Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Formule di Media
e
Funzioni Armoniche

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Beatrice Abbondanza

2 Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Alla mia famiglia,
mamma, babbo e Benedetta,
e a Raffa,
certezze della mia vita.

Introduzione

Nel primo capitolo della tesi ho presentato alcune fondamentali proprietà delle funzioni armoniche, le soluzioni dell'equazione di Laplace,

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Delta := \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j}$$

in un arbitrario aperto Ω di $\mathbb{R}^N$.
Dalle formule di rappresentazione di Green per le funzioni $u \in C^2$ ho ricavato le **formule di media di superficie e di volume per le funzioni armoniche**: se h è una funzione armonica in un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ allora h soddisfa:

$$h(x_0) = \frac{1}{|\partial(D(x_0, r))|} \int_{\partial D(x_0,r)} h(x)dx =: m_r(h)(x_0) \tag{1}$$

e

$$h(x_0) = \frac{1}{|D(x_0, r)|} \int_{D(x_0,r)} h(x)dx =: M_r(h)(x_0) \tag{2}$$

per ogni disco euclideo $D(x_0, r)$ con $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$.
Queste formule, dovute a Gauss, svolgono per le funzioni armoniche un ruolo analogo a quello tenuto dalla formula integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe. In particolare, da esse si deducono facilmente, come mostrato nella tesi: la disuguaglianza di Harnack sui dischi e sui compatti, il teorema di Liouville, il principio del massimo forte e del massimo debole.
Le identità (1) e (2) **caratterizzano** le funzioni armoniche e consentono di dare una formulazione debole di soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$. Infatti, un classico **teorema di Koebe** afferma che una funzione, a priori

solo continua, che verifica (1) (o (2)) in ogni disco $D(x_0, r)$ con $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$, in realtà è C^∞ ed è armonica in Ω. E.E.Levi e Tonelli hanno esteso questo risultato assumendo soltanto la locale sommabilità della funzione. Nella tesi ho esteso il teorema di Koebe assumendo che (2) valga soltanto per i dischi aventi i centri in un fissato insieme denso in Ω e raggi che costituiscano una successione monotona infinitesima.
Il primo capitolo termina con il **teorema di Beckenback-Radò-Reade**: una funzione continua in un aperto Ω è armonica se e solo se la media di volume e quella di superficie coincidono su ogni disco con chiusura contenuta nell'aperto.

Nel secondo capitolo della tesi ho presentato alcuni notevoli **risultati di simmetria sferica**.
Il primo, di **Kuran e Netuka**, è il seguente: dato un aperto A di $\mathbb{R}^N$ di misura di Lebesgue finita, se esiste un punto P in A tale che per ogni funzione h armonica in A ed integrabile su A vale

$$h(P) = \frac{1}{|A|} \int_A h(x)dx,$$

allora A è una palla aperta centrata in P.
Il secondo, di **Rao-Freitas-Matos**, afferma che, dato un dominio limitato Ω in $\mathbb{R}^n$ con bordo $\partial\Omega$ sufficientemente liscio, esistono costanti $0 < c_1 \leq 1 \leq c_2 < \infty$ dipendenti solo da Ω t.c.

$$\frac{c_1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} h(s)d\sigma(s) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega h(x)dx \leq \frac{c_2}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} h(s)d\sigma(s)$$

per tutte le funzioni h armoniche non negative definite in Ω e C^1 fino al bordo. Se una delle costanti c_1 e c_2 può essere presa uguale a 1, allora Ω è una palla.

Il terzo e il quarto capitolo contengono i risultati più originali della tesi.
Il terzo capitolo inizia con il richiamo della definizione di **Gruppo di Carnot** e di **sub-Laplaciano L**.

Dopo aver esteso a questo nuovo ambito il **principio del massimo debole e del massimo forte**, ho richiamato la nozione di **funzione gauge** d, generante la **soluzione fondamentale** di L.
In seguito ho dimostrato **formule di media di volume e superficie sulle d-palle** estendendo così a questo nuovo spazio i teoremi di media per le classiche funzioni armoniche.
Ho poi usato queste formule per estendere il teorema di Koebe, le disuguaglianze di Harnack e il teorema di Liouville, precedentemente dimostrati in $\mathbb{R}^N$.
Nel quarto capitolo, ho descritto nell'ambito dei gruppi di Carnot, il **metodo di Perron-Wiener** per la risoluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

La tesi si conclude con la parte più innovativa: la costruzione della soluzione generalizzata di Perron-Wiener con il **metodo delle medie iterate**, ispirato ad un procedimento introdotto da Lebesgue per il Laplaciano classico.

Indice

Capitolo 1

Analisi del Laplaciano

1.1 Funzioni armoniche

Definizione 1.1 (Funzioni armoniche).
Dato Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ è detta funzione armonica se

$$\Delta u = 0 \quad in\ \Omega \qquad\qquad \text{dove} \quad \Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j}$$

Indichiamo con $\mathbb{H}(\Omega)$ l'insieme delle *funzioni armoniche* in Ω.

1.1.1 Funzioni radiali armoniche

Definizione 1.2 (Funzione radiali).
Si dice che $f : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione radiale se

$$f(x) = u(|x|), \quad con \ \ u : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Cerchiamo ora le funzioni radiali armoniche. Sia $u \in C^2((0, \infty), \mathbb{R})$. Allora $f(x) = u(|x|),\ x \neq 0$, è di classe C^2 e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = u'(|x|)\frac{\partial |x|}{\partial x_j} = u'(|x|)\frac{x_j}{|x|}$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'(|x|)\frac{x_j}{|x|}\right) = \\
&= u''(|x|)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|} + u'(|x|)\frac{\delta_{ij}|x| - x_j\frac{x_i}{|x|}}{|x|^2} = \\
&= u''(|x|)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|} + \frac{\delta_{ij}|x|^2 - x_j x_i}{|x|^3}u'(|x|)
\end{aligned}
$$

Pertanto, posto $r = |x|$,

$$\nabla f(x) = u'(r) \cdot \frac{x}{r}$$

e, usando la formula appena trovata con $i = j$

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_j}(x) = u''(r) + \frac{N|x|^2 - |x|^2}{|x|^3}u'(r) = \\
= u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r)
\end{aligned}
$$

Quindi $x \mapsto f(x) = u(|x|)$ è armonica se e solo se

$$u'' + \frac{N-1}{r}u' = 0 \qquad \text{con } r = |x|$$

$$\Leftrightarrow r^{N-1}\left(u'' + \frac{N-1}{r}u'\right) = 0 \Leftrightarrow (r^{N-1}u')' = 0 \Leftrightarrow r^{N-1}u' = c \Leftrightarrow u' = \frac{c}{r^{N-1}},$$

onde

$$u(r) = \begin{cases} (N = 2) & c\log r + c_0 \\ (N \geq 3) & c\frac{r^{2-N}}{2-N} + c_0 = cr^{2-N} + c_0 \end{cases}$$

In conclusione, le funzioni radiali armoniche sono, a meno di costanti,

$$\Leftrightarrow \gamma_N(r) = \begin{cases} (N = 2) & \log\frac{1}{r} \\ (N \geq 3) & r^{2-N} \end{cases} \tag{1.1}$$

1.2 Formule di rappresentazione per funzioni di classe C^2

1.2.1 Preliminari

Definizione 1.3 (Aperto regolare).

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Si dice che Ω è regolare se:

1. Ω è limitato (ha quindi frontiera compatta);
2. $\partial\Omega$ è una (N-1)- varietà (quindi una superficie) di classe almeno C^1;
3. per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste la normale esterna a Ω in x [1]

Teorema 1.2.1 (Integrazione per parti).
Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, regolare. Sia poi $f \in C^1(,\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Allora

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j d\sigma \qquad j = 1, \cdots, N \tag{1.2}$$

dove $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_N)$ è la normale esterna a Ω.

Teorema 1.2.2 (Teorema della divergenza).
Sia Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^N$. Sia $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Allora:

$$\int_\Omega div F dx = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > d\sigma \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Dal teorema di integrazione per parti degli integrali multipli, si trae:

$$\int_\Omega div F dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_j} dx = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial x_j} dx =$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} F_j \nu_j d\sigma \overset{(1.2)}{=} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^N F_j \nu_j d\sigma = \int_\Omega < F, \nu > d\sigma$$

□

[1] Si dice che $\nu \in \mathbb{R}^N, |\nu| = 1$, è una normale esterna a Ω in $x \in \partial\Omega$ se:

(a) $\nu \perp \partial\Omega$

(b) $\exists\, \delta > 0$ t.c. $x + t\nu \notin \bar{\Omega},\ x - t\nu \in \Omega,\ \ \forall\, t \in (0, \delta)$

Osservazione 1. Il teorema della divergenza segue quindi da quello di integreaizone per parti, ma vale anche il viceversa. Infatti, prendendo $F = (0, ..., f, ...0)$ con $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ nel posto j-esimo, otteniamo

$$< f, \nu >= f \cdot \nu_j \quad e \quad divF = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

e quindi, assumendo la (1.3) si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f\, \nu_j\, d\sigma$$

Proposizione 1.2.3 (**Formula di Green per Δ**). *Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$. Siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Allora:*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu})d\sigma \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Scriviamo:

$$u\Delta v - v\Delta u = \sum_{j=1}^N (u\partial^2_{x_j} v - v\partial^2_{x_j} u) = \sum_{j=1}^N (\partial_{x_j}(u\partial_{x_j} v) - \partial_{x_j}(v\partial_{x_j} u)) =$$

$$= \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}(u\partial_{x_j} v - v\partial_{x_j} u) = div(u\nabla v - v\nabla u)$$

Pertanto

$$u\Delta v - v\Delta u = div(u\nabla v - v\nabla u) \qquad \text{(formula di reciprocità)} \tag{1.5}$$

Allora:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx \overset{(1.5)}{=} \int_\Omega div(u\nabla v - v\nabla u)dx \overset{(1.3)}{=} \int_{\partial\Omega} < u\nabla v - v\nabla u, \nu > d\sigma =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (u < \nabla v, \nu > - v < \nabla u, \nu >)d\sigma = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu})d\sigma$$

Abbiamo ottenuto la *prima formula di Green*:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu})d\sigma \tag{1.6}$$

□

Osservazione 2. Scegliendo $v \equiv 1$ in (1.7) otteniamo:

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \tag{1.7}$$

1.2.2 Formule di rappresentazione di Green

Proposizione 1.2.4 (Prima formula di rappresentazione di Green).
Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
Siano γ la funzione radiale armonica in (1.1) e

$$\Gamma : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \Gamma(x) = \frac{\gamma(x)}{N(N-2)w_N}$$

dove w_N è il volume del disco unitario in $\mathbb{R}^N$. Allora, per ogni $x_0 \in \Omega$ si ha:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial}{\partial \nu}\Gamma(x-x_0) \right) d\sigma - \int_\Omega \Gamma(x-x_0)\Delta u(x) dx \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{D(x_0, \varepsilon)} \subseteq \Omega$, e definiamo

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{D(x_0, \varepsilon)}$$

Ovviamente, Ω_ε è un aperto regolare e la funzione

$$v(x) := \gamma(x - x_0) =: \gamma_{x_0}(x)$$

è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\} \supseteq \overline{\Omega}_\varepsilon$.
Applichiamo la formula di Green (1.7) a v e alla funzione u. Otteniamo:

$$\int_{\Omega_\epsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma \tag{1.9}$$

In questa identità vogliamo passare al limite per $\varepsilon \to 0$. Procediamo per passi:

1. Essendo v armonica in Ω_ε, si ha

$$\int_{\Omega_\varepsilon}(u\Delta v - v\Delta u)dx = -\int_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u dx =$$

$$= -\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u dx$$

$$? \ \downarrow \ \ \varepsilon \to 0$$

$$-\int_\Omega v\Delta u dx$$

Questo passaggio al limite è giustificato dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue, osservando anzitutto che, essendo $u \in C^2(\overline{\Omega})$, Δu è continua sul compatto $\overline{\Omega}$ e perciò limitata, e $|\chi_{\Omega_\varepsilon}| \leq 1$ per ogni $\varepsilon > 0$. Inoltre $\gamma_{x_0} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$. Infatti, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^N$, esiste $R > 0$ tale che $K \subseteq D(x_0, R)$. Pertanto

$$\int_K \gamma_{x_0} dx \leq \int_{D(x_0,R)} \gamma_{x_0} dx = \int_{|x-x_0|<R} |x - x_0|^{-N+2} dx =$$

$$\overset{(y=x-x_0)}{=} \int_{|y|<R} |y|^{2-N} dy =$$

$$= \int_0^R \int_{|y|=r} (|y|^{2-N} d\sigma(y))dr =$$

$$= \int_0^R r^{2-N} N w_N r^{N-1} dr =$$

$$= N w_N \int_0^R r dr = N w_N \frac{R^2}{2} < \infty$$

Quindi $\gamma_{x_0}(x)$ è localmente sommabile. Questo giustifica completamente il precedente passaggio al limite sotto il segno di integrale.

2. Consideriamo

$$\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

La derivata normale di una funzione radiale è ancora una funzione radiale. Infatti, ricordando che la normale esterna a $D(x_0, \varepsilon)$ è $\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$, si ha:

$$\frac{\partial \gamma_{x_0}(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial \gamma(|x - x_0|}{\partial \nu} =$$

$$=< \nabla\gamma(|x-x_0|), \frac{x-x_0}{|x-x_0|} >=$$
$$=< \gamma'(|x-x_0|)\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}, \frac{x-x_0}{|x-x_0|} >=$$
$$= \gamma'(|x-x_0|)\cdot 1 = (2-N)|x-x_0|^{2-N}$$

Su $\partial D(x_0,\epsilon)$ risulta che $|x-x_0| = \varepsilon$, quindi

$$-\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u\frac{\partial v}{\partial\nu}d\sigma = -\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u(2-N)\varepsilon^{1-N}d\sigma =$$
$$= (N-2)\left(\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} (u(x)-u(x_0))\,d\sigma + \int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} u(x_0)d\sigma\right)\cdot\varepsilon^{1-N} =$$
$$= \varepsilon^{1-N}(N-2)\left(u(x_0)Nw_N\varepsilon^{N-1} + o(1)Nw_N\varepsilon^{N-1}\right)$$
$$\downarrow \ \ \varepsilon\to 0$$
$$N(N-2)w_N u(x_0)$$

3. Si ha:

$$\left|\int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} v\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma\right| \le \sup_{\overline{\Omega}}|\nabla u| \int_{\partial D(x_0,\varepsilon)} |x-x_0|^{2-N}d\sigma(x) =$$
$$= c(u)^2\varepsilon^{2-N}Nw_N\varepsilon^{N-1} = c(u)Nw_N\epsilon$$

che tende a 0 per $\varepsilon\to 0$.

In definitiva, dall'identità (4.12), otteniamo

$$-\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)d\sigma + N(N-2)w_N u(x_0) + 0$$

da cui segue subito la formula di rappresentazione (1.8). □

Osservazione 3. Se u è armonica in $\overline{\Omega}$ allora

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(x-x_0)\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma(x-x_0)\right)d\sigma \qquad (1.10)$$

[2]Qui, e nel seguito, con $c(\cdots)$ indichiamo delle costanti positive dipendenti solo dalle variabili indicate ed eventualmente dalla dimensione dello spazio

Osservazione 4. Se nella precedente formula di rappresentazione prendiamo $\Omega = D(x_0, r)$, otteniamo

$$u(x_0) = \int_{\partial D} \Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} d\sigma - \int_D \Gamma \Delta u dx =$$

$$= \Gamma(r)\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma - \Gamma'(r)\int_{\partial D} u d\sigma - \int_D \Gamma \Delta u dx =$$

$$= \Gamma(r)\int_D \Delta u d\sigma + \frac{1}{N w_N r^{N-1}}\int_{\partial D} u d\sigma - \int_D \Gamma \Delta u dx =$$

e quindi

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D|}\int_{\partial D} u d\sigma - \int_D (\Gamma - \Gamma(r))\Delta u dx \tag{1.11}$$

Definizione 1.4 (Funzione di Green). Sia Ω aperto regolare e sia $x \in \Omega$ fissato. Supponiamo che esista una funzione

$$h_x \in C^2(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{H}(\Omega) \;\; t.c. \;\; h_x(y) = \Gamma(x - y) \quad \forall\, y \in \partial\Omega$$

Se h_x esiste per ogni $x \in \Omega$ definiamo la funzione di Green per Ω:

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) - h_x(y) \qquad con\ x,\ y \in \Omega,\ x \neq y \tag{1.12}$$

Proposizione 1.2.5 (Seconda formula di rappresentazione di Green).

Sia Ω un aperto regolare dotato di funzione di Green G, e sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora, per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} \Delta u(y) G(x, y) dy \tag{1.13}$$

*Chiamiamo $-\frac{\partial G}{\partial \nu}$ **nucleo di Poisson** per Ω*

Dimostrazione. Applichiamo l'identità di Green (1.7) alla coppia di funzioni h_x (vedi definizione (1.4)) e u. Si ha:

$$\int_{\Omega} (u\Delta h_x - h_x \Delta u) dy = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial h_x}{\partial \nu} - h_x \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

Poichè h_x è armonica, da questa si ottiene

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h_x}{\partial \nu} - h_x \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Omega} h_x \Delta u dy$$

Sommando membro a membro questa espressione con la prima formula di rappresentazione (1.8) (e ricordando che $G \equiv 0$ su $\partial\Omega$), otteniamo la formula di rappresentazione di Green. $\square$

1.2.3 Nucleo di Poisson per il disco

Nel nostro contesto, la funzione

$$x \mapsto \overline{x} = \left(\frac{R}{|x|} \right)^2 \cdot x$$

gioca un ruolo analogo alla inversione nella teoria delle funzioni olomorfe. Essa si chiama **inversione rispetto a $\partial D(0, R)$**. Le sue proprietà ci consentono di costruire la funzione di Green del disco $D(0, R)$.

Proposizione 1.2.6.
La funzione di Green del $D(0, R)$ è:

$$G(x, y) = \Gamma(x - y) - \Gamma((\bar{x} - y)\frac{|x|}{R}), \quad \textit{con } y \in D, \ x \in D(0, R), \ x \neq 0$$

Dimostrazione. Sia $x \in D(0, R)$. Calcoliamo, $\forall\, y \in \partial D$:

$$\left(\frac{|x - y|}{|\bar{x} - y|} \right)^2 = \frac{|x - y|^2}{|\bar{x} - y|^2} = \frac{|x|^2 + |y|^2 - 2 < x, y >}{|\bar{x}|^2 + |y|^2 - 2 < \bar{x}, y >} =$$

$$= \frac{|x|^2 + R^2 - 2 < x, y >}{\left| \left(\frac{R}{|x|} \right)^2 x \right|^2 + R^2 - 2 < \frac{R^2}{|x|^2} x, y >} =$$

$$= \frac{|x|^2 + R^2 - 2 < x, y >}{\left(\frac{R}{|x|} \right)^2 (R^2 + |x|^2 - 2 > x, y >)} =$$

$$= \left(\frac{|x|}{R} \right)^2$$

Quindi:

$$\frac{|x-y|}{|\bar{x}-y|} = \frac{|x|}{R} \qquad \forall\, x \in D(0,R),\ x \neq 0,\ \forall\, y \in \partial D$$

Da questo deriva che:

$$|x-y|^{2-N} = \left(|\bar{x}-y| \cdot \frac{x}{R}\right)^{2-N} \Rightarrow \Gamma(x-y) = \Gamma(\bar{x}-y\frac{|x|}{R}) = \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \Gamma(\bar{x}-y)$$

Osserviamo che la funzione

$$y \longrightarrow \Gamma(\bar{x}-y\frac{|x|}{R}) = \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \Gamma(\bar{x}-y)$$

verifica le condizioni richieste dalla funzione h_x:

- è $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{\bar{x}\}) \Rightarrow$ è $C^\infty(\overline{D})$
- è armonica in $\mathbb{R}^N \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow$ è armonica in D
- ristretta a ∂D coincide con Γ

Quindi, per ogni $x \neq 0,\ x \in D(0,R)$, la funzione di Green di D è:

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - \Gamma((\bar{x}-y)\frac{|x|}{R}), \quad \textit{con } y \in D$$

□

Proposizione 1.2.7.
Il nucleo di Poisson per $D(0,R)$ è:

$$P_R(x,y) = \frac{1}{Nw_NR} \cdot \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N} \tag{1.14}$$

Di conseguenza, traslando le variabili x e y, il nucleo di Poisson per $D(\alpha,R)$ è:

$$P_R(x,y) = \frac{1}{Nw_NR} \cdot \frac{R^2-|x-\alpha|^2}{|x-y|^N} \tag{1.15}$$

Dimostrazione.

$$P_R(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = -< \nabla_y G(x,y), (y) > \quad \textit{con } x \in D,\ y \in \partial D,\ \nu = \frac{y}{R}$$

Ora:

$$\nabla_y G(x,y) = \nabla_y \left(\Gamma(x-y) - \Gamma\left((\bar{x}-y)\frac{|x|}{R} \right) \right) =$$

$$= \nabla_y \left(c_N |x-y|^{2-N} - \frac{1}{N(N-2)w_N} \left| (\bar{x}-y)\frac{|x|}{R} \right|^{2-N} \right) =$$

$$= -\frac{1}{Nw_N} \left(|x-y|^{1-N} \frac{x-y}{|x-y|} \cdot (-1) - \left(\frac{|x|}{R} \right)^{2-N} |\bar{x}-y|^{1-N} \frac{\bar{x}-y}{|\bar{x}-y|} \cdot (-1) \right) =$$

$$= \frac{1}{Nw_n|x-y|^N} \left(x-y - \left(\frac{|x|}{R} \right)^{2-N} \left(\frac{|x-y|}{|\bar{x}-y|} \right)^N (\bar{x}-y) \right) =$$

$$= \frac{1}{Nw_n|x-y|^N} \left(x-y - \left(\frac{|x|}{R} \right)^{2-N} \left(\frac{|x|}{R} \right)^N (\bar{x}-y) \right) =$$

$$= \frac{1}{Nw_n|x-y|^N} \left(x-y-x + \left(\frac{|x|}{R} \right)^2 y \right) =$$

$$= \frac{1}{Nw_N|x-y|^N} \cdot \frac{y}{R^2} \cdot (|x|^2 - R^2)$$

Moltiplichiamo quanto appena trovato per la normale esterna al disco otteniamo:

$$- < \nabla_y G(x,y), \frac{y}{R} >= \frac{1}{Nw_N|x-y|^N} \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2) < \frac{y}{R}, \frac{y}{R} >$$

e quindi la (1.14). □

1.3 Formule di media per le funzioni armoniche

Le formule di media per le funzioni armoniche, dovute a Gauss, svolgono per le funzioni armoniche un ruolo analogo a quello tenuto dalla formula integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe.

Sia $D(\alpha, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x-\alpha|^2 < r^2 \right\}$ il disco euclideo di centro $\alpha \in \mathbb{R}^N$

e raggio $r > 0$.
Il suo volume è

$$|D(\alpha, r)| = w_N r^N$$

mentre l'area del suo bordo è

$$|\partial D(\alpha, r)| = N w_N r^{N-1}$$

Infatti

$$|D(\alpha, r)| = \int_{D(\alpha,r)} dx \underset{y=\alpha+ry}{=} \int_{D(\alpha,r)} r^N dy = r^N w_N$$

Inoltre, posto

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \ F(x) = \frac{x - \alpha}{|x - \alpha|}$$

si ha

$$< F, \nu >= 1$$

dove $\nu = \frac{x-\alpha}{|x-\alpha|}$ è la normale esterna al disco, e

$$divF = \frac{N}{r}$$

Allora, per il teorema della divergenza,

$$|\partial D(\alpha, r)| = \int_{\partial D(\alpha,r)} d\sigma = \int_{\partial D(\alpha,r)} < F, \nu > d\sigma \overset{(1.3)}{=} \int_{D(\alpha,r)} divF dx = \frac{N}{r} r^N w_N$$

pertanto

$$|\partial D(\alpha, r)| = N\, w_N\, r^{N-1}$$

Teorema 1.3.1 (Formula di media di superficie).
Sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Allora per ogni disco $D(x_0, r)$ con chiusura contenuta in Ω vale:

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial(D(x_0, r))|} \int_{\partial D(x_0,r)} u(x) d\sigma(x) =: m_r(u)(x_0) \tag{1.16}$$

Dimostrazione. Per la formula di rappresentazione sui dischi (1.11)

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0,r)|}\int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x) - \int_{D(x_0,r)} (\Gamma(x-x_0) - \Gamma(r))\, \Delta u(x)\, dx$$

per ogni $D(x_0,r)$ tale che $\overline{D(x_0,r)} \subseteq \Omega$.
Essendo u armonica in Ω, si ha $\Delta u = 0$ in $D(x_0,r)$, cosicchè

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0,r)|}\int_{\partial D(x_0,r)} u(x)\, d\sigma(x)$$

□

Teorema 1.3.2 (Formula di media di volume).
Sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Allora per ogni disco $D(x_0,r)$ con chiusura contenuta in Ω vale

$$u(x_0) = \frac{1}{|D(x_0,r)|}\int_{D(x_0,r)} u(x)dx =: M_r(u)(x_0) \tag{1.17}$$

Dimostrazione. Applicando il teorema (1.3.1) risulta:

$$u(x_0) = \frac{1}{Nw_N\rho^{N-1}}\int_{\partial D(x_0,\rho)} ud\sigma \qquad \forall\, \rho \in (0,r]$$

Moltiplicando entrambi i membri per ρ^{N-1} e integrando poi rispetto a ρ su $(0,r]$, si ottiene:

$$\int_0^r \rho^{N-1}u(x_0)d\rho = \frac{1}{Nw_N}\int_0^r \left(\int_{\partial D(x_0,r)} ud\sigma\right) d\rho$$

da cui segue

$$u(x_0)\frac{r^N}{N} = \frac{1}{Nw_N}\int_{D(x_0,r)} udx$$

e quindi

$$u(x_0) = \frac{1}{r^N w_N}\int_{D(x_0,r)} udx = \frac{1}{|D(x_0,r)|}\int_{D(x_0,r)} udx$$

□

Osservazione 5. Data $u \in C^2(\Omega)$, u verifica la formula di media di superficie se solo se verifica la formula di media di volume.

Dimostrazione. Se u verifica la formula di media di superficie, procedendo come nella dimostrazione del teorema (1.3.2) si prova che u soddisfa la formula di media di volume.
Viceversa, supponiamo che u soddisfi la formula di media di volume. Allora:

$$u(x_0) = \frac{1}{w_N r^N} \int_{D(x_0,r)} u(x)dx$$

per ogni $D(x_0, r)$ tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$. Quindi

$$u(x_0) = \frac{1}{w_N r^N} \int_0^r \left(\int_{|x-x_0|=\rho} ud\sigma \right) d\rho$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $w_N r^N$ e deriviamo poi rispetto ad r, applicando nel membro di destra il teorema fondamentale del calcolo integrale. Si ottiene:

$$N w_N r^{N-1} u(x_0) = \int_{|x-x_0|=r} ud\sigma - \int_{|x-x_0|=0} ud\sigma = \int_{\partial D(x_0,r)} ud\sigma$$

cosicchè

$$u(x_0) = \frac{1}{N w_N r^{N-1}} \int_{\partial D(x_0,r)} ud\sigma$$

per ogni $D(x_0, r)$ tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$. Quindi u verifica la formula di media di superficie. $\square$

1.4 Conseguenze delle formule di media

Le formule di media per le funzioni armoniche implicano il seguente teorema:

Teorema 1.4.1 (**Disuguaglianza di Harnack sui dischi**).
Sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. *Sia* $x_0 \in \Omega$ *e sia* $r > 0$ *tale che* $D(x_0, 4r) \subseteq \Omega$.
Allora, se $u \geq 0$, *risulta*

$$\sup_{D(x_0,r)} u \leq c(N) \inf_{D(x_0,r)} u, \qquad con\ c(N) = 3^N$$

Dimostrazione. Dimostrare che

$$\sup_{D(x_0,r)} u \leq c(N) \inf_{D(x_0,r)} u$$

equivale a dimostrare che

$$u(x) \leq c(N)u(y) \quad \forall\, x, y \in D(x_0, r)$$

Sia quindi $x \in D(x_0, r)$. Essendo $\overline{D(x,r)} \subseteq D(x_0, r+r) \subseteq \Omega$, vale la formula di media di volume (teorema (1.3.2)) relativa al disco $D(x, r)$:

$$u(x) = \frac{1}{|D(x,r)|} \int_{D(x,r)} u(z)dz =$$

$$= \frac{1}{w_N r^N} \int_{D(x,r)} u(z)dz \leq$$

Sia ora $y \in D(x_0, r)$. Essendo $D(x, r) \subseteq D(y, 3r)$ risulta

$$\frac{1}{w_N r^N} \int_{D(x,r)} u(z)dz \leq \frac{1}{w_N r^N} \int_{D(y,3r)} u(z)dz =$$

$$= \frac{w_N (3r)^N}{w_N r^N} \cdot \frac{1}{|D(y,3r)|} \int_{D(y,3r)} u(z)dz =$$

$$= 3^N u(y)$$

dove, nell'ultimo passaggio, è stato possibile applicare ancora il teorema (1.3.2) essendo $\overline{D(y,3r)} \subseteq D(x_0, 4r) \subseteq \Omega$. Risulta quindi

$$u(x) \leq 3^N\, u(y) \quad \forall\, x,\, y \in D(x_0, r)$$

□

La disuguaglianza di Harnack implica il seguente teorema:

Teorema 1.4.2 (Teorema di Liouville).
Sia $u \in H(\mathbb{R}^N)$, inferiormente limitata. Allora u costante.

Dimostrazione. Definiamo $m := \inf_{\mathbb{R}^N} u$ e $v := u - m$. Risulta

$$v \in H(\mathbb{R}^N),\ v \geq 0,\ \inf v = 0$$

Sono quindi soddisfatte tutte le ipotesi del teorema (1.4.1) di Harnack. Scegliendo $x_0 = 0$, si ha:

$$\sup_{D(0,r)} v \leq c(N) \inf_{D(0,r)} v \qquad \forall\, r > 0$$

Passando al limite per $r \to \infty$ risulta

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R}^N} v \leq c(N) \inf_{\mathbb{R}^N} v$$

da cui

$$\inf_{\mathbb{R}^N} v = \sup_{\mathbb{R}^N} v = 0$$

Pertanto

$$v \equiv 0,\ \text{cioè } u \equiv m$$

□

Teorema 1.4.3 (Disuguaglianza di Harnack sui compatti).
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia K un compatto contenuto in Ω. Allora esiste una costante $C = C(K, N) > 0$ tale che

$$\sup_K u \leq C \inf_K u \qquad \forall\, u \in H(\Omega),\ u \geq 0$$

La dimostrazione di questo teorema richiede i seguenti lemmi:

Lemma 1.4.4. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia K un compatto contenuto in Ω. Allora esiste un insieme compatto connesso K_0 tale che*

$$K \subseteq K_0 \subseteq \Omega$$

Dimostrazione. Dalla compattezza di K deriva l'esistenza di un suo ricoprimento finito $(B_j)_{j=1,..,q}$ con B_j disco con chiusura contenuta in Ω. Per ogni $i, j = 1, .., q,\ i \neq j$ sia $p_{i\,j}$ una poligonale che congiunge i centri di B_i e B_j. Per la connessione di Ω possiamo scegliere $p_{i\,j}$ tale che

$$p_{i\,j} \subseteq \Omega \qquad \forall\, i,\, j = 1, ..., p$$

Definiamo

$$K_0 := \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{q} B_j\right) \cup \bigcup_{i,j} p_{i\,j}}$$

K_0 è un insieme connesso e compatto contenente K e contenuto in Ω. $\square$

Lemma 1.4.5. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia K un insieme compatto e connesso contenuto in Ω. Allora, dato un ricoprimento di K $(D(x, r_x))_{x\in K}$, esistono $x_1, ..., x_p \in K$ tali che*

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} D(x_k, r_{x_k})$$

e

$$D_1 \cap D_2 \neq \varnothing,\ (D_1 \cup D_2) \cap D_3 \neq \varnothing, ..., (D_1 \cup ... \cup D_{p-1}) \cap D_p \neq \varnothing$$

dove con D_j indichiamo $D(x_j, r_{x_j})$ per $j = 1, ..., p$.

Dimostrazione. Segue dalla compattezza e connessione di K. $\square$

Lemma 1.4.6. *Siano A, B insiemi. Sia $u : A \cup B \to \mathbb{R}$, $u \geq 0$. Supponiamo che esistano due costanti positive c_A, c_B tali che*

$$\sup_A u \leq c_A \inf_A u \quad e \quad \sup_B u \leq c_B \inf_B u$$

Supponiamo infine $A \cap B \neq \varnothing$. Allora

$$\sup_{A\cup B} u \leq c_A \cdot c_B \inf_{A\cup B} u$$

Dimostrazione. Dimostrare che

$$\sup_{A\cup B} u \leq c_A \cdot c_B \inf_{A\cup B} u$$

equivale a dimostrare che

$$u(x) \leq c_A \cdot c_B u(y) \qquad \forall\, x,\, y \in A \cup B$$

Sia $z \in A \cap B$. Dati $x,\, y \in A \cup B$ risulta:

1. se $x, y \in A,\ u(x) \leq c_A\, u(y)_A \cdot c_B\, u(y)$;
2. se $x, yB,\ u(x) \leq c_B\, u(y) \leq c_A \cdot c_B\, u(y)$;
3. se $x \in A,\ y \in B,\ u(x) \leq c_A\, u(z)$ perchè $x, z \in A$ e $u(z) \leq c_B\, u(y)$ perchè $y, z \in A$. Quindi $u(x) \leq c_A \cdot c_B\, u(y)$.

□

Siamo ora in grado di dimostrare la disuguaglianza di Harnack sui compatti (Teorema 1.4.3):

Dimostrazione. Sia K un compatto contenuto in Ω aperto connesso. Per il lemma (1.4.4) esiste K_0 compatto e connesso tale che $K \subseteq K_0 \subseteq \Omega$.
Per ogni $x \in K_0$, sia r_x il numero reale positivo tale che $D(x, 4r_x) \subseteq \Omega$. Ovviamente $(D(x, r_x))_{x \in K_0}$ è un ricoprimento aperto di K_0. Per il lemma (1.4.5) esiste un sottoricoprimento finito

$$K_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} D_j$$

tale che

$$D_1 \cap D_2 \neq \varnothing,\ (D_1 \cup D_2) \cap D_3 \neq \varnothing, ...$$

Essendo $D(x_j, 4r_{x_j}) \subseteq \Omega$, per ogni $j = 1, ..., p$, applichiamo la disuguaglianza di Harnack sui dischi, teorema (1.4.1):

$$\sup_{D_j} u \leq c_N \inf_{D_j} u \qquad \forall\, u \in H(\Omega),\, u \geq 0,\, j = 1, ..., p$$

Dall'applicazione ripetuta del lemma (1.4.6) segue la disuguaglianza

$$\sup_{\bigcup_{j=1}^{p} D_j} u \leq c_N^p \inf_{\bigcup_{j=1}^{p} D_j} u$$

con

$$K \subseteq K_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} D_j$$

Pertanto:

$$\sup_K u \leq \sup_{K_0} u \leq \sup_{\bigcup_{j=1}^{p} D_j} u \leq c_N^p \inf_{\bigcup_{j=1}^{p} D_j} u \leq c_N^p \inf_{K_0} u \leq c_N^p \inf_K u$$

e il teorema è dimostrato. □

Teorema 1.4.7 (**Principio del massimo forte**).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Supponiamo che u assuma massimo in un punto interno di Ω (i.e. esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) \geq u(x)$ per ogni $x \in \Omega$). Allora u è costante in Ω ($u \equiv u(x_0)$ in Ω).

Dimostrazione.
Sia $M = \{y \in \Omega \,:\, u(y) = u(x_0)\}$.
M è chiuso, essendo retroimmagine di un chiuso attraverso una funzione continua.
Dimostriamo che M è aperto. Per ogni fissato $y_0 \in M$, definiamo la funzione

$$w := u - u(y_0)$$

Risulta:

$$w \in \mathbb{H}(\Omega),\ w \leq 0$$

Dal teorema (1.3.2) segue:

$$0 = w(y_0) = \frac{1}{w_N R^N} \int_{D(y_0,r)} w(s)\, ds$$

per ogni $r > 0$ tale che $\overline{D(y_0, r)} \subseteq \Omega$.
Essendo $w(x) \leq 0$, deve necessariamente essere $w(x) = 0$ q.d. in $D(y_0, r)$.

La continuità di u implica $w(x) = 0$ in $D(y_0, r)$, cioè $u \equiv u(y_0) = u(x_0)$ in $D(y_0, r)$. Quindi $D(y_0, r)$ è contenuto in M, da cui segue che M è aperto in Ω.

Essendo M sia aperto che chiuso nell'insieme connesso Ω allora

$$M \equiv \Omega$$

$\square$

Teorema 1.4.8 (**Principio del minimo forte**).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Supponiamo che u assuma minimo in un punto interno di Ω (i.e. esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) \leq u(x)$ per ogni $x \in \Omega$). Allora u è costante in Ω ($u \equiv u(x_0)$ in Ω).

Dimostrazione. Si applica il principio del massimo forte alla funzione $-u$. $\square$

Teorema 1.4.9 (**Principio del massimo debole**).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Supponiamo

$$\limsup_{x \to y} u(x) \leq 0 \qquad \forall\, y \in \partial\Omega$$

Allora $u \leq 0$ in Ω.

La dimostrazione di questo teorema richiede la premessa del seguente lemma:

Lemma 1.4.10. *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$, con Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Allora esiste $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che*

$$\sup_{\Omega \cap D(x_0, \rho)} u = \sup_{\Omega} u \qquad \forall\, \rho > 0$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'uguaglianza sia falsa. Allora, per ogni $x \in \overline{\Omega}$ esiste $\rho_x > 0$ tale che

$$\sup_{\Omega \cap D(x_0, \rho_x)} u < \sup_{\Omega} u \tag{1.18}$$

Dal ricoprimento aperto di $\overline{\Omega}$

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{x \in \overline{\Omega}} D(x, \rho_x)$$

è possibile estrarre, per la compattezza di $\overline{\Omega}$, un sottoricoprimento finito

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} D(x_j, \rho_{x_j})$$

per opportuni $x_1, ..., x_p \in \overline{\Omega}$. Ne segue:

$$\sup_{\Omega} u = \max_{j=1,...,p} \left(\sup_{\Omega \cap D(x_j, \rho_{x_j})} u \right)$$

in contraddizione con (1.18). $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema:

Dimostrazione. Il lemma precedente ci garantisce l'esistenza di un $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega \cap D(x_0, \rho)} u \qquad \forall\, \rho > 0 \tag{1.19}$$

Se $x_0 \in \partial\Omega$, allora da (1.19) segue che:

$$0 \geq \limsup_{x \to x_0} u(x) = \lim_{\rho \to 0} \left(\sup_{\Omega \cap D(x_0, \rho)} u \right) = \sup_{\Omega} u$$

e quindi $u \leq 0$ in Ω.
Se $x_0 \in \Omega$, da (1.19) e dalla continuita di u in x_0 segue che:

$$u(x_0) = \lim_{x \to x_0} u(x) = \limsup_{x \to x_0} u(x) = \lim_{\rho \to 0} \left(\sup_{\Omega \cap D(x_0, \rho)} u \right) = \sup_{\Omega} u$$

Quindi x_0 è un punto di massimo interno per la funzione u. Dal principio del massimo forte, teorema (1.4.7) segue che $u = u(x_0)$ nella componente connessa Ω_{x_0} contenente x_0.
Sia ora $y \in \partial\Omega_{x_0}$. Dato $x \in \Omega_{x_0}$,

$$\limsup_{x \to y} u(x) = u(x_0) \tag{1.20}$$

Data $z \in \Omega$, essendo $\Omega_{x_0} \subseteq \Omega$,

$$\limsup_{x \to y} u(x) \leq \limsup_{z \to y} u(z) \tag{1.21}$$

Infine, dato che $y \in \partial\Omega_{x_0} \subseteq \partial\Omega$, dall'ipotesi segue che

$$\limsup_{z \to y} u(z) \leq 0 \tag{1.22}$$

Unendo le disuguaglianze (1.20), (1.21), (1.22), si ottiene

$$\max_{\Omega} u = u(x_0) \leq 0$$

da cui

$$u \leq 0 \ \text{ in } \Omega$$

$\square$

Teorema 1.4.11 (Principio del minimo debole).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Supponiamo

$$\liminf_{x \to y} u(x) \geq 0 \qquad \forall\, y \in \partial\Omega$$

Allora $u \geq 0$ in Ω.

Dimostrazione. Si applica il principio del massimo debole alla funzione $-u$.

$\square$

1.5 Funzioni subarmoniche e superarmoniche

Definizione 1.5 (Funzione superarmonica).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$,. Si dice che u è superarmonica in Ω (u $\in \overline{S}(\Omega)$) se:

$$u(x) \geq M_r(u)(x) \qquad \forall\, D(x,r) \text{ tale che } \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$$

Definizione 1.6 (Funzione subarmonica).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Si dice che u è subarmonica in Ω (u $\in \underline{S}(\Omega)$) se:

$$u(x) \leq M_r(u)(x) \qquad \forall\, D(x,r) \text{ tale che } \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$$

Osservazione 6.

$$\mathbb{H}(\Omega) = \overline{S}(\Omega) \cap \underline{S}(\Omega)$$

Dimostrazione. $[\subseteq]$ Se $u \in \mathbb{H}(\Omega)$, allora $u \in C^2(\Omega)$ e verifica la formula di media di volume

$$u(x) = M_r(u)(x) \quad \forall\, D(x,r) \text{ tale che } \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$$

Quindi u è sia superarmonica che subarmonica.
$[\supseteq]$ Dalle definizioni di funzione subarmonica e superarmonica segue che u è continua in Ω e valgono le disuguaglianze:

$$u(x) \geq M_r(u)(x) \qquad \forall\, D(x,r) \text{ tale che } \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$$

e

$$u(x) \leq M_r(u)(x) \qquad \forall\, D(x,r) \text{ tale che } \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$$

Di conseguenza u verifica la formula di media di volume. Per il teorema di Koebe, che sarà enunciato nella prossima sezione, la funzione u è armonica. □

Proposizione 1.5.1. *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in C^2(\Omega)$. $\Delta u \leq 0$ se e solo se u è superarmonica.*

Dimostrazione. Sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che $\Delta u \leq 0$. Dalla formula di rappresentazione sui dischi (1.11) segue che:

$$u(x) = \frac{1}{|\partial D(x,r)|} \int_{\partial D(x,r)} u(y) d\sigma(y) - \int_{D(x,r)} (\Gamma(y-x) - \Gamma(r)) \Delta u(y) dy$$

per ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$.
Ora, dato che $\Gamma - \Gamma(r) > 0$ e $\Delta u \leq 0$ per ipotesi, allora:

$$u(x) \geq \frac{1}{|\partial D(x,r)|} \int_{\partial D(x,r)} u(y) d\sigma(y) = m_r(u)(x)$$

da cui

$$u(x) \geq M_r(u)(x)$$

cioè u è superarmonica.
Viceversa, sia $u \in \overline{S}(\Omega)$. Supponiamo per assurdo che $\Delta u(x_0) > 0$ per un $x_0 \in \Omega$. Segue che

$$\Delta u > 0 \text{ in un intorno } \Omega_0 \text{ di } x_0 \tag{1.23}$$

che implica, argomentando come nella prima parte della dimostrazione, che $u \in \underline{S}(\Omega_0)$. D'altra parte, $u \in \overline{S}(\Omega_0)$ dato che $u \in \overline{S}(\Omega)$. Quindi, per l'osservazione (6) $u \in H(\Omega_0)$, cioè

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega_0$$

in contraddizione con (1.23). □

Proposizione 1.5.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in C^2(\Omega)$. $\Delta u \geq 0$ se e solo se u è subarmonica.*

Dimostrazione. Analoga a quella della proposizione precedente. □

Per le funzioni superarmoniche valgono il *principio del minimo debole* e il *principio del minimo forte*; le dimostrazioni, essendo analoghe a quelle dei medesimi teoremi per le funzioni armoniche (1.4.11), (1.4.8), non sono riportate. Per le funzioni subarmoniche valgono invece il principio del massimo debole e il principio del massimo forte.

1.6 Dalle formule di media all'armonicità

Le identità (1.16) e (1.17) *caratterizzano* le funzioni armoniche e consentono di dare una formulazione debole di soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$. Il teorema di Koebe afferma che una funzione, a priori solo continua, che verifica (1.16) (o (1.17)) in ogni disco con chiusura contenuta in Ω in realtà è C^∞ ed è armonica in Ω. E.Levi e Tonelli hanno esteso questo risultato assumendo soltanto la locale sommabilità della funzione.

Teorema 1.6.1 (Teorema di Koebe).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in C(\Omega)$.
Se per ogni disco $D(x,r)$ la cui chiusura è contenuta in Ω vale $u(x) = m_r(u)(x)$, allora $u \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathbb{H}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_0^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$.
Per ogni $r > 0$ poniamo

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{t}{r}\right)$$

Risulta *supp* $(\varphi_r) \subseteq]0,r[$ e $\int_{\mathbb{R}} \varphi_r(t)dt = 1$.
Dati $x \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$, vale per ipotesi

$$u(x) = M_\rho(u)(x) \quad \forall\, \rho \in]0,r[$$

Moltiplicando per $\varphi_r(\rho)$ entrambi i membri e integrando rispetto alla variabile ρ si ottiene:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_r(\rho)u(x)d\rho = \int_{\mathbb{R}} \varphi_r(\rho)M_\rho(u)(x)d\rho =$$

$$= \frac{1}{w_N}\int_0^\infty \frac{\varphi_r(\rho)}{\rho^N}\left(\int_{|y-x|<\rho} u(y)dy\right)d\rho =$$

$$= \frac{1}{w_N}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{|y-x|}^\infty \frac{\varphi_r(\rho)}{\rho^N}d\rho\right)u(y)dy$$

Se definiamo la funzione

$$z \mapsto \Psi_r(|z|) := \frac{1}{w_N}\int_{|z|}^\infty \frac{\varphi_r(\rho)}{\rho^N}d\rho$$

si ha

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_r(|y-x|)u(y)dy \tag{1.24}$$

Ora: la funzione $z \mapsto \Psi_r(|z|)$ può essere riscritta nel modo seguente

$$\Psi_r(|z|) = \frac{1}{w_N}\int_{|z|}^{\infty} \frac{\varphi_r(\rho)}{\rho^N}d\rho =$$

$$= \frac{1}{w_N}\int_{|z|}^{\infty} \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{1}{\rho^N}d\rho =$$

$$= \frac{1}{w_N r^N}\int_{\frac{|z|}{r}}^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^N}d\sigma$$

Se definiamo la funzione

$$z \mapsto \Psi\left(\frac{|z|}{r}\right) := \frac{1}{w_N}\int_{\frac{|z|}{r}}^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^N}d\sigma$$

si ha

$$\Psi_r(|z|) = \frac{1}{r^N}\Psi\left(\frac{|z|}{r}\right) \tag{1.25}$$

Osserviamo che:

1. $\Psi \in C^\infty$ in quanto funzione integrale di una funzione C^∞, ed ha supporto contenuto in $D(0,1)$. Ne segue $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

2. Risulta:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Psi(z)dz = 1$$

   Infatti:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Psi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{w_N}\left(\int_{|z|}^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^N}d\sigma\right)dz =$$

$$= \frac{1}{w_N}\int_0^{\infty}\left(\int_{|z|<\sigma} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^N}dz\right)d\sigma = \frac{1}{w_N}\int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^N}\left(\int_{|D(0,\sigma)|} dz\right)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{w_N}\int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma^N}w_N\sigma^N d\sigma = 1$$

Da queste proprietà di Ψ e da (1.25) segue che:

$$u * \Psi_r = u_r \tag{1.26}$$

Quindi, unendo (1.24) e (1.26)

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\Psi_r(|y-x|)dy =$$

$$= \int_{\Omega} u(y)\Psi_r(|y-x|)dy = u * \Psi_r = u_r$$

Sappiamo che se u è localmente sommabile allora la regolarizzata u_r è di classe C^∞. Qui, essendo u continua, u è localmente sommabile, e perciò

$$u = u_r \in C^\infty(\Omega)$$

E' possibile quindi applicare la formula di rappresentazione sui dischi (1.11) ottenendo:

$$u(x) = \int_{\partial D(x,r)} u d\sigma - \int_{D(x,r)} (\Gamma - \Gamma(r))\Delta u dy$$

per ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$.
Dall'ipotesi $u(x) = M_r(u)(x)$ segue

$$u(x) = m_r(u)(x) = \int_{\partial D(x,r)} u\, d\sigma$$

Pertanto:

$$-\int_{D(x,r)} (\Gamma - \Gamma(r))\Delta u dy = 0$$

Essendo $\Gamma - \Gamma(r) > 0$, necessariamente deve essere $\Delta u = 0$ in ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$. Quindi u è armonica in Ω. □

Teorema 1.6.2 (Teorema di E.Levi-Tonelli).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia u localmente integrabile su Ω. Se per ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$ vale $u(x) = M_r(u)(x)$, allora u è armonica in Ω.

Dimostrazione. Se mostriamo la continuità di u in $Omega$ è possibile applicare il teorema di Koebe.
Fissata $a \in \Omega$, sia $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione in Ω convergente ad a. Sia K un sottoinsieme compatto di Ω con a nel suo interno. Allora esiste un $r > 0$ tale che $B(a_j, r) \subset K$ per ogni j sufficientemente grande. Risulta:

$$u(a_j) = \frac{1}{|B(a_j, r)|} \int_{B(a_j, r)} u(x)\, dx = \frac{1}{|B(a, r)|} \int_K u(x) \chi_{B(a_j, r)}(x)\, dx$$

Essendo u integrabile su K, dal teorema della convergenza dominata si trae che:

$$\frac{1}{|B(a, r)|} \int_K u(x) \chi_{B(a_j, r)}(x)\, dx \longrightarrow \frac{1}{|B(a, r)|} \int_K u(x) \chi_{B(a, r)}(x) dx = u(a)$$

per $j \to \infty$. Quindi per ogni successione $a_j \to a$ in Ω si ha che $u(a_j) \to u(a)$, cioè u è continua in Ω. $\square$

Ci chiediamo ora se, affinchè una funzione continua sia armonica, la formula di media deve valere per tutti i dischi la cui chiusura è contenuta in Ω o è sufficiente restringersi a dei particolari insiemi di centri e di raggi. Più precisamente, attraverso il prossimo teorema, daremo una risposta alle seguenti domande:

Primo Problema: Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia C un sottoinsieme di Ω. Supponiamo che valga la formula di media di superficie per ogni funzione f continua e per ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$ con $x \in C$.
Sotto quali condizioni imposte su C si può concludere che h sia armonica?

Secondo Problema: Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che valga la formula di media di superficie per ogni funzione f continua e per ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$ con raggio $r \in R_x \subset (0,\infty)$.
Sotto quali condizioni imposte su R_x si può concludere che h sia armonica?

Teorema 1.6.3.
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Una funzione reale u definita su Ω è armonica in Ω, se vale una delle seguenti condizioni:

1. *La funzione u è continua in Ω ed esiste un sottoinsieme denso C di Ω tale che la formula di media di superficie (1.16) vale per ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$ con $x \in C$.*

2. *La funzione u è continua su Ω e per ogni $x \in \Omega$ esiste una successione di numeri positivi $\{r_n(x)\}$ che tende a 0, tale che la formula di media di superficie vale per ogni $D(x, r_n(x))$ con $x \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$.*

E' evidente come la condizione 1. dia una risposta al primo problema, mentre la condizione 2. dia una risposta al secondo problema.

Dimostrazione. Il punto 1. del teorema segue in modo triviale dal teorema di convergenza di Lebesgue.

Dimostriamo ora la seconda parte del teorema: siano $a \in \Omega$ e $R > 0$ tali che $\overline{B(a,R)} \subset \Omega$.
Sia v la soluzione di:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B(a,R) \\ v = u & \text{in } \partial B(a,R) \end{cases}$$

Dimostriamo ora che v coincide con u su $B(a,R)$.
Supponiamo per assurdo che $v - u$ sia positivo in qualche punto di $\overline{B(a,R)}$.
Sia E il sottoinsieme chiuso di $\overline{B(a,R)}$ dove $v - u$ prende il suo massimo. Essendo E compatto, E contiene un punto x più lontano da a di tutti gli altri. Chiaramente $x \in B(a,R)$, cosicchè esiste una palla $B(x,r) \subset B(a,R)$ tale che

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y)$$

Dall'armonicità di v deriva

$$(v-u)(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} (v-u)(y) d\sigma(y) =$$

$$= \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(0,1)} (v-u)(x + r\zeta) d\sigma(\zeta) \tag{1.27}$$

Ma $(v-u)(x+r\zeta) \leq (v-u)(x)$ per tutti gli $\zeta \in \partial B(0,1)$, con la disuguaglianza stretta su un sottoinsieme non vuoto di $\partial B(0,1)$ (per come x è stato scelto), contraddicendo l'equazione (1.27).
Quindi deve essere $v - u \leq 0$ su $\overline{B(a,R)}$. Allo stesso modo si dimostra che $v - u \geq 0$ su $\overline{B(a,R)}$. □

Terminiamo il capitolo con il teorema di Beckenbach-Radò-Reade che afferma che una funzione continua in un aperto Ω è armonica se e solo se la media di volume e quella di superficie coincidono su ogni disco con chiusura contenuta nell'aperto.

Teorema 1.6.4 (**Teorema di Beckenbach-Radò-Reade**).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in C(\Omega)$. Allora per ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$ vale:

$$(i) \quad u \in H(\Omega) \Leftrightarrow M_r(u)(x_0) = m_r(u)(x_0) \tag{1.28}$$

$$(ii) \quad u \in \underline{S}(\Omega) \Leftrightarrow M_r(u)(x_0) \leq m_r(u)(x_0) \tag{1.29}$$

La dimostrazione del teorema richiede il seguente lemma.

Lemma 1.6.5. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia u una funzione continua in Ω. Se per ogni $D(x,r)$ tale che $\overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$ vale*

$$M_r(u)(x) \leq m_r(u)(x)$$

Allora u soddisfa il principio del massimo forte in Ω.

Dimostrazione. Supponiamo che u assuma massimo in un punto interno. Sia $M = \max_{\overline{\Omega}} u$. Definiamo $A = \{x \in \Omega \text{ tale che } u(x) = M\}$.
Dalla continuità di u deriva che A è chiuso in Ω.
Dimostriamo ora che A è aperto. Sia x_0 un punto di A tale che esiste $r_1 > 0$ tale che $\overline{D(x_0, r_1)} \subseteq \Omega$. Sono possibili due casi:

1. Esiste $\overline{r} \in (0, r_1)$ tale che $m_{\overline{r}}(u)(x_0) < M$
2. Non esiste $\overline{r} \in (0, r_1)$ tale che $m_{\overline{r}}(u)(x_0) < M$

Consideriamo il secondo caso. Vale:

$$m_r(u)(x_0) \geq M \quad \forall\, r \in (0, r_1)$$

Essendo

$$m_r(u)(x_0) = \frac{1}{|\partial D(x_0, r)|} \int_{\partial D(x_0,r)} u dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\partial D(x_0,r)|} \cdot \max_{D(x_0,r)} u \cdot |\partial D(x_0,r)| \leq$$
$$\leq \max_{\Omega} u = M$$

necessariamente deve essere

$$m_r(u)(x_0) = M \quad \forall\, r \in (0, r_1)$$

Da questo deriva immediatamente che x_0 è un punto interno di A.
Consideriamo ora il primo caso. Sia $r_* = \inf\{r \in (0,\bar{r})$ tale che $m_{\bar{r}}(u)(x_0) = m_r(u)(x_0)\}$.
La media m è una funzione continua del raggio, quindi r_* è positivo e $m_{r_*}(u)(x_0) = m_{\bar{r}}(u)(x_0) < M$. Dalla definizione di media di superficie

$$m_\rho(u)(x_0) = \frac{1}{Nw_N\rho^{N-1}} \int_{\partial D(x_0,\rho)} u\, d\sigma$$

si ottiene

$$\int_0^r \rho^{N-1} m_\rho(u)(x_0) d\rho = \frac{1}{Nw_N} \int_{D(x_0,r)} u\, dx$$

e pertanto

$$\int_{D(x_0,r)} u\, dx = Nw_N \int_0^r \rho^{N-1} m_\rho(u)(x_0) d\rho$$

Quindi nel nostro caso risulta:

$$w_N r_*^N M_{r_*}(u)(x_0) = \int_{D(x_0,r_*)} u\, dx =$$
$$= Nw_N \int_0^{r_*} r^{N-1} m_r(u)(x_0) dr >$$
$$> w_N r_*^N m_{r_*}(u)(x_0)$$

che contraddice l'ipotesi. La seconda possibilità deve quindi essere eslcusa, e il lemma è dimostrato. □

Possiamo ora dimostrare il teorema (1.6.4).

Dimostrazione.
$[(i) \Rightarrow]$ Essendo $u \in H(\Omega)$, per la formula di media di volume, teorema (1.3.2), si ha

$$u(x_0) = M_r(u)(x_0) \qquad \text{per ogni } D(x,r) \text{ tale che } \overline{D(x,r)} \subseteq \Omega$$

Dall'osservazione (5) segue:

$$u(x_0) = m_r(u)(x_0)$$

e perciò

$$M_r(u)(x_0) = u(x_0) = m_r(u)(x_0)$$

[$(ii) \Rightarrow$] Supponiamo che u sia subarmonica. Quindi, per ogni h funzione armonica, $h-u$ è superarmonica e per essa vale il principio del minimo debole, cioè per ogni disco D tale che $\overline{D} \subseteq \Omega$ e per ogni funzione h armonica tale che $h - u \geq 0$ su ∂D si ha $h - u \geq 0$ su D. Perciò

$$m_r(h-u)(x_0) \geq 0 \text{ implica } M_r(h-u)(x_0) \geq 0$$

o, in altre parole,

$$m_r(h)(x_0) - m_r(u)(x_0) \geq 0 \text{ implica } M_r(h)(x_0) - m_r(u)(x_0) \geq 0$$

Dato che, per l'armonicità di h, $M_r(h)(x_0) = m_r(h)(x_0)$ risulta che:

$$m_r(u)(x_0) \leq 0 \text{ implica } M_r(u)(x_0) \leq 0$$

Segue che:

$$M_r(u)(x_0) \leq m_r(u)(x_0)$$

[$(ii) \Leftarrow$] Supponiamo che u soddisfi la disuguaglianza

$$M_r(u)(x_0) \leq m_r(u)(x_0) \text{ per ogni } D(x_0,r) \text{ tale che } \overline{D(x_0,r)} \subseteq \Omega$$

ma che per assurdo non sia subarmonica. Neghiamo quindi la validità del principio del massimo debole: esistono un disco D tale che $\overline{D} \subseteq \Omega$ e una funzione h armonica in D tale che $h \geq u$ su ∂D ma $h(x_0) < u(x_0)$ per un qualche $x_0 \in D$.
D'altra parte, dall'armonicità di h segue $m_r(h)(x_0) = M_r(h)(x_0)$ e, per ipotesi, $M_r(u)(x_0) \leq m_r(u)(x_0)$. Quindi per ogni disco D tale che $\overline{D} \subseteq \Omega$ vale

$$M_r(u-h)(x_0) \leq m_r(u-h)(x_0)$$

Per il lemma (1.6.5) $u-h$ dovrebbe soddisfare il principio del massimo. Siamo arrivati alla contraddizione.

[$(i) \Leftarrow$] Se vale $M_r(u)(x_0) = m_r(u)(x_0)$ allora, applicando quanto appena dimostrato, si ha che sia u che $-u$ sono subarmoniche. Quindi u è armonica.

$\square$

Capitolo 2

Risultati di simmetria sferica

2.1 Teorema di Kuran e Netuka

Sia $P \in \mathbb{R}^N$ e sia A un disco centrato in P. Dal teorema della formula di media di volume (1.3.2)

$$h(P) = \frac{1}{|A|}\int_A h(x)dx \qquad (1)$$

per ogni funzione h integrabile e armonica in A.
In questa sezione studiamo il *problema inverso*: i prossimi teoremi ci dicono infatti quali sono gli aperti A in $\mathbb{R}^N$, di misura di Lebesgue finita, tali che (1) vale per ogni funzione integrabile armonica in A.

Teorema 2.1.1 (**Teorema di Kuran**).
Sia D un dominio (insieme aperto connesso) di misura di Lebesgue finita nello spazio euclideiano $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$. Supponiamo che esista un punto P in D tale che per ogni funzione h armonica in D e integrabile su D, la media di volume di h su D sia uguale ad $h(P)$.
Allora D è una palla aperta centrata in P.

Una dimostrazione semplice ed elegante di questo teorema è stata realizzata da Kuran e può essere trovata in [3].

Osservazione 7. **L'ipotesi di connessione dell'aperto è superflua.** Infatti, se A è un aperto contenuto in $\mathbb{R}^N$ di misura di Lebesgue finita, per cui vale l'ipotesi del teorema, allora A deve necessariamente essere connesso.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che A non sia connesso. Denotiamo allora con A_0 la componente connessa di A contenente il punto P. La funzione caratteristica χ di $A \setminus A_0$ è armonica, quindi soddisfa

$$0 \overset{(P \in B_0)}{=} \chi(P) = \frac{1}{|A|}\int_A \chi = \frac{1}{|A|}\int_{A\setminus A_0} 1 = \frac{|A \setminus A_0|}{|A|} > 0$$

L'ultima disuguaglianza vale perchè $|A \setminus A_0|$ non può essere 0, perchè A non è connesso mentre A_0 è la componente connessa contenente P.
Siamo quindi arrivati ad una contraddizione.

□

Il teorema (2.1.1) può essere quindi riformulato nel modo seguente. La dimostrazione, che può essere trovata in [4], è ancora più semplice di quella realizzata da Kuran.

Teorema 2.1.2 (Netuka). *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un aperto con $|A| < \infty$ e $P \in A$. Supponiamo che valga:*

$$h(P) = \frac{1}{|A|}\int_A h(x)dx$$

per ogni funzione h armonica e integrabile in A. Allora A è la palla aperta centrata in P, con misura uguale alla misura di A.

Dimostrazione. Sia $y \in \mathbb{R}^N \setminus A$ il punto più vicino a P, e sia B il disco di centro P e raggio $r = |y - P|$.
Osserviamo che:

$$\int_{A\setminus \bar{B}} h(x)dx = 0 \tag{2.1}$$

per qualsiasi h funzione integrabile e armonica su A con $h(P) = 0$.
Infatti:

$$0 = h(P) \cdot |A| = \int_A h(x)dx = \int_{A \setminus \bar{B}} h(x)dx + \int_B h(x)dx =$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{A \setminus \bar{B}} h(x)dx + h(P) \cdot |B| = \int_{A \setminus \bar{B}} h(x)dx$$

L'uguaglianza (*) deriva dal teorema (1.3.2), che può essere applicato essendo h una funzione armonica su A ed essendo $\overline{B}$ contenuto in A.
Definiamo ora:

$$K(x) := \frac{(|x - P|^2 - |y - P|^2)}{|x - y|^N} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{y\}$$

e

$$h := K - \backslash K(P)$$

La funzione h è armonica in A (essendo proporzionale al nucleo di Poission, (1.15)) e vale h(P)=0. Segue quindi (2.1)

$$\int_{A \setminus \bar{B}} h(x)dx = 0$$

D'altra parte, essendo h è strettamente positiva su $A \setminus \overline{B}$ (insieme dei punti x tali che $|x - P| > |y - P|$), deve necessariamente essere

$$|A \setminus \overline{B}| = 0$$

da cui

$$A \subset \overline{B}$$

Pertanto $A = B$. □

2.2 Esempio

Vediamo ora un esempio di simmetria sferica nella fisica.

Teorema di Newton

L'attrazione gravitazionale esercitata da una palla omogenea in ogni punto esterno è identica a quella esercitata da una massa puntiforme (di massa uguale al volume della palla) posta nel centro della palla.

Dimostrazione. Una massa unitaria posta nel punto x attrae un punto y ($\neq x$) con una forza la cui intensità è $\frac{1}{|x-y|^2}$ e la cui direzione è $\frac{x-y}{|x-y|}$. Allora il campo gravitazionale in y indotto da una massa puntiforme in x è dato da

$$\frac{x-y}{|x-y|^3}$$

Segue che il campo indotto da una palla omogenea B di densità unitaria è dato da

$$\int_B \frac{x-y}{|x-y|^3} dx$$

Assumiamo che B sia centrato nello 0. Osserviamo che per $y \notin B$ la funzione $\frac{1}{|x-y|}$ è armonica su B. Quindi, dal teorema (1.3.2),

$$\frac{1}{V} \int_B \frac{dx}{|x-y|} = \frac{1}{|y|} \qquad y \notin B$$

dove V è il volume di B. Moltiplicando per V e facendo la derivata di entrambi i membri otteniamo

$$\int_B \frac{x-y}{|x-y|^3} dx = V \left(\frac{-y}{|y|^3} \right) \qquad y \notin B$$

che è l'asserzione del teorema di Newton $\square$

Studiamo ora il **problema inverso:**

Sia P un solido, corpo omogeneo in $\mathbb{R}^3$, che induce al suo esterno un campo gravitazionale identico a quello di una massa puntiforme. **Allora P deve essere una palla**.

Precisiamo che l'ipotesi di solidità di P sta a significare che $\mathbb{R}^3 \setminus P$ è connesso e che P è la chiusura del suo interno.

Assumiamo che la massa puntiforme sia nello 0. L'ipotesi del teorema + equivalente a:

$$\int_P \frac{x-y}{|x-y|^3} dx = c\left(\frac{-y}{|y|^3}\right) \qquad y \notin P \tag{2.2}$$

Integrando rispetto alla variabile $y \in \mathbb{R}^3 \setminus P$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus P} \int_P \frac{x-y}{|x-y|^3} dxdy = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus P} c\left(\frac{-y}{|y|^3}\right) dy \qquad y \notin P$$

che diventa

$$\int_P \frac{1}{|x-y|} dx = c\left(\frac{1}{|y|}\right) + d \qquad y \notin P \tag{2.3}$$

Mandando $y \to +\infty$ si vede che $d = 0$, allora

$$\int_P \frac{1}{|x-y|} dx = c\left(\frac{1}{|y|}\right) \qquad y \notin P \tag{2.4}$$

Dato che il membro a sinistra definisce una funzione di classe C^1 rispetto alla variabile y su tutto $\mathbb{R}^3$, segue che 0 deve giacere nell'interno di P. Moltiplicando scalarmente ogni membro di (2.2) per y e sommando il risultato all'equazione (2.4) viene:

$$\int_P \frac{|x|^2 - x \cdot y}{|x-y|^3} dx = 0 \qquad y \notin P$$

Dal teorema di Newton la stessa equazione deve valere anche per B, la più grande palla centrata in 0 contenenuta in P. Sottraendo le due equazioni otteniamo

$$\int_{P \setminus B} \frac{|x|^2 - x \cdot y}{|x-y|^3} dx = 0 \qquad y \notin P$$

Questo vale anche per $y \in \partial P$, dato che il membro a sinistra è una funzione continua rispetto alla variabile y. Scegliendo ora $y \in \partial P \cap \partial B$ l'integrando diventa positivo. Quindi deve necessariamente essere $|P \setminus B| = 0$, cioè $P \subset B$. Segue $P = B$.

2.3 Teorema di Rao-Freites-Matos

Teorema 2.3.1 (**Rao-Freites-Matos**). *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$ con bordo $\partial\Omega$ sufficientemente liscio.*
Allora esistono costanti $0 < c_1 \leq 1 \leq c_2 < \infty$ dipendenti solo da Ω tali che

$$\frac{c_1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} h(s) d\sigma(s) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} h(x) dx \leq \frac{c_2}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} h(s) d\sigma(s)$$

per tutte le funzioni h armoniche non negative definite in Ω e di classe C^1 fino al bordo.
Se una delle costanti c_1 e c_2 può essere presa uguale a 1, allora Ω è una palla.

Per la dimostrazione del teorema (2.3.1), è necesssario premettere il principio del massimo di Hopf (valido per tutti gli operatori ellittici, ma enunciato qui nel caso particolare del Laplaciano, di nostro interesse) e il teorema di Serrin.

Teorema 2.3.2 (**Principio del massimo di Hopf**). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia u una funzione che soddisfa la disuguaglianza*

$$\Delta u \geq 0 \quad in\ \Omega$$

Supponiamo $u \leq M$ in Ω e $u = M$ in un punto P del bordo. Assumiamo che Ω abbia la proprietà del disco esterno in P, cioè che esista $D(\alpha, r)$ tale che $\overline{D(\alpha, r)} \subseteq (\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \cup \{P\})$.
Se u è continua in $\Omega \cup P$ e la derivata normale interna $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ esiste in P, allora

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \quad in\ P$$

a meno che $u \equiv M$

Teorema 2.3.3 (Serrin). *Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^N$ con bordo di classe C^2. Supponiamo che esista una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ che soddisfa le condizioni*

$$\Delta u = -1 \quad in\ \ \Omega$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = costante \;\; su \;\; \partial\Omega$$

Allora Ω è una palla e u ha la forma $\frac{b^2-r^2}{2N}$ dove b è il raggio della palla e r la distanza dal suo centro.

Possiamo ora dimostrare il teorema (2.3.1)

Dimostrazione. Sia v la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta v + 1 = 0 & \text{se } x \in \Omega \\ v = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema e dalla prima formula di rappresentazione di Green (1.8) segue che:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h\,dx = -\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h\Delta v\,dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\left(-\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)d\sigma \tag{2.5}$$

Applichiamo ora alla funzione $-v$ il Lemma di Hopf. Le ipotesi sono infatti soddisfatte: Ω ha la proprietà del disco esterno essendo il bordo sufficientemente liscio [1], $\Delta(-v) = 1 \geq 0$, $-v = 0$ per $x \in \partial\Omega$ e deve essere $(-v) \leq 0$ in Ω.
Dal lemma di Hopf segue, usando un argomento di compattezza, l'esistenza di una costante positiva c_1 tale che

$$0 < c_1 < -\frac{\partial v}{\partial \nu}$$

D'altra parte, e di nuovo grazie all'ipotesi di bordo liscio e di compattezza, abbiamo

$$-\frac{\partial v}{\partial \nu} < c_2 < \infty$$

e la disuguaglianza cercata segue dall'esistenza di queste due costanti.

[1] Se Ω è un aperto regolare con $\partial\Omega \in C^2$, l'aperto ha la proprietà del disco esterno in ogni punto della sua frontiera

Assumiamo ora che la costante c_1 possa essere scelta uguale a 1. Ne segue:

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\,d\sigma \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} h\,dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\left(-\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)d\sigma$$

da cui

$$\int_{\partial\Omega} h\left(\frac{1}{|\partial\Omega|}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)d\sigma \leq 0 \tag{2.6}$$

Sia c un numero reale positivo tale che

$$h_0 := c + \frac{1}{|\partial\Omega|}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu}$$

sia positivo. Scegliamo ora h uguale ad h_0 sul bordo di Ω.
Utilizzando l'identità (2.5) con $h \equiv 1$ si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\partial\Omega}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu}d\sigma = \int_{\partial\Omega}\frac{1}{|\partial\Omega|}d\sigma + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial \nu}d\sigma =$$

$$= 1 - \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} dx = 0 \tag{2.7}$$

Da (2.7) e dalla sostituzione di h in (2.6) si trae

$$\int_{\partial\Omega}\left(c+\frac{1}{|\partial\Omega|}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\left(\frac{1}{|\partial\Omega|}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)d\sigma = c\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|\partial\Omega|}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)d\sigma +$$

$$+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|\partial\Omega|}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|\partial\Omega|}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \leq 0$$

da cui segue che

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}+\frac{1}{|\Omega|}\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$$

Risulta quindi

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \text{costante sul bordo}$$

Dal teorema di Serrin, Ω deve essere una palla.
Assumiamo ora che la costante c_2 possa essere presa uguale a 1. Ne segue, utilizzando l'identità (2.5):

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\left(-\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)ds = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} h\,dx \leq \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} h\,d\sigma$$

Scgliendo ora $h = -\frac{\partial v}{\partial \nu}$, e utilizzando ancora l'identità (2.5) vale:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 ds \leq \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}\left(-\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma = \frac{1}{|\partial\Omega}\frac{|\Omega|}{|\Omega|}\int_{\Omega} dx = \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}$$

Il risultato segue dal seguente lemma, che è una variazione del teorema di Serrin:

Lemma 2.3.4. *Sia v la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet iniziale. Allora:*

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \geq \left(\frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}\right)^2$$

con l'uguaglianza se e solo se Ω è una palla

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz abbiamo che:

$$\int_{\partial\Omega} 1\cdot\left(-\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma \leq \left(\int_{\partial\Omega} d\sigma\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma\right)^{1/2}$$

quindi

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} 1\cdot\left(-\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma \leq \frac{1}{|\partial\Omega|^{1/2}}\left(\int_{\partial\Omega} d\sigma\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

da cui deriva che

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} 1\cdot\left(-\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \geq \left(\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma\right)^2 = \left(\frac{|\Omega|}{\partial\Omega|}\right)^2$$

D'altra parte l'uguaglianza vale in (2.8) se e solo se $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ è costante sul bordo e quindi, dal teorema di Serrin, Ω deve essere una palla. $\square$

Capitolo 3

Sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot

3.1 Introduzione ai gruppi di Carnot

Introduciamo ora le definizioni base riguardanti i campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$, per presentare poi i gruppi di Lie $\mathbb{G}$ su $\mathbb{R}^N$ e le algebre di Lie dei loro campi invarianti a sinistra. In seguito, daremo a $\mathbb{G}$ una struttura omogenea, attraverso un gruppo opportuno di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ su G, per poi introdurre la nozione di gruppo di Carnot omogeneo e sub-Laplaciano. Le dimostrazioni saranno spesso omesse e rimandate direttamente alla monografia [9].

3.1.1 Campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto dato. Data un N-upla di funzioni scalari a_1, ..., a_N

$$a_j : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad j \in \{1, ..., N\}$$

l'operatore differenziale lineare del primo ordine

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j$$

è detto **campo vettoriale** su Ω con componenti $a_1, ..., a_N$.

Se $O \subseteq \Omega$ è un sottoinsieme aperto e $f : O \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, denotiamo con Xf la funzione su O definita da

$$Xf(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\partial_j f(x), \quad x \in O$$

Usiamo la notazione Xf anche quando

$$f : O \to \mathbb{R}^m$$

è una funzione vettoriale. Più precisamente,

$$\text{se } f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \text{ poniamo } Xf(x) = \begin{pmatrix} Xf_1(x) \\ \vdots \\ Xf_m(x) \end{pmatrix}$$

Sia $C^\infty(O, \mathbb{R})$ (per brevità $C^\infty(O)$) l'insieme delle funzioni a valori reali liscie. Se le componenti a_j di X sono funzioni liscie, allora chiamiamo X un **campo vettoriale liscio** e lo consideriamo come un operatore agente su funzioni liscie

$$X : C^\infty(O) \to C^\infty(O), \quad f \mapsto Xf$$

Denotiamo con

$$T(\mathbb{R}^N)$$

l'**insieme dei campi vettoriali lisci** in $\mathbb{R}^N$.
Munito delle naturali operazioni, $T(\mathbb{R}^N)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Adottiamo la seguente notazione: indicata con I l'identità su $\mathbb{R}^N$, allora

$$XI := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

sarà il vettore colonna delle componenti di X. Questa notazione è consistente con la definizione data di azione del campo vettoriale su una funzione a valori vettoriali [1].
Di conseguenza, abbiamo che:

$$Xf = (\nabla f) \cdot XI$$

dove $\nabla = (\partial_1, ..., \partial_N)$ è l'operatore gradiente in $\mathbb{R}^N$, f è una qualsiasi funzione liscia du $\mathbb{R}^N$ a valori reali e $\cdot$ denota il prodotto riga $\times$ colonna.

3.1.2 Curve integrali

Una curva $\gamma : D \to \mathbb{R}^N$, con D intervallo di $\mathbb{R}$, è detta **curva integrale del campo vettoriale** X se

$$\dot{\gamma}(t) = XI(\gamma(t)), \quad \text{per ogni } t \in D$$

Se X è un campo vettoriale liscio, allora, per qualsiasi $x \in \mathbb{R}^N$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = XI(\gamma) \\ \gamma(0) = x \end{cases} \tag{3.1}$$

ha un'unica soluzione

$$\gamma_X(\cdot, x) : D(X, x) \to \mathbb{R}^N$$

dove $D(X, x)$ è il più grande intervallo di $\mathbb{R}$ in cui $\gamma_X(\cdot, x)$ esiste.

3.1.3 Parentesi di Lie di campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$

Dati due campi vettoriali lisci X e Y in $\mathbb{R}^N$, definiamo la **parentesi di Lie** $[X, Y]$ come segue:

$$[X, Y] := XY - YX$$

[1] Infatti, dato che $I = (I_1, ..., I_N)$ con $I_j(x) = x_j$, abbiamo $X(I_j) = a_j$

Se $X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_j$ e $Y = \sum_{j=1}^{N} b_j \partial_j$ un calcolo diretto mostra che la parentesi di Lie $[X, Y]$ è il *campo vettoriale*

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{N} (Xb_j - Ya_j)\partial_j$$

E' abbastanza triviale controllare che $(X, Y) \to [X, Y]$ è una mappa bilineare

sullo spazio vettoriale $T(\mathbb{R}^N)$ che soddisfa l'identità di Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

per ogni $X, Y, Z \in T(\mathbb{R}^N)$.
Ci riferiamo a $T(\mathbb{R}^N)$ (con l'operazione parentesi di Lie), come l'**algebra di Lie** dei campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$. Qualsiasi **sottoalgebra** $\mathfrak{a}$ di $T(\mathbb{R}^N)$ è detta **algebra di Lie di campi vettoriali**. Più esplicitamente, $\mathfrak{a}$ è un'algebra di Lie di campi vettoriale se $\mathfrak{a}$ è un sottospazio vettoriale di $T(\mathbb{R}^N)$ chiuso rispetto a $[,]$, i.e. $[X, Y] \in \mathfrak{a}$ per qualsiasi $X, Y \in \mathfrak{a}$.

Definizione 3.1 (**Algebra di Lie generata da un insieme**).
Se U è un qualsiasi sottoinsieme di $T(\mathbb{R}^N)$, denotiamo con $Lie\{U\}$ la più piccola sottoalgebra di $T(\mathbb{R}^N)$ contenente U, cioè

$$Lie\{U\} := \bigcap h \quad \text{dove } h \text{ è una sottoalgebra di } T(\mathbb{R}^N) \text{ con } U \subseteq h$$

Definiamo

$$rank\,(Lie\{U\}(x)) := dim_{\mathbb{R}}\{ZI(x) \;\; t.c. \;\; Z \in Lie\{U\}\}$$

Enunciamo ora il famoso teorema di Hormander.

Teorema 3.1.1 (**Teorema di Hormander**).
Siano $X_1, ..., X_m$ e Y campi vettoriali lisci. Supponiamo[2]

$$rank\,(Lie\{X_1, ..., X_m, Y\}(x)) = N \qquad \forall\, x \in \Omega$$

[2]Questa condizione significa che per ogni punto di Ω si possono trovare N operatori differenziali linearmente indipendenti tra $X_1, ..., X_m, Y$ e tutti i loro commutatori.

Allora l'operatore

$$L = \sum_{j=1}^{m} X_j^2 + Y$$

è ipoellittico in Ω*, cioè ogni soluzione distribuzionale di* $Lu = f$ *è di classe* C^∞ *ogni volta che* f *è di classe* C^∞*.*

3.1.4 Gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$

Definizione 3.2 (**Gruppo di Lie su** $\mathbb{R}^N$).
Sia $\circ$ un'operazione di gruppo su $\mathbb{R}^N$, e supponiamo che la mappa

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x, y) \to y^{-1} \circ x \in \mathbb{R}^N$$

sia liscia. Allora $\mathbb{G} := \left(\mathbb{R}^N, \circ\right)$ è detto gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$

Definizione 3.3 (**Campo invariante a sinistra/Algebra di Lie del gruppo di Lie**).
Fissato $\alpha \in \mathbb{G}$ denotiamo con

$$\tau_\alpha(x) := \alpha \circ x$$

la *traslazione a sinistra* di ampiezza α su $\mathbb{G}$.
Un campo vettoriale liscio X su $\mathbb{R}^N$ è detto *invariante a sinistra* su $\mathbb{G}$ se

$$X(\varphi \circ \tau_\alpha) = (X\varphi) \circ \tau_\alpha$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{G}$ e per ogni funzione liscia $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
Denotiamo con $\mathfrak{g}$ l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$.
E' ovvio riconoscere che per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lambda X + \mu Y \in \mathfrak{g} \quad \text{e} \quad [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

Allora $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie di campi vettoriali, sottoalgebra di $T(\mathbb{R}^N)$. E' detta l'*algebra di Lie di* $\mathbb{G}$.

Dal teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo facilmente la seguente caratterizzazione dei campi invarianti a sinistra.

Proposizione 3.1.2 (Prima caratterizzazione di $\mathfrak{g}$).
Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. Il campo vettoriale liscio X appartiene a $\mathfrak{g}$ se e solo se

$$(XI)(\alpha \circ x) = \mathscr{I}_{\tau_\alpha}(x) \cdot (XI)(x) \qquad \forall\, \alpha, x \in \mathbb{G} \tag{3.2}$$

Da questa prima caratterizzazione di $\mathfrak{g}$ segue la seguente proposizione.

Proposizione 3.1.3.
Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. Sia η un vettore fissato di $\mathbb{R}^N$, e definiamo il campo vettoriale X come segue

$$XI(x) := \mathscr{I}_{\tau_x}(0) \cdot \eta, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.3}$$

Allora $X \in \mathfrak{g}$.

Attraverso le proposizioni (3.1.2) e (3.1.3) si dimostra un'ulteriore caratterizzazione dei campi invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$. Vale infatti il seguente corollario.

Corollario 3.1.4 (Seconda caratterizzazione di $\mathfrak{g}$).
Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. Il campo vettoriale X appartiene a $\mathfrak{g}$ se e solo se

$$(XI)(x) = \mathscr{I}_{\tau_x}(0) \cdot (XI)(0) \quad \forall\, x \in \mathbb{G}$$

Dalla proposizione (3.1.2) e dal corollario (3.1.4) segue che $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale di dimensione N. Infatti, vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.1.5 (Caratterizzazione di $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^N$).
Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. La mappa [3]

$$J : \mathbb{R}^N \to \mathfrak{g}, \quad \eta \to J(\eta)I(x) = \mathscr{I}_{\tau_x} \cdot \eta$$

[3] La mappa è ben definita, grazie alla proposizione (3.1.3)

è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare

$$dim\,\mathfrak{g} = N$$

La prossima proposizione dà un'ultima caratterizzazione dell'algebra di Lie di $\mathbb{G}$.

Proposizione 3.1.6 (Terza caratterizzazione di $\mathfrak{g}$).
Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. Il campo vettoriale X appartiene a $\mathfrak{g}$ se e solo se esiste $\eta \in \mathbb{R}^N$ tale che, per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

$$(X\varphi)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(x \circ (t\eta)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

In questo caso $\eta = XI(0)$.

Dalla proposizione (3.1.5) segue che qualsiasi base di $\mathfrak{g}$ è immagine attraverso J di una base di $\mathbb{R}^N$. Una definizione naturale è la seguente.

Definizione 3.4 (Base Jacobiana).
Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. Se $\{e_1, ..., e_N\}$ è la base canonica[4] di $\mathbb{R}^N$ e J è la mappa definita nella proposizione (3.1.5) allora chiamiamo

$$\{Z_1, ..., Z_N\} \qquad \text{con } \; Z_j := J(e_j)$$

la base Jacobiana di $\mathfrak{g}$.

[4]Cioè, per qualsiasi $j \in \{1, ..., N\}$

$$e_j = (0, ..., \underbrace{1}_{j}, ..., 0)^T$$

Osservazione 8. La nozione di base Jacobiana è strettamente legata al fatto che qui $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, e stiamo facendo riferimento alle fissate coordinate cartesiane su $\mathbb{R}^N$. Quindi, la base Jacobinana non è ben posta sui gruppi di Lie generali. In più, se effettuiamo un cambio di coordinate in $\mathbb{R}^N$, anche lineare, la base Jacobiana cambia.

Vediamo ora le seguenti caratterizzazioni equivalenti della base Jacobiana, derivanti dalla sua definizione e dalle caratterizzazioni dei campi invarianti a sinitra su $\mathbb{G}$.

Proposizione 3.1.7 (Base Jacobiana).
Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$. Sia $j \in \{1, ..., N\}$. Allora esiste uno ed un solo campo vettoriale in $\mathfrak{g}$, detto Z_j, caratterizzato da una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. *il vettore colonna delle componenti di Z_j è*

$$Z_j I(x) = \mathscr{I}_{\tau_x}(0) \cdot e_j = j\text{-esima colonna di } \mathscr{I}_{\tau_x}(0) \tag{3.4}$$

2. *se e_j denota il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^N$, allora*

$$Z_j I(0) = e_j$$

3. *per ogni $x \in \mathbb{G}$, abbiamo*

$$(Z_j \varphi)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(x \circ (te_j)) \quad \text{per ogni } \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

4. *per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, vale*

$$(Z_j \varphi)(x) = \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{y=0} (\varphi(x \circ y)) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{G}$$

5. *$Z_j|_0 = (\partial/\partial_{x_j})|_0$ cioè*

$$(Z_j \varphi)(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) \quad \text{per ogni } \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

Il sistema di campi vettoriali $Z := \{Z_1, ..., Z_N\}$ è una base di $\mathfrak{g}$, la base Jacobiana. Le coordinate di $X \in \mathfrak{g}$ rispetto a Z sono le componenti del vettore colonna $XI(0)$.

3.1.5 Il Gradiente Totale Jacobiano

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $Z_1, ..., Z_N$ la base Jacobiana dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathbb{G}$.
Data u funzione differenziabile definita su un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, consideriamo una sorta di gradiente intrinseco di u dato da

$$(Z_1 u, ..., Z_N u)$$

chiamato il **gradiente totale jacobiano**. Allora segue da (3.4) che

$$(Z_1 u(x), ..., Z_N u(x)) = \nabla u(x) \cdot ZI(x) = \nabla u(x) \cdot \mathscr{I}_{\tau_x}(0) \quad \forall\, x \in \Omega \tag{3.5}$$

D'altra parte, dato che $\mathscr{I}_{\tau_x}$ è non singolare e la sua inversa è data da $\mathscr{I}_{\tau_{x^{-1}}}$, possiamo scrivere il gradiente Euclideiano in termini del suo gradiente totale, nel seguente modo

$$\nabla u(x) = (Z_1 u(x), ..., Z_N u(x)) \cdot \mathscr{I}_{\tau_{x^{-1}}}(0) \quad \forall\, x \in \Omega \tag{3.6}$$

Proposizione 3.1.8. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie di $\mathbb{R}^N$ e sia $Z_1, ..., Z_N$ la base Jacobiana (o qualsiasi base per $\mathfrak{g}$). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e connesso. Una funzione $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ è costante in Ω se e solo se il suo gradiente totale $(Z_1 u, ..., Z_N u)$ si annulla identicamente su Ω.*

Dimostrazione. Da (3.5) e (3.6) segue che il gradiente totale di u si annulla in $x \in \Omega$ se e solo se $\nabla u(x) = 0$. $\square$

3.1.6 Gruppi di Lie omogenei

Definizione 3.5 (Gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$).
Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$. Diciamo che $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie omogeneo se vale la seguente proprietà:

Esiste una N-upla di numeri reali $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ con $1 \leq \sigma_1 \leq ... \leq \sigma_N$, tale che la *dilatazione*

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad \delta_\lambda(x_1, ..., x_N) := (\lambda^{\sigma_1} x_1, ..., \lambda^{\sigma_N} x_N)$$

è un *automorfismo* del gruppo $\mathbb{G}$ per ogni $\lambda > 0$.

Denotiamo con $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ il **gruppo di Lie omogeneo su** $\mathbb{R}^N$ con operazione di composizione $\circ$ e gruppo di dilatazione $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$.
Definiamo

$$Q := \sum_{j=1}^{N} \sigma_j$$

la **dimensione omogenea del gruppo** $\mathbb{G}$.

Osservazione 9. Una nota simile a quella data dopo la definizione di base Jacobiana si applica alla nozione di gruppo di Lie omogeneo: la nozione di gruppo di Lie omogeneo non è libera dalle coordinate e dipende fortemente dalla scelta del sistema di coordinate su $\mathbb{R}^N$.

Osservazione 10. La famiglia di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ forma un gruppo ad un parametro di automorfismi di $\mathbb{G}$ la cui identità è $\delta_1 = I$, la mappa identità di $\mathbb{R}^N$. Infatti, abbiamo

$$\delta_{r\,s}(x) = \delta_r\left(\delta_s(x)\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{G},\ r, s > 0$$

In più $(\delta_\lambda)^{-1} = \delta_{\lambda^{-1}}$. In seguito, ci riferiremo a $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ come al gruppo di dilatazioni di $\mathbb{G}$.
Essendo δ_λ un automorfismo di gruppi segue che

$$\delta_\lambda(x \circ y) = (\delta_\lambda x) \circ (\delta_\lambda y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{G}$$

e, se e denota l'identità di $\mathbb{G}$, $\delta_\lambda(e) = e$ per ogni $\lambda > 0$. Questo ovviamente implica che $e = 0$

Funzioni ed operatori differenziali $\delta_\lambda-$omogenei

Una **funzione** reale a definita su $\mathbb{R}^N$ è detta **$\delta_\lambda-$omogenea** di grado $m \in \mathbb{R}$ se a non si annulla identicamente e, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, vale:

$$a(\delta_\lambda(x)) = \lambda^m a(x)$$

Un **operatore differenziale lineare** X non identicamente nullo è detto **$\delta_\lambda-$omogeneo** di grado $m \in \mathbb{R}$ se, per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$ vale:

$$X(\varphi(\delta_\lambda(x))) = \lambda^m (X\varphi)(\delta_\lambda(x))$$

Definizione 3.6 (**$\mathbb{G}$-lunghezza di un multi-indice/$\mathbb{G}$-grado**).
Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$.
Dato un multi-indice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, definiamo la $\mathbb{G}-$*lunghezza di* α come

$$|\alpha|_{\mathbb{G}} =< \alpha, \sigma >= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sigma_i$$

Se $p : G \to \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale (la somma sotto è finita)

$$p(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{R}$$

diciamo che

$$\deg_{\mathbb{G}}(p) := \max \{|\alpha|_G \ \ t.c. \ \ c_\alpha \neq 0\}$$

è il $\mathbb{G}-$*grado* o grado $\delta_\lambda-$omogeneo di $\mathbb{G}$

3.1.7 Gruppi di Carnot omogenei

Definizione 3.7 (Gruppo di Carnot omogeneo).
Diciamo che un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, \circ\right)$ è un **gruppo di Carnot** (omogeneo) se valgono le seguenti proprietà:

1. $\mathbb{R}^N$ può essere scomposta come $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N_r}$, e la dilatazione $\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$
$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda\left(x^{(1)}, ..., x^{(r)}\right) = \left(\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, ..., \lambda^r x^{(r)}\right), \quad x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$$
è un automorfismo del gruppo $\mathbb{G}$ per ogni $\lambda > 0$.
Allora $\left(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda\right)$ è un *gruppo di Lie omogeneo* su $\mathbb{R}^N$,

2. se N_1 è come sopra, siano $Z_1, .., Z_{N_1}$ campi vettoriali invarianti a sinistra su G t.c. $Z_j(0) = \partial/\partial_{x_j}\big|_0$. Allora
$$\mathit{rank}\left(\mathit{Lie}\left\{Z_1, ..., Z_{N_1}\right\}(x)\right) = N \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N$$

Diciamo che $\mathbb{G}$ ha passo r e N_1 generatori. I campi vettoriali $Z_1, ..., Z_{N_1}$ sono chiamati i **generatori (Jacobiani) di** $\mathbb{G}$, mentre qualsiasi base per $\mathit{span}\left\{Z_1, ..., Z_{N_1}\right\}$ è chiamata un **sistema di generatori di** $\mathbb{G}$.

Si dimostra che l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è generata da $Z_1, ..., Z_{N_1}$, cioè
$$\mathfrak{g} = \mathit{Lie}\left\{Z_1, ..., Z_{N_1}\right\} \tag{3.7}$$

Osservazione 11. D'ora in avanti usiamo la seguente notazione per denotare i punti di $\mathbb{G}$,
$$x = (x_1, ..., x_N) = (x^{(1)}, ..., x^{(r)}) \tag{3.8}$$
con
$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, ..., x_{N_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{N_i}, \;\; i = 1, ..., r$$

L'operazione di composizione di un gruppo di Carnot (e più in generale di un gruppo di Lie omogeneo) ha una particolare struttura, descritta dal seguente teorema, diretta conseguenza di un generale teorema di struttura delle funzioni C^∞ e $\delta_\lambda-$omogenee.

Teorema 3.1.9 (**Composizione di un gruppo di Carnot**).
Sia $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda\right)$ *un gruppo di Carnot omogeneo. Allora l'operazione* $\circ$ *ha componenti polinomiali. In più, seguendo le notazioni in (3.8) e denotando* $x \circ y$ *con* $((x \circ y)^{(1)}, ..., (x \circ y)^{(r)})$, *abbiamo*

$$(x \circ y)^{(1)} = x^{(1)} + y^{(1)}, \;\; (x \circ y)^{(i)} = x^{(i)} + y^{(i)} + Q^{(i)}(x, y), \;\; 2 \leq i \leq r$$

dove

1. $Q^{(i)}$ *dipende solo da* $x^{(1)}, ..., x^{(i-1)}$ *e* $y^{(1)}, ..., y^{(i-1)}$;
2. *le funzioni componenti di* $Q^{(i)}$ *sono somme di monomi misti nelle* x, y;
3. $Q^{(i)}(\delta_\lambda x, \delta_{\lambda y}) = \lambda^{(i)} Q^{(i)}(x, y)$.

Grazie alla struttura polinomiale dell'operazione di composizione, è possibile trovare facilmente una forma esplicita per la matrice Jacobiana nel punto 0 della traslazione a sinistra τ_x. Attraverso la matrice Jacobiana si riesce a trovare una forma esplicita anche per i campi vettoriali della base Jacobiana di $\mathfrak{g}$. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.1.10. *Sia* $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda\right)$ *un gruppo di Carnot omogeneo. Allora abbiamo*

$$\mathscr{I}_{\tau_x}(0) = \begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 & \cdots & 0 \\ J_2^{(1)}(x) & I_{N_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ J_r^{(1)}(x) & \cdots & J_r^{(r-1)}(x) & I_{N_r} \end{pmatrix}$$

dove I_n *è la matrice identità* $n \times n$, *mentre* $J_j^{(i)}$ *è una matrice* $N_j \times N_i$ *le cui componenti sono polinomi* $\delta_\lambda-$*omogenei di grado* $j - i$. *In particolare, se* *scriviamo*

$$\mathscr{I}_{\tau_x}(0) = (Z^{(1)}(x) \cdots Z^{(r)}(x))$$

dove $Z^{(i)}(x)$ *è una matrice* $N \times N_i$*, allora, per il primo punto della proposizione (3.1.7) i vettori colonna di* $Z^{(i)}(x)$ *definiscono i campi vettoriali della base Jacobiana di* $\mathfrak{g}$*.*
Possiamo quindi denotare, con una notazione consistente con (3.8) la base Jacobiana $Z_1, ..., Z_N$ *con*

$$Z_1^{(1)}, ..., Z_{N_1}^{(1)}; ...; Z_1^{(r)}, ..., Z_{N_r}^{(r)}$$

(ovviamente $Z_j^{(1)} = Z_j$ *per* $1 \leq j \leq N_1$*).*
Si ha che $Z_j^{(i)}$ *è* $\delta_\lambda-$*omogenea di grado* i *e prende la forma*

$$Z_j^{(i)} = \partial/\partial_{x_j}^{(i)} + \sum_{h=i+1}^{r} \sum_{k=1}^{N_h} a_{j,k}^{(i,h)}(x^{(1)}, ..., x^{(h-1)}) \partial/\partial_{x_k}^{(h)} \tag{3.9}$$

dove $a_{j,k}^{(i,h)}$ *sono funzioni polinomiali* $\delta_\lambda-$*omogenee di grado* $h - i$*. In particolare, i generatori Jacobiani di* $\mathbb{G}$*, cioè i campi vettoriali* $Z_1^{(1)}, ..., Z_{N_1}^{(1)}$ *sono* $\delta_\lambda-$*omogenei di grado 1.*

Dalla forma triangolare della matrice Jacobiana della traslazione, segue la seguente proposizione:

Proposizione 3.1.11. *Sia* $\mathbb{G}$ *un gruppo di Lie omogeneo su* $\mathbb{R}^N$*. Allora la misura di Lebesgue su* $\mathbb{R}^N$ *è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra e destra su* $\mathbb{G}$*.*
Cioè, se |E| denota la misura di Lebesgue di un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$*, allora*

$$|\alpha \circ E| = |E| = |E \circ \alpha| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{G}$$

3.1.8 Sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot omogenei

Definizione 3.8.
Se $Z_1, ..., Z_{N_1}$ sono generatori Jacobiani del gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda\right)$, l'operatore differenziale del secondo ordine

$$\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{j=1}^{N_1} Z_j^2$$

e chiamato **sub-Laplaciano canonico su** $\mathbb{G}$. Qualsiasi operatore

$$L = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2$$

dove $Y_1, ..., Y_{N_1}$ è una base per $span\left\{Z_1, ..., Z_{N_1}\right\}$ è chiamato semplicemente un **sub-Laplaciano su** $\mathbb{G}$. L'operatore

$$\nabla_{\mathbb{G}} = (Z_1, ..., Z_{N_1})$$

è detto il $\mathbb{G}-$**gradiente canonico** (o orizzontale).
Infine, la notazione $\nabla_L = (Y_1, ..., Y_{N_1})$ sarà usata per denotare $L-$**gradiente** (o L-gradiente orizzontale).

Dalle proprietà dei campi vettoriali del sistema di generatori di $\mathbb{G}$ e della base Jacobiana di $\mathfrak{g}$, seguono le seguenti proprietà dei sub-Laplaciani, proprietà che rivesteranno un ruolo importante nel corso della tesi.
$L = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2$ denoterà un qualsiasi sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$.

1. L **è ipoellittico**, cioè ogni soluzione distribuzionale di $Lu = f$ è di classe C^∞ ogni volta che f è di classe C^∞. Questo segue dal teorema di ipoellitticità di Hormander e dal fatto che, se $L = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2$, allora vale la seguente condizione del rango

   $$rank\, Lie\left(\left\{Y_1, ..., Y_{N_1}\right\}(x)\right) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

   Questa è un'ovvia conseguenza della definizione di gruppo di Carnot.

2. L **è invariante rispetto alla traslazione a sinistra su** $\mathbb{G}$, cioè per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{G}$

$$L(u(\alpha \circ x)) = (Lu)(\alpha \circ x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{G} \text{ e ogni } u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3.10}$$

Questo vale dato che gli Y_j sono invarianti per traslazione a sinistra su $\mathbb{G}$.

3. L **è** $\delta_\lambda-$**omogeneo di grado 2**, cioè, per ogni fissato $\lambda > 0$

$$L(u(\delta_\lambda(x))) = \lambda^2(Lu)(\delta_\lambda(x)) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{G} \text{ e ogni } u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Questo vale perchè gli Y_j sono $\delta_\lambda-$omogenei di grado 1.

4. L può essere scritto come

$$L = div(A(x)\nabla^T) \tag{3.11}$$

dove A è la matrice N simmetrica

$$A(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$$

e $\sigma(x)$ è la matrice $N \times N_1$ le cui colonne sono $Y_1I(x), ..., Y_{N_1}I(x)$. In altre parole, $A(x)$ è la matrice di Gram del sistema di vettori

$$\{Y_1I(x), ..., Y_{N_1}I(x)\}$$

Quindi, dato che questi vettori sono linearmente indipendenti per ogni $x \in \mathbb{G}$, il rango di $A(x)$ è N_1 per ogni $x \in \mathbb{G}$.

La relazione (3.11) è una conseguenza del seguente calcolo

$$L = \sum_{k=1}^{N_1} Y_k^2 = \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{N}(Y_kI)_i(x)\partial_i\left(\sum_{j=1}^{N}(Y_kI)_j(x)\partial_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_1}\partial_i\left\{\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}(Y_kI)_i(x)(Y_kI)_j(x)\right)\partial_j\right\}$$

dato che $(Y_k I)_i(x)$ non dipende da x_i. Quindi questo prova che $L = div(A(x)\nabla^T)$ con

$$A(x) = \left(\sum_{k=1}^{N_1} (Y_k I)_i(x)(Y_k I)_j(x) \right)_{i,j=1,\dots,N} = \sigma(x)\sigma(x)^T$$

La matrice A prende la seguente **forma a blocchi**

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

dove $A_{i,j}$ sta per una matrice $m_i \times m_j$ con componenti polinomiali, con $m_1 = N_1$ e $m_2 = N - N_1$.

In più, $A_{1,1}$ **è costante e non singolare**. Infatti, per una matrice opportuna non singolare $B = (b_{j,k})_{j,k=1}^{N_1}$ abbiamo

$$Y_j = \sum_{k=1}^{N_1} b_{j,k} Z_k \tag{3.12}$$

D'altra parte, sappiamo dalla relazione (3.9) che

$$Z_k = \partial_k + \sum_{i=N_1+1}^{N} a_i^{(k)} \partial_i = \partial_k + \sum_{i=N_1+1}^{N} \partial_i (a_i^{(k)} \cdot) \tag{3.13}$$

dove gli $a_i^{(k)}$ sono funzioni polinomiali opportune indipendenti da x_i. Rimpiazzando (3.13) in (3.12) e facendo il quadrato otteniamo

$$L = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2 = \sum_{h,k=1}^{N_1} a_{h,k} \partial_{h,k} + \sum_{h,k \leq N,\ h \vee k > N_1} \partial_h (a_{h,k} \partial_k)$$

dove

$$A_{1,1} = (a_{h,k})_{h,k \leq N_1} = B^T B$$

è una matrice costante $N_1 \times N_1$. In più, quando $h \vee k := \max\{h, k\} > N_1$ allora $a_{h,k}$ è una funzione polinomiale opportuna.

Concludiamo questa sezione con un utile risultato riguardante l'L-gradiente orizzontale.

Proposizione 3.1.12.
Sia Ω un sottoinsieme aperto e connesso del gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Allora una funzione $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ è costante in Ω se e solo se l'$L-$gradiente orizzontale $\nabla_L u$ si annulla identicamente su Ω.

Dimostrazione. Ovviamente non è restrittivo supporre $L = \Delta_{\mathbb{G}}$.
Supponiamo che $Z_1 u, ..., Z_{N_1} u$ si annullino identicamente su Ω. Dall'identità (3.7) segue che l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ è data da

$$Lie\,\{Z_1, ...Z_{N_1}\}$$

allora per ogni campo vettoriale Z_j della base Jacobiana, abbiamo $Z_j u \equiv 0$. L'asserto segue applicando la proposizione (3.1.8). □

3.1.9 Principi di massimo

Estendiamo ora ai gruppi di Carnot i principi di massimo debole e di massimo forte, visti per il caso del Laplaciano classico in $\mathbb{R}^N$.
La dimostrazione del principio del massimo debole richiede alcune premesse.

Lemma 3.1.13. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione arbitraria. Allora esiste un punto $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che*

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) = \sup_{\Omega} u$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'uguaglianza sia falsa. Allora, per ogni $x \in \overline{\Omega}$, esiste un intorno aperto V_x di x tale che

$$\sup_{\Omega \cap V_x} u < \sup_{\Omega} u \tag{3.14}$$

La famiglia $\{V_x \text{ tale che } x \in \overline{\Omega}\}$ è un ricoprimento aperto di $\overline{\Omega}$. Essendo $\overline{\Omega}$ un compatto, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito:

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} V_{x_j}, \quad p \in \mathbb{N}$$

per opportuni $x_1, ..., x_p \in \overline{\Omega}$. Allora

$$\sup_{\Omega} u = \max \left\{ \sup_{\Omega \cap V_{x_j}} u \text{ tale che } j = 1, ..., p \right\} \tag{3.15}$$

D'altra parte da (3.14) la parte a destra di (3.15) è strettamente minore dell'estremo superiore di u su Ω. Abbiamo quindi l'assurdo e il lemma è provato. □

Lemma 3.1.14. *Siano A e B matrici $N \times N$ con componenti reali costanti. Assumiamo $A \geq 0$ e $B \leq 0$. Allora $Traccia(A \cdot B) \leq 0$.*

Dimostrazione. Sia $R := A^{1/2}$. Allora $Traccia(A \cdot B) = Traccia(R \cdot R \cdot B) = Traccia(R \cdot B \cdot R) = Traccia(R^T \cdot B \cdot R) \leq 0$, dato che $B \leq 0$. □

Lemma 3.1.15. *Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto arbitrario, e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione reale di classe C^2. Assumiamo che u abbia un punto di massimo in $x_0 \in \Omega$. Allora*

$$Lu(x_0) \leq 0$$

Dimostrazione. Sappiamo che $Lu = div(A \cdot \nabla^T)$, dove A è una matrice $N \times N$ simmetrica con componenti polinomiali e $A(x) \geq 0$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}^N$. Allora

$$L = traccia(A \cdot D^2 u) + < b, \nabla u >$$

dove $D^2 u = (\partial_{x_i x_j})_{i,j \leq N}$ è la matrice Hessiana di u, e b è la funzione a valori vettoriale la cui j-esima componente è data da:

$$b_j = \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} a_{i,j} \tag{3.16}$$

Dato che u ha un massimo in x_0, abbiamo $\nabla u(x_0) = 0$ e $D^2u(x_0) \leq 0$. Allora, dal lemma (3.1.14)

$$Lu(x_0) = traccia(A(x_0) \cdot D^2u(x_0)) \leq 0$$

Questo termina la dimostrazione. $\square$

Teorema 3.1.16 (Principio del massimo debole).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$. Sia Ω un sottoinsieme aperto limitato di $\mathbb{G}$. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & in\ \Omega \\ \limsup_{x\to y} u(x) \leq 0 & per\ ogni\ y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Allora $u \leq 0$ in Ω

Dimostrazione. Sappiamo che $L = traccia(A \cdot D^2u)+ < b, \nabla u >$ e che la matrice A ha la seguente forma a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

dove $A_{1,1} = (a_{i,j})_{i,j\leq m}$ è una matrice simmetrica $m\times m$ costante strettamente definita positiva. Allora $a_{1,1} > 0$. Consideriamo b_1 (vedi 3.16). Definiamo

$$\lambda := 2\sup_{x\in\Omega} \frac{b_1(x)}{a_{1,1}}, \qquad M := \sup_{(x_1,...,x_N)\in\Omega} exp(\lambda x_1)$$

e

$$h(x) = h(x_1, ..., x_N) := M - exp(\lambda x_1)$$

Un semplice calcolo mostra che

$$h(x) \geq 0 \;\; e \;\; Lh(x) < 0 \quad \forall\, x \in \Omega \tag{3.17}$$

Per un arbitrario $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione $u_\varepsilon := u - \varepsilon\, h$. Per le disuguaglianze (3.17) e le condizioni di ipotesi abbiamo

$$Lu_\varepsilon > 0 \text{ in } \Omega \;\; e \;\; \limsup_{x\to y} u_\varepsilon(x) \leq 0 \text{ per ogni } y \in \partial\Omega \tag{3.18}$$

Dal lemma (3.1.13) esiste un punto $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che

$$\limsup_{x \to x_0} u_\varepsilon(x) = \sup_\Omega u_\varepsilon \tag{3.19}$$

Vogliamo mostrare che $x_0 \in \partial\Omega$. Supponiamo per assurdo che $x_0 \in \Omega$. Allora, dalla continuità di u in Ω

$$u_\varepsilon(x_0) = \limsup_{x \to x_0} u_\epsilon(x)$$

cosicchè da (3.19), $u_\varepsilon(x_0) = \max_\Omega u_\varepsilon$. Di conseguenza, per il lemma (3.1.15) $Lu_\varepsilon(x_0) \leq 0$. Questo contraddice la prima disuguaglianza in (3.18). Quindi $x_0 \in \partial\Omega$. Allora, da (3.19) e dalla seconda condizione in (3.18), vale

$$\sup_\Omega u_\varepsilon = \limsup_{x \to x_0} u_\varepsilon(x) \leq 0$$

Quindi $u - \varepsilon h = u_\varepsilon \leq 0$ in Ω per ogni $\varepsilon > 0$. Facendo tendere ε a 0 otteniamo $u \leq 0$ in Ω. Il teorema è quindi provato. □

Corollario 3.1.17.
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot. Sia Ω un sottoinsieme aperto non vuoto di $\mathbb{G}$. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & \textit{in } \Omega \\ \limsup_{x \to y} u(x) \leq 0 & \textit{per ogni } y \in \partial\Omega \\ \limsup_{|x| \to \infty} u(x) \leq 0 & \end{cases}$$

Allora $u \leq 0$ in Ω.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario ma fissato. La terza condizione del sistema implica l'esistenza di una costante reale positiva R tale che

$$u(x) - \varepsilon < 0 \qquad \text{in } \Omega \setminus \Omega_R \tag{3.20}$$

dove $\Omega_R := \{x \in \Omega \ \text{ tale che } \ |x| < R\}$. Segue che

$$\begin{cases} L(u - \varepsilon) = Lu \geq 0 & \text{in } \Omega_R \\ \limsup_{x \to y} u(x) \leq 0 & \text{per ogni } y \in \partial\Omega_R \end{cases}$$

Allora, dal teorema (3.1.16), $u - \varepsilon \leq 0$ in Ω_R. Questa disuguaglianza, insieme a (3.20), dà $u \leq \varepsilon$ in Ω per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi $u \leq 0$ in Ω. □

Un caso particolare del corollario (3.1.18) è il seguente.

Corollario 3.1.18. *Se L è come nel corollario (3.1.18), l'unica funzione intera armonica che si annulla all'infinito è la funzione nulla.*

Dimostrazione. Sia $u : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ una funzione intera L-armonica che si annulla all'infinito, cioè $u \in C^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ soddisfa

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \mathbb{G} \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

Allora, applicando il corollario (3.1.18) sia a u che a $-u$, otteniamo $u \equiv 0$. □

Estendiamo ora il principio del massimo forte. La dimostrazione di questo teorema può essere trovata in [9]; nel paragrafo (3.7) dimostreremo il principio del massimo forte solo per il caso particolare di funzioni u tali che $Lu = 0$.

Teorema 3.1.19 (Principio del massimo forte).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo G. Sia Ω un sottoinsieme aperto connesso di G. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 tale che

$$u \leq 0 \quad e \quad Lu \geq 0 \quad in\ \Omega$$

Supponiamo che esista un punto $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = 0$. Allora $u(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$.

3.2 Norme omogenee

Definizione 3.9 (Norma omogenea).
Chiamiamo norma omogenea sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$, ogni funzione continua $d : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ tale che:

1. $d(\delta_\lambda(x)) = \lambda\, d(x), \ \forall\, \lambda > 0$ e $x \in \mathbb{G}$

2. $d(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

   In più, diciamo che d è **simmetrica** se

3. $d(x^{-1}) = d(x) \;\; \forall \, x \in \mathbb{G}$

Esempio 3.1. *Definiamo*

$$|x|_{\mathbb{G}} := \left(\sum_{j=1}^{r} \left| x^{(j)} \right|^{\frac{2r!}{j}} \right)^{\frac{1}{2r!}}, \quad x = (x^{(1)}, ..., x^{(r)}) \in \mathbb{G} \tag{3.21}$$

dove $|x^j|$ *denota la norma euclidea su* $\mathbb{R}^{N_j}$. *Allora* $|\cdot|_{\mathbb{G}}$ *è una norma omogenea su* $\mathbb{G}$ *liscia fuori dall'origine. E' simmetrica se* $x^{-1} = -x \;\; \forall \, x \in \mathbb{G}$. *In generale, se* $\mathbb{G}$ *è un gruppo di Carnot (in cui l'inverso* x^{-1} *non è necessariamente uguale a* $-x$*) la mappa* $x \mapsto |Log(x)|_{\mathbb{G}}$ *è una norma omogenea simmetrica su* G *liscia fuori dall'origine. Questo segue dal fatto che* $Log(\delta_\lambda(x)) = \delta_\lambda(Log(x))$ *e* $Log(x^{-1}) = -Log(x)$

Dalla seguente elementare proposizione segue che tutte le norme omogenee su $\mathbb{G}$ sono equivalenti.

Proposizione 3.2.1.
Sia d *una norma omogenea su* $\mathbb{G}$. *Allora esiste una costante* c *tale che*

$$c^{-1}|x|_{\mathbb{G}} \leq d(x) \leq c|x|_{\mathbb{G}}$$

dove $|\cdot|_{\mathbb{G}}$ *è stata definita in (3.21)*

Dimostrazione. Per la δ_λ−omogeneità di d e $|\cdot|_{\mathbb{G}}$, la disuguaglianza vale prendendo $c := \max\{H, 1/h\}$, dove

$$H := \sup\{d(x) \;\text{ t.c. }\; |x|_{\mathbb{G}} = 1\}, \qquad h := \inf\{d(x) \;\text{ t.c. }\; |x|_{\mathbb{G}} = 1\}$$

Notiamo esplicitamente che $H < \infty$ e $h > 0$, dato che l'insieme

$$\{x \;\text{ t.c. }\; |x|_{\mathbb{G}} = 1\}$$

è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{G}$ non contenente l'origine e d è una funzione continua strettamente positiva in $\mathbb{G} \setminus \{0\}$. □

Corollario 3.2.2.
Per ogni fissata (non necessariamente simmetrica) norma omogenea d su $\mathbb{G}$, esiste una costante $c > 0$ tale che

$$c^{-1}\, d(x) \leq d(x^{-1}) \leq c\, d(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{G} \tag{3.22}$$

Dimostrazione. La funzione $x \mapsto d(x^{-1})$ è una norma omogenea su $\mathbb{G}$, perchè, ricordando che δ_λ è un automorfismo su $\mathbb{G}$ si ha

$$d((\delta_\lambda(x)^{-1}) = d(\delta_\lambda(x^{-1})) = \lambda\, d(x^{-1})$$

Applichiamo quindi a $x \mapsto d(x^{-1})$ la proposizione precedente: esiste una costante k tale che

$$k^{-1}|x|_{\mathbb{G}} \leq d(x^{-1}) \leq k|x|_{\mathbb{G}}$$

Applichiamo ora a $x \mapsto d(x)$ la proposizione precedente: esiste una costante h tale che

$$h^{-1}|x|_{\mathbb{G}} \leq d(x) \leq h|x|_{\mathbb{G}}$$

quindi

$$|x|_{\mathbb{G}} \leq hd(x) \quad e \quad h^{-1}d(x) \leq |x|_{\mathbb{G}}$$

Pertanto

$$k^{-1} \cdot h^{-1} \cdot d(x) \leq c^{-1}|x|_{\mathbb{G}} \leq d(x^{-1}) \leq c|x|_{\mathbb{G}} \leq k \cdot h \cdot d(x)$$

Definendo $c := k \cdot h$ otteniamo disuguaglianza (3.22). □

Una norma omogenea soddisfa una sorta di disuguaglianza pseudo-triangolare.

Proposizione 3.2.3.
Sia d una norma omogenea su $\mathbb{G}$. Allora esiste una costante $c > 0$ tale che:

1. $d(x \circ y) \leq c(d(x) - d(y))$

2. $d(x \circ y) \geq \frac{1}{c}d(x) - d(y^{-1})$

3. $d(x \circ y) \geq \frac{1}{c}d(x) - cd(y)$

per ogni x, $y \in \mathbb{G}$.

Dimostrazione. Per la $\delta_\lambda-$omogeneità di d, la prima disuguaglianza è equivalente alla seguente

$$d(x \circ y) \le c \qquad \text{se } d(x) + d(y) = 1$$

Questa disuguaglianza è vera prendendo

$$c := \max \{d(x \circ y) \ \text{ t.c. } \ d(x) + d(y) = 1\}$$

Ovviamente, $1 \le c < \infty$. Dalla disuguaglianza (1) otteniamo ora

$$d(x) = d((x \circ y) \circ y^{-1}) \le c(d(x \circ y) + d(y^{-1}))$$

da cui deriva (2). Infine, (3) segue da (2) attraverso il corollario (3.2.2) con un opportuno cambiamento della costante c. □

Ora, data una norma omogenea d_0 su $\mathbb{G}$, la funzione

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \ni (x, y) \to d(x, y) := d_0(y^{-1} \circ x)$$

è una pseudometrica su $\mathbb{G}$. Infatti, vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.2.4.
Con la notazione sopra, esiste una costante positiva $c > 0$ *tale che:*

1. $d(x, y) \le c\, d(y, x)$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{G}$ *(qui* c *può essere presa* $= 1$ *se e solo se* d_0 *è anche simmetrica);*

2. $d(x, y) \le c(d(x, z) + d(z, y))$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{G}$ *(la disuguaglianza pseudo-triangolare per* d*);*

3. $d(x, y) = 0$ *se e solo se* $x = y$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal corollario (3.2.2) e dalla proposizione (3.2.3) □

3.3 Soluzione Fondamentale

Definizione 3.10 (Soluzione Fondamentale).
Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot omogeneo su $\mathbb{R}^N$. Sia L un sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$. Una funzione $\Gamma : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è una soluzione fondamentale per L se:

1. $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$
2. $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\Gamma(x) \to 0$ quando $x \to \infty$
3. $L\Gamma = -Dirac_0$ dove $Dirac_0$ è la misura di Dirac con supporto in $\{0\}$. Più esplicitamente (ricordando che $L^* = L$):

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma\, L\varphi\, dx = -\varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3.23}$$

Teorema 3.3.1 (Teorema di esistenza).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$ (la cui dimensione omogenea Q è > 2). Allora esiste una soluzione fondamentale Γ per L.

Dimostrazione. La dimostrazione, che deriva dall'ipoellitticità di L, può essere trovata in [5], teorema 2.1. □

Dall'identità integrale (3.23) e dalla primma condizione della definizione (3.10) deriviamo immediatamente l'$L-$armonicità di Γ fuori dall'origine. Infatti, se sostituiamo in (3.23) una funzione test con supporto in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, per il fatto che Γ è liscia fuori dall'origine possiamo integrare per parti fuori dall'origine e ottenere:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (L\Gamma)\varphi\, dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$$

Questo ovviamente implica

$$L\Gamma = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Un semplice cambiamento di variabili e l'invarianza a sinistra di L rispetto alle traslazioni su $\mathbb{G}$ danno il seguente teorema.

Teorema 3.3.2 (Γ **inverso a sinistra di** L)**.**
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Se Γ è la soluzione fondamentale per L, allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x) L\varphi(x)\, dx = -\varphi(y) \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \ \ e\ \forall\, y \in \mathbb{R}^N$$

Dimostrazione. Il cambio di variabili $z = y^{-1} \circ x$ dà

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x) L\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z) L\varphi(y \circ z)\, dz \tag{3.24}$$

D'altra parte, essendo L invariante a sinistra su $\mathbb{G}$, allora

$$(L\varphi)(y \circ z) = L(\varphi(y \circ z))$$

Sostituendo questa identità in (3.24) e usando (3.23) con $\varphi(\cdot)$ sostituito con $\varphi(y \circ \cdot)$ otteniamo la tesi. □

Osservazione 12. Notiamo che l'identità integrale del teorema (3.3.2) significa che

$$L(\Gamma(y^{-1} \circ \cdot)) = -Dirac_y$$

nel senso debole delle distribuzioni. Qui $Dirac_y$ denota la misura di Dirac con supporto in $\{y\}$.

Teorema 3.3.3 (Γ **inverso a destra di** L)**.**
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogoeneo $\mathbb{G}$. Se Γ è la soluzione fondamentale per L, allora, $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, la funzione

$$\mathbb{R}^N \ni y \mapsto u(y) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x)\varphi(x)\, dx \tag{3.25}$$

è liscia e soddisa l'equazione

$$Lu = -\varphi$$

Per dimostrare questo teorema sono necessari alcuni prerequisiti.
Prima di tutto, notiamo che il cambiamento di variabili $z = y^{-1} \circ x$ nell'integrale (3.25) dà

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z)\varphi(y \circ z)\, dz$$

Possiamo derivare sotto il segno di integrale e dimostrare che la funzione u è di classe C^∞. Questo passaggio sotto il segno di integrale è giustificato dal teorema di Lebesgue, osservando che

$$|\Gamma(z)\, D^\alpha\varphi(y \circ z)| \leq \text{cost}$$

essendo Γ e $D^\alpha\,\varphi$ continue sul compatto $supp(\varphi)$.
In più, se $supp(\varphi) \subseteq \{x \;\text{ t.c. }\; d(x) \leq R\}$ (dove d denota una fissata norma omogenea su $\mathbb{G}$) allora:

$$|u(y)| \leq \sup\{|\Gamma(z)| \;\text{ t.c. }\; d(y \circ z) \leq R\} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(z)|dz =: C(y) \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(z)|dz \tag{3.26}$$

D'altra parte, dal corollario (3.2.2) e dalla proposizione (3.2.3)

$$d(z) \geq \frac{1}{c}d(y) - c\, d(y \circ z)$$

per una opportuna costante c indipendente da x, y, z. Di conseguenza

$$C(y) \leq \sup\left\{|\Gamma(z)| \;\text{ t.c. }\; d(z) \geq \frac{1}{c}d(y) - cR\right\}$$

cosicchè, dato che $\Gamma(z)$ si annulla quando z va all'∞, la disuguaglianza (3.26) implica

$$\lim_{y\to\infty} u(y) = 0 \tag{3.27}$$

Definizione 3.11 (**Mollificatore**).
Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ un gruppo di Carnot omogeneo su $\mathbb{R}^N$. Sia O un fissato aperto non vuoto, intorno dell'origine 0. E' data anche una funzione $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $J \geq 0$, tale che

$$supp(J) \subset 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} J = 1$$

Per ogni $\epsilon > 0$, poniamo $J_\epsilon(x) := \epsilon^{-Q} J(\delta_{1/\epsilon}(x))$.
Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Poniamo, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$u_\epsilon(x) := (u *_G J_\epsilon)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(y) J_\epsilon(x \circ y^{-1}) dy = \int_{\delta_\epsilon(O)} u(z^{-1} \circ x) J_\epsilon(z) dz$$

dove l'ultimo passaggio deriva dal cambiamento di variabili $y = z^{-1} \circ x$ e dal fatto che se $supp(J) \subset 0$ allora $supp(J_\epsilon) \subset \delta_\epsilon(0)$.
Chiamiamo u_ϵ **mollificatore di** u **relativo al nucleo** J. Notiamo che questo mollificatore dipende solo da $\mathbb{G}$ e da J.

Esempio 3.2. *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ *un gruppo di Carnot omogeneo su* $\mathbb{R}^N$. *Sia* ρ *una fissata norma omogenea simmetrica su* $\mathbb{G}$. *Diamo la seguente notazione che useremo da qui in avanti. Per ogni* $x \in \mathbb{G}$ *e per ogni* $r > 0$, *poniamo*

$$B_\rho(x, r) := \left\{ y \in \mathbb{G} \ \ t.c. \ \ \rho(x^{-1} \circ y) < r \right\}$$

Diciamo che $B_\rho(x, r)$ *è la* $\rho-$***palla con centro in*** x ***e raggio*** r.
Poi, fissato un punto $x \in \mathbb{G}$ *e un sottoinsieme* $A \subset \mathbb{G}$, *poniamo*

$$\rho - dist(x, A) := \inf \left\{ \rho(x^{-1} \circ a) \ \ t.c. \ \ a \in A \right\}$$

Chiamiamo $\rho - dist(x, A)$ *la* $\rho-$***distanza di*** x ***da A***.
Sia data ora una funzione $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $J \geq 0$ *tale che*

$$supp(J) \subset B_\rho(0, 1) \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} J = 1$$

Per qualsiasi $\varepsilon > 0$ *poniamo*

$$J_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-Q} J(\delta_{1/\varepsilon}(x))$$

Si ha che $supp(J_\varepsilon) \subseteq B_\rho(0, \varepsilon)$. *Sia* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. *Per l'aperto*

$$\Omega_\varepsilon := \{ x \in \Omega \ \ t.c. \ \ \rho - dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon \}$$

definiamo

$$u_\varepsilon(x) := (u *_G J_\varepsilon(x)) := \int_{B_\rho(x,\varepsilon)} u(y) J_\varepsilon(x \circ y^{-1}) dy = \int_{B_\rho(0,\varepsilon)} u(y^{-1} \circ x) J_\varepsilon dy$$

per qualsiasi $x \in \Omega_\varepsilon$.
Chiamiamo u_ε ***mollificatore di u (o*** $(\varepsilon, \mathbb{G})-$***mollificatore) relativo alla norma omogenea*** ρ. *Notiamo che questo mollificatore dipende solo da* $G = \left(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda\right)$, J *e* ρ.

Proposizione 3.3.4. *Sia fissata la notazione della definizione (3.11). Sia* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. *Allora vale:*

$$u_\varepsilon \to u \quad per\ \varepsilon \to 0 \quad in\ L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

Dimostrazione. Attraverso il cambiamento di variabili $y = \delta_{1/\varepsilon}(z)$ abbiamo

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\delta_\varepsilon(O)} u(z^{-1} \circ x)\varepsilon^{-Q} J(\delta_{1/\varepsilon}(z))dz = \int_O u(\delta_\varepsilon(y^{-1}) \circ x)J(y)dy$$

Di conseguenza (ricordando che $\int_O J = 1$) abbiamo che la norma L^1 vale:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x) - u(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\int_O u(\delta_\varepsilon(y^{-1}) \circ x)J(y)dy - u(x)\right| dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\int_O (u(\delta_\varepsilon(y^{-1}) \circ x) - u(x))J(y)dy\right| dx \leq \\ &\leq \int_O \left\{\int_{\mathbb{R}^N} |u(\delta_\varepsilon(y^{-1}) \circ x) - u(x)|dx\right\} J(y)dy\end{aligned}$$

Dato $\sigma > 0$, sappiamo che esiste $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\sigma, \mathbb{G}, O) > 0$ tale che se $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, allora l'integrale tra parentesi graffe è $\leq \sigma$ per ogni fissato $y \in O$. Questo prova che:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x) - u(x)|dx \leq \sigma \int_O J(y)dy = \sigma \quad \forall\, 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$$

$\square$

Proposizione 3.3.5 (L**-armonicità del mollificatore**).
Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ *un gruppo di Carnot omogeneo su* $\mathbb{R}^N$. *Sia* L *un sub-Laplaciano su* $\mathbb{G}$. *Sia* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *soluzione debole di* $Lu = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$, *cioè*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\, L\varphi\, dy = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3.28}$$

Allora

$$Lu_\varepsilon = 0 \quad in\ \mathbb{G} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \tag{3.29}$$

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che, essendo $supp(J_\varepsilon) \subset \delta_\varepsilon(O)$ vale

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y^{-1} \circ x) J_\varepsilon(y) dy$$

Allora, applicando il teorema di Fubini-Tonelli, per ogni funzione test φ

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x) L\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} L\varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(y^{-1} \circ x) J_\varepsilon(y) dy \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(y^{-1} \circ x)(L\varphi)(x) dx \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(z)(L\varphi)(y \circ z) dz \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(z)(L(z \mapsto \varphi(y \circ z)) dz \right) dy$$

L'integrale dentro parentesi tonde è uguale a 0 per (3.28). Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x) L\varphi(x) dx = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

cosicchè la tesi (3.29) segue dall'ipoellitticità di L e dal fatto che $L^* = L$. □

Attraverso la proposizione (3.3.5) è facile dimostrare l'unicità della soluzione fondamentale.

Teorema 3.3.6 (Unicità della soluzione fondamentale).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. La soluzione fondamentale di L (la cui esistenza è garantita nel teorema 3.3.1) è unica.

Dimostrazione. Siano Γ e Γ' soluzione fondamentali per L. Allora la funzione $u = \Gamma - \Gamma'$ ha le seguenti proprietà: $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $u(x) \to 0$ per $x \to \infty$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\, L\varphi\, dy = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Di conseguenza, per la proposizione (3.3.5), $Lu_\varepsilon = 0$ in $\mathbb{R}^N$ per ogni $\varepsilon > 0$. Dato che $u_\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to \infty$ (argomentando come nella dimostrazione di 3.27) il principio del massimo implica che $u_\varepsilon = 0$ in $\mathbb{R}^N$. D'altra parte $u_\varepsilon \to u$ per $\varepsilon \to 0$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (per osservazione 3.3.4). Allora $u = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$, quindi $\Gamma = \Gamma'$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. □

Dimostriamo ora che Γ è $\mathbb{G}-$simmetrica rispetto all'origine. Più precisamente, vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.3.7 (Simmetria di Γ).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia Γ la soluzione fondamentale di L. Allora

$$\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$$

Dimostrazione. Data $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ definiamo

$$u(x) := -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x) L\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{G}$$

La funzione u è liscia e va a 0 all'infinito (vedi 3.27). In più, per ogni $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} Lu(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)L\psi(x)dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N} Lu(x)\varphi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x) L\psi(x)dx \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} L\varphi(x)\psi(x)dx$$

dove l'ultimo passaggio deriva dall'invarianza a sinistra di Γ rispetto ad L. Questo prova che $L(u - \varphi) = 0$ in $\mathbb{G}$. Quindi, dato che $u - \varphi$ si annulla all'infinito, dal principio del massimo, $u = \varphi$ in $\mathbb{R}^N$. In particolare:

$$\varphi(0) = u(0) = -\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x) L\varphi(y) dy \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty$$

cosicchè $x \mapsto \Gamma(x^{-1})$ è la soluzione fondamentale di L. L'unicità della soluzione fondamentale implica che $\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x)$ per ogni $x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$. □

Ora possiamo dimostrare il teorema (3.3.3):

Dimostrazione. Sia u la funzione definita in (3.25). Allora $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, per ogni funzione test $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (Lu)(y)\psi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)L\psi(y)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} L\psi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x)\varphi(x)dx \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x)L\psi(y)dy \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x^{-1} \circ y)L\psi(y)dy \right) dx$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la proposizione (3.3.7) che ci assicura che $\Gamma(y^{-1} \circ x) = \Gamma((x^{-1} \circ y)^{-1}) = \Gamma(x^{-1} \circ y)$. Ora, dall'invarianza a sinistra di Γ, l'integrale dentro le parentesi tonde è uguale a $-\psi(y)$. Allora:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (Lu)(y)\psi(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\psi(x)dx \quad \forall\, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

□

Dall'unicità di Γ deriviamo facilmente la sua $\delta_\lambda-$omogeneità.

Proposizione 3.3.8. *Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia Γ la soluzione fondamentale di L. Allora Γ è $\delta_\lambda-$omogenea di grado 2-Q, cioè*

$$\Gamma(\delta_\lambda(x)) = \lambda^{2-Q}\Gamma(x) \quad \forall\, x \in G \setminus \{0\}\,, \;\; \forall\, \lambda > 0$$

Dimostrazione. Per ogni fissato $\lambda > 0$ definiamo

$$\Gamma'(x) := \lambda^{Q-2}\Gamma(\delta_\lambda(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$$

E' ovvio che $\Gamma' \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\Gamma'(x) \to 0$ per $x \to \infty$. In più, per ogni funzione test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma'(x)L\varphi(x)dx = \lambda^{Q-2} \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \Gamma(\delta_\lambda(x))L\varphi(x)dx =$$

(usando il cambiamento di variabili $y = \delta_\lambda(x)$),

$$= \lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y)(L\varphi)(\delta_{1/\lambda}(y))dy =$$

(essendo L è $\delta_\lambda-$omogeneo di grado 2)

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y)L(\varphi(\delta_{1/\lambda}(y)))dy =$$

(essendo Γ soluzione fondamentale)

$$= -\varphi(\delta_{1/\lambda}(0)) = -\varphi(0)$$

Questo prova che Γ' è una soluzione fondamentale di L. Allora $\Gamma = \Gamma'$. $\square$

Proposizione 3.3.9 (Positività di Γ).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia Γ la soluzione fondamentale di L. Allora

$$\Gamma(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \varphi \geq 0$. Definiamo

$$u(y) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x)\varphi(x)dx, \quad y \in \mathbb{G}$$

La funzione u è liscia, si annulla all'infinito e soddisfa l'equazione $Lu = -\varphi$. Allora

$$Lu \leq 0 \ \text{ in } \mathbb{G} \quad \text{e} \quad \lim_{y\to\infty} u(y) = 0$$

Dal principio del massimo (3.1.18) segue che $u \geq 0$ in $\mathbb{G}$. Quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x)\varphi(x)dx \geq 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \varphi \geq 0$$

Quindi $\Gamma \geq 0$, perciò, essendo $L-$armonica in $\mathbb{G}\setminus\{0\}$, il principio del massimo forte implica che $\Gamma \equiv 0$ o $\Gamma(x) > 0$ per qualsiasi $x \neq 0$. Il primo caso è in contraddizione con l'identità (3.23). Allora Γ deve essere maggiore di 0 in ogni punto di $\mathbb{G} \setminus \{0\}$. $\square$

Corollario 3.3.10 (**Polo di** Γ). *Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. La soluzione fondamentale Γ di L ha un polo in 0, cioè*

$$\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = \infty \tag{3.30}$$

Dimostrazione. Dato che Γ è liscia e strettamente positiva fuori dall'origine, abbiamo

$$h := \min \{\Gamma(x) \ \text{ t.c. } \ d(x) = 1\} > 0$$

dove d denota una fissata norma omogenea su G. Allora, dalla $\delta_\lambda-$omogeneità di Γ deriva (scegliendo $\lambda = 1/d(x)$)

$$\Gamma(x) = d(x)^{2-Q} \ \Gamma(\delta_{1/d(x)}(x)) \geq d^{2-Q}(x) \tag{3.31}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $d(\delta_{1/d(x)}(x)) = \frac{1}{d(x)} d(x) = 1$. Dalla disuguaglianza (3.31) segue immediatamente la tesi. □

3.4 L-gauge e funzioni L-radiali

Su ogni gruppo di Carnot omogeneo, esistono norme omogenee simmetriche liscie che giocano un ruolo fondamentale per i sub-Laplaciani. Chiamiamo queste norme *gauges*, in accordo con la seguente definizione.

Definizione 3.12 (L-**gauge**).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Chiamiamo $L - gauge$ su $\mathbb{G}$ una norma d-omogenea simmetrica liscia fuori dall'origine che soddisfa

$$L(d^{2-Q}) = 0 \quad in \ \ \mathbb{G} \setminus \{0\} \tag{3.32}$$

Definizione 3.13 (**Funzione** L-**radiale**).
Una funzione radiale su $\mathbb{G}$ è una funzione $u : \mathbb{G} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = f(d(x)) \quad \forall \, x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$$

per una oppurtuna $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ed una data L-gauge d su $\mathbb{G}$.

Le $L-$gauge sono profondamente in relazione con la soluzione fondamentale Γ.

Proposizione 3.4.1. *Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$. Sia Γ una soluzione fondamentale di L. Allora*

$$d(x) := \begin{cases} (\Gamma(x))^{1/(2-Q)} & \text{se } x \in \mathbb{G} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è una L-gauge su $\mathbb{G}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che valgono tutte le condizioni:

1. d è una norma omogenea simmetrica. Infatti, per $x = 0$ è ovvio, e per $x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$ vale
   - $d(\delta_\lambda(x)) = (\Gamma(\delta_\lambda(x)))^{\frac{1}{2-Q}} = (\lambda^{2-Q}\Gamma(x))^{\frac{1}{2-Q}} = \lambda\Gamma(x)^{\frac{1}{2-Q}} = \lambda\, d(x)$
   - $d(x) > 0$ perchè $\Gamma(x) > 0$
   - $d(x) = d(x^{-1})$ perchè $\Gamma(x) = \Gamma(x^{-1})$.
2. Per $x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$ vale $L(d^{2-Q}) = L(\Gamma) = 0$, e, per $x = 0$, $L(d^{2-Q}) = L(0) = 0$
3. Γ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ quindi anche d è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

□

Se ρ è una qualsiasi norma omogenea (sufficientemente liscia) su $\mathbb{G}$, l'integrazione di una funzione $\rho-$radiale su un dominio $\rho-$radialmente simmetrico si riduce ad un'integrazione di una funzione di una singola variabile.

Proposizione 3.4.2.
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia ρ una qualsiasi norma omogenea su $\mathbb{G}$ liscia su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$. Sia $f(\rho)$ una funzione

definita su $B_\rho(0,r) = \{x \in \mathbb{G} \ \ t.c. \ \ \rho(x) < r\}$.
Allora, se $f(\rho) \in L^1(B_\rho(0,r))$*, vale*

$$\int_{B_{\rho(0,r)}} f(\rho(x))dx = Qw_\rho \int_0^r s^{Q-1} f(s)ds$$

dove w_ρ *denota la misura di Lebesgue di* $B_\rho(0,1)$

Dimostrazione. La formula di Coarea dà

$$\int_{B_{\rho(0,r)}} f(\rho(x))dx = \int_0^r f(s) \left(\int_{\{\rho=s\}} \frac{1}{|\nabla\rho|} dH^{N-1} \right) ds \tag{3.33}$$

D'altra parte, usando la $\delta_\lambda-$omogeneità di ρ abbiamo

$$\int_0^r \left(\int_{\{\rho=s\}} \frac{1}{|\nabla\rho|} dH^{N-1} \right) ds = |B_\rho(0,r)| = w_\rho r^Q$$

per ogni r>0. Derivando entrambi i membri dell'identità rispetto alla variabile r, otteniamo

$$\int_{\{\rho=s\}} \frac{1}{|\nabla\rho|} dH^{N-1} = Qw_\rho r^{Q-1}$$

Usando questa identità in (3.33) otteniamo la tesi. □

Corollario 3.4.3. *Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo* $\mathbb{G}$*. Sia* ρ *una qualsiasi norma omogenea su* $\mathbb{G}$*. La funzione* ρ^α *è localmente integrabile in* $\mathbb{R}^N$ *se e solo se* $\alpha > -Q$*.*

Dimostrazione. Se ρ è anche liscia su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$ per la proposizione precedente, prendendo $f(\rho) = \rho^\alpha$, abbiamo

$$\int_{B_{\rho(0,r)}} \rho^\alpha(x)dx = Qw_\rho \int_0^r s^{Q+\alpha-1} ds$$

e l'asserzione segue in modo triviale.
Se ρ è invece solo continua non è possibile applicare la proposizione precedente. Se $\alpha \geq 0$, l'asserzione è triviale (perchè ρ^α continua su un compatto, quindi limitatata). Se $\alpha < 0$, abbiamo

$$\int_{B_\rho(0,r)} \rho^\alpha(x)dx = \sum_{k=0}^{N} \int_{r/2^{k+1} \leq \rho \leq r/2^k} \rho^\alpha(x)dx$$

$$\leq r^{\alpha} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^{k\alpha}} \int_{r/2^{k+1} \leq \rho \leq r/2^k} dx =$$

(usando il cambiamento di variabile $x = \delta_{r/2^k}(y)$)

$$= r^{\alpha} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^{k\alpha}} \left(\frac{r}{2^k}\right)^Q \int_{1/2 \leq \rho(y) \leq 1} dy =$$

$$= c_\rho r^Q r^\alpha \sum 2^{-k\alpha - kQ}$$

Se $\alpha > -Q$ la serie geometrica è convergente, quindi ρ^α è integrabile su $B_\rho(0, r)$. L'asserzione inversa segue dallo stesso calcolo, prendendo la minorazione invece della maggiorazione. □

Esempio 3.3 ($\Delta-$**gauge**).
L'operatore classico di Laplace in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$,

$$\Delta := \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^2$$

è il sub-Laplaciano canonico sul gruppo Euclideiano

$$\mathbb{E} := \left(\mathbb{R}^N, +, \delta_\lambda\right)$$

con $\delta_\lambda x = \lambda\, x$. *La dimensione omogenea di* $\mathbb{E}$ *è* N *e una funzione* $\Delta-$*gauge è la norma Euclideiana*

$$x \mapsto |x| := \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2\right)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_N)$$

Infatti, $|\cdot|$ *è liscia e strettamente positiva fuori dall'origine,* $\delta_\lambda-$*omogenea di grado 1 e*

$$\Delta(|x|^{2-N}) = 0 \quad \forall\, x \neq 0$$

3.5 Formula di media di superficie

Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$, e sia d una $L-$gauge.
Per ogni $x \in \mathbb{G}$ e $r > 0$, ricordiamo la definizione di d-palla di centro x e raggio r:

$$B_d(x,r) := \left\{ y \in \mathbb{G} \;\; t.c. \;\; d(x^{-1} \circ y) < r \right\}$$

Allora

$$B_d(x,r) = x \circ B_d(0,r)$$

Usando l'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue (proposizione (3.1.11) e la $\delta_\lambda-$omogeneità di d, si riconosce facilmente che

$$|B_d(x,r)| = r^Q |B_d(0,1)| =: w_d r^Q \tag{3.34}$$

Infatti, usando il cambio di variabili $\delta_{1/r}(x^{-1} \circ y) = z$:

$$|B_d(x,r)| = \int_{B_d(x,r)} dy = \int_{d(x^{-1} \circ y) < r} dy = r^Q \int_{d(z)<1} dz = r^Q w_d$$

Infine notiamo che

$$\partial B_d(x,r) := \left\{ y \in G \;\; t.c. \;\; d(x^{-1} \circ y) = r \right\}$$

è una varietà liscia di dimensione N-1. Infatti, dal lemma di Sard, questo vale per quasi ogni $r > 0$. L'asserzione allora segue per ogni $r > 0$, dato che $\partial B_d(x,r)$ è diffeomorfo a $\partial B_d(x,1)$, attraverso la dilatazione δ_r.

Definizione 3.14 (**Nuclei delle formule di media**).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$, e sia d una $L-$gauge. Poniamo, per $x \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$

$$\Psi_L(x) := |\nabla_L d|^2(x)$$

In più, per ogni $x, y \in \mathbb{G}$, con $x \neq y$, definiamo le funzioni

$$\Psi_L(x,y) := \Psi_L(x^{-1} \circ y) \quad e \quad K_L(x,y) := \frac{|\nabla_L d|^2(x^{-1} \circ y)}{\nabla(d(x^{-1} \circ \cdot))|(y)}$$

Notiamo esplicitamente che Ψ_L è δ_λ−omogenea di grado zero. Inoltre, mentre Ψ_L è invariante per traslazione ($\Psi_L(\alpha \circ x, \alpha \circ y) = \Psi_L(x,y)$), la funzione K_L non necessariamente gode della stessa proprietà.
In più, osserviamo che quando L è l'operatore di Laplace Δ, allora $\Psi_L = K_L = 1$.

Teorema 3.5.1 (Identità di Green).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto regolare e siano u, v due funzioni di classe $C^2(\Omega)$. Allora [5]

$$\int_\Omega (vLu - uLv) dH^N = \int_{\partial\Omega} (v < A \cdot \nabla^T u, \nu > -u < A \cdot \nabla^T u, \nu >) dH^{N-1}$$

dove dH^N (rispettivamente dH^{N-1}) è la misura di Hausdorff in $\mathbb{R}^N$ N-dimensionale (rispettivamente (N-1)-dimensionale)

Dimostrazione. Usando il sub-Laplaciano nella seguente forma

$$L = div(A(x) \cdot \nabla^T)$$

otteniamo

$$v\,Lu - u\,Lv = div(v\,A \cdot \nabla^T u) - div(u\,A \cdot \nabla^T v)$$

Integrando ora su Ω e usando poi il teorema della divergenza (1.2.2), otteniamo l'identità di Green. □

[5] Un altro modo di scrivere l'identità di Green è il seguente:
se $L = \sum_{j=1}^m X_j^2$ abbiamo

$$\int_\Omega (v\,Lu - u\,Lv)\,dH^N =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(v \sum_{j=1}^m X_j u < X_j I, \nu > - u \sum_{j=1}^m X_j v < X_j I, \nu > \right) dH^{N-1}$$

Questo segue dal fatto che A è una matrice simmetrica $N \times N$, $A(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$, dove $\sigma(x)$ è la $N \times m$ matrice le cui colonne sono $X_1 I(x), ..., X_m I(x)$

Osservazione 13. Scegliendo $v \equiv 1$ nell'identità di Green otteniamo

$$\int_\Omega Lu\, dH^N = \int_{\partial\Omega} < A \cdot \nabla^T u, v > dH^{N-1} \tag{3.35}$$

cosicchè

$$\int_\Omega Lu\, dH^N = 0 \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.36}$$

Teorema 3.5.2 (**Formula di media di superficie**).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$, e sia d un L-gauge su $\mathbb{G}$. Sia O un sottoinsieme aperto di $\mathbb{G}$, e sia u una funzione di classe $C^2(O, \mathbb{R})$.
Allora, per ogni $x \in O$ e $r > 0$ tali che $\overline{B_d(x,r)} \subset O$, abbiamo

$$u(x) = m_r(u)(x) - n_r(Lu)(x) \tag{3.37}$$

dove

$$m_r(u)(x) = \frac{(Q-2)\beta_d}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(x,r)} K_L(x,z) u(z) dH^{N-1}(z)$$

$$n_r(w)(x) = \beta_d \int_{B_d(x,r)} (d^{2-Q}(x^{-1} \circ z) - r^{2-Q}) w(z) dH^N(z)$$

con

$$(\beta_d)^{-1} := (Q-2) \int_{\partial B_d(0,1)} K_L(0, \cdot) dH^{N-1} \tag{3.38}$$

In particolare, se $Lu = 0$, cioè u è $L-$armonica in O, abbiamo

$$u(x) = m_r(u)(x) \tag{3.39}$$

Dimostrazione. Per $0 < \varepsilon < r$ definiamo il $d-$anello

$$D_{\varepsilon,r} := B_d(x,r) \setminus \overline{B_d(x,\varepsilon)} = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \text{ t.c. } \varepsilon < d(x^{-1} \circ y) < r \right\}$$

Applichiamo l'identità di Green ad u e alla funzione $v := d^{2-Q}(x^{-1} \circ \ \cdot)$ sull'insieme aperto $D_{\varepsilon,r}$. Essendo d una $L-$gauge, si ha $Lv = 0$. Pertanto:

$$\int_{D_{\varepsilon,r}} (v\, Lu)\, dH^N = \int_{\partial D_{\varepsilon,r}} (v < A \cdot \nabla^T u, \nu > - u < A \cdot \nabla^T u, \nu >) dH^{N-1} =$$

$$= S_r(u) - S_\varepsilon(u) + T_\varepsilon(u) - T_r(u) \tag{3.40}$$

dove

$$S_\rho(u) := \int_{\partial B_d(x,\rho)} v < A \cdot \nabla^T u, \nu > dH^{N-1}$$

$$T_\rho(u) := \int_{\partial B_d(x,\rho)} u < A \cdot \nabla^T v, \nu > dH^{N-1}$$

Essendo $v = d^{2-Q}(x^{-1} \circ \cdot)$ costante su $\partial B_d(x,r)$, dall'osservazione (13) si trae:

$$S_\rho(u) := \rho^{2-Q} \int_{\partial B_d(x,\rho)} < A \cdot \nabla^T u, \nu > dH^{N-1} = \rho^{2-Q} \int_{B_d(x,\rho)} Lu \, dH^N$$

Quindi, utilizzando l'identità (3.34),

$$S_\varepsilon(u) = \varepsilon^{2-Q} \int_{B_d(x,\varepsilon)} Lu \, dH^N \leq$$

$$\leq sup|Lu| \cdot |B_d(x,\varepsilon)| \cdot \varepsilon^{2-Q} =$$

$$= sup|Lu| \cdot w_d \varepsilon^Q \cdot \varepsilon^{2-Q}$$

$$\Rightarrow S_\varepsilon(u) = \varepsilon^2 O(|Lu|) \longrightarrow 0 \quad per \;\; \varepsilon \to 0 \tag{3.41}$$

Per calcolare $T_\rho(u)$ notiamo ora che su $\partial B_d(x,\rho)$ si ha

$$\nu = \frac{\nabla(d(x^{-1} \circ \ \cdot))}{|\nabla(d(x^{-1} \circ \ \cdot))|}$$

e

$$< A \cdot \nabla^T d^{2-Q}(x^{-1} \circ \ \cdot), \nu >=< A \cdot (2-Q) d^{1-Q}(x^{-1} \circ \ \cdot) \cdot \nabla^T d(x^{-1} \circ \ \cdot), \nu >=$$

$$= (2-Q) d^{1-Q}(x^{-1} \circ \cdot) \frac{< A \cdot \nabla^T(d(x^{-1} \circ \cdot)), \nabla^T(d(x^{-1} \circ \cdot)) >}{|\nabla(d(x^{-1} \circ \cdot))|} =$$

$$= (2-Q) \rho^{1-Q} \frac{\Psi_L(x^{-1} \circ \cdot)}{|\nabla(d(x^{-1} \circ \cdot))|}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il fatto che $|\nabla_L u|^2 = \sum_{j=1}^m |X_j u|^2 =< A\nabla^T u, \nabla^T u >$ e $d^{1-Q}(x^{-1} \circ \cdot) = \rho^{1-Q}$).

Quindi:

$$T_\rho(u) = (2-Q)\rho^{1-Q}\int_{\partial B_d(x,\rho)} u(y)K_L(x,y)dH^{N-1}(y)$$

cosicchè

$$T_\varepsilon(u) = (2-Q)\varepsilon^{1-Q}\left[\int_{\partial B_d(x,\varepsilon)}(u(y)-u(x))K_L(x,y)+\int_{\partial B_d(x,\varepsilon)}u(x)K_L(x,y)\right] =$$

$$= (2-Q)\varepsilon^{1-Q}\int_{\partial B_d(x,\varepsilon)}K_L(x,y)(u(x)+o(1)) \quad per \ \ \varepsilon\to 0$$

Pertanto

$$T_\varepsilon(u) = T_\varepsilon(1)(u(x)+o(1)) \quad per \ \ \varepsilon\to 0 \tag{3.42}$$

Per calcolare $T_\varepsilon(1)$, osserviamo che la formula 3.40 con $u=1$ dà

$$T_\varepsilon(1) = T_r(1) \quad per \ \ 0,\varepsilon < r < \infty \tag{3.43}$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$

$$T_\varepsilon(1) = T_1(1) = (2-Q)\int_{\partial B_d(x,1)}K_L(x,\cdot)dH^{N-1} \tag{3.44}$$

Infine, essendo $2-Q > -Q$, si ha, per il corollario (3.4.3), che $v = d^{2-Q}(x,\cdot)\in L^1(B_d(x,r))$. Pertanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_{\varepsilon,r}} vLu\,dH^N = \int_{D_{0,r}} vLu\,dH^N \tag{3.45}$$

Quindi, per $\varepsilon\to 0$ l'identità (3.40) unita a (3.41), (3.42), (3.44), (3.45), dà

$$\int_{B_d(x,r)} vLu\,dH^N = S_r(u) + T_1(1)u(x) - T_r(u) = r^{2-Q}\int_{B_d(x,r)} Lu\,dH^N +$$

$$+ T_1(1)u(x) - (2-Q)r^{1-Q}\int_{\partial B_d(x,r)} uK_L(x,\cdot)dH^{N-1} \tag{3.46}$$

Osserviamo ora che $T_1(1)$ non dipende da x, cioè:

$$-T_1(1) = (Q-2)\int_{\partial B_d(x,1)} K_L(x,\cdot)dH^{N-1} =$$

$$= (Q-2)\int_{\partial B_d(0,1)} K_L(0,\cdot)dH^{N-1} =$$

$$= (\beta_d)^{-1}$$

Infatti:

$$T_1(1)\frac{1}{Q} = \int_0^1 T_r(1)r^{Q-1}dr = (2-Q)\int_0^1\int_{\partial B_d(x,r)} K_L(x,y)dH^{N-1}(y)dr =$$

$$= (2-Q)\int_{B_d(x,1)} \Psi_L(x,y)dH^{N-1}(y) = (2-Q)\int_{B_d(0,1)} \Psi_L dH^N$$

dove abbiamo usato la definizione di Ψ_L e K_L, l'invarianza a sinistra di Ψ_L e la formula di Coarea. Abbiamo anche provato che

$$(\beta_d)^{-1} = Q(Q-2)\int_{\beta_d(0,1)} \Psi_L dH^N$$

Quindi dall'identità (3.46) otteniamo

$$u(x) = \frac{(Q-2)\beta_d}{r^{Q-1}}\int_{\partial B_d(x,r)} uK_L(x,\cdot)dH^{N-1} - \beta_d\int_{B_d(x,r)} (d^{2-Q}(x^{-1}\circ\cdot) - r^{2-Q})LudH^N$$

□

Osservazione 14. Quando $L = \Delta$ è l'operatore di Laplace classico in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ si ha che $\Psi_L = K_L = 1$ e $Q = N$. Allora, in questo caso

$$(\beta_d)^{-1} = Q(Q-2)|B(0,1)| = N(N-2)|B(0,1)|$$

Perciò

$$m_r(u(x)) = \frac{(N-2)}{N(N-2)w_d r^{N-1}} \cdot \int_{|x-y|=r} u(z)dH^{N-1}(z)$$

e

$$n_r(\Delta u)(x) = \frac{1}{N(N-2)|B(0,1)|}\int_{|x-z|<r} \left(|z-x|^{2-N} - r^{2-N}\right) dH^N =$$

$$= \frac{1}{N(N-2)|B(0,1)|}\int_{|x-z|<r} (\Gamma - \Gamma(r))\,\Delta u\, dH^N$$

L'identità (3.37) dà quindi, in questo caso, la formula di rappresentazione (1.11) di una funzione C^2 sui dischi.
Se $\Delta u = 0$, l'equazione (3.39) ci dà

$$u(x) = \frac{1}{N w_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(y)\, dH^{N-1}(y)$$

cioè vale il teorema (1.3.1) della formula di media di superficie per le funzioni armoniche classiche.

Teorema 3.5.3 (**Unicità dell'**L**-gauge**).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia d una $L-$gauge su $\mathbb{G}$, e sia β_d la costante positiva definita in (3.38). Allora:

$$\Gamma = \beta_d\, d^{2-Q} \tag{3.47}$$

è la soluzione fondamentale di L.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e scegliamo $r > 0$ tale che $supp(\varphi) \subset B_d(0,r)$. Allora, dalla formula di media di superficie (3.37) applicata a φ, essendo $\varphi \equiv 0$ su $\partial B_d(0,r)$, otteniamo

$$\varphi(0) = -\beta_d \int_{B_d(0,r)} \left(d^{2-Q}(z) - r^{2-Q}\right) L\varphi(z)\, dH^N(z)$$

D'altra parte, dal'identità (3.36), moltiplicando per r^{2-Q} otteniamo

$$\int_{B_d(0,r)} r^{2-Q} L\varphi\, dH^N = 0$$

Allora, se Γ è la funzione definita in (3.47), grazie al corollario (3.4.3), $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ perchè $2-Q > -Q$ e

$$-\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z) L\varphi(z)\, dH^N(z)$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. In più Γ è liscia in $G \setminus \{0\}$ e $\Gamma(z) \to 0$ per $z \to \infty$, dato che $Q-2>0$. Quindi, Γ è la soluzione fondamentale di L. $\square$

3.6 Formula di media di volume

Teorema 3.6.1 (Formula di media di volume).
Sia L un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$ e sia d una L-gauge su $\mathbb{G}$. Sia O un sottoinsieme aperto di $\mathbb{G}$ e sia $u \in C^2(O, \mathbb{R})$.
Allora, per ogni $x \in O$ e $r > 0$ tali che $\overline{B_d(x,r)} \subset O$, abbiamo

$$u(x) = M_r(u)(x) - N_r(Lu)(x) \tag{3.48}$$

dove

$$M_r(u)(x) = \frac{m_d}{r^Q} \int_{B_d(x,r)} \Psi_L(x^{-1} \circ y) u(y) dH^N(y)$$

$$N_r(w)(x) = \frac{n_d}{r^Q} \int_0^r \rho^{Q-1} \left(\int_{B_d(x,\rho)} \left(d^{2-Q}(x^{-1} \circ y) - \rho^{2-Q} \right) w(y) dy \right) d\rho$$

con

$$m_d := Q(Q-2)\beta_d \qquad n_d := Q\,\beta_d$$

In particolare, se $Lu = 0$, cioè u è $L-$armonica in O, abbiamo

$$u(x) = M_r(u)(x) \tag{3.49}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$O_r := \{x \in O \ \text{ t.c. } \ d - dist(x, \partial O) > r\}$$

dove

$$d - dist(x, \partial O) := \inf_{y \in \partial O} d(y^{-1} \circ x)$$

Dato che le d-palle sono connesse, si riconosce facilmente che $B_d(x,\rho) \subseteq O$ per ogni $x \in O$ e $0 < \rho < d - dist(x, \partial O)$. Segue che

$$\overline{B_d(x,\rho)} \subseteq O \quad \forall\, x \in O_r \;\; e \;\; 0 < \rho \le r$$

Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione L^1 che si annulla fuori dall'intervallo $]0,1[$ e tale che $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Per $r > 0$ definiamo

$$\varphi_r(t) := \frac{1}{r} \varphi\left(\frac{t}{r}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Consideriamo ora la funzione $u \in C^2(O)$. Allora, se $x \in O_r$ da (3.37) otteniamo

$$u(x) = m_\rho(u)(x) - n_\rho(Lu)(x) \quad per \;\; 0 < \rho \leq r \tag{3.50}$$

Ora moliplichiamo entrambi i membri dell'identità per $\varphi_r(\rho)$ e integriamo rispetto a ρ. Otteniamo

$$u(x) = \Phi_r(u)(x) - \Phi_r^*(Lu)(x), \quad x \in O_r$$

dove

$$\Phi_r(u)(x) := \int_0^\infty \varphi_r(\rho) m_\rho(u)(x) d\rho$$

e

$$\Phi_r^*(u)(x) := \int_0^\infty \varphi_r(\rho) n_\rho(u)(x) d\rho$$

Usando la formula di Coarea, l'operatore Φ_r può essere riscritto come segue:

$$\begin{aligned}
\Phi_r(u)(x) = & \int_0^\infty \varphi_r(\rho) m_\rho(u)(x) d\rho = \\
= & \int_0^\infty \varphi_r(\rho) \left[\frac{(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-1}} \int_{\partial B_d(x,\rho)} K_L(x,z) u(z) dH^{N-1}(z) \right] d\rho = \\
= & \int_0^\infty \varphi_r(\rho) \left[\int_{d(x^{-1}\circ z)=\rho} \frac{(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-1}} \cdot \frac{\Psi_L(x^{-1}\circ z)}{|\nabla d|} u(z) dH^{N-1}(z) \right] d\rho = \\
= & \int_0^\infty \frac{(Q-2)\beta_d}{d(x^{-1}\circ z)^{Q-1}} u(z) \Psi_L(x^{-1}\circ z) \frac{1}{r} \varphi\left(\frac{d(x^{-1}\circ z)}{r} \right)
\end{aligned}$$

Ora:

- Ψ_L è $\delta_\lambda-$omogenea di grado zero, quindi $\Psi_L(x^{-1}\circ z) = \Psi_L\left(\delta_{1/r}(x^{-1}\circ z)\right)$

- d è $\delta_\lambda-$omogenea di grado 1, quindi

$$d(x^{-1}\circ z)^{Q-1} = \left(\frac{1}{r}\right)^{1-Q} \cdot d\left(\delta_{1/r}(x^{-1}\circ z)\right)^{Q-1}$$

e

$$\frac{d(x^{-1}\circ z)}{r} = d\left(\delta_{1/r}(x^{-1}\circ z)\right)$$

Perciò

$$\Phi_r(u)(x) = \int_0^\infty \frac{(Q-2)\beta_d}{d(x^{-1}\circ z)^{Q-1}} u(z)\Psi_L(x^{-1}\circ z)\frac{1}{r}\varphi\left(\frac{d(x^{-1}\circ z)}{r}\right) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(Q-2)\beta_d}{\left(\frac{1}{r}\right)^{1-Q}\cdot d\left(\delta_{\frac{1}{r}}(x^{-1}\circ z)\right)^{Q-1}} u(z)\Psi_L\left(\delta_{\frac{1}{r}}(x^{-1}\circ z)\right)\frac{1}{r}\varphi\left(d\left(\delta_{\frac{1}{r}}(x^{-1}\circ z)\right)\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(z)\phi_r(x^{-1}\circ z)dz$$

con

$$\phi_r(z) := r^{-Q}\,\phi(\delta_{1/r}(z)) \tag{3.51}$$

e

$$\phi(z) := (Q-2)\,\beta_d\,\Psi_L(z)\,\frac{\varphi(d(z))}{d(z)^{Q-1}} \tag{3.52}$$

Notiamo che ϕ si annulla fuori da $B_d(0,1)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N}\phi(z)dz = (Q-2)\beta_d\int_0^\infty \frac{\varphi(\rho)}{\rho^{Q-1}}\left(\int_{d(z)=\rho}\frac{|\nabla_L d(z)|^2}{|\nabla d(z)|}dH^{N-1}(y)\right)d\rho =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\rho)d\rho = 1$$

dove abbiamo usato (3.38), la definizione (3.14) e la formula di Coarea. Se la funzione φ è liscia e il suo supporto è contenuto in $[0,1]$, allora $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $supp(\phi) \subseteq B_d(0,1)$ e $\int \phi(z)dz = 1$. Grazie a queste proprietà la mappa $x \mapsto \Phi_r(u)(x)$ è la regolarizzata di u, e perciò è liscia se $u \in L^1_{loc}(O)$. Osserviamo che la funzione $z \mapsto \phi_r(x^{-1}\circ z)$ si annulla fuori da $B_d(x,r)$. Di conseguenza, se $x \in O_r$, l'integrale

$$\Phi_r(u)(x) = \int_{B_d(x,r)} u(z)\phi_r(x^{-1}\circ z)dz$$

è fatto su un insieme compatto contenuto in O, dato che $\overline{B_d(x,r)} \subseteq O$.
Se scegliamo

$$\varphi(t) = \begin{cases} Q\,t^{Q-1} & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora

$$\Phi_r(u)(x) = \int_{B_d(x,r)} u(z) r^{-Q}(Q-2)\beta_d \Psi_L\left((x^{-1}\circ z)\right) \frac{\varphi\left(d\left(\delta_{1/r}(x^{-1}\circ z)\right)\right)}{d\left(\delta_{1/r}(x^{-1}\circ z)\right)^{Q-1}} dz =$$

$$= \int_{B_d(x,r)} u(z) r^{-Q}(Q-2)\beta_d \Psi_L\left((x^{-1}\circ z)\right) \frac{Q\left[d\left(\delta_{1/r}(x^{-1}\circ z)\right)\right]^{Q-1}}{d\left(\delta_{1/r}(x^{-1}\circ z)\right)^{Q-1}} dz =$$

$$= \frac{1}{r^Q} Q(Q-2)\beta_d \int_{B_d(x,r)} \Psi_l(x^{-1}\circ z) u(z) dz =: M_r(u)(x)$$

e

$$\Phi_r^*(w)(x) = \int_0^\infty \varphi_r(\rho) n_\rho(w)(x) d\rho =$$

$$= \int_0^\infty \varphi_r(\rho)\beta_d \int_{B_d(x,\rho)} \left(d^{2-Q}(x^{-1}\circ z) - \rho^{2-Q}\right) w(z) dH^N(z) d\rho =$$

$$= \int_0^r \frac{1}{r} Q\, \rho^{Q-1}\, r^{1-Q} \beta_d \int_{B_d(x,\rho)} \left(d^{2-Q}(x^{-1}\circ z) - \rho^{2-Q}\right) w(z) dH^N(z) d\rho =$$

$$= \frac{Q\beta_d}{r^Q} \int_0^r \rho^{Q-1} \left(\int_{B_d(x,\rho)} \left(d^{2-Q}(x^{-1}\circ y) - \rho^{2-Q}\right) w(y) dy \right) d\rho =: N_r(w)(x)$$

Sostituendo in (3.50) otteniamo (3.48). □

Osservazione 15. Quando $L = \Delta$ è l'operatore di Laplace classico in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, si ha $\Psi_L \equiv 1$. Allora, in questo caso

$$M_r(u)(x) = \frac{1}{w_N} r^N \int_{|x-y|<r} u(y) dy$$

e (3.49) ci dà il teorema della media di volume (1.3.2) per le funzioni armoniche classiche.

3.7 Conseguenze delle formule di media

I teoremi di media dati dalle identità (3.39) e (3.49) caratterizzano le funzioni $L-$armoniche. Vale, infatti, il seguente teorema di Koebe.

Teorema 3.7.1 (Koebe).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$, e sia d una $L-$gauge. Sia O un sottoinsieme aperto di $\mathbb{G}$, e sia $u : O \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Assumiano che una delle seguenti condizioni sia soddisfatta:

1. $u(x) = m_r(u)(x)$ *per ogni* $x \in O$ *e* $r > 0$ *tali che* $\overline{B_d(x,r)} \subset O$.

2. $u(x) = M_r(u)(x)$ *per ogni* $x \in O$ *e* $r > 0$ *tali che* $\overline{B_d(x,r)} \subset O$.

Allora $u \in C^\infty(O)$ *e*

$$Lu = 0 \quad \textit{in } O$$

Dimostrazione. Assumiamo che sia soddisfatta la prima condizione. Allora:

$$u(x) = m_\rho(u)(x) \quad \textit{per } 0 < \rho \leq r$$

Sia $\varphi \in C_0^\infty([0,1],\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Moltiplicando entrambi i membri per $\varphi_r(\rho) = \varphi(\rho/r)/r$ e integrando poi rispetto a ρ otteniamo

$$u(x) = \Phi_r(u)(x) \quad \forall\, x \in O$$

dove $\Phi_r(u)$ è l'operatore integrale definito in (3.51). Otteniamo così:

$$u(x) = \int_0 u(z)\phi_r(x^{-1} \circ z)dz$$

dove $\phi_r(z) = r^{-Q}\phi(\delta_{1/r}(z))$ e ϕ è la funzione liscia definita in (3.52). Segue che $u \in C^\infty(O)$ (visto nella dimostrazione precedente).
La prima condizione e l'identità (3.37) danno

$$n_r(Lu)(x) = 0 \qquad \forall\, x \in O \text{ tale che } \overline{B_d(x,r)} \subset O$$

Dato che il nucleo che appare nell'operatore n_r è strettamente positivo, questo implica $Lu = 0$ in O. Allora il teorema è provato.
Ora assumiamo che valga la seconda condizione. Dato che $\rho \mapsto m_\rho(u)(x)$ è continua su $(0,r]$ e

$$M_r(u)(x) = \frac{Q}{r^Q}\int_0^r \rho^{Q-1}\, m_\rho(u)(x)d\rho$$

dalla seconda condizione otteniamo

$$\begin{aligned} Q\, r^{Q-1} u(x) &= \frac{d}{dr}(r^Q\, u(x)) = \frac{d}{dr}(r^Q\, M_r(u)(x)) = \\ &= Q\frac{d}{dr}\int_0^r \rho^{Q-1}\, m_\rho(u)(x) d\rho = \\ &= Q r^{Q-1} m_r(u)(x) \end{aligned}$$

Quindi, $u(x) = m_r(u)(x)$ per ogni $x \in O$ e $r > 0$ tali che $\overline{B_d(x,r)} \subset O$. Allora u soddisfa la prima condizione, cosicchè $u \in C^\infty(O)$ e $Lu = 0$. $\square$

Dimostriamo ora le disuguaglianze di Harnack per i sub-Laplaciani. Dobbiamo premettere il seguente lemma, che ci permette di comparare la media su differenti $d-$palle di una data funzione non negativa.

Lemma 3.7.2. *Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e sia d una $L-$gauge. Per ogni $r > 0$ esiste un punto $z_0 = z_0(r) \in \mathbb{G}$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $d(z_0) = \lambda\, r$
2. $\Psi_L(x^{-1} \circ y) \geq \mu$ *e* $\Psi_L(y^{-1} \circ x) \geq \mu$

per ogni $x \in B_d(z_0, r)$ e ogni $y \in B_d(0, 2c_d r)$. Qui $\lambda \geq 1$ e $\mu > 0$ sono costanti reali indipendenti da r (dipendenti solo da $\mathbb{G}$, d e L), e c_d è la costante positiva della disuguaglianza pseudo-triangolare (3.2.4).

Dimostrazione. Dimostriamo in tre passi:

1. L'insieme
$$\{y \in \mathbb{G} \setminus \{0\} \ \ \text{t.c.} \ \ \Psi_L(y) = 0\}$$
ha interno vuoto. Infatti, supponiamo per assurdo $\Psi_L(y) = 0 \ \ \forall\, y$ in un intorno U di un opportuno $y_0 \neq 0$. Allora, dato che $\Psi_L = |\nabla_L d|^2$, questo dà $|\nabla_L d|^2 \equiv 0$ su U, cosicchè dalla proposizione (3.1.12) d è costante in un insieme aperto contentente y_0. Di conseguenza, la funzione $r \mapsto d(\delta_r(y_0)) = r\, d(y_0)$ è costante vicino a $r = 1$. Questo implica $d(y_0) = 0$, che è in contraddizione con l'assunzione $y_0 \neq 0$.

2. Dal primo passo e dall'omogeneità di Ψ_L segue l'esistenza di un punto $y_0 \in G$, $d(y_0) = 1$ tale che

$$\Psi_L(y_0) > 0 \quad e \quad \Psi_L(y_0^{-1}) > 0$$

Allora, dalla continuità di Ψ_L fuori dall'origine, esistono due costanti positive μ e σ (con $\sigma \geq 1$) tale che

$$\Psi_L(\xi \circ y_0 \circ \eta) \geq \mu, \quad \Psi_L(\xi \circ y_0^{-1} \circ \eta) \geq \mu \tag{3.53}$$

per ogni $\xi,\ \eta \in G$ che soddisfano le disuguaglianze $d(\xi),\ d(\eta) \geq\ 2c_d\sigma$.

3. Per ogni fissato $r > 0$, sia $z_0 := \delta_{\lambda r}(y_0)$ con $\lambda = 1/\sigma$. Sia $x \in B_d(z_0, r)$, quindi

$$d(x^{-1} \circ z_0) < r \Rightarrow \frac{1}{\lambda r} d(x^{-1} \circ z_0) < \frac{1}{\lambda} \Rightarrow d(\delta_{\frac{1}{\lambda r}}(x^{-1} \circ z_0)) < \sigma$$

Sia $y \in B_d(0, 2c_d r)$, quindi

$$d(y) \leq 2c_d r \Rightarrow \frac{1}{\lambda r} d(y) \leq 2c_d \frac{1}{\lambda} \Rightarrow d(\delta_{1/(\lambda r)}(y)) \leq 2c_d\sigma$$

Dalla seconda disuguaglianza in (3.53) otteniamo

$$\Psi_L(x^{-1} \circ y) = \Psi_L\left((x^{-1} \circ z_0) \circ z_0^{-1} \circ y\right)$$

(dalla omogeneità di Ψ_L)

$$= \Psi_L\left(\delta_{1/(\lambda r)}(x^{-1} \circ z_0) \circ y_0^{-1} \circ \delta_{1/(\lambda r)}(y)\right) \geq \mu$$

dato che $d(\delta_{1/(\lambda r)}(x^{-1} \circ z_0)) \leq \sigma$ e $d(\delta_{1/(\lambda r)}(y)) \leq 2c_d\sigma$.
Analogamente, dalla prima disuguaglianza in (3.53) otteniamo

$$\Psi_L(y^{-1} \circ x) = \Psi_L\left(y^{-1} \circ z_0 \circ (z_0^{-1} \circ x)\right) =$$

$$= \Psi_L\left(\delta_{1/(\lambda r)}(y^{-1}) \circ y_0 \circ \delta_{1/(\lambda r)}(z_0^{-1} \circ x)\right) \geq \mu$$

dato che $\delta_{1/(\lambda r)}(z_0^{-1} \circ x) \leq \sigma$ e $d(\delta_{1/(\lambda r)}(y)) \leq 2c_d\sigma$.

$\square$

Prima di enunciare il prossimo teorema, introduciamo le seguenti costanti

$$\theta_0 := c_d(1 + c_d(1 + \lambda)) \qquad \theta := c_d(\lambda + \theta_0)$$

Teorema 3.7.3 (**Disuguaglianza di Harnack sulle palle**).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$, e sia d una $L-$gauge. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{G}$, e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una soluzione non negativa di $Lu = 0$. Allora

$$\sup_{B_d(x_0,r)} u \leq c \inf_{B_d(x_0,r)} u$$

per ogni $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $\overline{B_d(x_0, \theta r)} \subset \Omega$. La costante c dipende solo da $\mathbb{G}$, L e d e non dipende da u, r, x_0 e Ω.

Dimostrazione. Essendo L invariante a sinistra assumiamo $x_0 = 0$. Sia $z_0 = z_0(r)$ il punto di $\mathbb{G}$ dato dal lemma precedente. Procediamo per passi:

1. Esiste una costante assoluta $c > 0$ tale che

$$M_r(u)(x) \leq c \cdot M_{\theta_0 r}(u)(z_0) \quad \forall\, x \in B_d(0, r)$$

Infatti, per ogni $x \in B_d(0, r)$, abbiamo

$$\overline{B_d(x, r)} \subseteq \overline{B_d(0, 2c_d r)} \subseteq \overline{B_d(0, \theta_0 r)} \subset \Omega$$

quindi (essendo u non negativa)

$$M_r(u)(x) = \frac{m_d}{r^Q} \int_{B_d(x,r)} \Psi_L(x^{-1} \circ y) u(y) dy \leq$$

$$\leq (\sup_{G \setminus \{0\}} \Psi_L) \frac{m_d}{r^Q} \int_{B_d(x,r)} u(z) dz \cdot \frac{\mu}{\mu}$$

(dalla prima disuguaglianza del secondo punto del lemma (3.7.2))

$$\leq \frac{c_1}{r^Q} \int_{B_d(x,r)} \Psi_L(z_0^{-1} \circ z) u(z) dz$$

dove $c_1 = m_d/\mu \sup_{\mathbb{G} \setminus \{0\}} \Psi_L$. Sottolineiamo che $c_1 < \infty$ perchè Ψ_L è liscio fuori dall'origine e $\delta_\lambda-$omogeneo di grado zero. Allora, dato che vale anche

$$\overline{B_d(x, r)} \subseteq \overline{B_d(z_0, \theta_0 r)} \subseteq \overline{B_d(0, \theta r)} \subset \Omega$$

otteniamo (sempre dalla non negatività di u)

$$M_r(u)(x) \le \frac{c_1}{r^Q} \int_{B_d(x,r)} \Psi_L(z_0^{-1} \circ z) u(z) dz \le$$

$$\le \frac{c_1}{r^Q} \int_{B_d(z_0,\theta_0 r)} \Psi_L(z_0^{-1} \circ z) u(z) dz \cdot \frac{m_d}{m_d} =$$

$$= \frac{c_1}{m_d} M_{\theta_0 r}(u)(z_0)$$

questo è quello che volevamo dimostrare con $c = c_1/m_d$.

2. Esiste una costante assoluta $c > 0$ tale che

$$M_r(u)(z_0) \le c M_{\theta_0 r}(u)(y) \qquad \forall\, y \in B_d(o,r)$$

Questa disuguaglianza può essere provata procedendo nello stesso modo del passo precedente, ma usando la seconda disuguaglianza del lemma e le inclusioni

$$\overline{B_d(z_0,r)} \subseteq \overline{B_d(y,\theta_0 r)} \subseteq \overline{B_d(0,\theta r)} \subset \Omega$$

3. Infine, siano $x, y \in B_d(0,r)$. Allora, usando i primi due passi della dimostrazione e il teorema della formula di media di volume (in particolare l'equazione (3.49) essendo u $L-$armonica) si ha

$$u(x) = M_r(u)(x) \le c\, M_{\theta_0 r}(u)(z_0) =$$

$$= c\, u(z_0) = c\, M_r(u)(z_0)$$

$$\le c\, M_{\theta_0 r}(u)(y) = c\, u(y)$$

e la dimostrazione è terminata.

$\square$

Teorema 3.7.4 (**Disuguaglianza di Harnack sui compatti**).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$, e sia d una $L-$gauge. Sia Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{G}$, e sia K un sottoinsieme compatto di Ω.
Allora esiste una costante positiva $c = c\,(\mathbb{G}, L, \Omega, K)$ tale che

$$\sup_K u \leq c \, \inf_K u$$

per ogni funzione non negativa $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ che soddisfa $Lu = 0$ in Ω.

Dimostrazione. Sappiamo che esiste un insieme K_0 compatto e connesso tale che

$$K \subseteq K_0 \subseteq \Omega$$

Sia $\{D_j\}_{j=1,\ldots,q}$ una famiglia finita di d-palle $D_j = B_d(x_j, r_j)$ tale che

1. $K_0 \subset \bigcup_{j=1}^q D_j$;
2. $\theta\, D_j := B_d(x_j, \theta\, r_j) \subset K_0$ per ogni $j = 1, ..., q$;
3. $D_j \cap D_{j+1} \neq \varnothing$ per ogni $j \in \{1, ..., q-1\}$.

Un tale ricoprimento esiste perchè K_0 è compatto e connesso, contenuto in Ω connesso. Dalla disuguaglianza di Harnack sui dischi abbiamo che

$$\sup_{D_j} u \leq c \inf_{D_j} u \qquad j = 1, ..., q$$

per ogni $u \in H(\Omega),\ u \geq 0$. La costante c è indipendente da u.
Allora la disuguaglianza cercata segue applicando in maniera iterata il seguente lemma. □

Lemma 3.7.5. *Siano A_1 e A_2 due insiemi arbitrari tale che $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$. Sia $u : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa che soddisfa*

$$\sup_{A_i} u \leq c \inf_{A_i} u \quad i = 1, 2$$

per opportune costanti $c \geq 1$. Allora:

$$\sup_{A_1 \cup A_2} u \leq c^2 \inf_{A_1 \cup A_2} u$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che

$$u(x) \leq c\, u(y) \qquad \forall\, x, y \in A_1 \cup A_2$$

Ora, se $x, y \in A_1$ o $x, y \in A_2$ la disuguaglianza segue direttamente dall'ipotesi del lemma. Supponiamo che $x \in A_1$ e $y \in A_2$ e scegliamo un punto $z \in A_1 \cap A_2$. Dall'ipotesi segue

$$u(x) \leq c\, u(z) \quad e \quad u(z) \leq c\, u(y)$$

quindi

$$u(x) \leq c \cdot c \cdot u(y)$$

□

Teorema 3.7.6 (**Principio del massimo forte per le funzioni armoniche**).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$. Sia Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{G}$. Sia $u \in H(\Omega)$ tale che assume massimo in un punto interno di Ω (cioè esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) \geq u(x)$ per qualsiasi $x \in \Omega$). Allora

$$u \equiv u(x_0) \quad \text{in } \Omega$$

Dimostrazione. Poniamo $v = u(x_0) - u$. Allora $v \geq 0$ essendo x_0 punto di massimo e $v \in H(\Omega)$. Applichiamo quindi la disuguaglianza di Harnack sui compatti:

$$\forall\, x \in \Omega \quad 0 \leq \sup_{\{x_0,\, x\}} v \leq c_{x_0,x} \inf_{\{x_0,\, x\}} v = 0$$

Quindi $\sup_{\{x_0,x\}} v = 0$, da cui $v(x) = 0$. Pertanto

$$u(x) = u(x_0)$$

per qualsiasi $x \in \Omega$. □

Teorema 3.7.7 (**Liouville**).
Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e sia $u \in C^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ una funzione inferiormente limitata tale che soddisfa

$$Lu = 0 \ \ in \ \ \mathbb{G}$$

Allora u è costante.

Dimostrazione. Sia

$$m := \inf_{\mathbb{G}} u \quad e \quad v := u - m$$

Allora $v \geq 0$ e $Lv = 0$ in G. Dalla disuguaglianza di Harnack sui dischi segue

$$\sup_{B_d(0,r)} v \leq c \inf_{B_d(0,r)} v \quad \text{con c indipendente da r}$$

Da questa disuguaglianza, mandando $r \to \infty$, otteniamo

$$0 \leq \sup_{\mathbb{G}} v \leq c \inf_{\mathbb{G}} v = 0$$

che implica $v \equiv 0$ e $u \equiv m$. □

Capitolo 4

Metodo di Perron-Wiener

Sia $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda\right)$ un gruppo di Carnot in $\mathbb{R}^N$ e sia L uno dei suoi sub-Laplaciani. Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ un insieme aperto limitato e φ una qualsiasi funzione $\in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$. Lo scopo di questo capitolo è descrivere il metodo di Perron-Wiener per la risoluzione del Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

La mancanza di una esplicita formula integrale di Poisson per i sub-Laplaciani L sui gruppi di Carnot ci costringe a fare riferimento alla teoria degli spazi armonici astratti, per applicarla poi ai sub-Laplaciani. Essendo una teoria estremamente vasta, mi focalizzo su quei risultati che sono cruciali per il nostro scopo (rimandando le dimostrazioni a [9]).

4.1 Spazi armonici astratti

Sia (E, T) uno spazio topologico di Hausdorff, localmente connesso e localmente compatto. Assumiamo che la topologia T abbia una base numerabile.

4.1.1 Funzioni semicontinue

Sia $A \subset E$ e $u : A \to [-\infty, \infty]$. Se x è un punto di $\overline{A}$, definiamo

$$\liminf_{y \to x} u(y) := \sup_{V \in U_x} \left(\inf_{V \cap A} u \right)$$

$$\limsup_{y \to x} u(y) := \inf_{V \in U_x} \left(\sup_{V \cap A} u \right)$$

dove U_x denota la famiglia di intorni di x.

La funzione u è detta **inferiormente semicontinua** (brevemente, i.s.c) in $x \in A$ se

$$u(x) = \liminf_{y \to x} u(y)$$

La funzione u è detta **superiormente semicontinua** (brevemente, s.s.c) in $x \in A$ se

$$u(x) = \limsup_{y \to x} u(y)$$

Se u è i.s.c. (s.s.c.) in ogni punto di A, allora u sarà detta i.s.c. (s.s.c.) su A.

4.1.2 Fasci di funzioni. Famiglie armoniche

Definizione 4.1.
Supponiamo che sia data, per ogni aperto $V \in T$, una famiglia $F(V)$ di funzioni a valori reali $u : V \to [-\infty, \infty]$. Diciamo che la mappa

$$F : V \to F(V)$$

è un **fascio di funzioni** su E se valgono le seguenti proprietà:

1. se $V_1, V_2 \in T$ con $V_1 \subseteq V_2$ e $u \in F(V_2)$, allora $u|_{V_1} \in F(V_1)$;

2. se $(V_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq T$ e $u : \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \to [-\infty, \infty]$ è tale che $u|_{V_\alpha} \in F(V_\alpha)$ per ogni $\alpha \in A$, allora $u \in F\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right)$

Un **fascio di funzioni** F su E è detto **armonico** se $F(V)$ è un sottospazio lineare di $C(V, \mathbb{R})$, lo spazio vettoriale delle funzioni reali continue definite su V. Quando F è un fascio armonico su E e V è un insieme aperto in T, una **funzione** $u \in F(V)$ è detta $F-$**armonica**.

4.1.3 Insiemi aperti regolari. Misure armoniche. Funzioni iperarmoniche. Fascio diretto di funzioni

Definizione 4.2 (Insieme $H-$regolare).
Sia H una famiglia armonica su E. Diciamo che un aperto $V \in T$ è $H-$regolare se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $\overline{V}$ è compatto e $\partial V \neq \varnothing$

2. per ogni funzione continua $f : \partial V \to \mathbb{R}$ esiste un'unica funzione $H-$armonica in V, denotata con H_f^V, tale che

$$\lim_{x \to y} H_f^V = f(y) \qquad \forall\, y \in \partial V$$

   In altre parole, il problema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } V \\ u|_{\partial V} = f \end{cases}$$

   ha un'unica soluzione $u := H_f^V$ per ogni funzione continua $f : \partial V \to \mathbb{R}$.

3. se $f \geq 0$, allora $H_f^V \geq 0$

Definizione 4.3 (misura $H-$armonica).
Sia H un fascio armonico su E. Sia $V \in T$ un insieme $H-$regolare. Allora esiste una misura di Radon μ_x^V su $C(\partial V, \mathbb{R})$ tale che

$$H_f^V(x) = \int_{\partial V} f(y) d\mu_x^V(y) \qquad \forall\, f \in C(\partial V, \mathbb{R})$$

La misura μ_x^V è chiamata misura $H-$armonica relativa a V e x.

Definizione 4.4 (**Funzione $H-$iperarmonica e $H-$ipoarmonica**).
Sia H un fascio armonico di funzioni su (E, T). Sia $\Omega \in T$. Una funzione $u : \Omega \to]-\infty, \infty]$ è detta $H-$iperarmonica in Ω se:

1. u è inferiormente semicontinua
2. per ogni aperto $H-$regolare $V \subset \overline{V} \subseteq \Omega$, si ha

$$u(x) \geq \int_{\partial V} u(y) d\mu_x^V(y) \qquad x \in V$$

Denotiamo con $H^*(\Omega)$ **l'insieme delle funzioni $H-$iperarmoniche in Ω**.

Dato che

$$\int_{\partial V} u d\mu_x^V = \sup \left\{ \int_{\partial V} \varphi d\mu_x^V \ \ t.c. \ \ \varphi \in C(\partial V, \mathbb{R}), \ \varphi \leq u \right\}$$

la seconda condizione può essere reiscritta nel modo seguente:
per ogni aperto $H-$regolare $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ e per ogni $\varphi \in C(\partial V, \mathbb{R})$ tale che $\varphi \leq u|_{\partial V}$, si ha

$$H_\varphi^V \leq u|_V$$

Una funzione $v : \Omega \to [-\infty, \infty[$ è detta $H-$ipoarmonica se $-v \in H^*(\Omega)$. Denotiamo con

$$H_*(\Omega) := -H^*(\Omega)$$

la **famiglia delle funzioni $H-$ipoarmoniche in** Ω.

4.1.4 Spazi armonici

Definizione 4.5 (**Spazio armonico**).
Sia H un fascio armonicom di funzioni su E. Diciamo che (E, H) è uno spazio armonico se sono soddisfatti i seguenti assiomi:

1. **(Positività)** Per ogni aperto relativamente compatto $\Omega \subseteq E$, esiste $h_0 \in H^*(\Omega)$ e $k_0 \in H_*(\Omega)$ che soddisfano:

$$\inf_{\Omega} h_0,\ \inf_{\Omega} k_0 > 0 \qquad e \qquad h_0(x) < \infty \quad \forall\, x \in \Omega$$

Se le funzioni costanti sono $H-$armoniche in E, allora l'assioma di positività è soddisfatto.

2. **(Convergenza)** Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente di funzioni $H-$armoniche su un aperto $\Omega \in T$ tale che

$$\left\{ x \in \Omega \ \ t.c. \ \ \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) < \infty \right\}$$

è denso in Ω, allora

$$u := \lim_{n\to\infty} u_n$$

è $H-$armonica in Ω.

3. **(Regolarità)** La famiglia T_r degli aperti $H-$regolari è una base per la topologia T.

4. **(Separazione)** Per ogni $x, y \in E$ con $x \neq y$, esistono $u, v \in H^*(E)$ tale che

$$u(x)v(y) \neq u(y)v(x)$$

Osservazione 16. Se $\Omega \in T$, $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ è $H-$regolare e $u \in H(\Omega)$, segue dalla seconda proprietà degli insiemi regolari che

$$u|_V = H^V_{u|_{\partial V}}$$

Quindi

$$u(x) = \int_{\partial V} u d\mu_x^V \qquad \forall\, x \in V \tag{4.1}$$

Ma non solo una funzione $H-$armonica gode di questa proprietà. Si dimostra, utilizzando la definizione di fascio di funzioni, l'assioma di regolarità e la proprietà di separazione di Hausdorff, che questa proprietà caratterizza le funzioni $H-$ armoniche.

Proposizione 4.1.1 (Caratterizzazione dell'$H-$armonicità).
Sia (E, H) uno spazio armonico. Sia $\Omega \in T$ e $u \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$, tale che

$$u(x) = \int_{\partial V} u \, d\mu_x^V \qquad \forall\, x \in V$$

e per ogni aperto $H-$regolare $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$. Allora $u \in H(\Omega)$.

Osservazione 17. Segue immediatamente che per ogni aperto $\Omega \subseteq E$, si ha

$$H_*(\Omega) \cap H^*(\Omega) = H(\Omega)$$

Dalla proposizione (4.1.1) segue anche il seguente corollario:

Corollario 4.1.2. *Sia (E, H) uno spazio armonico. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $H(\Omega)$ tale che*

$$u_n \to u \quad per \;\; n \to \infty$$

uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di Ω. Allora $u \in H(\Omega)$.

4.1.5 Fascio diretto di funzioni

Definizione 4.6 (Fasci diretti di funzioni).
Sia F un fascio di funzioni da $A \subseteq E$ a $[-\infty, \infty]$. Diciamo che F è **diretto in alto**, e scriviamo

$$F \uparrow$$

se, per ogni $u, v \in F$ esiste $w \in F$ tale che

$$u \leq w \qquad e \qquad v \leq w$$

Analogamente, se, per ogni $u, v \in F$ esiste $w \in F$ tale che $u \geq w$, $v \geq w$ diciamo che F è **diretto in basso** e scriviamo $F \downarrow$.

4.1.6 Funzioni $B-$iperarmoniche. Principio del minimo

Definizione 4.7 (**Funzioni** $B-$ **iperarmoniche**).
Sia (E, H) uno spazio armonico e sia Ω un sottoinsieme aperto di E. Assumiamo che, per ogni $x \in \Omega$, sia data una base $B(x)$ di intorni $H-$regolari di x con chiusura contenuta in Ω. Una funzione i.s.c.

$$u : \Omega \to (-\infty, \infty]$$

è chiamata $B-$iperarmonica in Ω se

$$u(x) \geq \int_{\partial V} u d\mu_x^V$$

per ogni $x \in \Omega$ e ogni $V \in B(x)$. Denotiamo con $B - H^*(\Omega)$ **la famiglia delle funzioni** $B-$ **iperarmoniche in** Ω.

Osservazione 18.

$$H^*(\Omega) \subset B - H^*(\Omega)$$

Per le funzioni $B-$iperamoniche vale il principio del minimo:

Teorema 4.1.3 (**Principio del minimo**).
Sia Ω un aperto relativamente compatto in uno spazio armonico (E, H) e sia $u \in B - H^*(\Omega)$. Assumiamo che

$$\liminf_{x \to y} u(x) \geq 0 \qquad \forall\, y \in \partial\Omega$$

allora $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$.

Conseguenza di questo teorema è l'*equivalenza tra la $B-$ipoarmonicità e la ipoarmonicità*:

Corollario 4.1.4. *Sia Ω un insieme aperto arbitrario in E, e sia $u \in B - H^*(\Omega)$ per un opportuno B. Allora $u \in H^*(\Omega)$.*

4.1.7 Funzioni subarmoniche e superarmoniche. Famiglie di Perron

Definizione 4.8 (Funzioni subarmoniche e superarmoniche).
Sia (E, H) uno spazio armonico, e sia $\Omega \subseteq E$ un aperto. Una funzione $u \in H^*(\Omega)$ è detta $H-$superamonica se, per ogni aperto $H-$regolare $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$, la funzione

$$V \ni x \mapsto \int_{\partial V} ud\mu_x^V$$

è $H-$armonica in V. L'insieme delle funzioni $H-$ superarmoniche in Ω sarà denotato con

$$\overline{S}(\Omega)$$

Una funzione $v : \Omega \to [-\infty, \infty[$ è detta $H-$subarmonica in Ω se $-v \in \overline{S}(\Omega)$. Denotiamo con

$$\underline{S}(\Omega) := -\overline{S}(\Omega)$$

l'insieme delle funzioni $H-$subarmoniche in Ω.

Teorema 4.1.5 (Caratterizzazione di $\overline{S}(\Omega)$).
Sia $u \in H^*(\Omega)$. Allora $u \in \overline{S}(\Omega)$ se solo se

$$D := \{x \in \Omega \ \ t.c. \ \ u(x) < \infty\}$$

è denso in Ω, cioè $\overline{D} \supseteq \Omega$.

Introduciamo ora la seguente definizione cruciale.

Definizione 4.9 (Regolarizzata di Perron).
Sia Ω un sottoinsieme aperto di G. Data $u \in H^*(\Omega)$ e un aperto $H-$regolare $V \subset \overline{V} \subset \Omega$, definiamo

$$u_V : \Omega \to (-\infty, \infty], \quad u_V(x) := \begin{cases} u(x) & x \notin V \\ \int_{\partial V} u\mu_{\cdot x}^V & x \in V \end{cases}$$

La funzione u_V è chiamata regolarizzata di Perron di u relativa a V.

Utilizzando l'equivalenza tra funzioni $B-$iperarmoniche e iperarmoniche (4.1.4), si dimostrano le principali proprietà della regolarizzata di Perron, date dal seguente teorema:

Teorema 4.1.6 (**Proprietà della regolarizzata di Perron**).
Sia $u \in H^*(\Omega)$ e sia $V \subset \overline{V} \subset \Omega$ un aperto $H-$regolare, allora

1. $u_V \leq u$
2. $u_V \in H^*(\Omega)$
3. $u_V \leq v_V$ *se* $u, v, \in H^*(\Omega)$ *e* $u \leq v$

In più, se $u \in \overline{S}(\Omega)$ allora

4. $u_V \in \overline{S}(\Omega)$ *e* $u|_V \in H(V)$

Diamo ora un'altra definizione cruciale.

Definizione 4.10 (**Famiglia di Perron**).
Sia (E, H) uno spazio armonico, e sia $\Omega \subset E$ un aperto. Una famiglia di funzioni $F \subset H^*(\Omega)$ è detta una famiglia di Perron se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $F \downarrow$, cioè F è diretta in basso
2. F ha un minorante $H-$subarmonico, cioè esiste $v_0 \in \underline{S}(\Omega)$ tale che
$$v_0 \leq u \qquad \text{per ogni } u \in F$$
3. $u_V \in F$ per ogni $u \in F$ e per ogni aperto $H-$regolare $V \subset \overline{V} \subset \Omega$
4. F contiene almeno una funzione $H-$superarmonica, cioè esiste $u_0 \in F$ tale che $u_0 \in \overline{S}(\Omega)$.

Utilizzando la regolarizzata di Perron e il teorema (4.1.6) si dimostra il seguente risultato, cruciale per il metodo di Perron-Wiener.

Teorema 4.1.7 (**Teorema fondamentale delle famiglie di Perron**).
Sia (E, H) uno spazio armonico e sia F una famiglia di Perron su un aperto $\Omega \subset E$. Allora

$$\underline{u} := \inf F \in H(\Omega)$$

4.1.8 Operatore di Perron-Wiener-Brelot

Sia Ω un aperto, con chiusura compatta e bordo non vuoto, in uno spazio armonico (E, H). Costruiamo ora l'operatore

$$f \to H_f^{\Omega}$$

da un opportuno spazio lineare di funzioni reali $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$ allo spazio lineare $H(\Omega)$ delle funzioni $H-$armoniche in Ω, tale che quando il problema di Dirichlet

$$(H - D) \quad \begin{cases} u \in H(\Omega) \\ \lim_{x \to y} u(x) = f(y) \quad \forall\, y \in \partial\Omega \end{cases}$$

ha una soluzione u, verrà che $u = H_f^{\Omega}$. Per questa ragione chiamiamo H_f^{Ω} la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet nel senso di Perron-Wiener. La sua costruzione, essendo il centro del metodo che stiamo studiando, sarà analizzata in modo esauriente, senza omettere le dimostrazioni.

Definizione 4.11 (**Soprafunzioni e sottofunzioni**).
Sia (E, H) uno spazio armonico, e sia $\Omega \subseteq E$ un aperto tale che $\overline{\Omega}$ è compatto e $\partial\Omega \neq \varnothing$. Data una funzione $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$, poniamo

$$\overline{U}_f^{\Omega} := \left\{ u \in H^*(\Omega) \ \text{ t.c. } \ \liminf_{\partial\Omega} u \geq f, \ \inf u > -\infty \right\}$$

e

$$\underline{U}_f^{\Omega} := \left\{ v \in H_*(\Omega) \ \text{ t.c. } \ \limsup_{\partial\Omega} u \leq f, \ \sup v < \infty \right\}$$

Le famiglie $\overline{U}_f^{\Omega}$ e $\underline{U}_f^{\Omega}$ sono chiamate, rispettivamente, la famiglia delle soprafunzioni e sottofunzioni relative ad f e Ω.

La funzione $u \equiv \infty$ ($v \equiv -\infty$, rispettivamente) è una soprafunzione (sottofunzione, rispettivamente). Quindi $\overline{U}_f^\Omega \neq \varnothing$ ($\underline{U}_f^\Omega \neq \varnothing$, rispettivamente). Quindi possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 4.12 (**Soprasoluzioni e sottosoluzioni**).
Con le ipotesi e la notazione della definizione precedente, le funzioni

$$\overline{H}_f^\Omega := \inf \overline{U}_f^\Omega \qquad \underline{H}_f^\Omega := \sup \underline{U}_f^\Omega$$

sono chiamate la soprasoluzione e la sottosoluzione, rispettivamente, del problema (H-D).

Notiamo che

$$\underline{H}_f^\Omega = -\overline{H}_{-f}^\Omega$$

dato che $\underline{U}_f^\Omega = -\overline{U}_{-f}^\Omega$. Vale anche la seguente proposizione, facile conseguenza del principio del minimo per le funzioni $H-$iperarmoniche.

Proposizione 4.1.8. *Per ogni* $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$ *si ha*

$$\underline{H}_f^\Omega \leq \overline{H}_f^\Omega$$

Dimostrazione. Per ogni $u \in \overline{U}_f^\Omega$ e $v \in \underline{U}_f^\Omega$ si ha $u - v \in H^*(\Omega)$ e

$$\liminf_{\partial\Omega} (u - v) \geq 0$$

Allora dal principio del minimo (4.1.3) $u - v \geq 0$ in Ω. Quindi

$$u \geq v \qquad \forall\, u \in \overline{U}_f^\Omega, \quad \forall\, u \in \underline{U}_f^\Omega$$

e la proposizione è dimostrata. □

La prossima proposizione è una conseguenza immediata delle definizioni di sopra e sotto soluzioni:

Proposizione 4.1.9. *Siano* $f, g : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. *Allora:*

1. $f \leq g \Rightarrow \overline{H}_f^\Omega \leq \overline{H}_g^\Omega$, $\underline{H}_f^\Omega \leq \underline{H}_g^\Omega$;

2. $\overline{H}^{\Omega}_{f+g} \leq \overline{H}^{\Omega}_{f} + \overline{H}^{\Omega}_{g}$, $\underline{H}^{\Omega}_{f+g} \leq \underline{H}^{\Omega}_{f} + \underline{H}^{\Omega}_{g}$;

3. $\overline{H}^{\Omega}_{\alpha f} = \alpha \overline{H}^{\Omega}_{f}$, $\underline{H}^{\Omega}_{\alpha f} = \alpha \underline{H}^{\Omega}_{f}$, $\overline{H}^{\Omega}_{-\alpha f} = -\alpha \underline{H}^{\Omega}_{f}$;

Definizione 4.13 (**Funzione risolutiva**).
Sia (E, H) uno spazio armonico, e sia $\Omega \subseteq E$ un aperto con chiusura compatta e bordo non vuoto. Una funzione $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$ è detta risolutiva se:

1. $\overline{H}^{\Omega}_{f} = \underline{H}^{\Omega}_{f}$
2. $\overline{H}^{\Omega}_{f} \in H(\Omega)$

In questo caso poniamo

$$H^{\Omega}_{f} := \overline{H}^{\Omega}_{f} = \underline{H}^{\Omega}_{f} \in H(\Omega)$$

e diciamo che H^{Ω}_{f} **è la soluzione generalizzata, nel senso di Perron-Wiener-Brelot, del problema (H-D)**.
L'insieme delle funzioni risolutive $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$ è denotato con $R(\partial\Omega)$

La connessione tra H^{Ω}_{f} e il problema di Dirichlet (H-D) è mostrato dalla seguente proposizione.

Proposizione 4.1.10. *Sono date le ipotesi della definizione precedente. Sia* $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$ *una funzione limitata. Allora sono equivalenti:*

1. f *è risolutiva e* $\lim_{x\to y} H^{\Omega}_{f}(x) = f(y)$ *per ogni* $y \in \partial\Omega$

2. esiste $u \in H(\Omega)$ *tale che* $\lim_{x\to y} u(x) = f(y)$ *per ogni* $y \in \partial\Omega$

In questo ultimo caso, $u = H^{\Omega}_{f}$.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2) è ovvio.
2) $\Rightarrow$ 1) notiamo che u è limitata da sopra e sotto, e che $u \in \overline{U}^{\Omega}_{f} \cap \underline{U}^{\Omega}_{f}$ □

Il primo passo per risolvere un problema di Dirichlet è quindi capire quando una funzione è risolutiva. Prima di rispondere a questa domanda attraverso il teorema di Wiener (che enunceremo nella prossima sezione), sono necessarie

alcune premesse.
Prima di tutto, vogliamo mostrare che $R(\partial\Omega)$ contiene le restrizioni al bordo di Ω delle funzioni superarmoniche continue. A questo scopo enunciamo una proposizione che ha un interesse indipendente, semplice conseguenza del teorema fondamentale sulle famiglie di Perron.

Proposizione 4.1.11. *Sia $\Omega \subset E$ un insieme aperto con chiusura compatta e bordo non vuoto. Sia $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$. Assumiamo che esista*

$$u_0 \in \overline{U}_f^\Omega \cap \overline{S}(\Omega) \quad e \quad v_0 \in \underline{U}_f^\Omega \cap \underline{S}(\Omega) \tag{4.2}$$

Allora

$$\overline{H}_f^\Omega, \underline{H}_f^\Omega \in H(\Omega)$$

Dimostrazione. Usando (4.2) riconosciamo che $\overline{U}_f^\Omega$ è una famiglia di Perron. Quindi, usando il teorema (4.1.7)

$$\overline{H}_f^\Omega \in H(\Omega)$$

Da (4.2) segue anche che $\overline{U}_{-f}^\Omega$ è una famiglia di Perron, quindi

$$\underline{H}_f^\Omega = \sup \underline{U}_f^\Omega = -\inf \overline{U}_{-f}^\Omega \in H(\Omega)$$

□

Teorema 4.1.12 (Risolubilità).
Sia (E, H) uno spazio armonico, e sia $\Omega \subseteq E$ un aperto con chiusura compatta e bordo non vuoto.
Se $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ e

$$u|_\Omega \in \overline{S}(\Omega)$$

allora

$$f := u|_{\partial\Omega} \in R(\partial\Omega)$$

Dimostrazione. Dall'assioma di positività esiste $h_0 \in \overline{S}(\Omega)$ tale che $\inf_\Omega h_0 > 0$. Denotiamo

$$\lambda := \frac{\max\{0, -u\}}{\inf_\Omega h_0}$$

Allora $u \geq -\lambda h_0$ in Ω e $-\lambda h_0 \in \underline{S}(\Omega) \cap U_f^\Omega$. D'altra parte

$$u|_\Omega \in S(\Omega) \cap \overline{U}_f^\Omega$$

Per la proposizione (4.1.11)

$$\overline{H}_f^\Omega, \underline{H}_f^\Omega \in H(\Omega)$$

In più, $\overline{H}_f^\Omega \leq u|_\Omega$ cosicchè, dato che u è continua funo al bordo di Ω

$$\overline{H}_f^\Omega \in U_f^\Omega$$

Quindi $\overline{H}_f^\Omega \leq H_f^\Omega$. Dato che l'altra disuguaglianza è sempre vera, questo implica $\overline{H}_f^\Omega = \underline{H}_f^\Omega$. Ricapitolando

$$\overline{H}_f^\Omega = \underline{H}_f^\Omega \in H(\Omega)$$

cioè f è risolutiva. □

4.1.9 Spazi $\sigma-$armonici: teorema di risolubilità di Wiener

Definizione 4.14 (Spazio $\sigma-$armonico).
Uno spazio armonico (E, H) e detto $\sigma-$armonico se la famiglia

$$\overline{S}_C^+(E) := \left\{u \in \overline{S}(E) \cap C(E, \mathbb{R}) \;\; t.c. \;\; u \geq 0\right\}$$

separa i punti di E, cioè

$$\forall\, x, y \in E,\, x \neq y,\; \exists\, u, v \in \overline{S}_C^+(E) \;\; t.c. \;\; u(x)v(y) \neq u(y)v(x)$$

In uno spazio $\sigma-$armonico, la proprietà di positività prende una forma più forte:

Proposizione 4.1.13 (**Assioma di positività in uno spazio $\sigma-$armonico**).
Sia (E,H) uno spazio $\sigma-$armonico. Per ogni compatto $K \subseteq E$, esiste $w \in \overline{S}_c^+$ tale che

$$\inf_K w > 0$$

Dimostrazione. Dato che $\overline{S}_C^+(E)$ separa i punti di E, per ogni $x \in K$, esiste $u_x \in \overline{S}_C^+(E)$ tale che $u_x(x) > 0$. Dalla continuità dal basso di u, possiamo trovare un intorno aperto V_x di x tale che $\inf_V u_x > 0$. Dato che K è compatto, esistono $x_1, ..., x_p \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} V_{x_j}$$

Allora, se definiamo

$$w := \sum_{j=1}^{p} u_{x_j}$$

abbiamo $w \in \overline{S}_C^+(E)$ e $\inf_K w > 0$. $\square$

Una proprietà cruciale degli spazi $\sigma-$armonici è data dalla seguente proposizione.

Proposizione 4.1.14.
Sia (E,H) uno spazio $\sigma-$armonico. Per ogni insieme compatto $K \subseteq E$, per ogni $f \in C(K,\mathbb{R})$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $u, v \in \overline{S}_c^+(E)$ tale che

$$\sup_K |f - (u - v)| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Definiamo

$$A := \left\{ u - v \ \text{ t.c. } \ u, v \in \overline{S}_C^+(E) \right\}$$

A è un sottospazio lineare di $C(E,\mathbb{R})$. In più, dato che (E,H) è $\sigma-$armonico, A separa i punti di E. Infine, se $p = u - v \in A$, allora anche $p^+ := max\,\{p, 0\}$ appartiene a A, dato che

$$p^+ = u - \min\{u, v\}$$

Allora, dal teorema di Stone-Weierstrass [1], per ogni funzione $f \in C(K,\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$, esiste $p \in A$ tale che

$$\sup_K |f - p| < \varepsilon$$

Questo termina la dimostrazione. □

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di risolubilità di Wiener.

Teorema 4.1.15 (Wiener).
Sia (E,H) uno spazio $\sigma-$armonico, e sia $\Omega \subseteq E$ un aperto con chiusura compatta e bordo non vuoto. Ogni funzione continua $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ è risolutiva.

Dimostrazione. Dal teorema (4.1.12), se $u \in \overline{S}_c^+(E)$, allora $u|_{\partial\Omega}$ è risolutiva. Di conseguenza, ogni funzione

$$p = (u - v)|_{\partial\Omega}, \quad u,\, v \in \overline{S}_c^+(E)$$

[1] **Teorema di Stone-Weierstrass**.
Sia (Y,T) uno spazio topologico compatto, e sia $A \subset C(Y,\mathbb{R})$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. A è uno spazio vettoriale reale
2. se $p \in A$, allora $p^+ := \max\{0, p\} \in A$.
3. A separa i punti di E cioè

$$\text{per ogni } x, y \in Y, x \neq y, \text{ esistono } p, q \in A \;\; taleche \;\; p(x)q(y) \neq p(y)q(x)$$

Allora, per ogni $f \in C(Y,\mathbb{R})$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $p \in A$ tale che

$$\sup_Y |f - p| < \varepsilon$$

è risolutiva. Dalla proposizione (4.1.14), per ogni $\varepsilon > 0$, esistono u_ε, $v_\varepsilon \in \overline{S}_c^+(E)$ tali che

$$|f - p| < \varepsilon \quad su\ \partial\Omega, \quad p = p_\varepsilon := (u_\varepsilon - v_\varepsilon)|_{\partial\Omega}$$

Dalla proposizione (4.1.13), esiste $x \in \overline{S}_c^+(E)$ tale che $\inf_{\partial\Omega} w > 1$. Allora abbiamo

$$p - \varepsilon\, w < f < p + \varepsilon\, w \quad su\ \partial\Omega$$

cosicchè, prendendo $v := w|_{\partial\Omega}$, abbiamo (usando le proposizioni (4.1.8) e (4.1.9))

$$\underline{H}^\Omega_{p-\varepsilon v} \leq \underline{H}^\Omega_f \leq \overline{H}^\Omega_f \leq \overline{H}^\Omega_{p+\varepsilon v} \tag{4.3}$$

D'altra parte, sappiamo che $p - \varepsilon v$, $p + \varepsilon v \in R(\partial\Omega)$. Segue che:

$$\underline{H}^\Omega_{p-\varepsilon v} = H^\Omega_{p-\varepsilon v} = H^\Omega_p - \varepsilon\, H^\Omega_v$$

$$\underline{H}^\Omega_{p-\varepsilon v} = H^\Omega_{p-\varepsilon v} = H^\Omega_p - \varepsilon\, H^\Omega_v$$

Usando queste identità in (4.3) otteniamo

$$0 \leq \overline{H}^\Omega_f - \underline{H}^\Omega_f \leq 2\varepsilon H^\Omega_v \leq 2\varepsilon w$$

dove, nell'ultima disuguaglianzam abbiamo usato il fatto che w è una sopra funzione relativa a $w|_{\partial\Omega}$ e Ω. Mandando ϵ a 0 otteniamo

$$\overline{H}^\Omega_f = \underline{H}^\Omega_f \tag{4.4}$$

Le disuguaglianze 4.3 danno anche

$$0 \leq \overline{H}^\Omega_f - H^\Omega_{p-\varepsilon v} \leq H^\Omega_{p+\varepsilon v} - H^\Omega_{p-\varepsilon v} = 2\varepsilon H^\Omega_v \leq 2\varepsilon w \leq 2\varepsilon \sup_{\overline{\Omega}} w$$

Allora, per $\varepsilon \to 0$,

$$H^\Omega_{p-\varepsilon v} \to \overline{H}^\Omega_f \qquad \text{uniformemente su } \Omega$$

Dato che $H^\Omega_{p-\varepsilon v} \in H(\Omega)$, da questo limite e dal corollario (4.1.2) otteniamo

$$\overline{H}^\Omega_f \in H(\Omega)$$

Insieme a (4.4) questo implica la risolubilità di f. □

4.1.10 Spazi σ^*-armonici: teorema di Bouligand

Diamo ora una definizione che introduce una nuova proprietà che non è solitamente assunta nella teoria potenziale astratta. Tuttavia questa assunzione non incide sulla possibilità di applicare la nostra teoria ai sub-Laplaciani.

Definizione 4.15 (**spazio σ^*-armonico**).
Uno spazio $\sigma-$armonico (E, H) è detto σ^*-armonico se vale la seguente proprietà:
per ogni $x_0 \in E$ esiste $s_{x_0} \in \underline{S}_C^+(E)$ tale che $s_{x_0}(x_0) = 0$ e

$$\inf_{E \setminus V} s_{x_0} > 0$$

per ogni intorno V di x_0.

Durante tutta questa sezione, Ω denoterà un aperto in uno spazio σ^*-armonico (E, H).

Definizione 4.16 (**Punto $H-$regolare**).
Un punto $y \in \partial\Omega$ è detto $H-$regolare se

$$\lim_{\Omega \ni x \to y} H_f^\Omega(x) = f(y) \quad \forall\, f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$$

Per risolvere il problema di Dirichlet, non è sufficiente avere una funzione f risolutiva che ci renda H_f^Ω armonica. La funzione H_f^Ω è la soluzione (unica, grazie al principio del minimo!) del problema di Dirichlet (H-D) per ogni $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ se e solo se tutti i punti del bordo di Ω sono $H-$ regolari.
Il secondo passo per risolvere un problema di Dirichlet è quindi capire quando un aperto ha tutti i punti del bordo regolari.
Diamo ora una condizione necessaria e sufficiente per l'$H-$regolarità.

Definizione 4.17 (**Funzione H-barriera**).
Sia $y \in \partial\Omega$. Una funzione $H-$barriera per Ω in y è una funzione w definita in $\Omega \cap V$, con V opportuno intorno aperto di y t.c.

1. $w \in \overline{S}(\Omega \cap V)$
2. $w(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega \cap V$
3. $\lim_{x \to y} w(x) = 0$

Teorema 4.1.16 (**Teorema di Bouligand**).
Sia (E, H) uno spazio σ^*-armonico, e sia $\Omega \subseteq E$ un aperto relativamente compatto con bordo non vuoto. Un punto $x_0 \in \partial\Omega$ è $H-$regolare per Ω se e solo se esiste una funzione $H-$barriera per Ω in x_0.

4.2 Spazi L-armonici

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ un gruppo di Carnot su $\mathbb{R}^N$ e sia L un sub-Laplaciano. Per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ denotiamo

$$^{L}H(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \ \text{ t.c. } \ Lu = 0\}$$

Una funzione $u \in \ ^{L}H(\Omega)$ è chiamata $L-$armonica in Ω. La mappa

$$^{L}H : \Omega \to \ ^{L}H(\Omega)$$

è un fascio armonico di funzioni.
Si dimostra (vedi capitolo 7 di [9]) che $(\mathbb{R}^N, \ ^{L}H(\Omega))$ **è uno spazio σ^*-armonico.** Quindi **tutta la teoria potenziale astratta presentata nei paragrafi precedenti si applica a questo spazio**. Useremo le stesse nozioni e definizioni con le seguenti notazioni: aperto $L-$regolare, misura L-armonica, funzione $L-$iperarmonica, funzione $L-$ipoarmonica, funzione $L-$subarmonica, funzione $L-$superarmonica.

4.2.1 Proprietà di sottomedia

Definizione 4.18 (Proprietà di sottomedia).
Dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{G}$, diciamo che una funzion e s.s.c $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ soddisfa la proprietà di sottomedia locale di superficie (di volume) se, per ogni $x \in \Omega$, esiste $r_x > 0$ tale che

$$u(x) \leq m_r(u)(x) \qquad (u(x) \leq M_r(u)(x)) \qquad \textit{per } 0 < r < r_x \tag{4.5}$$

Se (4.5) vale per ogni $r > 0$ t.c. $\overline{B_d(x, r)} \subset \Omega$, diciamo che u soddisfa la proprietà di sottomedia globale di superficie (volume).

Teorema 4.2.1 (Principio del massimo).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto. Sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione s.s.c. che soddisfa la proprietà locale di sottomedia di volume. Allora:

1. *se* Ω *è connesso ed esiste* $x_0 \in \Omega$ *tale che* $u(x_0) = \max_\Omega u$*, allora* $u \equiv u(x_0)$ *in* Ω*;*

2. *se* Ω *è limitato e* $\limsup_{\Omega \ni y \to x} u(y) \leq 0$ *per ogni* $x \in \partial\Omega$*, allora* $u(y) \leq 0$ *in* Ω

Dimostrazione. 1. Poichè u verifica la proprietà locale di sottomedia di volume, per ogni $x \in \Omega$ esiste r_x tale che

$$u(x) \leq M_r(u)(x) \qquad per\ 0 < r < r_x$$

Quindi

$$u(x) \leq \frac{m_d}{r^Q} \int_{B_d(x,r)} \Psi_L(x^{-1} \circ y) u(y) dy$$

Sia $x_0 \in \Omega$ un punto di massimo di u in Ω. Possiamo supporre $u(x_0) \neq -\infty$. Dalle proprietà di sottomedia si ottiene:

$$0 \leq \frac{m_d}{r^Q} \int_{B_d(x_0,r)} \Psi_L(x_0^{-1} \circ y) u(y) dy - u(x_0) \tag{4.6}$$

e quindi, essendo

$$\frac{m_d}{r^q} \int_{B_d(x_0,r)} \Psi_L(x_0^{-1} \circ y) dy = 1$$

(4.6) può essere riscritta nel modo seguente

$$0 \leq \frac{m_d}{r^Q} \int_{B_d(x_0,r)} \Psi_L(x_0^{-1} \circ y)(u(y) - u(x_0)) dy$$

D'altra parte, essendo $\Psi_L \geq 0$ e $u(y) \leq u(x_0)$, abbiamo

$$\Psi_L(x_0^{-1} \circ y)(u(y) - u(x_0)) = 0 \qquad \text{quasi dappertutto in } B_d(x_0, r) \tag{4.7}$$

Di conseguenza, per la superiore semicontinuità di u, e poichè

$$\Psi_L > 0 \quad \text{in un sottoinsieme aperto denso di } B_d(x_0, r) \tag{4.8}$$

(vedi prima parte nella dimostrazione del Lemma (3.7.2)), da (4.7) si ottiene $u = u(x_0)$ in $B_d(x_0, r)$. L'affermazione segue da un argomento di connessione.

2. Sia $x_0 \in \overline{\Omega}$ t.c.
$$\sup_{B_d(x_0,r)} u = \sup_{\Omega} u \qquad \forall\, r > 0$$
Se $x_0 \in \partial\Omega$, dall'ipotesi sul comportamento di u al bordo, abbiamo
$$0 \geq \limsup_{\Omega \ni y \to x_0} u = \inf_{r>0} \sup_{B_d(x_0,r)\cap\Omega} u = \sup_{\Omega} u$$
quindi $u \leq 0$ su Ω.
Se $x_0 \in \Omega$, dalla semicontinuità superiore di u, si ottiene
$$u(x_0) = \limsup_{x \to x_0} u = \inf_{r>0} \sup_{B_d(x_0,r)\cap\Omega} u = \inf_{r>0} \sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega} u$$
Quindi $u(x_0) = \max_\Omega u$. Dal punto 1. della dimostrazione segue che $u \equiv u(x_0)$ in Ω_{x_0} la componente connessa di Ω contentente x_0, cosicchè, per ogni $x \in \partial\Omega_{x_0}$, si ha:
$$0 \geq \limsup_{\Omega \ni y \to x} u(y) \geq \limsup_{\Omega_{x_0} \ni y \to x} u(x) = u(x) = u(x_0) = \max_{\Omega} u$$
La tesi è provata.

□

Teorema 4.2.2 (Equivalenza delle proprietà di sottomedia).
Sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione s.s.c. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. *u soddisfa la proprietà di sottomedia locale di volume;*
2. *u soddisfa la proprietà di sottomedia globale di volume;*
3. *u soddisfa la proprietà di sottomedia locale di superficie;*
4. *u soddisfa la proprietà di sottomedia globale di superficie;*

Chiameremo ***funzione che verifica la formula di sottomedia*** *qualsiasi funzione che verifica una delle proprietà (1)-(4).*

Per dimostrare questo teorema è opportuno premettere una caratterizzazione della $L-$superarmonicità delle funzioni di classe C^2, un teorema sulla $L-$ regolarità delle $d-$palle e un teorema che ci dà una esplicita densità delle misure $L-$armoniche relative ad una $d-$palla.

Proposizione 4.2.3. *Sia u una funzione di classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Allora u è $L-$superarmonica se e solo se*

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

Dimostrazione. Sia $V \subset \overline{V} \subseteq \Omega$ un insieme aperto $L-$regolare e sia $\varphi \in C(\partial V, \mathbb{R})$, $\varphi \leq u$. Si ha:

$$\begin{cases} L(u - H_\varphi^V) \leq 0 & \text{in } \Omega \\ \limsup_{x \to y} \big(u(x) - H_\varphi^V(x)\big) \geq u(y) - \varphi(y) \geq 0 & \text{per ogni } y \in \partial V \end{cases}$$

Allora, dal principio del massimo, $u - H_\varphi^V \geq 0$ in V, cosicchè u è $L-$superarmonica. Viceversa, sia $u \in \overline{S}(\Omega)$ e supponiamo, per assurdo, che $Lu(x_0) > 0$ in un qualche punto $x_0 \in \Omega$. Segue che $Lu > 0$ in un intorno Ω_0 di x_0. Allora, dalla prima parte della dimostrazione, $u \in \underline{S}(\Omega_0)$. D'altra parte, $u \in \overline{S}(\Omega_0)$ dato che $u \in \overline{S}(\Omega)$. Dall'osservazione (17) segue che $u \in H(\Omega_0)$, cioè $Lu = 0$ in Ω_0, assurdo. □

Proposizione 4.2.4. *Sia d una L-gauge. Allora, le $d-$palle*

$$B_d(x_0, r), \quad x_0 \in G,\ r > 0$$

sono insiemi $L-$ regolari.

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$v(x) := \begin{cases} (d(x_0^{-1} \circ x))^{2-Q} - r^{2-Q} & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Essendo d una $L-$gauge, v è $L-$superarmonica in $B_d(x_0, r)$ per il teorema (??). In più, $v > 0$ in $B_d(x_0, r)$, e $v(x) \to 0$ per $x \to y$ per ogni $y \in \partial B_d(x_0, r)$. Allora v è una funzione $L-$barriera per $B_d(x_0, r)$ in ogni punto del suo bordo. Il teorema di Bouligand implica che $B_d(x_0, r)$ è $L-$ regolare. □

Proposizione 4.2.5. *Sia d una L-gauge. Data $x_0 \in \mathbb{G}$ e $r > 0$, abbiamo*

$$d\mu_{x_0}^{B_d(x_0,r)}(y) = \frac{\beta_d(Q-2)}{r^{Q-1}} K_L(x_0,y) \cdot d\sigma(y)$$

Dimostrazione. Sia $0 < \rho < r$ e $\varphi \in C(\partial B_d(x_0,r), \mathbb{R})$. Essendo la funzione

$$h := H_\varphi^{B_d(x_0,r)}$$

$L-$armonica in $B_d(x_0,r)$, usando il teorema della media di superficie (1.3.1) e l'identità (4.1), otteniamo

$$m_\rho(h)(x_0) = h(x_0) = \int_{\partial B_d(x_0,r)} \varphi(y) d\mu_{x_0}^{B_d(x_0,r)}(y)$$

D'altra parte, poichè $h(y) \to \varphi(z)$ per $y \to z$ per ogni $z \in \partial B_d(x_0,r)$,

$$\lim_{\rho \to r} m_\rho(h)(x_0) = m_r(h)(x_0) = \frac{\beta_d(Q-2)}{r^Q} \int_{\partial B_d(x_0,r)} h(y) K_l(x,y) d\sigma(y) =$$

$$= \frac{\beta_d(Q-2)}{r^Q} \int_{\partial B_d(x_0,r)} \varphi(y) K_L(x,y) d\sigma(y)$$

Allora:

$$\int_{\partial B_d(x_0,r)} \varphi(y) d\mu_{x_0}^{B_d(x_0,r)}(y) = \frac{\beta_d(Q-2)}{r^Q} \int_{\partial B_d(x_0,r)} \varphi(y) K_L(x,y) d\sigma(y)$$

per ogni $\varphi \in C(\partial B_d(x_0,r), \mathbb{R})$, e il teorema è dimostrato. □

Dimostrazione del teorema (4.2.2)
(1) $\Rightarrow$ (4) Sia $\overline{B_d(x,r)} \subset \Omega$ e $\varphi \in C(\partial B_d(x,r)\, \mathbb{R})$ tale che $u \leq \varphi$ in $\partial B_d(x,r)$. Dato che $u - H_\varphi^{B_d(x,r)}$ è una funzione che verifica la formula di sottomedia di volume, dal principio del massimo (4.2.1), abbiamo $u - H_\varphi^{B_d(x,r)} \leq 0$ in $B_d(x,r)$. In particolare,

$$u(x) \leq H_\varphi^{B_d(x,r)} = \int_{\partial B_d(x,r)} \varphi(y) d\, \mu_x^{B_d(x,r)}(y) =$$

$$= (\text{dalla proposizione (4.2.5)})\ \frac{\beta_d(Q-2)}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(x,r)} \varphi(y) K_L(x_0,y) \cdot d\sigma(y)$$

prendendo l'estremo inferiore delle funzioni continue $\varphi \geq u|_{\partial\Omega}$

$$u(x) \leq \frac{\beta_d(Q-2)}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(x,r)} u(y) K_L(x_0, y) \cdot d\sigma(y) = m_r(u)(x)$$

$(4) \Rightarrow (3)$ ovvio.

$(3) \Rightarrow (1)$ Supponiamo $u(x) \leq m_\rho(u)(x)$ per $0 < \rho < r_x$. Allora

$$\int_0^r \rho^{Q-1} u(x) d\rho \leq \int_0^r \rho^{Q-1} m_\rho(u)(x) d\rho$$

da cui

$$\frac{r^Q}{Q} u(x) \leq \int_0^r \rho^{Q-1} m_\rho(u)(x) d\rho$$

Pertanto

$$u(x) \leq \frac{Q}{r^Q} \int_0^r \rho^{Q-1} m_\rho(u)(x) d\rho = M_r(u)(x)$$

$(2) \Rightarrow (1)$ ovvio.

Proposizione 4.2.6. *Sia Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{G}$, e sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione s.s.c. che verifica la formula di sottomedia. Supponiamo che $u(x_0) > -\infty$ per qualche $x_0 \in \Omega$. Allora $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Proviamo prima che $u > -\infty$ in un sottoinsieme denso di Ω. Dato che Ω è connesso e esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) > -\infty$, basta mostrare che $u > -\infty$ in un sottoinsieme denso di $B_d(x,r)$ per ogni $\overline{B_d(x,r)} \subset \Omega$ tale che $u(x) > -\infty$. Questo deriva da

$$-\infty < u(x) \leq M_r(u)(x) = \frac{m_d}{r^Q} \int_{B_d(x,r)} \Psi_L(x^{-1} \circ y) u(y) dy$$

e dal fatto che $\Psi_L > 0$ in un insieme aperto denso.

Sia ora $z_0 \in \Omega$ fissato e $R > 0$ tale che $\overline{B_d(z_0,R)} \subset \Omega$. Proviamo l'esistenza di una costante $\lambda > 0$ tale che

$$\int_{B_d(z_0,\lambda R)} u(z) dz > -\infty$$

Da questo segue il nostro teorema.
Scegliamo tre costanti positive λ_0, λ, ξ tali che

$$c\,(\lambda_0 + \lambda) \leq \xi \quad c\,(\lambda_0 + \xi) \leq 1 \tag{4.9}$$

dove c è la costante che appare nella disuguaglianza pseudo-triangolare per la $L-$gauge d (proposizione (3.2.4)). Dato che l'insieme

$$\big\{x \in \Omega \ \text{ t.c. } \ \Psi_L(x^{-1} \circ z_0) > 0\big\}$$

è un sottoinsieme aperto e denso di Ω e

$$\{x \in \Omega \ \text{ t.c. } \ u(x) > -\infty\}$$

è denso in Ω, esiste $x_0 \in B_d(z_0, \lambda_0\, R)$ tale che

$$x_0 \neq z_0, \ u(x_0) > -\infty \quad e \quad \Psi_L(x_0^{-1} \circ z_0) > 0$$

Per il fatto che Ψ_L è liscia fuori dall'origine, possiamo scegliere λ in modo tale che, per un opportuno $m_0 > 0$, otteniamo $\Psi_L(x_0^{-1} \circ z) \geq m_0$ per ogni $z \in B_d(z_0, \lambda\, R)$.
D'altra parte, le disuguaglianze (4.9) implicano le inclusioni

$$B_d(z_0, \lambda R) \subseteq B_d(z_0, \xi R) \subseteq B_d(z_0, R)$$

Allora, se poniamo

$$U := \max_{\overline{B_d(z_0,R)}} u \quad (\in \mathbb{R})$$

abbiamo (denotando con mis la misura di Lebesgue in $\mathbb{G}$)

$$\int_{B_d(z_0,\lambda R)} u(z)dz =$$

$$= \int_{B_d(z_0,\lambda R)} (u(z) - U)dz + U\, mis\,(B_d(z_0, \lambda R)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{m_0} \int_{B_d(z_0,\lambda R)} \Psi_L(x_0^{-1} \circ z)(u(z) - U)dz + U\, mis\,(B_d(z_0, \lambda R)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{m_0}\int_{B_d(z_0,\xi R)}(u(z)-U)dz + U\,mis\,(B_d(z_0,\lambda R)) =$$
$$= \frac{(\xi R)^Q}{m_d m_0} M_{\xi R}(u-U)(x_0) + U mis\,(B_d(z_0,\lambda R)) \geq$$
$$\geq \frac{(\xi R)^Q}{m_d m_0}\,(u(x_0)-U) + U mis\,(B_d(z_0,\lambda R)) > -\infty$$

Questo completa la dimostrazione. □

4.2.2 Caratterizzazione delle funzioni $L-$subarmoniche

Teorema 4.2.7. *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{G}$ e $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione s.s.c. Allora u è $L-$ipoarmonica se solo se u verifica la formula di sottomedia.*

Dimostrazione. Sia u una qualsiasi funzione che verifica la formula di sottomedia. Usando il principio del massimo (4.2.1) e argomentando come nella prima parte della dimostrazione del teorema (4.2.2) si prova che u è L-ipoarmonica.

Viceversa, supponiamo che u sia $L-$ipoarmonica. Sia $\overline{B_d(x,r)} \subset \Omega$. Dato che, per proposizione (4.2.4), $B_d(x,r)$ è un aperto $L-$regolare, per tutte le $\varphi \in C(\partial B_d(x,r), \mathbb{R})$ tali che $\varphi \geq u$ su $\partial B_d(x,r)$, abbiamo

$$u(x) \leq H_{\varphi}^{B_d(x,r)}(x) = \int_{\partial B_d(x,r)} \varphi(y) d\mu_x^{B_d(x,r)}(y)$$

D'altra parte, dalla proposizione (4.2.5), abbiamo

$$\int_{\partial B_d(x,r)} \varphi(y) d\mu_x^{B_d(x,r)}(y) = \frac{\beta_d(Q-2)}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(x,r)} \varphi(y) K_L(x,y) d\sigma(y)$$

Quindi

$$\frac{\beta_d(Q-2)}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(x,r)} \varphi(y) K_L(x,y) d\sigma(y) \geq u(x) \quad \forall\, \varphi \in C(\partial B_d(x,r), \mathbb{R})$$

cosicchè

$$m_r(u)(x) = \frac{\beta_d(Q-2)}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(x,r)} u(y) K_L(x,y) d\sigma(y) \geq u(x)$$

Allora u verifica la proprietà di sottomedia di superficie. □

Corollario 4.2.8. *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{G}$, e sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione s.s.c., finita in un sottoinsieme denso di Ω. Allora $u \in \underline{S}(\Omega)$ se e solo se u verifica la formula di sottomedia.*

Dimostrazione. Da (4.2.7) $u \in \underline{S}(\Omega)$ se solo se $u \in H_*(\Omega)$, e, da (4.1.5), $u \in H_*(\Omega)$ è subarmonica se e solo se è finita in un sottoinsieme denso di Ω.

Corollario 4.2.9. *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{G}$, e sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione u.s.c. Allora $u \in \underline{S}(\Omega)$ se e solo se u verifica la formula di sottomedia e $u > -\infty$ in almeno un punto di Ω.*

Dimostrazione. Se $u \in \underline{S}(\Omega)$, allora $u > -\infty$ in un sottoinsieme denso di Ω (per teorema 4.1.5), e u verifica la formula di sottomedia per il teorema 4.2.7. Viceversa, se u verifica la formula di sottomedia e $u > -\infty$ in almeno un punto di Ω, dalla proposizione (4.2.6) $u \in L^1_{loc}$. In particolare, $u > -\infty$ in un sottoinsieme denso di Ω. In più, per il teorema 4.2.7 $u \in H_*(\Omega)$. Quindi, per il teorema 4.1.5 $u \in \underline{S}(\Omega)$. □

Corollario 4.2.10. *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{G}$ e sia $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ una funzione u.s.c. Se $u \in \underline{S}(\Omega)$ allora $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Applicare il corollario (4.2.9) e la proposizione (4.2.6) □

4.3 Metodo delle medie iterate di Lebesgue

Sia L un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot omogeneo $\mathbb{G}$. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un insieme aperto limitato. Per ogni $x \in \Omega$ poniamo

$$r_x := \frac{1}{2} dist_d(x, \partial\Omega)$$

dove d è una funzione $L-$gauge. Per ogni $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definiamo

$$T(u)(x) := M_{r_x}(u)(x)$$

La funzione $\Omega \ni x \mapsto T(u)(x) \in \mathbb{R}$ è continua, come si può verificare facilmente utilizzando il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata. In particolare, $T(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$. La seguente definizione per ricorrenza è quindi ben posta

$$\begin{cases} T^{(1)}(u) = Tu \\ T^{(k+1)}(u) = T(T^{(k)}u) \end{cases}$$

Il teorema seguente, nel caso del Laplaciano classico, è sostanzialmente dovuto a Lebesgue.

Teorema 4.3.1.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto limitato e sia $F \in C(\overline{\Omega})$. Allora, posto $f = F|_{\partial\Omega}$ risulta

$$\lim_{k\to\infty} T^{(k)}(F) = H_f^\Omega \qquad \forall\, x \in \Omega$$

Dimostrazione. Procediamo per passi:

1. $T(u)$ è continua in Ω, per ogni $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

   Dimostrazione. Dato che la funzione $(t, y) \mapsto M_t(u)(y)$ è continua, e quindi, poichè r_x dipende con continuità da x, la funzione $x \mapsto M_{r_x}(u)(x)$ è continua. □

2. Se u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $u \leq v$ allora $T(u) \leq T(v)$

   Dimostrazione. Poichè $u \leq v$ e $\Psi_L \geq 0$, per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$\int_{B_d(x,r_x)} \Psi_L(x^{-1} \circ y)u(y)dy \leq \int_{B_d(x,r_x)} \Psi_L(x^{-1} \circ y)v(y)dy$$

   e quindi

$$\frac{m_d}{r_x^Q} \int_{B_d(x,r_x)} \Psi_L(x^{-1} \circ y)u(y)dy \leq \frac{m_d}{r_x^Q} \int_{B_d(x,r_x)} \Psi_L(x^{-1} \circ y)v(y)dy$$

   Pertanto

$$T(u)(x) \leq T(v)(x) \quad \forall\, x \in \Omega$$

□

3. Se $u \in \overline{S}(\Omega)$ allora $T(u) \leq u$.

   Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, per il corollario (4.2.10), $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Quindi $T(u)$ è ben definita. Inoltre, per il corollario (4.2.9) u verifica la formula di sopramedia e quindi, per ogni $x \in \Omega$

$$u(x) \geq M_{r_x}(u)(x) = T(u)(x)$$

$\square$

4. Per ogni $u \in \overline{S}(\Omega)$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta $T^{(k)}(u) \geq T^{(k+1)}(u)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

   Dimostrazione. Per il punto precedente $u \leq T(u)$ e quindi, per il punto 2., $T(u) \leq T(T(u)) = T^{(2)}(u)$. Questo prova l'affermazione nel caso $k = 1$. Procediamo per induzione e supponiamo che essa valga per un $k \in \mathbb{N}$. Allora

$$T^{(k)}(u) \geq T^{(k+1)}(u)$$

   e quindi, ancora per la proprietà al punto 2.,

$$T^{(k+1)}(u) = T(T^{(k)}(u)) \geq T(T^{(k+1)}(u)) = T^{(k+2)}(u)$$

   Pertanto

$$T^{(k+1)}(u) \geq T^{(k+2)}(u)$$

   e l'affermazione segue dal principio di induzione $\square$

5. Siano $u \in \overline{S}(\Omega)$ e $v \in \underline{S}(\Omega)$ tali che $v \leq u$. Allora

$$v \leq T^{(k)}(v) \leq T^{(k)}(u) \leq u \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

   Dimostrazione. Poichè u è superarmonica, per i punti 3. e 4., abbiamo

$$T^{(k)}(u) \leq T(u) \leq u$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Analogamente, poichè v è subarmonica, abbiamo

$$v \leq T(v) \leq T^{(k)}(v)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Infine, dimostriamo per induzione che $T^{(k)}(v) \leq T^{(k)}(u)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 1,$ l'affermazione segue dal secondo punto. Supponiamo che essa sia vera per $k \in \mathbb{N}$:

$$T^{(k)}(v) \leq T^{(k)}(u)$$

Applicando ancora il punto 2., affermiamo che

$$T^{(k+1)}(v) \leq T^{(k+1)}(u)$$

e la dimostrazione è terminata. □

6. Siano $u \in \overline{S}(\Omega)$ e $v \in \underline{S}(\Omega)$ tali che $u \geq v$. Allora esistono $u^*, v^* \in L^1_{loc}(\Omega)$ tali che $T^{(k)}(v) \uparrow v^*$, $T^{(k)}(u) \downarrow u^*$ e

$$T(v^*) = v^* \leq u^* = T(u^*)$$

Dimostrazione. Per il punto precedente, $(T^{(k)}(u))_{k \geq 1}$ è una successione monotona decrescente. Esiste allora $u^* : \Omega \to [-\infty, \infty[$ tale che

$$u^* := \lim_{k \to \infty} T^{(k)}(u) \left(= \inf_k T^{(k)}(u)\right)$$

puntualmente in Ω.

D'altra parte, ancora per il punto 5., $v \leq T^{(k)}(u) \leq u$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$v \leq u^* \leq T^{(k)}(u) \leq u \tag{4.10}$$

Poichè $v \in L^1_{loc}$, in quanto subarmonica in Ω, dalla prima di queste disuguaglianze si trae

$$u^* \in L^1_{loc}$$

Per v^* la dimostrazione è analoga.
Inoltre, essendo $T(u^*) \downarrow u^* \in L^1_{loc}(\Omega)$ per il teorema di convergenza monotona di Beppo Levi, si ha

$$T(u^*) = T(\lim_{k\to\infty} T^{(k)}(u)) = \lim_{k\to\infty} T^{(k+1)}(u) = u^*$$

Analogamente $T(v^*) = v^*$.
Infine, essendo, sempre per il punto 5., $T^{(k)}(v) \leq T^{(k)}(u)$, per k tendente all'infinito, otteniamo $v^* \leq u^*$. □

Prima di passare al punto successivo della dimostrazione, è necessario premettere i seguenti lemmi.

Lemma 4.3.2. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot e sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto connesso contenuto in $\mathbb{G}$. Sia u una funzione s.s.c. tale che $T(u) \leq u$. Se u assume minimo in un punto di Ω, allora u è costante in Ω.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \min_\Omega u$. Poniamo

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \ \ t.c. \ \ u(x) = u(x_0)\}$$

Dimostriamo che Ω_0 è chiuso in Ω. Sia $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione in Ω_0 tale che

$$x_j \longrightarrow y_0 \in \Omega$$

Proviamo che $y_0 \in \Omega_0$. Per la superiore semicontinuità di u si ha

$$\min_\Omega u = \limsup_{j\to\infty} \left(\min_\Omega u\right) = \limsup_{j\to\infty} u(x_j) = u(y_0)$$

Quindi

$$u(y_0) = \min_\Omega u$$

Pertanto

$$y_0 \in \Omega_0$$

Dimostriamo ora che è Ω_0 è aperto. Sia $z \in \Omega_0$. Da $T(u)(z) \leq u(z) = u(x_0) = \min_\Omega u$, si trae

$$\frac{m_d}{r_z^Q} \int_{B_d(z,r_z)} \Psi_L(y^{-1} \circ z)(u(y) - u(z))dy \leq 0$$

e quindi, come nella prima parte della dimostrazione del lemma (3.7.2), si conclude che

$$u \equiv u(z) = u(x_0) \ \ in \ \ D(z, r_z)$$

Ciò prova che Ω_0 è aperto.
Quindi Ω_0 un insieme non vuoto sia aperto che chiuso in Ω, e Ω è connesso. Pertanto Ω_0 coincide con Ω. □

Lemma 4.3.3. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot e sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto limitato contenuto in $\mathbb{G}$. Sia u una funzione s.s.c. in Ω. Supponiamo*

$$\begin{cases} T(u) \leq u & in\ \Omega \\ \liminf_{x \to y} u(x) \geq 0 & \forall\, y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Allora $u \geq 0$ in Ω

Dimostrazione. Si deduce dal lemma (4.3.2), procedendo come nella dimostrazione del secondo punto del Teorema (4.2.1). □

Riprendiamo ora la dimostrazione del Teorema (4.3.1) con il seguente punto 7.

7. Sia $u \in \overline{S}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e sia $f = u|_{\partial\Omega}$. Allora

$$\lim_{k \to \infty} T^{(k)}(u) = H_f^\Omega$$

Dimostrazione. Per il punto 6. la successione $(T^{(k)}(u))_{k \geq 1}$ è monotona decrescente. Sia $u^* := \lim_{k \to \infty} T^{(k)}(u)$. Dimostriamo che

$$v \leq u^* \leq w \qquad \forall\, v \in \underline{U}_f^\Omega \ \text{ e } \ \forall\, w \in \overline{U}_f^\Omega \tag{4.11}$$

Da questa disuguaglianza, si otterranno subito le seguenti:

$$v \leq \underline{H}_f^\Omega \leq u^* \leq \overline{H}_f^\Omega \leq w \tag{4.12}$$

e quindi, essendo f risolutiva in quanto continua (Teorema (4.1.15)), si avrà

$$\underline{H}_f^\Omega = u^* = \overline{H}_f^\Omega = H_f^\Omega$$

Dimostriamo ora (4.11).
Sia $v \in \underline{U}_f^\Omega$. Allora

$$v \in H_*(\Omega), \quad \limsup_{\partial\Omega} v \leq f, \quad \sup_\Omega v < \infty$$

Essendo $v \in H_*(\Omega)$, per il teorema 4.2.7 essa soddisfa la formula di sottomedia. Essendo poi $u \in \overline{S}(\Omega)$, anche $-u$ verifica la formula di sottomedia. Quindi $v - u$ verifica la formula di sottomedia. D'altra parte $\limsup_{x\to y}(v-u)(x) \leq 0$ per ogni $y \in \partial\Omega$. Quindi, per il principio del massimo 4.2.1, risulta $v - u \leq 0$ in Ω da cui

$$v \leq u \quad in\ \Omega$$

Essendo inoltre $v \in \underline{S}(\Omega)$ e $u \in \overline{S}(\Omega)$, per il punto precedente della dimostrazione abbiamo

$$v \leq v^* \leq u^* \leq u \tag{4.13}$$

Quindi, in particolare, per ogni $v \in \underline{U}_f^\Omega$ si ha $v \leq u^*$.

Sia ora $w \in \overline{U}_f^\Omega$. Per il punto 3. risulta $T(w) \leq w$ e per il punto 6. $T(u^*) = u^*$. Allora

$$T(w - u^*) \leq w - u^* \tag{4.14}$$

Inoltre, per l'ultima disuguaglianza in (4.13) e per la continuità di u sino al bordo,

$$\liminf_{x\to y}(w(x) - u^*(x)) \geq \liminf_{x\to y}(w(x) - u(x)) \geq \liminf_{x\to y} w(x) - u(y) \geq 0$$

per ogni $y \in \partial\Omega$.
Osservando infine che $w - u^*$ è s.s.c., possiamo applicare il lemma (4.3.3) e concludere che

$$w - u^* \geq 0 \qquad \text{in} \quad \Omega$$

Riassumendo, per ogni $w \in \overline{U}_f^\Omega$ si ha $u^* \leq w$. $\square$

Col punto seguente concluderemo la dimostrazione del teorema.

8. Siano $F \in C(\overline{\Omega})$ e $f := F|_{\partial\Omega}$. Allora

$$T^{\infty}(F) := \lim_{k\to\infty} T^{(k)}(F) = H_f^{\Omega}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$A := \left\{ u - v \;\text{ t.c. }\; u,\, v \in \overline{S}_c^+(\mathbb{G}) \right\}$$

Usiamo la proposizione 4.1.14. Essendo $F \in C(\overline{\Omega})$,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, p \in A \;\text{ t.c. }\; \sup_{\overline{\Omega}} |F - p| < \varepsilon$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $p_n \in A$, $p_n = u_n - w_n$, con $u_n,\, w_n \in \overline{S}_c^+(G)$, tale che

$$-\frac{1}{n} < F - (u_n - w_n) < \frac{1}{n} \qquad \text{in } \Omega$$

In altri termini:

$$(u_n - w_n) - \frac{1}{n} < F < (u_n - w_n) + \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.15}$$

Di conseguenza, per la linearità e la monotonia di T, e poichè, come segue facilmente dalla definizione $T(1) = 1$ si ha

$$T^{(k)}(u_n) - T^{(k)}(w_n) - \frac{1}{n} < T^{(k)}(F) < T^{(k)}(u_n) - T^{(K)}(w_n) + \frac{1}{n}$$

Mandando $k \to \infty$ e, usando il punto precedente della dimostrazione, si ottiene

$$H^{\Omega}_{(u_n - w_n)}\big|_{\partial\Omega} - \frac{1}{n} < T^{\infty}(F) < H^{\Omega}_{(u_n - w_n)}\big|_{\partial\Omega} + \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.16}$$

dove $T^{\infty}(F) := \lim_{k\to\infty} T^{(k)}(F)$.
D'altra parte, da (4.15) otteniamo anche:

$$H^{\Omega}_{(u_n - w_n)}\big|_{\partial\Omega} - \frac{1}{n} < H^{\Omega}_f < H^{\Omega}_{(u_n - w_n)}\big|_{\partial\Omega} + \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.17}$$

Unendo (4.16) e (4.17), otteniamo:

$$-\frac{2}{n} = H^{\Omega}_{(u_n-w_n)}\big|_{\partial\Omega} - \frac{1}{n} - H^{\Omega}_{(u_n-w_n)}\big|_{\partial\Omega} - \frac{1}{n} < H^{\Omega}_{f} - T^{\infty}(F) <$$

$$< H^{\Omega}_{(u_n-w_n)}\big|_{\partial\Omega} + \frac{1}{n} - H^{\Omega}_{(u_n-w_n)}\big|_{\partial\Omega} + \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} = \frac{2}{n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per $n \to \infty$ otteniamo

$$0 \le H^{\Omega}_{f} - T^{\infty}(F) \le 0$$

da cui

$$H^{\Omega}_{f} = T^{\infty}(F)$$

□

La dimostrazione è così terminata. □

Bibliografia

[1] *GowriSankaran K., Bliedtner J., Feyel D., Goldstein M., Hayman W. K., Netuka I., "Classical and Modern Potential Theory and Applications", Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 359-398 (1994)*

[2] *Serrin J., "A Symmetry Problem in Potential Theory", Arch. Ration. mech. Anal.* ***43****, 304-318 (1971)*

[3] *Kuran U., "On the Mean-Value Property of Harmonic Functions", Bull. London math. Soc.* ***4*** *(1972), 311-312*

[4] *Netuka, "Harmonic functions and mean value theorems", Casopis Pest. Mat.* ***100*** *(1975), 391-409 (Czech)*

[5] *Folland, G.B.:"Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups", Ark. Mat.,* ***13****, 161-207 (1975),*

[6] *Protter M.H., Weinberger H.F., "Maximum Principles in Differential Equations", Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs, New Jersey, (1967)*

[7] *Rao M., "Integral Harnack inequality", Glasgow Math. J.* ***26****, 115-120 (1985)*

[8] *Freitas P., Matos J.P., "On the Characterization of Harmonic and Subharmonic Functions via mean-value Properties", Springer Science+ Business media B.V. 2009, (28 Luglio 2009)*

[9] *Bonfiglioli A.. Lanconelli E., Uguzzoni F., "Stratified Lie Groups and Potential Theory for thie Sub-Laplacians", Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (2007).*

[10] *Flatto L., "The converse of Gauss's theorem for armonic functions,", J. Differential Equations **1** (1965), 483-490*

[11] *Axler S., Bourdon P., Ramey W. "Harmonic function theory", GTm, vol. 137, Springer, New York, (1992)*

[12] *Zalcman L., "Some inverse problmes of potential theory", Contemp. Math. **63** (1987), 337-350*

[13] *Goldstein M., Haussmann W., Jetter K. "Best harmonic L^1 approximation to subharmonic functions", J. London Math. Soc. (2) **30** (1984), 257-264*

Ringraziamenti

"Se qualcuno ti ha educato non può averlo fatto che col suo essere, non con le sue parole." (P.P.Pasolini)

Ringrazio il professore E. Lanconelli per essere stato, per me, Maestro durante i miei anni universitari, perché nel desiderio di seguire i suoi insegnamenti, di acquisire la passione per la matematica che il fascino della sua persona trasmetteva, io sono cresciuta.
Lo ringrazio per avermi accompagnata costantemente e con immensa disponibilità in questo lavoro di tesi e per essere riuscito a comunicarmi tutta la bellezza di ciò che studiavo, per avere corretto i miei errori e per avere ammirato i miei buoni risultati, per avere sempre creduto in me.
Lo ringrazio anche perché, come Presidente di Corso di Laurea, ha sempre dimostrato che il bene di noi studenti era la sua priorità.