora la funzione $z \rightarrow \mathcal{L}[f](z)$ è olomorfa sul semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > a_c\}$. Inoltre, se A è l'insieme definito nel teorema precedente, si ha che $\mathcal{L}[f](z)$ converge uniformemente a zero per $|z| \rightarrow +\infty$, $z \in A$.*

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che $\mathcal{L}[f]$ è olomorfa. Si noti che non è assicurata la sommabilità della funzione $t \rightarrow e^{-zt}f(t)$, dunque non possiamo sperare di usare il teorema della convergenza dominata per portare la derivata dentro l'integrale. Sia K un qualsiasi compatto contenuto nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > a_c\}$. Osserviamo che esistono z_0 e α come nel teorema precedente tali che $K \subset A$. Consideriamo la successione di funzioni

$$\phi_n(z) = \int_0^n e^{-zt} f(t) dt \quad \Re z > a_c$$

Per il teorema precedente, $\phi_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](z)$ uniformemente in z . Ma $\phi_n(z)$ è chiaramente olomorfa su K , e questo implica che anche $\mathcal{L}[f]$ è olomorfa su K . Per l'arbitrarietà di K , $\mathcal{L}[f]$ è olomorfa su $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > a_c\}$. Fissiamo ora $\epsilon > 0$. Sia $z_0 > a_c$ come nel teorema precedente, allora esiste $T_1 > 0$ tale che

$$\int_0^{T_1} |e^{-z_0 t} f(t)| dt < \frac{\epsilon}{3}$$

e quindi, per $\Re z > \Re z_0$,

$$\left| \int_0^{T_1} e^{-zt} f(t) dt \right| < \int_0^{T_1} |e^{-z_0 t} f(t)| dt < \frac{\epsilon}{3}$$

Sappiamo che $\mathcal{L}[f]$ converge uniformemente su A , dunque esiste $T_2 > 0$ tale che

$$\left| \int_{T_2}^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall z \in A$$

Infine, si ha

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-zt} f(t) dt \right| \leq \max \{ e^{-T_1 \Re z}, e^{-T_2 \Re z} \} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| dt \leq$$

Se $|z| \rightarrow +\infty$, con $z \in A$, si ha in particolare che $\Re z \rightarrow +\infty$, e quindi per $|z|$ sufficientemente grande risulta

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-zt} f(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

In definitiva, abbiamo provato che

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \right| < \epsilon$$

per $|z|$ abbastanza grande, $z \in \mathbb{C}$

□

2.1.4 Invertibilità

Vogliamo ora trovare delle condizioni per l'invertibilità della trasformata di Laplace. Abbiamo già trattato questo argomento, anche se non esplicitamente, nel capitolo precedente, quando abbiamo esteso la trasformata di Fourier a funzioni di variabile complessa. In effetti, i teoremi di Paley-Wiener possono essere riformulati usando la notazione della trasformata di Laplace. In particolare, dai teoremi 1.5.2 e 1.5.3 possiamo trarre due importanti risultati concernenti l'invertibilità della trasformata di Laplace, espressi dal seguente teorema.

Teorema 2.1.7. 1. Sia $a > 0$, e sia F una funzione olomorfa sulla striscia verticale $\{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| < a\}$. Supponiamo esista una costante C tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dy \leq C \quad |x| < a \quad (2.7)$$

Allora, esiste $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}[f](z) \quad (2.8)$$

2. Sia F una funzione olomorfa sul semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$, e supponiamo che valga

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dy \leq C \quad y > 0 \quad (2.9)$$

Allora esiste $f \in L^2([0, +\infty[)$, tale che

$$F(z) = \mathcal{L}[f](z)$$

Dimostrazione. 1. Consideriamo $\tilde{F}(z) = F(-iz)$. Allora \tilde{F} è olomorfa su $\{z \in \mathbb{C} \mid |\Im z| < a\}$ e vale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{F}(x + iy)|^2 dx \leq C$ per $|y| < a$. Pertanto, in base alla dimostrazione del teorema 1.5.2, risulta

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt} \hat{u}(t) dt \quad (2.10)$$

dove u è la restrizione all'asse reale di \tilde{F} (si noti che $u \in L^2(\mathbb{R})$). Allora, posto $f(t) = \hat{u}(t)$, si ha

$$F(z) = \tilde{F}(iz) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}_1[f](z)$$

2. Sia \tilde{F} come sopra. Allora \tilde{F} è olomorfa nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ e vale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{F}(x + iy)|^2 dx \leq C$. Possiamo nuovamente utilizzare la (2.10) per esprimere $F(z)$. In questo caso, però, per il teorema 1.5.3 e l'osservazione 6, si ha $\hat{u}(k) = 0$ per $k < 0$. Pertanto

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \mathcal{L}[f](z)$$

□

Osservazione 11. I due risultati rimangono veri se si effettua una traslazione orizzontale sul piano complesso. In altre parole, nel punto 1 le ipotesi di olomorfia e limitatezza della norma L^2 possono essere assegnate su una qualunque striscia del piano complesso definita dalla condizione $a < \Re z < b$. Analogamente, se $b = +\infty$, vale il risultato 2.

Vediamo ora due condizioni per l'invertibilità della trasformata di Laplace che discendono immediatamente dai risultati di invertibilità già dimostrati per la trasformata di Fourier.

Teorema 2.1.8. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $e^{-x_0 t} f(t)$ è sommabile su \mathbb{R} , e sia $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Se esiste $\delta > 0$ tale che la funzione $y \rightarrow \frac{f(t+y)+f(t-y)}{2y} - \frac{f(t)}{y}$ è sommabile sull'intervallo $]0, \delta]$, allora*

$$f(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - im}^{x_0 + im} e^{zt} \mathcal{L}_1[f](z) dz \quad (2.11)$$

2. *Se in un intorno del punto t , le funzioni $\Re f$ e $\Im f$ sono a variazione limitata, allora*

$$\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - im}^{x_0 + im} e^{zt} \mathcal{L}_1[f](z) dz \quad (2.12)$$

dove

$$f(t_+) = \lim_{y \rightarrow t^+} f(y) \quad f(t_-) = \lim_{y \rightarrow t^-} f(y)$$

Dimostrazione. 1. Sia $\phi(t) = e^{-x_0 t} f(t)$, si ha

$$\mathcal{L}_1[f](x_0 + iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} e^{-x_0 t} f(t) dt = \mathcal{F}[\phi](y)$$

Allora, per il teorema 1.2.1, si ha

$$\begin{aligned} e^{-x_0 t} f(t) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m e^{iyt} \mathcal{F}[\phi](z) dz \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m e^{iyt} \mathcal{L}_1[f](x_0 + iy) dy \end{aligned}$$

E quindi, moltiplicando per $e^{x_0 t}$ si ottiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m e^{i(x_0 + iy)t} \mathcal{L}_1[f](x_0 + iy) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - im}^{x_0 + im} e^{zt} \mathcal{L}_1[f](z) dz \end{aligned}$$

2. Si considera il teorema (1.10) e si ragiona come nel punto precedente. \square

Teorema 2.1.9 (Bromwich). *Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e sia F olomorfa sulla striscia $\{z \in \mathbb{C} \mid a < \Re z < b\}$. Supponiamo che valga*

$$|F(x + iy)| < G(y) \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \in]a, b[$$

dove G è una funzione sommabile a valori non negativi.

Allora esiste $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{-zt} f(t) dt \quad a < \Re z < b$$

Dimostrazione. Fissato $t \in \mathbb{R}$, $x \in]a, b[$, la funzione $y \rightarrow F(x + iy)e^{x+iy}$ è sommabile. Definiamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(z) e^{zt} dz$$

Con un ragionamento del tutto analogo a quello della dimostrazione del lemma 1.5.1, si può dimostrare che la funzione $f(t)$ è indipendente da t . Sinteticamente, si costruisce una poligonale di estremi $x - iy$, $x' - iy$, $x' + iy$, $x + iy$ e si considera l'integrale di $e^{zt}F(z)$ lungo la curva. Tale integrale è

nullo per il teorema di Cauchy. Sfruttando l'ipotesi, risulta che l'integrale lungo i lati paralleli all'asse reale tende a zero per $y \rightarrow +\infty$.

Precisamente, vale

$$\left| \int_{x+iy}^{x'+iy} F(z)e^{zt} dz \right| < C_{x,x',t} G(y)$$

e lo stesso per l'integrale da $x - iy$ a $x' - iy$. Per la sommabilità di G , esiste una successione divergente y_m tale che $G(y_m) + G(-y_m)$ tende a zero.

Pertanto, gli integrali lungo i lati paralleli all'asse reale devono tendere allo stesso limite:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{x-im}^{x+im} F(z)e^{zt} dz = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{x'-im}^{x'+im} F(z)e^{zt} dz = 0$$

E quindi, per il teorema di Cauchy, deve necessariamente essere

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(z)e^{zt} dz = \int_{x'-i\infty}^{x'+i\infty} F(z)e^{zt} dz$$

Abbiamo dimostrato che $f(t)$ è indipendente da x . Notiamo che vale

$$2\pi e^{xt} f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+iy)e^{-iyt} dy = \mathcal{F}[F(x+i\cdot)](t)$$

Siccome F è olomorfa, le funzioni $\Re F$ e $\Im F$ sono localmente a variazione limitata, e quindi per il teorema 2.1.8, risulta

$$F(x+iy) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{(x+iy)t} f(-t) dt = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{-zt} f(t) dt$$

e quindi il teorema è provato. \square

2.2 Trasformata di Mellin

Analizziamo ora brevemente la trasformata di Mellin. Come vedremo immediatamente, essa è strettamente legata alla trasformata di Laplace bilaterale.

Definizione 2.2. Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che esiste in \mathbb{C} il limite

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0^+ \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} t^{z-1} f(t) dt$$

allora si definisce la *trasformata di Mellin* di f in z come il valore di tale limite. In simboli,

$$\mathcal{M}[f](z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} f(t) dt \quad (2.13)$$

Osservazione 12. Se esiste la trasformata di Mellin di f in z , allora effettuando il cambio di variabile $t = e^{-\tau}$ si ottiene

$$\mathcal{M}[f](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(e^{-t}) dt = \mathcal{L}_1[f \circ e^{-\tau}](z)$$

Mostriamo ora alcune proprietà della trasformata di Mellin; i risultati che seguono derivano tutti un dai risultati già dimostrati per la trasformata di Laplace, e possono essere dedotti semplicemente utilizzando il cambio di variabile descritto nell'osservazione appena fatta.

Anzitutto, possiamo affermare che la regione di convergenza della trasformata di Mellin è una striscia del piano complesso del tipo $\{z \in \mathbb{C} \mid a < \Re z < b\}$.

Teorema 2.2.1. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $t \rightarrow t^{-x_0-1} f(t)$ sia sommabile su $[0, +\infty[$ e sia $t \in \mathbb{R}$ tale che in un intorno di t le funzioni $\Re f$ e $\Im f$ sono a variazione limitata.*

Allora

$$\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-im}^{x_0+im} t^{-z} \mathcal{M}[f](z) dz$$

Dimostrazione. Segue dal teorema 2.1.8. □

Teorema 2.2.2. *Sia F una funzione olomorfa sulla striscia del piano complesso $\{z \in \mathbb{C} \mid a < \Re z < b\}$. Supponiamo che $|F(x+iy)| \leq G(y)$ per $y \in \mathbb{R}$ e $a < x < b$.*

Allora, posto

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} t^{-z} F(z) dz$$

si ha $F(z) = \mathcal{M}[f](z)$.

Dimostrazione. Segue dal teorema 2.1.9 □

Teorema 2.2.3. *Supponiamo che le funzioni $t \rightarrow t^{x_0-1}f(t)$ e $t \rightarrow t^{x_0-1}g(t)$ siano sommabili su $[0, +\infty[$. Allora se poniamo*

$$(f \vee g)(t) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{\tau}\right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad (2.14)$$

risulta

$$\mathcal{M}[f \vee g](z) = \mathcal{M}[f](z) \cdot \mathcal{M}[g](z) \quad (2.15)$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal teorema 4.4.1 osservando che

$$\begin{aligned} (f \vee g)(e^{-t}) &= \int_0^{+\infty} f\left(\frac{e^{-t}}{\tau}\right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{e^{-t}}{e^{-\tau}}\right) g(e^{-\tau}) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{\tau-t}) g(e^{-\tau}) d\tau = (f(e^{-\tau}) * g(e^{-\tau}))(t) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.4. *Sia $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$, derivabile in senso debole. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ con $\Re z_0 > 0$, tale che esista $\mathcal{M}[f](z_0)$ e valga*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{z_0} \tilde{f}(t) = 0$$

con \tilde{f} assolutamente continua e $\tilde{f} = f$ q.d. Allora esiste $\mathcal{M}[f'](z_0)$ e vale

$$\mathcal{M}[f'](z_0 + 1) = -z_0 \mathcal{M}[f](z_0) \quad (2.16)$$

Dimostrazione. Sfruttando il teorema di integrazione per parti per derivate deboli (Appendice 1), si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{z_0} f'(t) dt = \left[t^{z_0} \tilde{f}(t) \right]_{t_1}^{t_2} - z_0 \int_{t_1}^{t_2} t^{z_0-1} f(t) dt$$

con \tilde{f} continua e $\tilde{f} = f$ q.d. In base alle ipotesi, $t_2^{z_0} \tilde{f}(t_2) \rightarrow 0$ per $t_2 \rightarrow +\infty$, e siccome $\Re z_0 > 0$ e \tilde{f} è continua, anche $t_1^{z_0} \rightarrow 0$ per $t_1 \rightarrow 0$.

Pertanto,

$$\mathcal{M}[f'](z_0 + 1) = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0^+ \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} t^{z_0} f'(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{z_0-1} f(t) dt = \mathcal{M}[f](z_0)$$

□

Capitolo 3

Trasformate integrali ed equazioni differenziali

Vediamo ora alcune applicazioni delle trasformate integrali trattate finora nella risoluzione di problemi interni all'analisi stessa. In particolare, la loro proprietà di mutare le derivate in funzioni polinomiali rende le trasformate un utile strumento per determinare la soluzione analitica di un'equazione differenziale alle derivate parziali.

3.1 Problema di Cauchy per l'equazione del calore

Sia $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Vogliamo determinare una funzione $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ soluzione del problema di Cauchy per l'operatore del calore con dato iniziale ϕ . Precisamente, u deve verificare le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \phi(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.1)$$

Procediamo formalmente, supponendo che esista una soluzione u è che questa ammetta trasformata di Fourier nelle variabile x . Il sistema 3.1 diventa

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(k, t) = \|k\|^2 \hat{u}(k, t) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{\phi}(k) \end{cases}$$

Per k fissato, questo è un problema di Cauchy ordinario, la cui soluzione è data da

$$\hat{u}(k, t) = \hat{\phi}(k) e^{-\|k\|^2 t}$$

Per la formula di inversione si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, k \rangle - \|k\|^2 t} \hat{\phi}(k) dk$$

Sempre procedendo formalmente, scambiamo l'ordine degli integrali

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y, k \rangle - \|k\|^2 t} dk \right) \phi(y) dy$$

Per $t > 0$ vale (tralasciamo i calcoli)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y, k \rangle - \|k\|^2 t} dk = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$$

sostituendo nella relazione precedente, otteniamo finalmente

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} \phi(y) dy \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

Se supponiamo, ad esempio, $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, questa scrittura non è solo formale. Sotto la stessa ipotesi, è lecito portare le derivate sotto al segno di integrale. Siccome vale

$$(\partial_t - \Delta) \frac{\exp(-\frac{\|x-y\|^2}{4t})}{(4\pi t)^{n/2}} = 0$$

allora vale anche $\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u$. Infine, se supponiamo ϕ continua, si può verificare (si veda [1]) che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \phi(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

e quindi $u(x, t)$ è soluzione di (3.1).

3.2 Problema di Dirichlet per il laplaciano su un settore angolare

Sia $0 < \bar{\theta} < 2\pi$, consideriamo il settore

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \rho > 0, 0 < \theta < \bar{\theta}\}$$

Vogliamo determinare una funzione u che sia armonica ($\Delta u = 0$) su S e che assuma un dato al bordo assegnato. Precisamente, u deve verificare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \forall (x, y) \in S \\ u(\rho, 0) = f(\rho) & \rho > 0 \\ u(\rho \cos \bar{\theta}, \rho \sin \bar{\theta}) = g(\rho) & \rho > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Poniamo per semplicità di notazione $u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = U(\rho, \theta)$. Osserviamo che non restrittivo supporre una tra f e g identicamente nulla: infatti, sia u_1 una soluzione del problema con $U(\rho, 0) \equiv 0$ e g qualsiasi, e u_2 soluzione del problema con $U(\rho, \bar{\theta}) \equiv 0$ e f qualsiasi, una generica soluzione di (3.3) è data semplicemente dalla somma fra u_1 e u_2 . Sia dunque $g \equiv 0$.

In coordinate polari, l'equazione $\Delta u(x, y) = 0$ diventa

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \quad \rho > 0, 0 < \theta < \bar{\theta} \quad (3.4)$$

Allora, applicando formalmente la trasformata di Mellin all'equazione, per il teorema 4.10 risulta

$$z(z+1)\mathcal{M}[U_\theta](z) - z\mathcal{M}[U_\theta](z) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathcal{M}[U_\theta](z) = 0$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti. Le sue soluzioni sono della forma

$$\mathcal{M}[U_\theta](z) = A(z)e^{i\theta z} + B(z)e^{-i\theta z}$$

Supponendo che $\lim_{\theta \rightarrow 0^+}$ e $\lim_{\theta \rightarrow \bar{\theta}^-}$ siano permutabili con l'operatore \mathcal{M} , si ha

$$A(z) + B(z) = \mathcal{M}[f](z) \quad A(z)e^{i\bar{\theta}z} + B(z)e^{-i\bar{\theta}z} = 0$$

da cui, con alcuni calcoli, si ricava

$$\mathcal{M}[U_\theta](z) = \frac{\sin((\bar{\theta} - \theta)z)}{\sin(\bar{\theta}z)} \mathcal{M}[f](z)$$

Per la formula di inversione, sempre formalmente, si ottiene

$$U(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}[f](z) \frac{\sin((\bar{\theta} - \theta)z)}{\sin(\bar{\theta}z)} \rho^{-z} dz \quad (3.5)$$

con $c \in \mathbb{R}$. Si può dimostrare (si veda [1]) che se c non è un polo della funzione $\sin(\bar{\theta}z)$ (i cui poli sono della forma $k\pi/\bar{\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$), e se per ogni x appartenente ad un opportuno intorno di c la funzione $y \rightarrow \mathcal{M}[f](x + iy)$ è sommabile, allora la (3.5) è effettivamente soluzione del problema.

L'importanza di questa formula di rappresentazione è che permette di dimostrare che il problema (3.3) non ha, in generale, soluzione unica.

Siano infatti c_1 e c_2 tali che la funzione $\sin(\bar{\theta}z)$ ha un singolo polo x_0 fra c_1 e c_2 . Se U_1 e U_2 sono le soluzioni date dalla (3.5) con $c = c_1, c_2$, allora per il teorema dei residui $U_1 - U_2$ è uguale al residuo della funzione $\mathcal{M}[f](z) \frac{\sin((\bar{\theta} - \theta)z)}{\sin(\bar{\theta}z)} \rho^{-z}$ in x_0 , e quindi $U_1 \neq U_2$.

3.3 Equazione di Kolmogorov

Consideriamo l'operatore di Kolmogorov

$$K = \Delta_{x'} + x' \nabla_{x''} - \partial_t \quad (3.6)$$

con $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, e $t \in \mathbb{R}$. Vogliamo determinare una funzione $u : \mathbb{R}^{2n} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ che verifica le condizioni

$$\begin{cases} Ku(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^{2n} \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (3.7)$$

dove abbiamo adottato la notazione $x = (x', x'')$. Una soluzione del problema 3.7 ha un significato fisico ben preciso: u rappresenta la densità di probabilità di un sistema con $2n$ gradi di libertà. Le prime n componenti rappresentano la posizione del sistema, mentre le ultime n ne rappresentano la velocità. Dunque $u(x', x'', t)$ può essere interpretato come la densità di un sistema di particelle con posizione (x'_1, \dots, x'_n) e velocità (x''_1, \dots, x''_n) al tempo t .

In ogni caso, le interpretazioni fisiche non rientrano negli scopi di questa trattazione; il nostro obiettivo è unicamente determinare una soluzione di (3.7). Possiamo scrivere l'operatore K nella forma ([15]):

$$K = \operatorname{div} (A \nabla_x) + \langle x, B \nabla_x \rangle - \partial_t \quad (3.8)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che anche l'equazione del calore, che abbiamo risolto qualche pagina fa, può essere scritta nella forma (3.8); in questo caso B è la matrice nulla e A è la matrice identità.

Come negli esempi precedenti, applichiamo formalmente la trasformata di Fourier nella variabile x all'equazione $Ku = 0$. Otteniamo

$$- \langle Ak, k \rangle \hat{u}(k, t) - \langle \nabla_k, Bk \rangle \hat{u}(k, t) - \partial_t \hat{u}(k, t) = 0$$

Si noti che, poichè la traccia della matrice B è nulla, si ha $\langle \nabla_k, Bk \rangle = \langle Bk, \nabla_k \rangle$. Allora, posto $Y = \langle Bk, \nabla_k \rangle + \partial_t$, abbiamo tradotto il problema iniziale nel seguente:

$$\begin{cases} Y \hat{u}(k, t) = - \langle Ak, k \rangle \hat{u}(k, t) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{\phi}(k) \end{cases} \quad (3.9)$$

Utilizziamo il metodo delle caratteristiche ([11]). Sia $\gamma(s)$ la curva integrale di Y con $\gamma(0) = (\eta, 0)$. Al variare di $\eta \in \mathbb{R}^{2n}$ queste sono chiamate *curve caratteristiche*, con dato iniziale sull'iperpiano $\{(x, t) \mid t = 0\}$. Per le proprietà delle curve integrali, si ha

$$(Y\hat{u})(\gamma(s)) = \frac{d}{ds}\hat{u}(\gamma(s))$$

Cerchiamo di determinare l'espressione di $\gamma(s)$. Posto $\gamma(s) = (k(s), t(s))$, con $k \in \mathbb{R}^{2n}$ e $t \in \mathbb{R}$. Si ha che γ è una curva integrale di Y se e solo se $k(s)$ e $t(s)$ verificano le seguenti condizioni

$$\begin{cases} k'(s) = Bk(s) & k(0) = \eta \\ t'(s) = 1 & t(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è semplicemente $k(s) = e^{sB}\eta$ e $t(s) = s$. Allora, posto $v(s) = \hat{u}(\gamma(s))$, possiamo riscrivere il problema (3.9) sostituendo $k = k(s)$. Si ottiene, esplicitando la dipendenza di v da η

$$\frac{d}{ds}v(s) = - \langle Ae^{sB}\eta, e^{sB}\eta \rangle v(s) \quad v(0) = \hat{\phi}(\eta)$$

Questo problema di Cauchy si risolve per integrazione diretta. Posto $E(s) = e^{-sB^T}$, la sua soluzione è data da

$$v(s, \eta) = \exp\left(-\int_0^s \langle E(-\tau)A E^T(-\tau)\eta, \eta \rangle d\tau\right) \hat{\phi}(\eta) \quad (3.10)$$

Siccome $v(s, \eta) = \hat{u}(k(s), t(s))$, per ricavare $\hat{u}(k, t)$ non dobbiamo fare altro che invertire $k(s)$ e $t(s)$. Si ottiene $s(k, t) = t$ e $\eta(k, t) = E^T(t)k$. Sostituendo nella (3.10)

$$\begin{aligned} \hat{u}(k, t) &= \exp\left(-\int_0^t \langle E(t-\tau)A E^T(t-\tau)k, k \rangle d\tau\right) \hat{\phi}(E^T(t)k) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \langle E(\tau)A E^T(\tau)k, k \rangle d\tau\right) \hat{\phi}(E^T(t)k) \end{aligned}$$

Portando il segno di integrale dentro al prodotto scalare e ponendo $C(t) = \int_0^t E(\tau)A E^T(\tau)d\tau$, si ottiene

$$\hat{u}(k, t) = e^{-\langle C(t)k, k \rangle} \hat{\phi}(E^T(t)k) \quad (3.11)$$

La matrice $C(t)$ è simmetrica (ovvio, perchè A è simmetrica), e si può dimostrare che è anche definita positiva per $t > 0$. Per semplicità, limitiamoci a dimostrarlo il caso $n = 1$.

In questo caso risulta $E(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau & 1 \end{pmatrix}$, pertanto

$$E(\tau)AE^T(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ -\tau & \tau^2 \end{pmatrix}$$

Si noti che questa matrice è degenere (il suo determinante è nullo). Tuttavia

$$C(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ -\tau & \tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t & -t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{pmatrix}$$

Una matrice è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono strettamente positivi (criterio di Jacobi). In questo caso, i minori principali sono t e $t^4/3 - t^4/4 = t^4/12$. Dunque, per $t > 0$, $C(t)$ è definita positiva.

Applicando la trasformata inversa alla (3.11), possiamo affermare che

$$\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\langle C(t)k, k \rangle} \hat{\phi}(E^T(t)k) \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\langle C(t)k, k \rangle} \right] * \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{\phi}(E^T(t)k) \right]$$

ammesso che queste antitrasformate esistano. Consideriamo la prima. Siccome $C(t)$ è simmetrica e definita positiva, esiste una matrice invertibile $T = T(t)$ tale che $C(t) = T^T T$. Allora

$$\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\langle C(t)k, k \rangle} \right] (x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x, k \rangle} e^{-\langle T^T T k, k \rangle} dk$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x, k \rangle} e^{-\langle Tk, Tk \rangle} dk \\
&= \frac{\det T^{-1}}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x, T^{-1}y \rangle} e^{-\langle y, y \rangle} dy \\
&= \frac{\det T^{-1}}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle T^{-T}x, y \rangle} e^{-\|y\|^2} dy \\
&= \det T^{-1} \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\|y\|^2} \right] (T^{-T}x)
\end{aligned}$$

dove T^{-T} denota $(T^{-1})^T$. Come noto

$$\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\|y\|^2} \right] (x) = \frac{e^{-\|x\|^2/4}}{(2\sqrt{\pi})^{2n}}$$

Inoltre, per il teorema di Binet, risulta $\det T^{-1} = 1/\sqrt{\det C(t)}$. Siccome vale $T^{-1}T^{-T} = C^{-1}(t)$, abbiamo ottenuto

$$\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\langle C(t)y, y \rangle} \right] = \frac{e^{-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t)x, x \rangle}}{(4\pi)^n \sqrt{\det C(t)}} \stackrel{def}{=} \Gamma(x, t)$$

Vale inoltre

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\hat{\phi}(E^T(t)k) \right] = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x, k \rangle} \hat{\phi}(E^T(t)k) dk$$

Effettuando il cambio di variabile $E^T(t)k = y$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\det E^T(-t)}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x, E^T(-t)y \rangle} \hat{\phi}(y) dy &= \frac{\det E^T(-t)}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle E(-t)x, y \rangle} \hat{\phi}(y) dy \\
&= \det E^T(-t) \cdot \phi(E(-t)x)
\end{aligned}$$

Concludendo, abbiamo provato che

$$u(x, t) = \det E^T(-t) \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Gamma(x - y, t) \phi(E(-t)y) dy$$

Effettuando un nuovo cambio di variabile, $E(-t)y = \xi$, troviamo

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Gamma(x - E(t)\xi, t) \phi(\xi) d\xi \quad (3.12)$$

La (3.12) esprime una sorta di convoluzione fra Γ e ϕ , anche se l'operazione di somma non è quella standard.

Capitolo 4

Metodi spettrali di Fourier

Consideriamo l'equazione differenziale

$$Lu = f \tag{4.1}$$

dove L è un operatore differenziale lineare, e f è una funzione assegnata. Vogliamo risolvere numericamente l'equazione, ossia determinare un'approssimazione \tilde{u} della soluzione esatta.

Consideriamo la *funzione residuo*:

$$R[\tilde{u}] = L\tilde{u} - f \tag{4.2}$$

Siccome la funzione R è identicamente nulla per la soluzione esatta, vogliamo costruire \tilde{u} in modo che la funzione residuo sia minima.

In questa trattazione affronteremo il problema di determinare \tilde{u} utilizzando una famiglia di metodi noti come *metodi spettrali*; in particolare, ci concentreremo su quella sottoclasse di metodi che fanno uso dell'analisi di Fourier.

Parte di questo capitolo prende spunto dall'opera di L. N. Trefethen ([8]), in cui l'autore descrive i metodi spettrali con l'obiettivo di arrivare ad alcuni algoritmi implementabili su MATLAB. Tale opera presenta numerosi programmi MATLAB, i quali fungono da esempi degli argomenti trattati; questo capitolo si serve di alcuni di essi.

I codici dei programmi a cui faremo riferimento si trovano in appendice; gli originali sono disponibili online sul sito <http://www.comlab.ox.ac.uk/ouc1/work/nick.trefethen>.

4.1 Metodi di collocazione spettrale

Cerchiamo ora di esprimere i principi fondamentali su cui si basano i metodi spettrali. Sostituiamo, al posto dell'equazione (4.1), la seguente:

$$L_N p_N = f_N(x) \quad (4.3)$$

dove

$$L_N = P_N \circ L \quad p_N = P_N u \quad f_N = P_N f$$

con P_N operatore di proiezione su uno opportuno sottospazio N -dimensionale \mathcal{B}_N dello spazio di funzioni considerato, sia \mathcal{H} , che supponiamo essere uno spazio di Hilbert. Dunque la soluzione p_N sarà della forma

$$p_N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)$$

dove le funzioni ϕ_j , $j = 1, \dots, N$, costituiscono una base per \mathcal{B}_N .

Chiediamoci ora: perché il problema (4.3) dovrebbe essere più semplice da risolvere rispetto a (4.1), e che relazione c'è fra Lp_N e Lu ?

La risposta a queste domande è legata alcune proprietà in base alle quali vengono scelte le funzioni di base e l'operatore P_N .

1. Esistono N punti x_1, \dots, x_N , detti *punti di collocazione* tali che

$$\det (\phi_j(x_i))_{ij} \neq 0$$

Questo implica in particolare che una funzione f_N dello spazio \mathcal{B}_N è univocamente determinata dai valori che assume sui punti di colloca-

zione. Infatti, è possibile ricavare i coefficienti a_j risolvendo il sistema lineare

$$f_N(x_i) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x_i) \quad i = 1, \dots, N$$

2. L'insieme delle funzioni ϕ_j , $j \in \mathbb{Z}$, costituisce un *sistema completo* per \mathcal{H} . Questo implica in particolare che

$$\|u_N - u\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty$$

3. Richiediamo che l'operatore P_N lasci invariati i valori assunti da una funzione sui punti di collocazione. In simboli,

$$P_N u(x_i) = u(x_i) \quad i = 1, \dots, N$$

Supponiamo inoltre che esistano N funzioni C_1, \dots, C_N (chiamate *funzioni cardinali*) aventi la proprietà $C_i(x_j) = \delta_{ij}$ e tali che possiamo scrivere

$$p_N(x) = \sum_{j=1}^N p_N(x_j) C_j(x) \quad (4.4)$$

Più avanti ricaveremo esplicitamente le funzioni C_j nel caso in cui \mathcal{B}_N sia lo spazio dei polinomi trigonometrici di grado $\leq N/2$ (N pari).

Alla luce di queste premesse, consideriamo il problema

$$(L_N p_N)(\bar{x}) = f_N(\bar{x}) = f(\bar{x}) \quad i = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

dove $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$ è il vettore dei punti di collocazione. Sappiamo che $L_N p_N = P_N (L p_N)$, e possiamo esprimere l'azione dell'operatore L su p_N con una matrice. Infatti per ogni x_i , $i = 1, \dots, N$,

$$(L p_N)(x_i) = \left(L \sum_{j=1}^N p_N(x_j) C_j \right) (x) = \sum_{j=1}^N p_N(x_j) (L C_j)(x_i)$$

Dunque, definita la matrice A tale che $A_{ij} = (LC_j)(x_i)$, abbiamo tradotto il problema (4.3) nel sistema lineare

$$Ap_N(\bar{x}) = f(\bar{x}) \quad (4.6)$$

che sappiamo risolvere. La matrice A è detta *matrice di differenziazione*.

Si noti che, per la proprietà 1, i valori assunti da p_N sui punti di collocazione ne determinano i valori in tutto il dominio. Abbiamo quindi determinato la funzione p_N . Osserviamo che, per la proprietà 3

$$(L_N u_N)(\bar{x}) = (P_N L p_N)(\bar{x}) = f_N(\bar{x})$$

Quindi, sempre per la proprietà 1, $(L_N p_N)(x) = f_N(x)$ per ogni x , e dunque p_N è soluzione di (4.3).

Prendiamo p_N come soluzione approssimata del problema (4.1) e domandiamoci con quale precisione la funzione $L p_N$ approssima $Lu = f$, ossia quanto la funzione residuo (4.2) è vicina a zero. Per la diseuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} |(L p_N)(x) - f(x)| &\leq |(L p_N)(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \quad (4.7) \\ &= |(L p_N)(x) - (P_N \circ L p_N)(x)| + |(P_N f)(x) - f(x)| \end{aligned}$$

dove nell'ultima espressione entrambi i moduli sono costituiti dalla differenza tra una funzione e la sua proiezione sullo spazio \mathcal{B}_N .

Possiamo quindi tradurre il problema iniziale in un problema di interpolazione; infatti, data $f \in \mathcal{H}$, $P_N f = f_N$ è l'unica funzione dello spazio \mathcal{B}_N che interpola f nei punti x_1, \dots, x_N . Sappiamo, per la proprietà 2, che $|f(x) - f_N(x)| \rightarrow 0$ per $N \rightarrow +\infty$ quasi dappertutto, e dunque anche $|L p_N - f(x)|$ converge a zero.

Vogliamo dunque stimare con quale velocità $f_N \rightarrow f$. Dimostriamo che tale velocità dipende dalla regolarità di f .

4.1.1 Scelta delle funzioni di base

I vari metodi di collocazione spettrale si differenziano unicamente nella scelta dello spazio \mathcal{B}_N e dell'operatore P_N , che determinano la forma della soluzione approssimata p_N .

La scelta delle funzioni di base è strettamente legato al tipo di problema, o più precisamente, alla geometria del dominio della soluzione u . Se il problema richiede che la soluzione sia periodica, la scelta più adatta per le funzioni di base è costituita da polinomi trigonometrici, in quanto in questo caso la funzione $p_N(x)$ soddisfa automaticamente la condizione di periodicità.

In questa trattazione, studieremo questo particolare metodo spettrale. Esso si rivela utile in diversi casi, malgrado la richiesta di periodicità possa apparire molto limitante. Tale richiesta può essere dovuta al fatto che il dominio della u è intrinsecamente periodico (ad esempio è una circonferenza o un toro), oppure semplicemente alla scelta del sistema di coordinate (polari o sferiche). Inoltre, in alcuni casi (ne vedremo un esempio) tale metodo si rivela efficace anche se il dominio della u è illimitato.

E' importante comunque precisare che i polinomi trigonometrici non sono adatti ad affrontare *tutti* i problemi della forma (4.1). Supponiamo di voler determinare la soluzione u di un'equazione differenziale su un dominio limitato, in cui è assegnato il dato al bordo. Si potrebbe pensare di considerare la ripetizione periodica di u e ragionare come sopra, ma questo metodo si rivela inefficace.

Infatti, come già accennato, una delle caratteristiche principali dei metodi spettrali è il fatto che la precisione dipende dalla regolarità della funzione che stiamo interpolando. più f è regolare, più velocemente f_N convergerà ad f . Poiché la ripetizione periodica di una funzione regolare in generale non è nemmeno continua, la precisione del metodo si rivela essere molto bassa in questo caso. Torneremo su questo argomento in seguito, con degli esempi.

Per risolvere problemi di questo tipo, ossia equazioni differenziali con dato al bordo, la base di funzioni più efficiente è un'altra, quella costituita dai *polinomi di Chebychev* ([6]).

4.1.2 Approssimazione delle derivate

Consideriamo nuovamente l'equazione (4.6). Nel problema precedente, $f(\bar{x})$ era noto e $p_N(\bar{x})$ era l'incognita. Supponiamo però di conoscere i valori di una funzione u nei punti x_1, \dots, x_N , e di voler approssimare la funzione $Lu = f$. La (4.6) ci fornisce un modo; è sufficiente moltiplicare il vettore $u(\bar{x})$ per la matrice relativa all'operatore L . Come già discusso, la conoscenza del vettore $f_N(\bar{x})$ equivale a quella della funzione f_N , che dunque risulta determinata.

La necessità di determinare una stima sull'errore

$$|f_N(x) - f(x)| = |Lp_N(x) - Lu(x)|$$

amplia la domanda con cui abbiamo concluso il paragrafo precedente: con quale precisione una funzione interpolante dello spazio \mathcal{B}_N approssima u e le sue derivate?

Prima di scendere nel dettaglio dei metodi spettrali di Fourier per rispondere a questa domanda, descriviamo un metodo più semplice (e storicamente antecedente) per approssimare le derivate di una funzione u . Il confronto con questo metodo ci sarà utile in seguito per valutare l'efficienza dei metodi spettrali.

Supponiamo di voler calcolare le derivate prime di u (in altre parole $L = \frac{\partial}{\partial x}$). Consideriamo la griglia $\{x_1, \dots, x_N\}$, con $x_{j+1} - x_j = h$, e poniamo $u_j = u(x_j)$. Per ogni punto x_j , si costruisce una funzione p_j che interpola localmente i punti u_j . Approssimiamo il valore esatto di $u'(x_j)$ con $w_j = p_j'(x_j)$. ad esempio, utilizzando come interpolanti dei polinomi di secondo grado, si ottiene il seguente algoritmo:

Per ogni $j = 1, \dots, N$, sia p_j l'unico polinomio di grado ≤ 2 tale che $p_j(x_{j-1}) = u_{j-1}$, $p_j(x_j) = u_j$ e $p_j(x_{j+1}) = u_{j+1}$. Si pone $w_j = p_j'(x_j)$.

Con qualche semplice calcolo, si ricava

$$w_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} \quad (4.8)$$

Per semplicità assumiamo che il problema sia periodico, e che quindi $u_0 = u_N$ e $u_1 = u_{N+1}$. Allora possiamo esprimere il vettore (w_1, \dots, w_N) attraverso un prodotto matrice-vettore.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = h^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Osserviamo che la matrice è di *Toeplitz* (a_{ij} dipende solo da $i - j$), anzi *circolante* (a_{ij} dipende solo da $i - j \pmod{N}$). Questo fatto permette di ridurre la complessità computazionale normalmente necessaria nelle operazioni che coinvolgono le matrici.

Chiediamoci ora qual è l'accuratezza di questo metodo; più precisamente, vogliamo capire quanto velocemente l'errore $\epsilon = \max_j |u'(x_j) - w_j|$ tende a 0 per $h \rightarrow 0$.

Supponiamo che la funzione u sia sufficientemente regolare (almeno di classe C^2) e consideriamo gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}) &= u(x_j) - hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) + O(h^2) \\ u(x_{j+1}) &= u(x_j) + hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) + O(h^2) \end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nella (4.8), otteniamo

$$w_j = u'(x_j) + O(h^2)$$

Quello appena descritto è il *metodo alle differenze finite del secondo ordine* (in quanto usiamo gli sviluppi di Taylor fino alla derivata seconda). Questo ragionamento si può ripetere per ogni ordine n , utilizzando polinomi di grado n come interpolanti. Per esempio, con il metodo del quarto ordine si ottiene la matrice

$$h^{-1} \begin{pmatrix} & & \ddots & & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \\ & & \ddots & -\frac{1}{12} & & \frac{1}{12} \\ & & \ddots & \frac{2}{3} & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -\frac{2}{3} & \ddots & \\ -\frac{1}{12} & & & \frac{1}{12} & \ddots & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Come già accennato, l'ordine del metodo è legato alla sua accuratezza. Più precisamente, se supponiamo che u sia sufficientemente regolare (di classe C^n), si ha

$$|w_j - u'(x_j)| = O(h^n) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Program1 utilizza il metodo del quarto ordine per approssimare la derivata prima della funzione $\exp(\sin(x))$ su $[-\pi, \pi]$. Il procedimento viene ripetuto per diversi valori di N , numero di punti della discretizzazione, e ogni volta il risultato viene confrontato con il valore esatto, ossia il vettore $(u'(x_1), \dots, u'(x_N))$.

Il grafico in figura 4.1.2 mostra, in scala logaritmica, la norma infinito dell'errore. Possiamo osservare che la velocità di convergenza a zero è esattamente N^{-4} .

Come abbiamo visto, i metodi spettrali si basano su un principio diverso da quello appena descritto. Si costruisce una singola funzione $p_N(x)$ tale che $p_N(x_j) = u_j$ per ogni j e si pone $w_j = p'_N(x_j)$. In altre parole, si approssimano le derivate di u con le derivate di una funzione che interpola i punti u_j globalmente.

In questo caso, i valori w_j sono chiamati la *derivata spettrale* di u .

Program2 risolve lo stesso problema di prima, utilizzando però una matrice diversa, propria del metodo spettrale (la ricaveremo nel capitolo 3). In

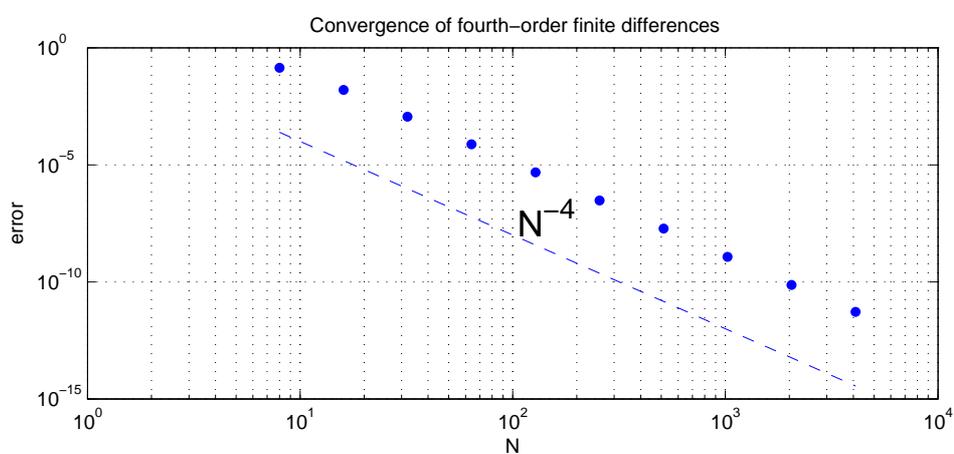


Figura 4.1: Errore del metodo alle differenze finite

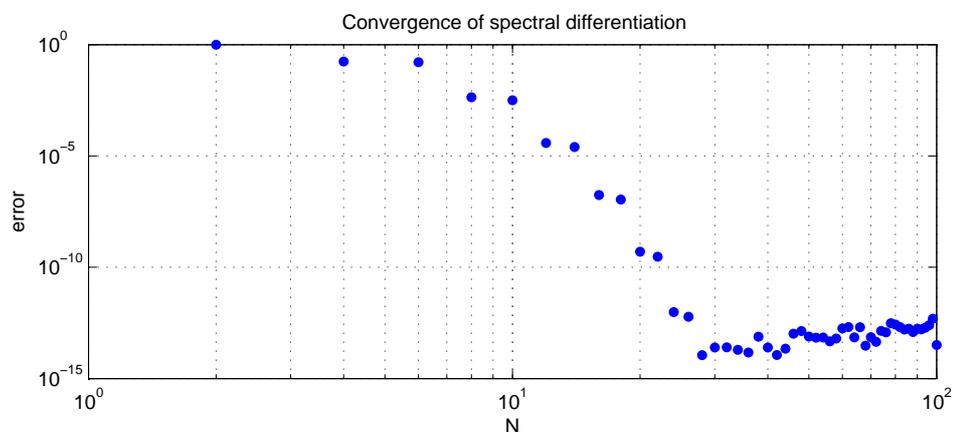


Figura 4.2: Errore del metodo spettrale

figura 4.1.2 possiamo vedere il nuovo grafico dell'errore al variare di N . La convergenza a zero è ora molto più veloce, fino a che gli errori di arrotondamento (la precisione double ha un errore $\epsilon = 2^{-53}$) prevengono ulteriori miglioramenti.

In effetti, dimostreremo che, sotto opportune ipotesi sulla funzione u , i metodi spettrale convergono a velocità esponenziale. Più precisamente,

$$|w_j - u'(x_j)| = O(c^N)$$

con $0 < C < 1$.

Ciò rende i metodi spettrali molto più efficienti dei metodi descritti finora, la cui velocità di convergenza alla soluzione esatta è solo polinomiale.

4.2 Metodi spettrali e analisi di Fourier

Supponiamo inizialmente che la funzione u sia definita su tutto \mathbb{R} . In questo caso, avremo che $x_j = jh$, per $j \in \mathbb{Z}$. I punti x_j formano quindi una griglia infinita ed equispaziata, che denotiamo con $h\mathbb{Z}$.

I risultati di questo paragrafo sono di scarso interesse in pratica (come vedremo, i metodi che ricaveremo non possono essere implementati direttamente), tuttavia il caso ‘ideale’ di un dominio infinito ci permette di comprendere meglio i principi alla base dei metodi spettrali di Fourier. Una breve descrizione dei metodi impiegati in pratica quando il dominio della funzione è illimitato viene riportata alla fine del capitolo.

4.2.1 Trasformata di Fourier semidiscreta

Come già ampiamente discusso nel primo capitolo, la trasformata di Fourier di una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ è definita come

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} u(x) dx \quad (4.10)$$

Abbiamo visto che sotto opportune ipotesi, la trasformata di Fourier può essere invertita. Più precisamente, vale

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \hat{u}(k) dk \quad (4.11)$$

La (4.11) ci permette di interpretare k come una frequenza, e $\hat{u}(k)$ come la densità di u alla frequenza k . Sulla base di questo fatto, in seguito ci riferiremo al supporto di \hat{u} come alla *banda di frequenze* di u .

Vogliamo ora estendere il concetto di trasformata di Fourier al caso discreto.

Definizione 4.1. Sia v una funzione con dominio $h\mathbb{Z}$ ($v(x_j) = v_j$). Definiamo formalmente la sua *trasformata di Fourier semidiscreta* come

$$\hat{v}(k) = h \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx_j} v_j \quad (4.12)$$

La *trasformata inversa* è data da

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ikx_j} \hat{v}(k) \quad (4.13)$$

Osserviamo che la (4.12) approssima l'integrale (4.10) usando la regola del trapezio, mentre la (4.13) si ottiene dalla (4.11) troncando l'insieme di integrazione da \mathbb{R} a $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$.

Domandiamoci anzitutto sotto quali condizioni la (4.12) e la (4.13) abbiano significato e non siano solo scritte formali. Per rispondere a questa domanda, osserviamo che la (4.12) è una sorta di inversione della serie di Fourier; in altre parole $\hat{v}(k)$ è la funzione periodica i cui coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono proprio gli elementi della successione v_j .

In base alla teoria delle serie di Fourier ([2]), sappiamo che se $v = (v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ appartiene a $l^2(\mathbb{Z})$ ¹ allora esiste $\hat{v}(k) \in L^2([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}])$ per cui la serie di funzioni (4.12) converge a \hat{v} in $L^2([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}])$ e i coefficienti v_j possono essere espressi dalla (4.13)².

Se supponiamo, in più, che $v_j \in l^1(\mathbb{Z})$ si ha che la serie (4.12) converge anche puntualmente. In seguito faremo sempre uso di questa ipotesi, per poter trattare più facilmente le serie di cui parleremo.

Osserviamo che la trasformata di Fourier semidiscreta, diversamente dalla sua controparte nel continuo, è una funzione periodica. Questo fatto può essere interpretato nel modo seguente: se le frequenze k_1 e k_2 differiscono

¹ $l^2(\mathbb{Z})$ denota lo spazio delle successioni x_j , $j \in \mathbb{Z}$, tali che

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x_j|^p < +\infty$$

Si ha che $l^p \subset l^q$ per $p < q$, quindi in particolare $l^1 \subset l^2$.

²Si ricordi che, se l'insieme A ha misura finita, $L^2(A) \subset L^1(A)$, quindi l'integrale (4.13) è ben definito

di un multiplo di $\frac{2\pi}{h}$ allora le funzioni e^{-ik_1x} e e^{-ik_2x} coincidono su tutto $h\mathbb{Z}$. Pertanto le frequenze k_1 e k_2 sono indistinguibili sulla griglia, e questo ci permette di restringere la nostra analisi al solo intervallo $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$.

Questo fenomeno è noto come *aliasing*. Torneremo in seguito su questo concetto, quando studieremo il rapporto fra la trasformata di una funzione e la trasformata semidiscreta del suo campionamento.

4.2.2 Interpolante a banda limitata

Come già discusso nel paragrafo precedente, il nostro obiettivo è arrivare ad una funzione interpolante che approssimi u e le sue derivate. E' sufficiente estendere la (4.13) da $x_j \in h\mathbb{Z}$ a $x \in \mathbb{R}$ per ottenere la funzione che cerchiamo.

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikx} \hat{v}(k) dk \quad (4.14)$$

Tale funzione è analitica, e ovviamente $p(x_j) = v_j$ per ogni $j \in \mathbb{Z}$. Inoltre, per costruzione

$$\hat{p}(k) = \begin{cases} \hat{v}(k) & \text{per } k \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il teorema di Shannon³ ci assicura che, fra tutti le possibili funzioni che interpolano i punti v_j , ne esiste solo una tale che la sua trasformata di Fourier è identicamente nulla al di fuori dell'intervallo $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$.

Per quanto detto, tale funzione è proprio $p(x)$, che quindi è detta anche *interpolante a banda limitata*.

4.2.3 Approssimazione della derivata prima

Seguendo lo schema dei metodi spettrali, la derivata spettrale è $w_j = p'(x_j)$.

³La formulazione generale del teorema di Shannon può essere espressa nel modo seguente ([12]).

Sia $p \in L^2(\mathbb{R})$ tale che il supporto di \hat{p} è contenuto nell'intervallo $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$. Allora p è univocamente determinato dai valori che assume su $h\mathbb{Z}$.

Esistono due metodi che permettono di calcolare w_j . Anche se tali metodi non sono implementabili direttamente, in quanto coinvolgono serie e integrali, essi ci forniscono un'idea di come ricavare w_j nel caso di successioni di punti finite, che analizzeremo nel prossimo paragrafo.

Definiamo la funzione *delta di Kronecher*

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j \neq 0 \end{cases}$$

e cerchiamo l'interpolante a banda limitata di δ_j . Dalla (4.12) si ricava immediatamente che $\hat{\delta}(k) = h$, e quindi

$$p(x) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikx} dk = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = S_h(x)$$

S_h è chiamata funzione *sinc*.

A questo punto possiamo ricavare facilmente l'interpolante di qualsiasi funzione discreta. Infatti, presa $v \in l^1(\mathbb{Z})$ si ha

$$v_j = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m \delta_{j-m}$$

Ora, il processo di interpolazione è invariante per traslazioni temporali, cioè l'interpolante di δ_{j-m} è la funzione $S_h(x - x_m)$. Pertanto,

$$p(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m S_h(x - x_m) \quad (4.15)$$

Osserviamo che, siccome $S_h(x_j - x_m) = \delta_{jm}$, abbiamo ottenuto una scrittura simile a (4.4) con la sola differenza che, in questo caso, il numero di elementi della sommatoria è infinito.

In base alle ipotesi su v , si può portare la derivata dentro la serie. Per $x = x_j$ si ottiene

$$p'(x_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m S'_h(x_j - x_m) \quad (4.16)$$

dove

$$S'_h(x_j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \frac{(-1)^j}{x_j} & j \neq 0 \end{cases}$$

Si può esprimere la (4.16) attraverso una matrice di differenziazione infinita, la cui colonna m -esima è costituita dalla successione $\{S_h(x_j - x_m)\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Otteniamo (si ricordi che $x_j = hj$)

$$D = h^{-1} \begin{pmatrix} & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & -\frac{1}{2} & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & -1 & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{2} & \ddots \\ & & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

In alternativa al metodo appena descritto, possiamo calcolare la derivata di $p(x)$ direttamente nello spazio di Fourier. Derivando la (4.14) sotto l'integrale, si ottiene

$$p'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikx} (ik\hat{v}(k)) dk$$

Quindi il secondo metodo per ottenere la derivata spettrale può essere schematizzato come segue:

- Dato v , si calcola la sua trasformata da Fourier semidiscreta \hat{v}
- Definiamo $\hat{w}(k) = ik\hat{v}(k)$
- Si ricava w_j da \hat{w} attraverso la (4.13)

Naturalmente, quanto detto si può applicare al calcolo delle derivate di qualsiasi ordine; è sufficiente derivare ulteriormente la funzione $p(x)$.

Program3 utilizza la formula (4.15) per costruire l'interpolante a banda limitata di tre funzioni discrete definite su \mathbb{Z} (quindi $h = 1$): una delta, un'onda quadra e un'onda triangolare.

I grafici delle funzioni ottenute sono mostrati in figura 4.2.3. Possiamo osservare che la funzione sinc, essendo liscia, non è molto adatta ad interpolare funzioni non regolari. In particolare, vediamo che vicino ai punti di discontinuità della delta e dell'onda quadra si creano delle oscillazioni indesiderate. Tale effetto è noto come *fenomeno di Gibbs*.

Per determinare l'accuratezza dell'interpolazione, il procedimento viene ripetuto per $h = 2^{-k}$, per $k = 0, 1, \dots, 8$. I grafici in figura 4.2.3 mostrano in scala logaritmica l'andamento dell'errore (espresso dalla norma infinito della differenza fra la funzione esatta e l'interpolante). Per semplicità sull'asse x sono riportati i valori N anziché di h .

Osserviamo che, per la funzione delta e l'onda quadra, l'errore è sostanzialmente costante. Per l'onda triangolare, l'unica fra le tre funzioni ad essere continua, l'approssimazione è migliore: il grafico mostra che l'errore è direttamente proporzionale ad N .

Da queste osservazioni, possiamo già intuire che l'accuratezza dell'interpolazione dipende dalla regolarità della funzione u . In seguito dimostreremo rigorosamente e quantificheremo tale dipendenza.

4.3 Metodi spettrali su un dominio periodico

Consideriamo ora il caso in cui la funzione u sia periodica. Possiamo ovviamente restringere la nostra analisi ad un intervallo di lunghezza pari al periodo, che senza perdita di generalità possiamo supporre essere 2π . Pertanto, in questo paragrafo ci riferiremo al dominio di u come periodico o, equivalentemente, limitato.

Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$, con $x_{j+1} - x_j = h$, una scomposizione dell'intervallo $[0, 2\pi]$. Sia v una funzione discreta con $v(x_j) = v_j$, $j = 1, \dots, N$. Estendiamo v con periodicità su tutto l'asse reale, ossia poniamo $v_{j+N} = v_j$ per ogni $j \in \mathbb{Z}$.

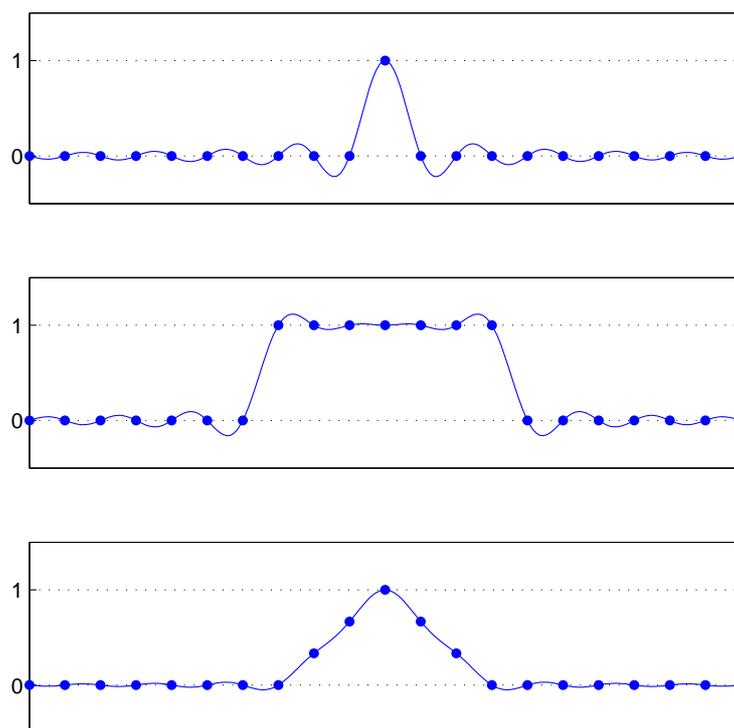


Figura 4.3: Interpolante a banda limitata di una delta, di un'onda triangolare e di un'onda quadra

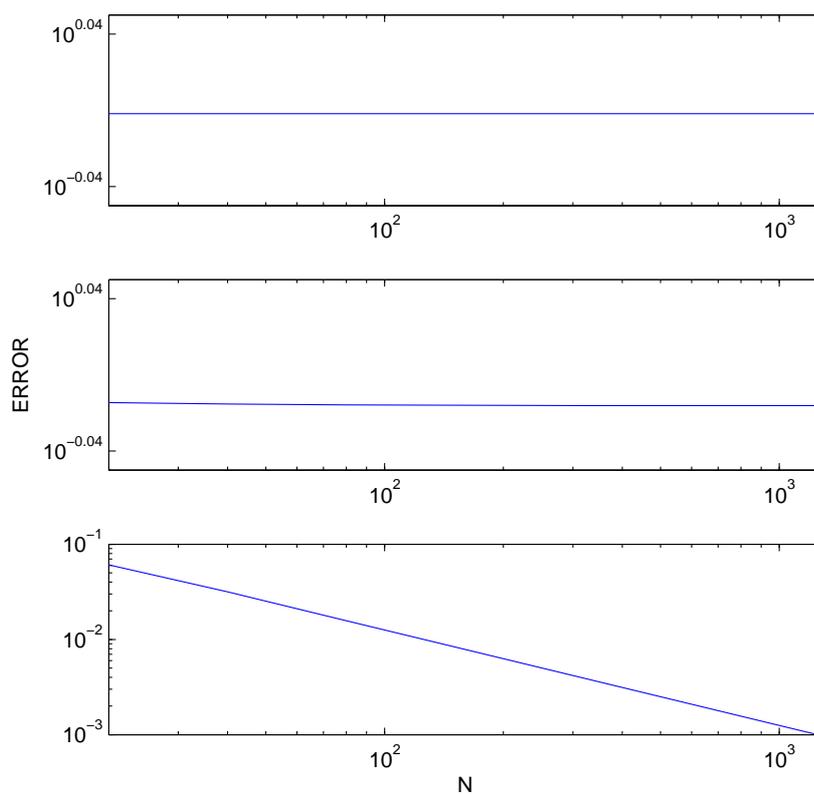


Figura 4.4: Errore di interpolazione al variare di N per le tre funzioni precedenti

D'ora in avanti supporremo che N sia pari (tutti i risultati hanno un analogo per N dispari). Dunque $h = \frac{2\pi}{N}$.

4.3.1 Trasformata di Fourier discreta (DFT)

Definizione 4.2. Sia $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^n$. La *trasformata di Fourier discreta* (DFT) di v è definita come la N -upla di componenti

$$\hat{v}_k = h \sum_{j=1}^N e^{-ikx_j} v_j \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.17)$$

La trasformata inversa (IDFT) è data da

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{v}_k \quad j = 1, \dots, N \quad (4.18)$$

Osserviamo che il dominio di \hat{v} è ora discreto, oltre che limitato. In effetti, se v_j rappresenta il campionamento di una funzione periodica di periodo 2π , per poterla scrivere come combinazione lineare di altre funzioni ovviamente è necessario che tali funzioni abbiano lo stesso periodo della funzione; e tra gli esponenziali complessi della forma e^{-ikx} , solo quelli con k intero hanno periodo 2π .

Per comprendere la ragionevolezza di queste definizioni, richiamiamo brevemente la nozione di serie di Fourier. Sia $u \in L^2([-\pi, \pi])$, allora sotto opportune ipotesi possiamo scrivere

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikx} \quad (4.19)$$

dove i coefficienti c_k sono dati da

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{ikx} dx = \langle u, e^{ikx} \rangle_{L^2} \quad (4.20)$$

Sappiamo che ciò è possibile in quanto le funzioni e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$ formano una base per $L^2([-\pi, \pi])$ (base di Fourier).

Alla luce di queste formule, possiamo osservare che la DFT non è altro che il troncamento di una serie di Fourier. Se supponiamo $v_j = u(x_j)$, stiamo dunque approssimando la funzione u usando solo le prime N funzioni della base di Fourier. I coefficienti \hat{u}_k , scelti in modo che la (4.18) sia verificata, si possono ricavare anche dalla (4.20) approssimando l'integrale con la regola dei trapezi.

Abbiamo affermato poco fa che non è restrittivo supporre che il periodo di u sia 2π . Cerchiamo allora di capire come le trasformazioni appena definite cambiano se i punti della griglia sono assegnati sull'intervallo $[-L, L]$ anziché $[-\pi, \pi]$. In questo caso, gli esponenziali complessi dovranno avere periodo $2L$, invece di 2π . Pertanto nella (4.17) e nella (4.18) bisognerà sostituire k con $k' = k\frac{\pi}{L}$. Tuttavia, considerando che $h' = \frac{2L}{N}$ e quindi $x'_j = \frac{2L}{N}j$.

$$\exp(\pm ik'x'_j) = \exp(\pm ik\frac{\pi}{L}\frac{2L}{N}j) = \exp(\pm ik\frac{2\pi}{N}j) = \exp(\pm ikx_j)$$

con k, j interi.

Dunque, malgrado le frequenze nello spazio di Fourier non siano più intere, ma multiple di $\frac{\pi}{L}$, la formula della trasformata e della sua inversa rimangono le stesse.

4.3.2 Interpolante e matrice di differenziazione

Per ottenere la funzione interpolante che cerchiamo, seguiamo lo schema del capitolo precedente, estendendo la formula della IDFT ad ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Prima però, è necessaria una piccola correzione.

Supponiamo di voler interpolare la funzione discreta $v_j = (-1)^j$. E' ragionevole pensare che la derivate della funzione interpolante debba essere zero per $x = x_j$, in quanto tali punti dovrebbero risultare punti di massimo e minimo. Dalla (4.17), si ottiene $\hat{v}_k = 0$ per $k \neq \frac{N}{2}$, e $\hat{v}_{\frac{N}{2}} = 1$; dunque la funzione interpolante è semplicemente $e^{iNx/2}$, ma per $x = x_j$ la sua derivata è pari a $(iN/2)e^{iNx_j/2} \neq 0$.

Questo problema deriva dal fatto che i termini di frequenza più alta sono trattati asimmetricamente. In effetti, nella formula della IDFT compare un termine di frequenza $N/2$, ma non uno di frequenza $-N/2$. Aggiungiamo dunque alla sommatoria un termine con tale frequenza. Si ha che la funzione $\frac{1}{2}(e^{iNx/2} + e^{-iNx/2})$ è ancora uguale a $(-1)^j$ per $x = x_j$, ma la sua derivata prima in tali punti è zero, come dovrebbe.

Pertanto, posto $\hat{v}_{-N/2} = \hat{v}_{N/2}$, definiamo la funzione interpolante come

$$p_N(x) = \frac{1}{2\pi} \widetilde{\sum_{k=-N/2}^{N/2}} e^{ikx} \hat{u}_k \quad x \in [0, 2\pi] \quad (4.21)$$

dove il simbolo \sim indica che il primo e l'ultimo termine della sommatoria sono moltiplicati per $\frac{1}{2}$.

Come affermato nell'introduzione, la funzione interpolante p_N è combinazione lineare di N (in realtà $N + 1$) funzioni di base, che in questo caso sono gli esponenziali complessi e^{ikx} , $k = -N/2, \dots, N/2$. Equivalentemente, p_N è un polinomio trigonometrico di grado $N/2$.

Analogamente a quanto detto nel paragrafo precedente, la derivata spettrale $w_j = p'_N(x_j)$ si può calcolare con due metodi (che in questo caso possono essere implementati direttamente, dato che non coinvolgono più matrici infinite, serie o integrali).

Consideriamo la funzione discreta

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & j \equiv 0 \pmod{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che $\hat{\delta}_k = h$ per ogni k . Pertanto, applicando la (4.21) otteniamo

$$\delta_N(x) = \frac{h}{2\pi} \widetilde{\sum_{k=-N/2}^{N/2}} e^{ikx} = \frac{h}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{ikx} + \frac{1}{2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx} \right)$$

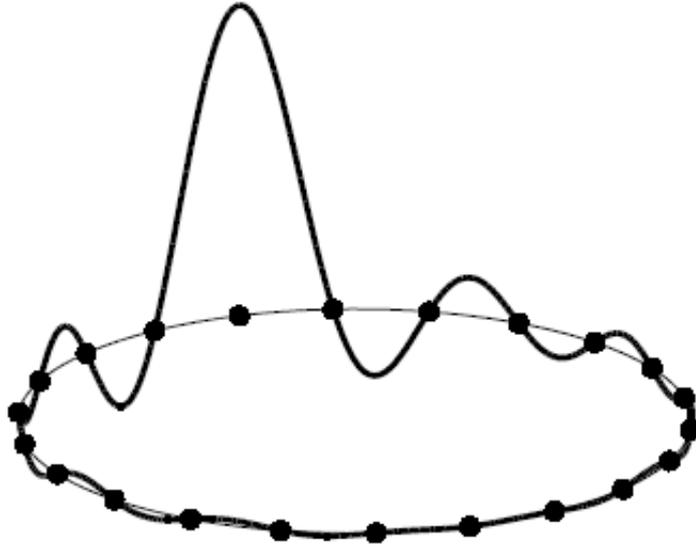


Figura 4.5: Grafico della funzione sinc periodica

$$\begin{aligned}
 &= \frac{h}{2\pi} \cos(x/2) \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{ikx} = \frac{h}{2\pi} \cos(x/2) \frac{e^{-i\frac{N-1}{2}x} - e^{i\frac{N-1}{2}x}}{1 - e^{ix}} \\
 &= \frac{h}{2\pi} \cos(x/2) \frac{e^{-i\frac{N}{2}x} - e^{i\frac{N}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{h}{2\pi} \cos(x/2) \frac{\sin(\pi x/2)}{\sin(x/2)}
 \end{aligned}$$

Sostituendo $\frac{N}{2} = \frac{\pi}{h}$, concludiamo che l'interpolante a banda limitata di δ è la cosiddetta funzione *sinc periodica*:

$$S_N(x) = \frac{\sin(\pi x/h)}{(2\pi/h) \tan(x/2)}$$

In figura 4.3.2 è mostrato il grafico di S_N . Osserviamo che, siccome $\tan(x/2) \sim x/2$ per $x \sim 0$, vicino a zero la funzione si comporta come la funzione sinc. La sua derivata è

$$S'_N(x_j) = \begin{cases} 0 & j \equiv 0 \pmod{N} \\ \frac{1}{2}(-1)^j \cot(jh/2) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.22)$$

Sfruttando l'espressione

$$v_j = \sum_{m=1}^N v_m \delta_{j-m}$$

la funzione che interpola v_j risulta essere

$$p_N(x) = \sum_{m=1}^N v_m S_N(x - x_m) \quad (4.23)$$

Abbiamo finalmente ottenuto un'espressione riconducibile alla (4.4), dove le $S_N(x - x_i)$, $i = 1, \dots, N$ sono le funzioni cardinali (si noti infatti che $S_N(x_j - x_i) = \delta_{ij}$).

Dalla (4.23) si ricava l'espressione della matrice di differenziazione D_N (che in questo caso è una matrice $N \times N$):

$$D_N = \begin{pmatrix} 0 & & & & -\frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} \\ -\frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & \ddots & & \ddots & \frac{1}{2} \cot h \\ \frac{1}{2} \cot h & & \ddots & & -\frac{1}{2} \cot \frac{3h}{2} \\ -\frac{1}{2} \cot \frac{3h}{2} & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} \\ \frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che, posto $D_N = (d_{ij})$, risulta per $i \neq j$

$$d_{ij} = S'_N(x_i - x_j) = S'_N(x_{(i-j)})$$

dunque la matrice risulta essere di Toeplitz, anzi circolante. Infatti $S'_N(x_{(i-j)}) = S'_N(x_{(i-j)+N})$ per la periodicità della funzione S_N . In quanto circolante, esiste un algoritmo in grado di calcolare il prodotto matrice-vettore avente una complessità computazionale pari a $O(n \log n)$ ([13]).

Concludendo, abbiamo approssimato le derivate di u attraverso la moltiplicazione del vettore \bar{u} per una matrice:

$$w = D_N v \quad (4.24)$$

Il secondo metodo per determinare la derivata spettrale può essere schematizzato nei seguenti passaggi:

- Dato il vettore v , si calcola \hat{v} .
- Definiamo $\hat{w}(k) = ik\hat{v}(k)$, eccetto $\hat{w}_{N/2} = 0$ (analogamente al caso precedente, la derivata della funzione a questa frequenza deve essere 0)
- Si antitrasforma \hat{w} e si ottiene w

Il primo e l'ultimo step possono essere compiuti utilizzando, anziché le formule (4.17) e (4.18), l'algoritmo della Fast Fourier Transform (FFT), che calcola la DFT di un vettore ma ne riduce la complessità computazionale da $O(N^2)$ a $O(N\log N)$. In effetti, anche l'algoritmo che esegue il prodotto matrice-vettore per una matrice circolante fa uso della FFT. Non stupisce, dunque, che i due metodi abbiano esattamente la stessa complessità.

Program4 e **Program5** utilizzano i metodi appena descritti per calcolare la derivata spettrale di un'onda quadra e della funzione $e^{\sin(x)}$. I grafici, ottenuti per $N = 64$ è mostrato in figura 4.3.2 (i risultati sono identici per entrambi i programmi, dunque ne riportiamo solo uno).

Avevamo visto nel paragrafo precedente che l'approssimazione dell'onda triangolare attraverso l'interpolante a banda limitata era buona. Tale risultato però non si estende all'approssimazione della derivata prima: come osserviamo, vicino ai punti di discontinuità si ripresenta il fenomeno di Gibbs. Vedremo nel prossimo paragrafo che tale differenza di comportamento è dovuta al fatto che l'onda triangolare è derivabile (in senso debole) una volta sola. La seconda approssimazione, in cui la funzione è analitica, è invece ottima.

La sola differenza fra i due script sta nel metodo per calcolare la derivata spettrale. **Program4** utilizza la formula (4.24), eseguendo però il prodotto matrice-vettore nel modo standard, senza alcuna tecnica che sfrutti il particolare tipo della matrice D_N ; la complessità dell'algoritmo è dunque $O(N^2)$. **Program5** utilizza invece il metodo della FFT. Per dare un'idea di quanto

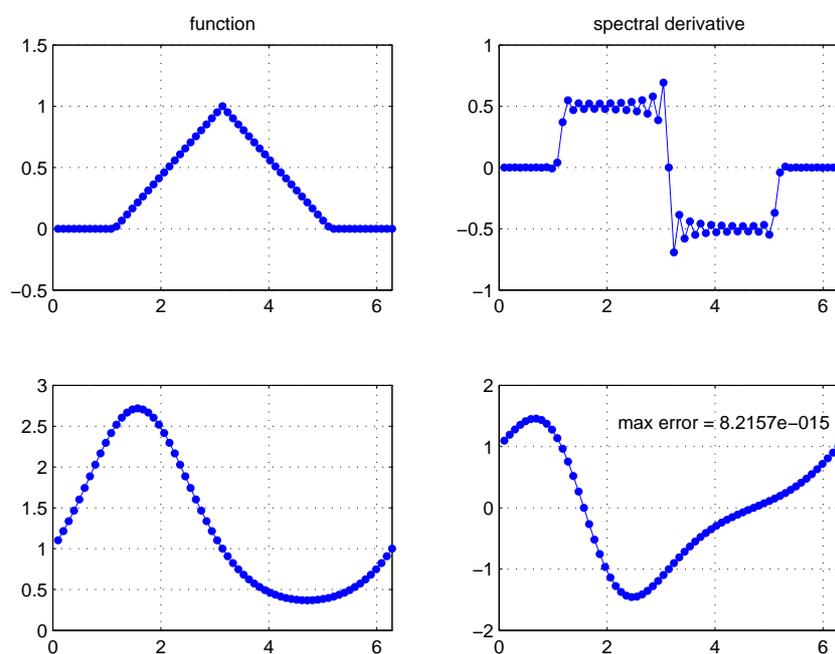


Figura 4.6: Interpolazione di un'onda quadra e della funzione $e^{\sin(x)}$ (sinistra) e approssimazione delle loro derivate (destra)

la differenza di efficienza tra i due algoritmi incida effettivamente, si è aumentato il numero di punti di discretizzazione e si sono confrontati i tempi di esecuzione. La tabella 4.1 mostra i risultati. Osserviamo che la discrepanza tra i due valori, inizialmente trascurabile, aumenta significativamente al crescere di N .

4.3.3 Derivate di ordine superiore

Quanto detto si può estendere per approssimare $u^{(\nu)}$; tutto ciò che bisogna fare è derivare ulteriormente la (4.22) e ricavare la matrice D_N^ν . Per esempio, per $\nu = 2$ si ha

N	512	1024	2048	4096
Program4	0.064957	0.148977	0.536707	1.977120
Program5	0.065802	0.083086	0.119007	0.219171

Tabella 4.1: Tempi di esecuzione dei degli algoritmi Program4 e Program5 al crescere di N

$$S_N''(x_j) = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6} & j \equiv 0(\text{mod}N) \\ -\frac{(-1)^j}{2\sin^2(jh/2)} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.25)$$

da cui si ottiene la matrice di differenziazione

$$D_N^{(2)} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & -\frac{1}{2}csc^2(h) & & & & & \\ & & & \frac{1}{2}csc^2(\frac{h}{2}) & & & & & \\ & & & -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6} & & & & & \\ & & & \frac{1}{2}csc^2(\frac{h}{2}) & & \ddots & & & \\ & & & -\frac{1}{2}csc^2(h) & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & & \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Oppure, come prima, si può calcolare $\hat{w}_k = (ik)^\nu \hat{v}_k$ e poi antitrasformare. In questo caso, è necessario osservare con attenzione il termine di frequenza più alta, $\hat{w}_{N/2}$.

A tale proposito, si noti che se ν è dispari si ha

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} \frac{1}{2}(e^{iNx/2} + e^{-iNx/2})|_{x=x_j} = 0 \neq \frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{iNx/2}|_{x=x_j}$$

e quindi usare solo la frequenza $k = \frac{N}{2}$ provoca un'asimmetria. Al contrario, se ν è pari

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} \frac{1}{2}(e^{iNx/2} + e^{-iNx/2})|_{x=x_j} = \frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{iNx/2}|_{x=x_j}$$

Pertanto, si pone $\hat{w}_{N/2} = 0$ se ν è dispari; se invece è pari, $\hat{w}_{N/2}$ viene calcolato allo stesso modo degli altri termini.

4.4 Regolarità e accuratezza spettrale

Abbiamo visto che i metodi alle differenze finite hanno una velocità di convergenza pari a $O(N^{-m})$ per un certo m . In questo paragrafo dimostreremo che, se la funzione è liscia, i metodi spettrali convergono a velocità $O(N^{-m})$ per ogni m . Se la funzione è in più analitica, la velocità diventa addirittura $O(c^N)$ ($0 < c < 1$). Questo comportamento è chiamato *accuratezza spettrale*.

Il principio alla base di questo fatto è che una funzione regolare varia lentamente, e quindi il valore della sua trasformata di Fourier decresce rapidamente per frequenze alte. Come vedremo questo implica che l'errore di aliasing introdotto dalla discretizzazione sarà piccolo.

I seguenti teoremi sono validi per funzioni di $L^2(\mathbb{R})$. Risultati analoghi possono essere dimostrati per funzioni di $L^2([-\pi, \pi])$ ([14]).

Teorema 4.4.1 (Relazione fra regolarità di una funzione e decrescenza della sua trasformata di Fourier). *Sia $u \in L^2(\mathbb{R})$, e sia \hat{u} la sua trasformata di Fourier*

1. *Se u ha $p - 1$ derivate in $L^2(\mathbb{R})$, e una p -esima derivata (in senso debole) a variazione limitata⁴*

$$\hat{u}(k) = O(|k|^{-p-1}) \quad \text{per } k \longrightarrow \infty$$

2. *u ha infinite derivate in $L^2(\mathbb{R})$ se e solo se*

$$\hat{u}(k) = O(|k|^{-m}) \quad \text{per } k \longrightarrow \infty$$

⁴In altre parole, $u \in H^p(\mathbb{R})$ e $u^{(p)}$ è a variazione limitata. Si ricordi che, per il teorema di immersione, questo implica in particolare $u \in C^{p-1}(\mathbb{R})$

per ogni $m \geq 0$

3. Se esistono $a, c > 0$ tale che u può essere estesa ad una funzione analitica sulla striscia del piano complesso $|Im z| < a$ con $\|u(\cdot + iy)\|_{L^2} \leq c$ per ogni $y \in (-a, a)$, allora la funzione $u_a(k) = e^{a|k|}\hat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R})$. Vale anche il viceversa.
4. Se u può essere estesa ad una funzione intera (ossia olomorfa su tutto il piano complesso), ed esiste $a > 0$ tale che $|u(z)| = o(e^{a|z|})$ per $|z| \rightarrow \infty$, allora \hat{u} ha supporto compatto contenuto in $[-a, a]$. Vale anche il viceversa.

Dimostrazione. La maggior parte della dimostrazione di questo teorema è già stata svolta nel primo capitolo. I punti 3 e 4 sono i teoremi di Paley-Wiener rispettivamente 1.5.2 e 1.5.5. Il punto 2 è invece una conseguenza immediata del punto 1, che dunque è l'unico che dobbiamo dimostrare.

Dimostriamo anzitutto che, presa una funzione f a variazione limitata, si ha $\hat{f}(k) = O(|k|^{-1})$. Abbiamo già richiamato nel capitolo precedente la nozione di funzione a variazione limitata. Si può dimostrare ([9]) che la definizione che abbiamo dato è equivalente alla seguente.

Una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è a variazione limitata se

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx \mid \varphi \in C^1(\mathbb{R}), |\varphi| \leq 1 \right\} < +\infty \quad (4.27)$$

Sia ora $k \in \mathbb{R}$, definiamo $\varphi_k(x) = e^{-ikx}$. Ovviamente $\varphi_k \in C^1(\mathbb{R})$ e $|\varphi_k| \leq 1$, quindi, per la definizione appena data

$$\sup_k \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_k'(x)dx \right| = \sup_k \left| -ik \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)dx \right| = \sup_k |k\hat{f}(k)| < +\infty$$

La disuguaglianza finale implica quello che volevamo dimostrare, ossia $\hat{f}(k) = O(|k|^{-1})$.

Sia ora u come nelle ipotesi del punto (1). Per quanto appena detto $|\widehat{u^{(p)}}(k)| = O(|k|^{-1})$. Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato (teorema 1.4.1) che se $u \in H^p(\mathbb{R})$ allora $\widehat{u^{(p)}}(k) = (ik)^p \hat{u}(k)$. Pertanto,

$$|k|^p |\hat{u}(k)| = O(|k|^{-1}) \implies \hat{u}(k) = O(|k|^{-p-1})$$

che è quanto volevamo dimostrare. \square

Vediamo ora la relazione che sussiste fra la trasformata di Fourier di una funzione e la trasformata di Fourier semidiscreta del suo campionamento. Omettiamo la dimostrazione di questo teorema, che discende da un risultato di analisi noto come *formula di Poisson* ([4]).

Teorema 4.4.2 (Formula di aliasing). *Sia $u \in L^2(\mathbb{R})$, con derivata prima (in senso debole) a variazione limitata. Sia $v_j = u(x_j)$, $x_j \in h\mathbb{Z}$. Allora*

$$\hat{v}(k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k + 2\pi j/h) \quad (4.28)$$

Intuitivamente, questo teorema ci dice che \hat{v} è costituito da infinite ‘copie’ di \hat{u} , ciascuna delle quali è traslata della quantità $2\pi/h$. Dunque, se $\hat{u}(k)$ decresce rapidamente, la sovrapposizione fra le varie copie sarà trascurabile, e si avrà $\hat{v}(k) \sim \hat{u}(k)$ per $k \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$.

Teorema 4.4.3 (Errore introdotto dalla discretizzazione sulla trasformata di Fourier). *Nelle notazioni precedenti si hanno le seguenti stime, che valgono uniformemente per ogni $k \in [-\pi/h, \pi/h]$*

1. *Se u ha $p-1$ derivate in $L^2(\mathbb{R})$ con $p \geq 1$, e una p -esima derivata (in senso debole) a variazione limitata*

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = O(h^{p+1}) \quad \text{per } h \longrightarrow 0$$

2. Se u ha infinite derivate in $L^2(\mathbb{R})$, allora

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = O(h^m) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

per ogni $m \geq 0$.

3. Se esistono $a, c > 0$ tale che u può essere estesa ad una funzione analitica sull'istriscia del piano complesso $|\operatorname{Im} z| < a$ con $\|u(\cdot + iy)\|_{L^2} \leq c$ per ogni $y \in (-a, a)$, allora

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = O(e^{-\pi(a-\epsilon)/h}) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

per ogni $\epsilon > 0$.

4. Se u può essere estesa ad una funzione intera, ed esiste $a > 0$ tale che $|u(z)| = o(e^{a|z|})$ per $|z| \rightarrow \infty$, allora

$$\hat{v}(k) = \hat{u}(k) \quad \text{se } h \leq \pi/a$$

Dimostrazione. 1. Ricordiamo che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow +\infty \iff \frac{f(x)}{g(x)}$ è limitata per x abbastanza grande. Per il teorema 4.4.2, si ha

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = \left| \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} \hat{u}\left(k + j\frac{2\pi}{h}\right) \right| \leq \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} \left| \hat{u}\left(k + j\frac{2\pi}{h}\right) \right|$$

Sappiamo dai punti 1 del teorema 4.4.1 che $|\hat{u}(k)| = O(|k|^{-p-1})$, e quindi, per definizione, esiste $M > 0$ tale che per $|k| > M$, si ha $|\hat{u}(k)| \leq C|k|^{-p-1}$.

Allora, per h abbastanza piccolo, precisamente $h < \frac{\pi}{M}$, si ha che

$$\left| k + j\frac{2\pi}{h} \right| \geq M \quad k \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right], \quad j \neq 0$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)|}{h^{p+1}} &\leq \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} \frac{|\hat{u}(k + j\frac{2\pi}{h})|}{h^{p+1}} \leq C \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} \frac{|k + j\frac{2\pi}{h}|^{-p-1}}{h^{p+1}} = \\ &= C \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} |kh + j2\pi|^{-p-1} = \tilde{C} \end{aligned}$$

In quanto $|kh| \leq \pi$ e la serie converge (si ricordi che $p \geq 1$). Dunque $|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = O(h^{p+1})$.

2. Ovvio.

3. Sia $\epsilon > 0$. Ragionando come prima, vogliamo dimostrare che esiste $C > 0$ tale che

$$\sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} \left| \hat{u}\left(k + j\frac{2\pi}{h}\right) \right| e^{(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}} < C$$

per h sufficientemente piccolo. In base al punto 2 del teorema 4.4.1, possiamo scrivere $\hat{u}(k) = u_a(k)e^{-a|k|}$. Sappiamo che $u_a \in L^2$, pertanto possiamo supporre che, per h sufficientemente piccolo, valga $u_a(k + j\frac{2\pi}{h}) \leq C$ con $j \neq 0$. Quindi

$$u\left(k + j\frac{2\pi}{h}\right) \leq Ce^{-a|k+j\frac{2\pi}{h}|}$$

per h piccolo. Sostituendo, abbiamo che

$$\begin{aligned} e^{(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} \left| \hat{u}\left(k + j\frac{2\pi}{h}\right) \right| &\leq Ce^{(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} e^{-a|k+j\frac{2\pi}{h}|} \\ &= Ce^{(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}} \left(e^{-ak} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-aj\frac{2\pi}{h}} + e^{ak} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-aj\frac{2\pi}{h}} \right) \\ &\leq Ce^{(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}} \left(2e^{a\frac{\pi}{h}} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-aj\frac{2\pi}{h}} \right) \end{aligned}$$

$$= 2C e^{(2a-\epsilon)\frac{\pi}{h}} \frac{e^{-a\frac{2\pi}{h}}}{1 - e^{-a\frac{2\pi}{h}}} = 2C \frac{e^{-\epsilon\frac{\pi}{h}}}{1 - e^{-a\frac{2\pi}{h}}}$$

Quest'ultima frazione tende a zero per $h \rightarrow 0$, pertanto è limitata per h piccolo.

4. Per il punto 4 del teorema 4.4.1, il supporto di \hat{u} è contenuto in $[-a, a]$. Pertanto, per $h \leq \frac{\pi}{a}$ si ha $\hat{u}(k + j\frac{2\pi}{h}) = 0$ per $j \neq 0$, quindi

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = \left| \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{+\infty} \hat{u}\left(k + j\frac{2\pi}{h}\right) \right| = 0$$

□

Nell'ultimo teorema, analizziamo come la differenza fra \hat{u} e \hat{v} si riflette sulla differenza fra $p(x)$ e $u(x)$, e sulla quella fra le loro derivate. In altre parole, ricaviamo finalmente l'accuratezza del metodo, in funzione della regolarità di u .

Teorema 4.4.4 (Accuratezza spettrale). *Notazioni precedenti. Valgono le seguenti stime, uniformemente in $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Se u ha $p-1$ derivate in $L^2(\mathbb{R})$ con $p \geq \nu + 1$, e una p -esima derivata (in senso debole) a variazione limitata, allora*

$$|p^{(\nu)}(x) - u^{(\nu)}(x)| = O(h^{p-\nu}) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

2. *Se u ha infinite derivate in $L^2(\mathbb{R})$, allora*

$$|p^{(\nu)}(x) - u^{(\nu)}(x)| = O(h^m) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

per ogni $m \geq 0$

3. Se esistono $a, c > 0$ tale che u può essere estesa ad una funzione analitica sulla striscia del piano complesso $|Im z| < a$ con $\|u(\cdot + iy)\|_{L^2} \leq c$ per ogni $y \in (-a, a)$, allora

$$|p^{(\nu)}(x) - u^{(\nu)}(x)| = O(e^{-\pi(a-\epsilon)/h}) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

per ogni $\epsilon > 0$.

4. Se u può essere estesa ad una funzione intera, ed esiste $a > 0$ tale che $|u(z)| = o(e^{a|z|})$ per $|z| \rightarrow \infty$, allora

$$p^{(\nu)}(x) = u^{(\nu)}(x) \quad \text{se } h \leq \pi/a$$

Dimostrazione. 1. Dimostriamo anzitutto che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Siccome $p \geq \nu + 1 \geq 1$, per il teorema 4.4.1 possiamo affermare che al di fuori di un certo intervallo $[-M, M]$ si ha $|\hat{u}(k)| < C|k|^{-2}$ e quindi

$$\int_M^{+\infty} |\hat{u}(k)| dk + \int_{-\infty}^{-M} |\hat{u}(k)| dk < +\infty$$

Inoltre, siccome $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$, in particolare \hat{u} è sommabile sui compatti, e quindi su $[-M, M]$.

Abbiamo provato che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Pertanto, possiamo applicare la formula di inversione

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \hat{u}(k) dk$$

Con ragionamento analogo a quello appena fatto, si dimostra che la funzione $(ik)^\nu \hat{u}(k)$, per $\nu \leq p-1$, è sommabile, quindi possiamo portare le derivate dentro l'integrale. Risulta (tralasciamo la costante $\frac{1}{2\pi}$)

$$|p^{(\nu)}(x) - u^{(\nu)}(x)| = \left| \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikx} (ik)^\nu \hat{v}(k) dk - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} (ik)^\nu \hat{u}(k) dk \right|$$

$$\leq \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |k|^\nu |\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| dk + \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{h}} |k|^\nu |\hat{u}(k)| dk + \int_{\frac{\pi}{h}}^{+\infty} |k|^\nu |\hat{u}(k)| dk \quad (4.29)$$

Studiamo separatamente i singoli integrali. Dimostriamo che ciascuno di essi tende a zero come $O(h^{p-\nu})$, dunque tale sarà anche la velocità di convergenza della loro somma.

Infatti, per h abbastanza piccolo

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |k|^\nu |\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| dk &\leq Ch^{p+1} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |k|^\nu dk \\ &= Ch^{p+1} \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{\nu+1} = \tilde{C}h^{p-\nu} \end{aligned}$$

Inoltre, per il punto 1 del teorema 4.4.1

$$\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{h}} |k|^\nu |\hat{u}(k)| dk \leq C \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{h}} |k|^{\nu-p-1} dk = C \left(\frac{\pi}{h}\right)^{\nu-p} = \tilde{C}h^{p-\nu}$$

Analogamente, anche l'ultimo integrale tende a zero come $O(h^{p-\nu})$.

2. Ovvio.
3. Ripartiamo dall'equazione (4.29), e dimostriamo che tutti gli integrali convergono a zero come $O(e^{-(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}})$. In base al punto 3 del teorema 4.4.3, fissato arbitrariamente $\epsilon > 0$, si ha che

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = O(e^{-(a-\frac{\epsilon}{2})\frac{\pi}{h}})$$

Quindi,

$$\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |k|^\nu |\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| dk < Ce^{-(a-\frac{\epsilon}{2})\frac{\pi}{h}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |k|^\nu dk$$

$$= e^{-(a-\frac{\epsilon}{2})\frac{\pi}{h}} O(h^{-\nu-1}) = O(e^{-(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}})$$

Dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che

$$e^{(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}} e^{-(a-\frac{\epsilon}{2})\frac{\pi}{h}} O(h^{-\nu-1}) = e^{-\frac{\epsilon\pi}{2h}} O(h^{-\nu-1}) \longrightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

e quindi in particolare è limitata. Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{h}} |k|^\nu |\hat{u}(k)| dk &\leq C \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{h}} |k|^\nu e^{-a|k|} dk \leq C e^{-a\frac{\pi}{h}} \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{h}} |k|^\nu dk \\ &= e^{-a\frac{\pi}{h}} O(|k|^{-\nu-1}) = O(e^{-(a-\epsilon)\frac{\pi}{h}}) \end{aligned}$$

4. Sia $h \leq \frac{\pi}{a}$. Abbiamo già dimostrato che, sotto queste ipotesi, si ha $\hat{u}(k) = \hat{v}(k)$ e il supporto di \hat{u} è contenuto nell'intervallo $[-a, a]$. Quindi in particolare $\hat{u}(k) = 0$ per $|k| \geq \frac{\pi}{h} \geq a$.

Consideriamo ancora una volta la (4.29). Per quanto detto, è evidente che i tre integrali sono nulli, quindi $u^\nu(x) = p^\nu(x)$.

□

Program7 illustra con un esempio le diverse velocità di convergenza che abbiamo appena dimostrato. Lo script calcola la derivata spettrale delle seguenti funzioni:

$$|\sin x|^3 \quad e^{-\frac{1}{\sin^2(x/2)}} \quad \frac{1}{1 + \sin^2(x/2)} \quad \sin(10x)$$

ciascuna delle quali verifica, nell'ordine, una delle quattro ipotesi del teorema precedenti ⁵. Si ricordi infatti che la funzione seno ammette un'unica estensione sul piano complesso definita da

⁵Ciò non è del tutto vero: infatti tali funzioni appartengono a $L^2([-\pi, \pi])$ e non a $L^2(\mathbb{R})$. Tuttavia, come già accennato, per tali funzioni possono essere dimostrati risultati analoghi.

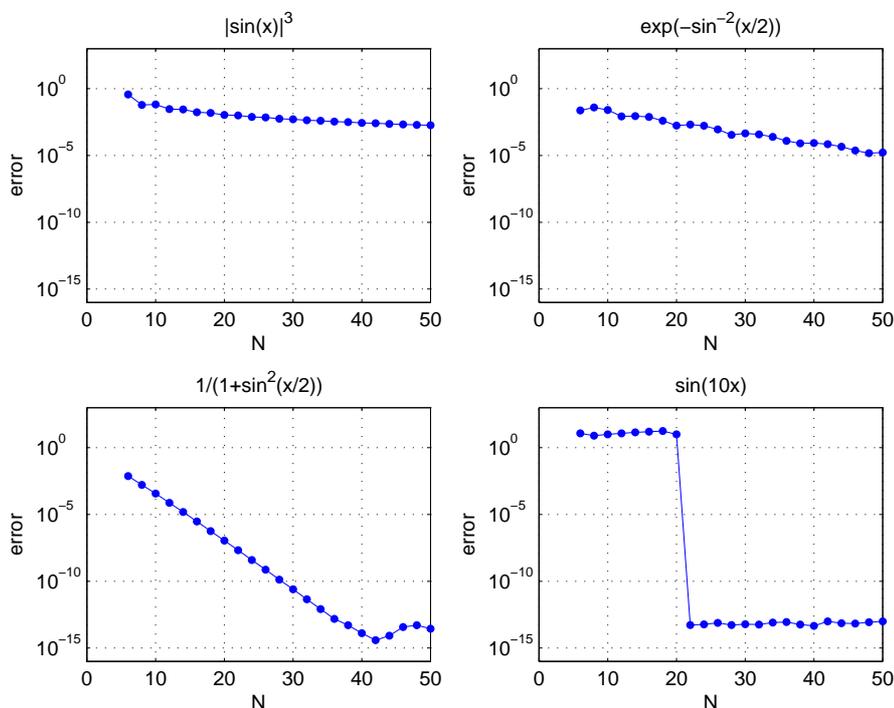


Figura 4.7: Errore di interpolazione in scala semilogaritmica per 4 funzioni con regolarità diversa

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Il risultato dell'algoritmo viene confrontato con la soluzione esatta, e la norma infinito dell'errore viene visualizzata per diversi valori di N . I grafici in figura 4.4 mostrano i risultati in scala semilogaritmica.

Osserviamo ora uno ad uno i quattro grafici e verifichiamo che l'ordine di convergenza sia quello dato dal teorema 4.4.4. Cominciamo dal quarto grafico. Qui l'errore diventa nullo (eccetto che per errori di arrotondamento) appena $h = \frac{2\pi}{N} \leq \frac{\pi}{10}$ (cioè appena $N \geq 20$). Nel terzo si vede chiaramente che la decrescenza dell'errore è esponenziale. Per quanto riguarda il primo grafico, si vede che la decrescenza è più lenta, ma la scala semilogaritmica non ci permette di stabilirne esattamente la velocità. Osserviamo che la funzione

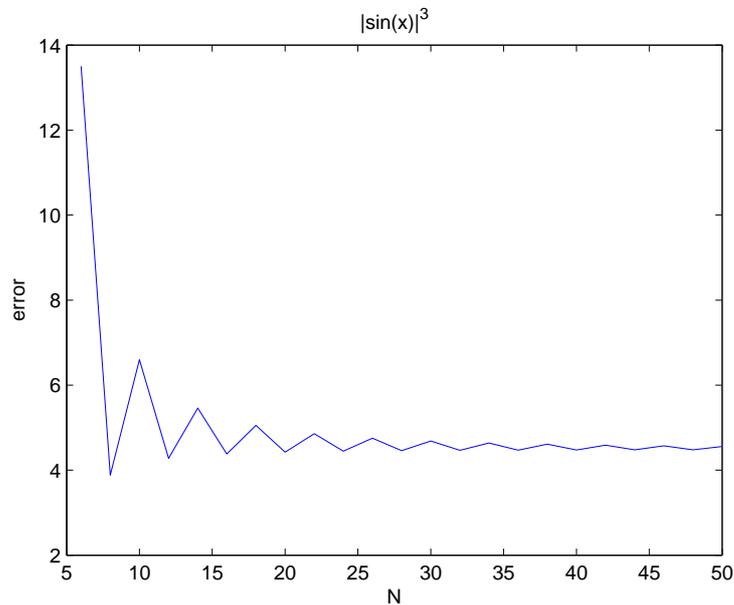


Figura 4.8: Grafico della funzione $err(h)/h^2$

$|\sin x|^3$ soddisfa l'ipotesi 1 del teorema con $p = 3$. Siccome $\nu = 1$, posto $err(h) = \|u(x) - p(x)\|_\infty$, dovrebbe risultare

$$err(h) \sim Ch^2 \implies err(h)/h^2 \sim C$$

In effetti, facendo il grafico della funzione $err(h)/h^2$ si vede benissimo che al crescere di N converge ad una costante (figure 4.4).

Il secondo grafico, l'ultimo, è il più difficile da interpretare. Possiamo comunque affermare con certezza, in base a ciò che vediamo, che in questo caso la velocità di convergenza a zero si colloca fra quella del primo grafico e quella del terzo, come d'altra parte previsto dal teorema.

4.5 Metodi spettrali su un dominio illimitato

Come già discusso, se abbiamo a che fare con funzioni definite su tutto \mathbb{R} , il metodo spettrale descritto al paragrafo 3.2 non può essere implementato

direttamente. In questi casi, il problema viene affrontato con uno dei seguenti metodi (per approfondimenti si veda [6])

4.5.1 Troncamento del dominio

Questo è il metodo più semplice (anche a livello di implementazione). Si restringe il dominio a $[-L, L]$ con L grande, e si risolve l'equazione con un metodo per domini limitati.

L'efficacia di questo metodo dipende dalla velocità con cui $u(y) \rightarrow 0$ per $|y| \rightarrow +\infty$. Questo fatto è ovvio: quanto più la funzione u è 'trascurabile' al di fuori dell'intervallo $[-L, L]$, tanto più sarà possibile determinarne una buona approssimazione troncando il dominio. In pratica, questo metodo viene impiegato prevalentemente nei casi in cui la funzione decresce a velocità esponenziale.

Anche se non è possibile dimostrare rigorosamente una stima dell'errore rispetto alla soluzione esatta, si ha che nella maggior parte dei problemi reali

$$|p_N - u| \sim \sup_{|y| \geq L} |u(y)| = E_{DT}(L)$$

dove $E_{DT}(L)$ è detto *errore di troncamento*.

Affinché la soluzione approssimata converga a quella esatta, dunque, una condizione necessaria è che sia L che N tendano all'infinito. Infatti, se manteniamo fisso L , aumentando il numero di funzioni di base N l'errore non convergerà a zero, ma a $E_{DT}(L)$.

4.5.2 Funzioni di base con dominio illimitato

Abbiamo visto nel capitolo precedente che l'interpolante a banda limitata della funzione u si può scrivere nella forma

$$p(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m S_h(x - x_m) \quad (4.30)$$

possiamo approssimare la funzione p sostituendo alla serie una somma finita. Precisamente

$$p(x) \sim \tilde{p}(x) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} v_m S_h(x - x_m)$$

Anche in questo caso, abbiamo due parametri indipendenti, N e h , e affinché \tilde{p} converga alla soluzione esatta, è necessario passare al limite per entrambi. Infatti, se fissiamo N , stiamo eliminando dalla (4.30) tutte le funzioni sinc centrate in punti al di fuori di un intervallo finito; il risultato è simile ad un troncamento del dominio, dunque anche diminuendo il valore di h , la soluzione non convergerà a quella esatta. D'altra parte, se h è fissato, per $N \rightarrow +\infty$ si ha che $\tilde{p} \rightarrow p \neq u$.

Esistono comunque altre basi di funzioni (oltre a quella delle funzioni sinc) con cui approssimare u se il suo dominio è illimitato, ma non verranno discusse in questa trattazione.

4.5.3 Cambio di coordinate

Attraverso un cambio di coordinate $y \rightarrow x$, è possibile mappare tutto \mathbb{R} su un intervallo limitato (tipicamente $[-1, 1]$ o $[-\pi, \pi]$), e in seguito usare un metodo spettrale appropriato (prevalentemente quello di Chebyshev). Esistono infinite mappe possibili, che vengono classificate in base alla velocità di crescita di $y(x)$, per $x \rightarrow 1$ (o π). Si distingue fra mappe logaritmiche (ad esempio $y = \operatorname{arctanh}(x)$), mappe algebriche ($y = \frac{Cx}{\sqrt{1-x^2}}$) e mappe esponenziali ($y = \sinh(Cx)$). Ciascuna di queste mappe possiede caratteristiche peculiari, che la rende migliore delle altre in determinati problemi.

Capitolo 5

Applicazione dei metodi spettrali

Concludiamo questa tesi mostrando degli esempi di applicazione dei metodi spettrali, descritti nel capitolo precedente. Affronteremo due problemi: un problema di Cauchy descritto da un'equazione differenziale lineare del primo ordine (equazione del trasporto), e un'equazione agli autovalori (oscillatore armonico quantistico).

Per valutare meglio l'efficacia dei metodi, sono stati scelti di proposito due problemi di cui è nota la soluzione esatta. Pertanto in ciascuno dei due problemi la risoluzione numerica sarà preceduta da una discussione di tipo analitico in cui ricaveremo esplicitamente la soluzione.

5.1 Equazione del trasporto

Consideriamo l'equazione differenziale

$$u_t + c(t)u_x = 0 \quad c(t) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad (5.1)$$

per $t > 0$ e $x \in [0, 2\pi]$. Imponiamo che l'equazione sia periodica al bordo, e come dato iniziale $u(x, 0) = \exp(-100(x - 1)^2)$.

La (5.1) è chiamata *equazione del trasporto*, in quanto il dato iniziale viene ‘trasportato’ lungo particolari curve chiamate *caratteristiche*. In effetti, è possibile risolvere esattamente un’equazione come la (5.1) individuando tali curve. Più precisamente, vogliamo determinare una curva $x(t)$ tale che $u(x(t), t)$ è costante. Imponiamo quindi

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + x'(t)u_x(x(t), t) = 0$$

Siccome u è soluzione di (5.1), abbiamo anche che $u_t(x(t), t) + c(t)u_x(x(t), t) = 0$. Dunque deve valere $x'(t) = c(t)$ per ogni t .

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha come soluzione

$$x(t) = \frac{9}{20}t + \frac{1}{4} \sin(t) + x_0 \quad (5.2)$$

Per la precisione, la condizione di periodicità implica che la soluzione non è $x(t)$, bensì $\tilde{x}(t) = x(t) - 2\pi \left[\frac{x(t)}{2\pi} \right]$, e questo assicura che $x(t) \in [0, 2\pi]$ per ogni t . Tuttavia, per semplicità assumeremo che $x(t)$ sia la soluzione.

Si ha che, al variare di $x_0 \in [0, 2\pi]$, le caratteristiche riempiono lo spazio, ossia per ogni punto (x, t) esiste una e una sola caratteristica che passa per (x, t) . Possiamo quindi scrivere

$$u(x, t) = u(x(t), t) = u(x_0, 0) = \exp(-100(x_0 - 1)^2)$$

Considerando la (5.2) si ricava che $x_0 = x - \frac{9}{20}t + \frac{1}{4} \sin(t)$, e quindi abbiamo finalmente ricavato la soluzione di (5.1):

$$u(x, t) = \exp\left(-100\left(x - \frac{9}{20}t + \frac{1}{4} \sin(t) - 1\right)^2\right)$$

Cerchiamo ora di determinare un’approssimazione di u utilizzando i metodi spettrali. Osserviamo anzitutto che la funzione ‘dato iniziale’ $u(x, 0)$,

sebbene non periodica, è così vicina a zero agli estremi dell'intervallo che può essere considerata tale a fini pratici.

Poniamo $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$, e sia $v^{(n)}$ il vettore che approssima la soluzione esatta $u(\bar{x}, n\Delta t)$. **Program6** risolve l'equazione (5.1) in due diversi modi. Nel primo, sia la derivate temporale e quella spaziale vengono approssimate con un metodo alle differenze finite noto come *leapfrog* (letteralmente 'balzo della rana'), espresso da

$$u_t(x_j, n\Delta t) \sim \frac{v_j^{(n+1)} - v_j^{(n-1)}}{2\Delta t} \quad u_x(x_j, n\Delta t) \sim \frac{v_{j+1}^{(n)} - v_{j-1}^{(n)}}{2\Delta x}$$

La formula con cui calcoliamo v è quindi

$$\frac{v_j^{(n+1)} - v_j^{(n-1)}}{2\Delta t} = -c(x_j) \frac{v_{j+1}^{(n)} - v_{j-1}^{(n)}}{2\Delta x}$$

Si noti che il metodo così com'è avrebbe bisogno di due condizioni iniziali. Per risolvere questo fatto, abbiamo assunto di conoscere anche $v^{(-1)} = u(\bar{x}, -\Delta t)$.

Nel secondo modo, solo la derivata temporale è approssimata con le differenze finite, mentre per quella spaziale si usano i metodi spettrali. La relazione che otteniamo è dunque

$$\frac{v_j^{(n+1)} - v_j^{(n-1)}}{2\Delta t} = -c(x_j) (D_N v^{(n)})_j$$

dove il prodotto $D_N v^{(n)}$ è calcolato con la FFT.

Le figure 5.1 e 5.1 mostrano la soluzione approssimata nei due casi. Nel primo grafico, osserviamo che dall'onda principale si emanano delle increspature del tutto assenti nella soluzione esatta. Nel secondo grafico, al contrario, vediamo una sola onda che si propaga a velocità variabile (seguendo la direzione delle caratteristiche), senza dispersioni.

Per un'analisi più accurata della precisione del metodo spettrale, la figura 5.1 mostra il grafico dell'errore $|u(\bar{x}, n\Delta t) - v^{(n)}|$ per diversi valori di $n\Delta t$. In ogni caso, l'assenza di onde 'spurie' dimostra la maggiore efficacia dei metodi spettrali.

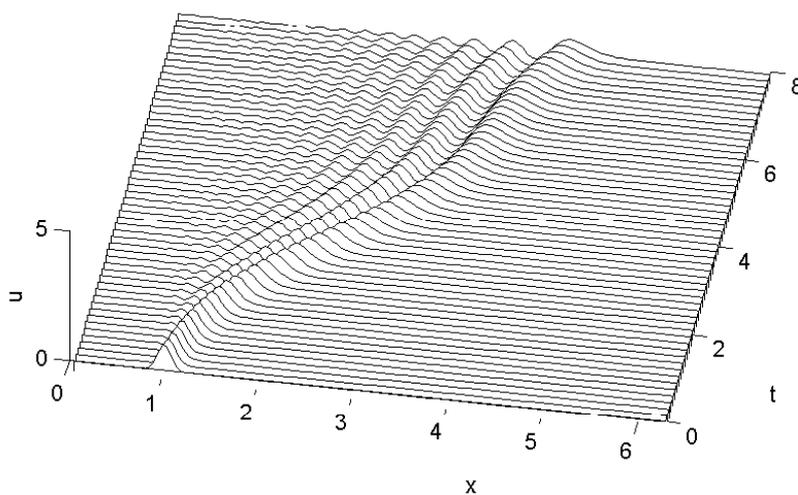


Figura 5.1: Grafico della soluzione approssimata senza i metodi spettrali

5.2 Equazione agli autovalori: oscillatore armonico quantistico

Sia L l'operatore differenziale definito come

$$Lf = -f'' + x^2 f$$

Vogliamo determinare gli autovalori di L , ossia i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste $u \neq 0$ che verifica l'equazione

$$-f'' + x^2 f = \lambda f \tag{5.3}$$

Questo è noto in fisica come il problema dell'oscillatore armonico quantistico. Per risolverlo, si potrebbe pensare di applicare formalmente la trasformata di Fourier all'equazione, come ampiamente mostrato nel capitolo 3. Tuttavia, in questo caso il metodo si rivela inefficace. Infatti si ottiene

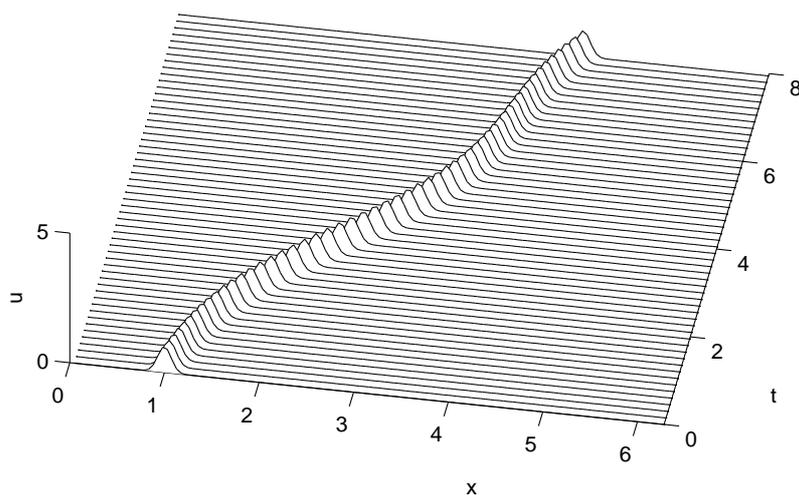


Figura 5.2: Grafico della soluzione approssimata con i metodi spettrali

$$-\widehat{f}'' + x^2 \widehat{f} - \lambda \widehat{f} = k^2 \widehat{f} - \widehat{f}'' - \lambda \widehat{f}$$

che è esattamente la stessa equazione.

Dobbiamo dunque procedere in modo diverso. Proviamo a cercare la soluzione nella forma $f(x) = e^{-x^2/2}u(x)$. Sostituendo nella (5.3), l'equazione diventa

$$-u'' + 2xu' + (1 - \lambda)u = 0 \tag{5.4}$$

A questo punto supponiamo di poter sviluppare la soluzione in serie di potenze, vale a dire $u(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_n x^n$. Si ha quindi

$$2xu'(x) = 2x \sum_{j=1}^{+\infty} a_n x^{n-1} n = \sum_{j=1}^{+\infty} 2na_n x^n$$

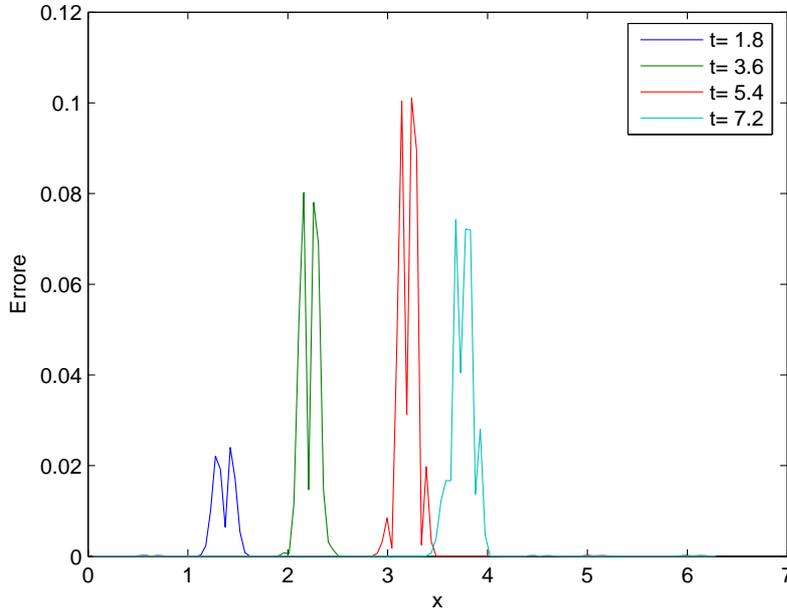


Figura 5.3: Errore del metodo spettrale per t fissato

$$u''(x) = \sum_{j=2}^{+\infty} a_n x^{n-2} n(n-1) = \sum_{j=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Sostituendo nella (5.4) si ottiene

$$-\sum_{j=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{j=1}^{+\infty} 2na_n x^n + \sum_{j=0}^{+\infty} (1-\lambda)a_n x^n = 0$$

Imponendo che questa relazione sia verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, si trova che i coefficienti a_n devono verificare la seguente relazione:

$$a_{n+2} = \frac{2n + (1 - \lambda)}{(n + 2)(n + 1)} a_n \quad (5.5)$$

E' dunque il raggio di convergenza della serie è dato da

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2) \frac{1 + 1/n}{2 + (1 - \lambda)/n} = +\infty$$

Dunque la serie converge su tutto \mathbb{R} e definisce una funzione analitica.

Abbiamo provato che, per ogni fissato λ la generica soluzione di (5.3) si può scrivere nella forma $f = e^{-x^2/2} (c_1 u_1 + c_2 u_2)$, dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie, mentre u_1 e u_2 per la relazione (5.5) sono

$$u_1(x) = x + \frac{3-\lambda}{3!} x^3 + \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)}{5!} x^5 + \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)(11-\lambda)}{7!} x^7 \dots$$

$$u_2(x) = 1 + \frac{1-\lambda}{2!} x^2 + \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)}{4!} x^4 + \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda)}{6!} x^6 + \dots$$

Osserviamo che se λ è un intero dispari, ossia $\lambda = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, uno fra u_1 e u_2 diventa un semplice polinomio (tutti i suoi coefficienti da un certo punto in poi sono nulli). Questi sono noti come *polinomi di Hermite*, e si indicano con la notazione $H_k(x)$.

E' possibile dimostrare (si veda ad esempio [10]) che tutte le altre soluzioni di (5.3), per qualunque valore di λ , divergono a velocità esponenziale per $x \rightarrow +\infty$. Dunque, se all'equazione (5.3) aggiungiamo le condizioni al bordo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, allora gli unici autovalori possibili sono $\lambda = 1, 3, 5, \dots$, e le relative autofunzioni sono $f_\lambda(x) = e^{-x^2/2} H_{\frac{\lambda-1}{2}}(x)$.

Proviamo ora ad affrontare il problema con i metodi spettrali che abbiamo ricavato nel capitolo precedente. Siccome in questo problema il dominio delle soluzioni è tutto \mathbb{R} , dobbiamo utilizzare uno dei metodi descritti nel paragrafo 4.5. Scegliamo di troncare il dominio delle funzioni all'intervallo $[-L, L]$, discretizziamo l'intervallo in una griglia equispaziata di N punti x_1, \dots, x_N . Sia v il vettore che approssima la soluzione f in tali punti, sostituiamo all'equazione (5.3) il seguente sistema lineare

$$(-D_N^{(2)} + S)v = \lambda v \tag{5.6}$$

dove $D_N^{(2)}$ è la matrice di differenziazione del secondo ordine (4.26), eccetto che le funzioni sono scalate su $[-L, L]$ anziché su $[-\pi, \pi]$. Questo implica che le funzioni interpolanti avranno periodo $2L$ anziché 2π e viene fuori che la matrice (4.26) deve essere moltiplicata per la costante $(\frac{\pi}{L})^2$ (per approssimare la deriva ν -esima, la costante è $(\frac{\pi}{L})^2$). S è la matrice diagonale con

N=6	N=12	N=18
0.46147291699547	0.97813728129861	0.99997000149931
7.49413462105052	3.17160532064718	3.00064406679582
7.72091605300656	4.45593529116679	4.99259532440771
28.83248377834014	8.92452905811994	7.03957189798150
N=24	N=30	N=36
0.99999999762903	0.99999999999999	0.99999999999999
3.00000009841087	3.00000000000074	2.99999999999999
4.99999796527329	4.9999999997559	5.00000000000000
7.00002499815654	7.00000000050860	7.00000000000000

Tabella 5.1: Approssimazione spettrale degli autovalori dell'oscillatore armonico

$S_{ii} = x_i^2$. Vogliamo approssimare gli autovalori della (5.3) con gli autovalori della matrice $-D_N^{(2)} + S$, che sappiamo calcolare. **Program8** implementa il procedimento descritto con $L = 8$ e per diversi valori del parametro N , e la tabella 5.1 mostra i primi quattro autovalori trovati. Come osserviamo, anche per N relativamente basso, la precisione è altissima.

Può non essere ovvio il motivo per cui questo metodo permetta di ricavare soltanto gli autovalori ‘speciali’ (ossia gli interi dispari) della (5.3). In effetti abbiamo dimostrato che, se non fissiamo condizioni al bordo, qualunque $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore dell'equazione. Tuttavia, come già discusso nel capitolo precedente, questo metodo funziona bene solo per funzioni che decrescono rapidamente. Per quanto detto, le uniche autofunzioni di (5.3) che hanno questa proprietà sono quelle corrispondenti a $\lambda = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, e dunque il metodo è in grado di individuare solo questi.

Per comprendere ancora più a fondo questo concetto, **Program9** visualizza il grafico di $\epsilon = |\lambda_{esatto} - \lambda_{spettrale}|$ in funzione di L/N (figura 5.2) per i primi quattro autovalori. Questo viene fatto per $L = 3, 5, 7$, e nel grafico osserviamo i tre corrispondenti ‘gruppi’ di rette. Possiamo osservare che, fino

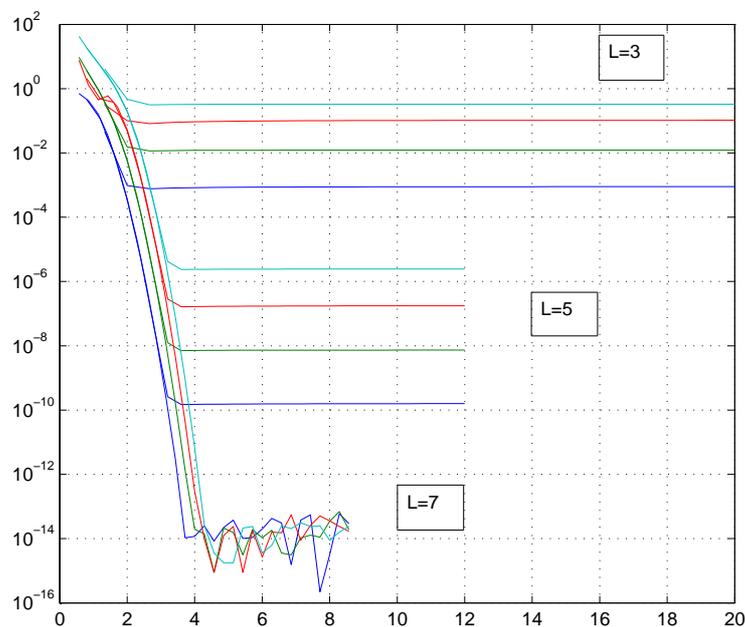


Figura 5.4: Errore del metodo spettrale sui primi 4 autovalori per $L=3$ (in alto), $L=5$ (al centro), e $L=7$ (in basso)

ad una certa soglia, ϵ dipende soltanto da L/N . Infatti, nella prima parte del grafico, i tre gruppi di rette si sovrappongono perfettamente. Tuttavia, come discusso nel paragrafo 3.5, affinché ci sia convergenza alla soluzione esatta, è necessario che sia L che N tendano a infinito. Se L è fissato, gli autovalori calcolati spettralmente convergeranno ad un valore che *non è esatto*; ciò deriva dal fatto che tronchiamo il dominio dell'equazione (5.3) ad un intervallo limitato, e dunque i suoi autovalori saranno diversi da quelli ricavati in precedenza.

In ogni caso, il grafico conferma l'estrema accuratezza del metodo. Le oscillazioni che vediamo per $L = 7$ e $L/N \geq 4$ sono dovute al fatto che l'errore del metodo è paragonabile alla precisione di macchina.

Appendice A

Derivate deboli

Richiamiamo i fondamenti della teoria delle derivate deboli, insieme ad alcuni risultati indispensabili per comprendere gli argomenti discussi in questa tesi. Per una trattazione più estesa, si veda [1] e [9].

Definizione A.1 (Derivata debole e spazio di Sobolev). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $f \in L_{loc}(\Omega)$. Diciamo che f è derivabile in senso debole su Ω rispetto a x_i se esiste $g \in L_{loc}(\Omega)$ tale che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx \quad (\text{A.1})$$

g è chiamata *derivata debole* di f . Con un piccolo abuso di notazione, scriviamo $g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Analogamente, sia α un multindice, la derivata α -esima di f è definita come quella funzione $f^{(\alpha)}$ tale che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi^{(\alpha)}(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f^{(\alpha)}(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

se esiste una funzione localmente sommabile che verifica tale proprietà.

Si verifica facilmente che la derivata debole di una funzione, se esiste, è univocamente determinata su tutto Ω a meno di insiemi di misura nulla. Inoltre, si ha che questa nozione di derivata è effettivamente più debole della

derivata classica. In altre parole, se $f \in C^1(\Omega)$ (e la sua derivata è localmente sommabile), allora f è derivabile anche in senso debole e le due derivate coincidono (quasi dappertutto).

Definizione A.2. Definiamo lo spazio vettoriale

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \exists f^{(\alpha)} \in L^p(\Omega) \mid \alpha \leq m\} \quad (\text{A.2})$$

W_p^m è detto *spazio di Sobolev*. Definiamo su $W^{m,p}(\Omega)$ la norma

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si dimostra che, con questa norma, $W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach. Di particolare importanza è lo spazio di Sobolev per $p = 2$, in quanto esso risulta essere uno spazio di Hilbert. Viene pertanto adottata la notazione specifica

$$W^{m,p}(\Omega) \equiv H^m(\Omega)$$

E' possibile estendere la definizione di $H^m(\Omega)$ anche per m non intero. Tuttavia, siccome ciò non rientra negli obiettivi di questa tesi, non ne daremo i dettagli.

Vediamo ora un teorema che estende l'integrazione per parti alle funzioni di H^s .

Proposizione A.0.1. *Siano $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Se $|\alpha| \leq m$ risulta*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g^{(\alpha)}(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)}(x)g(x)dx$$

Restringiamoci ora al caso unidimensionale e enunciamo un teorema che ci permette di caratterizzare le funzioni derivabili in senso debole.

Teorema A.0.2 (Derivate deboli e assoluta continuità). *Sia $f \in H^1(]a, b[)$. Allora f è uguale quasi dappertutto a una funzione \tilde{f} assolutamente continua.*

Questo implica in particolare che, per $a < x_1 \leq x_2 < b$, risulta

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = \tilde{f}(x_2) - \tilde{f}(x_1)$$

e vale una variante del teorema di integrazione per parti. Siano $f, g \in H^1(]a, b[)$, x_1 e x_2 come sopra, allora

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g'(x)dx = \left[\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x)g(x)dx$$

Vale infine il seguente teorema, per la cui dimostrazione giocano un ruolo fondamentale le proprietà della trasformata di Fourier, e in particolare il teorema 1.4.1.

Teorema A.0.3 (Immersione di H^s in C^m). *Sia $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $m < s - \frac{n}{2}$.*

Allora esiste $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tale che $f = \tilde{f}$ quasi dappertutto. Inoltre \tilde{f} e tutte le sue derivate fino all'ordine m sono limitate e convergenti a zero per $\|x\| \rightarrow 0$.

Appendice B

Programmi MATLAB

Riportiamo di seguito i codici dei programmi MATLAB descritti nei capitoli 4 e 5. Molti di questi programmi può essere reperita così com'è sul sito <http://www.comlab.ox.ac.uk/ouc1/work/nick.trefethen>, mentre altri sono stati modificati e altri ancora sono stati scritti dall'autore.

Program1

```
% p1.m - convergence of fourth-order finite differences

% For various N, set up grid in [-pi,pi] and function u(x):
Nvec = 2.^(3:12);
clf, subplot('position',[.1 .4 .8 .5])
for N = Nvec
    h = 2*pi/N; x = -pi + (1:N)'*h;
    u = exp(sin(x)); uprime = cos(x).*u;

    % Construct sparse fourth-order differentiation matrix:
    e = ones(N,1);
    D = sparse(1:N,[2:N 1],2*e/3,N,N)...
        - sparse(1:N,[3:N 1 2],e/12,N,N);
```

```

D = (D-D')/h;

% Plot max(abs(D*u-uprime)):
error = norm(D*u-uprime,inf);
loglog(N,error, '.', 'markersize',15), hold on
end
grid on, xlabel N, ylabel error
title('Convergence of fourth-order finite differences')
semilogy(Nvec,Nvec.^(-4), '--')
text(105,5e-8, 'N^{-4}', 'fontsize',18)

```

Program2

```

% p2.m - convergence of periodic spectral method (compare p1.m)

% For various N (even), set up grid as before:
clf, subplot('position',[.1 .4 .8 .5])
for N = 2:2100;
    h = 2*pi/N;
    x = -pi + (1:N)'*h;
    u = exp(sin(x)); uprime = cos(x).*u;

    % Construct spectral differentiation matrix:
    column = [0 .5*(-1).^(1:N-1).*cot((1:N-1)*h/2)];
    D = toeplitz(column,column([1 N:-1:2]));

    % Plot max(abs(D*u-uprime)):
    error = norm(D*u-uprime,inf);
    loglog(N,error, '.', 'markersize',15), hold on
%figure;

```

```
    %semilogy(N,error, '.', 'markersize',15), hold on
end
grid on, xlabel N, ylabel error
title('Convergence of spectral differentiation')
```

Program3

```
% p3.m - band-limited interpolation
k=6;

error_inf=zeros(k+1,3);

for n=1:(k+1)
    %figure;
    h=2^(1-n);
    xmax = 10;
    x = -xmax:h:xmax;           % computational grid
    xx = -xmax-h/20:h/10:xmax+h/20; % plotting grid
    for plt = 1:3

        switch plt
            case 1, v = (x==0);           % delta function
            case 2, v = (abs(x)<=3);      % square wave
            case 3, v = max(0,1-abs(x)/3); % hat function
        end

        p = zeros(size(xx));
        for i = 1:length(x),
            p = p + v(i)*sin(pi*(xx-x(i))/h)./(pi*(xx-x(i))/h);
        end
    end
end
```

```

    if h==1
        subplot(3,1,plt)
        plot(x,v,'.','markersize',14), grid on
        line(xx,p), axis([-xmax xmax -.5 1.5])
        set(gca,'xtick',[]), set(gca,'ytick',[0 1])
    end
    switch plt
        case 1, v2 = (xx==0);           % delta function
        case 2, v2 = (abs(xx)<=3);      % square wave
        case 3, v2 = max(0,1-abs(xx)/3); % hat function
    end
    error_inf(n,plt)=norm(v2-p,inf); %error in infinity norm
end
end

figure;
N=20*2.^(0:k);
for plt=1:3 %plot the error
    subplot(3,1,plt)
    loglog(N,error_inf(:,plt))

end
axis([subplot(3,1,1) subplot(3,1,2)], [20 20*2^(k) 10^(-0.05) 10^(0.05)])
axis([subplot(3,1,3)], [20 20*2^(k) 10^(-3) 10^(-1)])
xlabel('N')
subplot(3,1,2)
ylabel('ERROR')

```

Program4

```

% p4.m - periodic spectral differentiation
tic
% Set up grid and differentiation matrix:
N = 48; h = 2*pi/N; x = h*(1:N)';
column = [0 .5*(-1).^(1:N-1).*cot((1:N-1)*h/2)]';
D = toeplitz(column,column([1 N:-1:2]));

% Differentiation of a hat function:
v = max(0,1-abs(x-pi)/2); clf
subplot(2,2,1), plot(x,v,'.-','markersize',13)
axis([0 2*pi -.5 1.5]), grid on, title('function')
subplot(2,2,2), plot(x,D*v,'.-','markersize',13)
axis([0 2*pi -1 1]), grid on, title('spectral derivative')

% Differentiation of exp(sin(x)):
v = exp(sin(x)); vprime = cos(x).*v;
subplot(2,2,3), plot(x,v,'.-','markersize',13)
axis([0 2*pi 0 3]), grid on
subplot(2,2,4), plot(x,D*v,'.-','markersize',13)
axis([0 2*pi -2 2]), grid on
error = norm(D*v-vprime,inf);
text(2.2,1.4,['max error = ' num2str(error)])
toc

```

Program5

```

% p5.m - repetition of p4.m via FFT
%       For complex v, delete "real" commands.
tic
% Differentiation of a hat function:

```

```

N = 2048; h = 2*pi/N; x = h*(1:N)';
v = max(0,1-abs(x-pi)/2); v_hat = fft(v);
w_hat = 1i*[0:N/2-1 0 -N/2+1:-1]' .* v_hat;
w = real(ifft(w_hat)); clf
subplot(3,2,1), plot(x,v,'.-','markersize',13)
axis([0 2*pi -.5 1.5]), grid on, title('function')
subplot(3,2,2), plot(x,w,'.-','markersize',13)
axis([0 2*pi -1 1]), grid on, title('spectral derivative')

% Differentiation of exp(sin(x)):
v = exp(sin(x)); vprime = cos(x).*v;
v_hat = fft(v);
w_hat = 1i*[0:N/2-1 0 -N/2+1:-1]' .* v_hat;
w = real(ifft(w_hat));
subplot(3,2,3), plot(x,v,'.-','markersize',13)
axis([0 2*pi 0 3]), grid on
subplot(3,2,4), plot(x,w,'.-','markersize',13)
axis([0 2*pi -2 2]), grid on
error = norm(w-vprime,inf);
text(2.2,1.4,['max error = ' num2str(error)])
toc

```

Program6

```

% p6.m - variable coefficient wave equation

% Grid, variable coefficient, and initial data:
N = 128;
h = 2*pi/N;
x = h*(1:N);

```

```
t = 0;
dt = h/4;
v1 = exp(-100*(x-1).^2);
v2=v1;

%coefficient: c(t)=a+b*sin(t/d)^2
a=.2;
b=.5;
d=2;
vold1 = exp(-100*(x+(a+b/2)*dt+(d*b/4)*sin(-2*dt/d)-1).^2);
vold2=vold1;

% v_1=solution computed with spectral methods
% v_2=solution without spectral methods

matrix=diag(ones(1,N-1),1)-diag(ones(1,N-1),-1);
tmax = 8; tplot = .15; clf, drawnow, set(gcf,'renderer','zbuffer')
plotgap = round(tplot/dt); dt = tplot/plotgap;
nplots = round(tmax/tplot);
data = [v1; zeros(nplots,N)]; tdata = t; data2 = [v2; zeros(nplots,N)];
for i = 1:nplots
    for n = 1:plotgap
        t = t+dt;
        v_hat = fft(v1);
        w_hat = 1i*[0:N/2-1 0 -N/2+1:-1] .* v_hat;
        w = real(ifft(w_hat));
        c=a+ b*sin(t/d)^2;

        vnew1 = vold1 - 2*dt*c*w;
        vnew2 = vold2 - (dt/h)*c*(matrix*v2)';
```

```
vold1 = v1; v1 = vnew1;
vold2 = v2; v2 = vnew2;

end
data(i+1,:) = v1;
data2(i+1,:) = v2;
tdata = [tdata; t];
end

% plot the two solutions
waterfall(x,tdata,data), view(10,70), colormap(1e-6*[1 1 1]);
axis([0 2*pi 0 tmax 0 5]), xlabel x, ylabel t, zlabel u, grid off
figure;
waterfall(x,tdata,data2), view(10,70), colormap(1e-6*[1 1 1]);
axis([0 2*pi 0 tmax 0 5]), xlabel x, ylabel t, zlabel u, grid off

%exact solution
[X,T]=meshgrid(x,tdata);
exact=exp(-100*(X-(a+b/2)*T+(d*b/4)*sin(2*T/d)-1).^2);
figure;
waterfall(x,tdata,exact), view(10,70), colormap(1e-6*[1 1 1]);
axis([0 2*pi 0 tmax 0 5]), xlabel x, ylabel t, zlabel u, grid off

%error
figure;
error=abs(exact-data);

r=12;
for i=1:round(nplots/r)
    plot(x,error(i*10,:)) ;
```

```

        hold all
    end
    xlabel('x')
    ylabel('Errore')
    legend(['t= ',num2str(r*tplot)], ['t= ',num2str(2*r*tplot)],
        ['t= ',num2str(3*r*tplot)], ['t= ',num2str(4*r*tplot)])
    hold off

```

Program7

```

% p7.m - accuracy of periodic spectral differentiation

% Compute derivatives for various values of N:
Nmax = 50; E = zeros(3,Nmax/2-2);
for N = 6:2:Nmax;
    h = 2*pi/N; x = h*(1:N)';
    column = [0 .5*(-1).^(1:N-1).*cot((1:N-1)*h/2)]';
    D = toeplitz(column,column([1 N:-1:2]));
    v = abs(sin(x)).^3; % 3rd deriv in BV
    vprime = 3*sin(x).*cos(x).*abs(sin(x));
    E(1,N/2-2) = norm(D*v-vprime,inf);
    v = exp(-sin(x/2).^(-2)); % C-infinity
    vprime = .5*v.*sin(x)./sin(x/2).^4;
    E(2,N/2-2) = norm(D*v-vprime,inf);
    v = 1./(1+sin(x/2).^2); % analytic in a strip
    vprime = -sin(x/2).*cos(x/2).*v.^2;
    E(3,N/2-2) = norm(D*v-vprime,inf);
    v = sin(10*x); vprime = 10*cos(10*x); % band-limited
    E(4,N/2-2) = norm(D*v-vprime,inf);
end

```

```

% Plot results:
titles = {'|sin(x)|^3', 'exp(-sin^{2}(x/2))', ...
         '1/(1+sin^2(x/2))', 'sin(10x)'}; clf
for iplot = 1:4
    subplot(2,2,iplot)
    semilogy(6:2:Nmax,E(iplot,:),'.','markersize',12)
    line(6:2:Nmax,E(iplot,:))
    axis([0 Nmax 1e-16 1e3]), grid on
    set(gca,'xtick',0:10:Nmax,'ytick',(10).^(-15:5:0))
    xlabel N, ylabel error, title(titles(iplot))
end
%plot N^2 err(N) for the function #1
figure;
A=(6:2:Nmax).^2.*E(1,:);
plot(6:2:Nmax,A)
xlabel N, ylabel error, title(titles(1))

```

Program8

```

% p8.m - eigenvalues of harmonic oscillator  $-u''+x^2 u$  on  $\mathbb{R}$ 

format long, format compact
L=8; % domain is  $[-L L]$ , periodic
for N = 6:6:36
    h = 2*pi/N; x = h*(1:N); x = L*(x-pi)/pi;
    column = [-pi^2/(3*h^2)-1/6 ...
             -.5*(-1).^(1:N-1)./sin(h*(1:N-1)/2).^2];
    D2 = (pi/L)^2*toeplitz(column); % 2nd-order differentiation
    eigenvalues = sort(eig(-D2 + diag(x.^2)));
end

```

```
    N, eigenvalues(1:4)
end
```

Program9

```
% p9.m - eigenvalues of harmonic oscillator  $-u''+x^2 u$  on  $\mathbb{R}$ 
%         for different values of  $L$  and  $L/N$ 

format long, format compact
for L=3:2:7;    %domain  $[-L,L]$ 
eigenvalues=zeros(29,4);
for N = 4:2:60
    h = 2*pi/N; x = h*(1:N); x = L*(x-pi)/pi;
    column = [-pi^2/(3*h^2)-1/6 ...
              -.5*(-1).^(1:N-1)./sin(h*(1:N-1)/2).^2];
    D2 = (pi/L)^2*toeplitz(column); % 2nd-order differentiation matrix
    A = sort(eig(-D2 + diag(x.^2)));
    eigenvalues((N-2)/2,1:4)=A(1:4);
    e=ones(29,1);
    exact=[e 3*e 5*e 7*e];
end
%error on the first four eigenvalues
error=abs(exact-eigenvalues);
semilogy((4:2:60)/L,error)
hold on
end
grid on
```


Bibliografia

- [1] B. Pini (1977), *Terzo corso di analisi matematica, vol.I*
- [2] B. Pini (1972), *Secondo corso di analisi matematica, vol.II*
- [3] D. Gottlieb, S. A. Orszag (1977), *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*
- [4] Y. Katznelson (1968), *An introduction to harmonic analysis*
- [5] J. B. Conway (1973), *Function of one complex variable I*
- [6] J. P. Boyd (2000), *Chebyshev and Fourier spectral methods*
- [7] D. V. Widder (1946), *The Laplace Transform*
- [8] L. N. Trefethen (2000), *Spectral Methods in MATLAB*
- [9] W. P. Ziemer (1989), *Weakly differentiable functions*
- [10] C. M. Bender, S. A. Orszag (1978), *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*
- [11] P. Hartman (1973), *Ordinary differential equations*
- [12] H. Dym, H. P. McKean (1972), *Fourier series and integrals*
- [13] J. W. Cooley, J. W. Tukey (1965), *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*

- [14] E. Tadmor (1986), *The exponential accuracy of Fourier and Chebychev differencing methods*
- [15] E. Lanconelli, S. Polidoro (1994), *On a class of hypoelliptic evolution operators*