

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA CIVILE

Dipartimento di Tecnica delle Costruzioni

TESI DI LAUREA

Riabilitazione Strutturale

**PROGETTAZIONE SEMPLIFICATA DI RINFORZI IN FRP PER
PARETI MURARIE CON APERTURE**

CANDIDATO:
Bartoli Francesco

RELATORE:
Chiar.mo Prof.
Ing. Benedetti Andrea

Anno Accademico 2009/10

Sessione II

SOMMARIO

| | | |
|--------|--|----|
| 1 | introduzione..... | 2 |
| 2 | la teoria..... | 4 |
| 3 | primo modello..... | 5 |
| 3.1 | la rigidezza del traverso | 6 |
| 3.2 | la rigidezza della colonna..... | 9 |
| 3.3 | le azioni | 11 |
| 3.4 | esempi..... | 13 |
| 3.5 | wall 1 ($D/B = 1/3$, $K_y/K_{x1} = 0.32$, $K_y/K_{x2} = 0.48$) | 16 |
| 3.5.1 | colonna + singolo traverso (fact1)..... | 17 |
| 3.5.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 18 |
| 3.6 | wall 2 ($D/B = 1/2$, $K_y/K_{x1} = 0.31$, $K_y/K_{x2} = 0.55$) | 19 |
| 3.6.1 | colonna + singolo traverso (fact1)..... | 20 |
| 3.6.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 21 |
| 3.7 | wall 3 ($D/B = 1/3$, $K_y/K_{x1} = 0.25$, $K_y/K_{x2} = 0.44$) | 22 |
| 3.7.1 | colonna + singolo traverso (fact1)..... | 23 |
| 3.7.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 24 |
| 3.8 | wall 4 ($D/B = 1/2$, $K_y/K_{x1} = 0.33$, $K_y/K_{x2} = 0.53$) | 25 |
| 3.8.1 | colonna + singolo traverso (fact1)..... | 26 |
| 3.8.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 27 |
| 3.9 | wall 5 ($D/B = 2/5$, $K_y/K_{x1} = 0.34$, $K_y/K_{x2} = 0.61$) | 28 |
| 3.9.1 | colonna + singolo traverso (fact1)..... | 29 |
| 3.9.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 30 |
| 3.10 | wall 6 ($D/B = 1/5$, $K_y/K_{x1} = 0.29$, $K_y/K_{x2} = 0.46$) | 31 |
| 3.10.1 | colonna + singolo traverso (fact1)..... | 32 |

| | | |
|--------|---|----|
| 3.10.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 33 |
| 3.11 | wall 7 ($D/B = 1/2.5$, $K_y/K_{x1} = 0.29$) | 34 |
| 3.11.1 | colonna + singolo traverso (fact1) | 35 |
| 3.12 | wall 8 ($D/B = 1/2.5$, $K_y/K_{x1} = 0.23$, $K_y/K_{x2} = 0.44$) | 36 |
| 3.12.1 | colonna + singolo traverso (fact1) | 37 |
| 3.12.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 38 |
| 3.13 | wall 9 ($D/B = 1$, $K_y/K_{x1} = 0.31$, $K_y/K_{x2} = 0.64$) | 39 |
| 3.13.1 | colonna + singolo traverso (fact1) | 40 |
| 3.13.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 41 |
| 3.14 | wall 10 ($D/B = 2/3$, $K_y/K_{x1} = 0.47$, $K_y/K_{x2} = 0.90$) | 42 |
| 3.14.1 | colonna + singolo traverso (fact1) | 43 |
| 3.14.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 44 |
| 3.15 | wall 11 ($D/B = 2/3$, $K_y/K_{x1} = 0.52$, $K_y/K_{x2} = 0.99$) | 45 |
| 3.15.1 | colonna + singolo traverso (fact1) | 46 |
| 3.15.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 47 |
| 3.16 | wall 12 ($D/B = 1/1.5$, $K_y/K_{x1} = 0.32$, $K_y/K_{x2} = 0.59$) | 48 |
| 3.16.1 | colonna + singolo traverso (fact1) | 49 |
| 3.16.2 | colonna + doppio traverso (fact2) | 50 |
| 3.17 | considerazioni | 51 |
| 4 | secondo modello | 53 |
| 4.1 | le rigidezze | 55 |
| 4.1.1 | la rigidezza alla rotazione del traverso | 56 |
| 4.1.2 | la rigidezza alla traslazione della colonna | 58 |
| 4.2 | le azioni | 61 |
| 4.2.1 | calcolo delle azioni di piano (caso sismico) | 62 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 4.2.2 | calcolo delle reazioni di taglio nelle colonne | 64 |
| 4.2.3 | calcolo delle reazioni di taglio nei traversi..... | 66 |
| 4.2.4 | diagrammi dei momenti..... | 74 |
| 4.3 | esempi..... | 76 |
| 4.3.1 | wall 1 | 76 |
| 4.3.2 | wall 2 | 79 |
| 4.3.3 | wall 3 | 82 |
| 4.3.4 | wall 4 | 85 |
| 4.3.5 | wall 5 | 88 |
| 4.3.6 | wall 6 | 91 |
| 4.3.7 | wall 7 | 94 |
| 4.3.8 | wall 8 | 97 |
| 4.3.9 | wall 9 | 101 |
| 4.3.10 | wall 10 | 105 |
| 4.3.11 | wall 11 | 109 |
| 5 | conclusioni..... | 113 |
| 6 | verifiche | 116 |
| 6.1 | calcolo del diagramma resistente..... | 117 |
| 6.2 | progetto del rinforzo in frp | 118 |
| 7 | bibliografia..... | 121 |

Rivolgo un ringraziamento particolare alla mia famiglia che mi ha supportato durante tutto questo lungo cammino universitario.

In particolare ringrazio mia moglie Virginia e mio figlio Giulio che con la loro pazienza hanno sopportato, durante questi mesi, la mia forzata lontananza e hanno saputo spronarmi nei momenti di difficoltà.

Un grazie di cuore anche a mio padre, mia madre e mio fratello che hanno creduto in me.

“Ho notato che anche le persone che affermano che tutto è già scritto e che non possiamo far nulla per cambiare il destino, si guardano intorno prima di attraversare la strada.”

Stephen Hawking

1 INTRODUZIONE

In ingegneria civile, la ragione dell'assiduo studio sulle costruzioni murarie è dovuto alla loro peculiarità di poter garantire un giusto compromesso tra architettura ed ingegneria. In Italia, infatti costituiscono buona parte delle civili abitazioni, soprattutto nei centri storici e nelle aree ad interesse architettonico e per tale ulteriore motivo, costituiscono ragione importante di studio.

Tali studi negli anni si sono concentrati sul fornire metodologie e linee guida alle fasi di progettazione, ma poche volte hanno trattato il concetto di ristrutturazione e risanamento. Infatti, oltre ai particolari costruttivi che portano a miglioramenti strutturali, è importante considerare come buona parte di queste strutture siano già esistenti e spesso particolarmente datate, per cui si presenta la necessità di intervenire puntualmente in modo da garantire un adeguato livello di sicurezza che, al giorno d'oggi è prerogativa necessaria per qualsiasi civile abitazione.

La complessità, a tal livello, è insita nelle caratteristiche meccaniche dell'elemento muratura, fortemente disomogeneo in quanto costituito da due materiali quali malta e mattoni disgiunti tra loro. La strada è quella di giungere a legare questi due elementi tra loro attraverso formule empiriche e ciò comporta spesso l'uso di una modellazione di difficile interpretazione e lettura e quindi onerosa.

Muovendoci contro corrente e distaccandoci dalle ricerche tradizionali in materia, basate appunto su studi teorici e complessi, spesso per forza di cose finalizzati a software di modellamento agli elementi finiti, ci è sembrato opportuno focalizzarci sull'obiettivo ultimo e più importante dell'ingegnere strutturista ovvero il progetto e soprattutto la verifica della struttura, studiando un metodo veloce che garantisse, a scapito di approssimazioni sulla natura geometrica e meccanica del materiale muratura, un calcolo veloce delle caratteristiche resistenti di un pannello murario con aperture. Ciò diventa un elemento utile per lo strutturista che si trova a risanare un

edificio in muratura, in termini di maschi e traversi, e che per una verifica veloce e sommaria troverebbe troppo laborioso e oneroso, in termini di tempo, realizzare un modello ad hoc con elementi finiti.

Quanto segue espone, ci auguriamo nel modo più chiaro possibile, i passaggi che hanno portato alla realizzazione di un foglio di calcolo atto a valutare ed individuare in modo preliminare e veloce, gli elementi meno rigidi, più a rischio di danneggiamento e quindi necessitanti l'uso di rinforzi.

Riassumendo, abbiamo lasciato da parte lo studio classico sulla muratura, più oneroso ma nobile perché ha il fine di tracciare precise formulazioni sulle caratteristiche geometrico - meccaniche del materiale, e ci siamo concentrati su un approccio più pratico che garantisca, rinunciando ad una certa precisione nei calcoli, una visione d'insieme della struttura nella fase antecedente al progetto esecutivo e all'esecuzione dell'intervento.

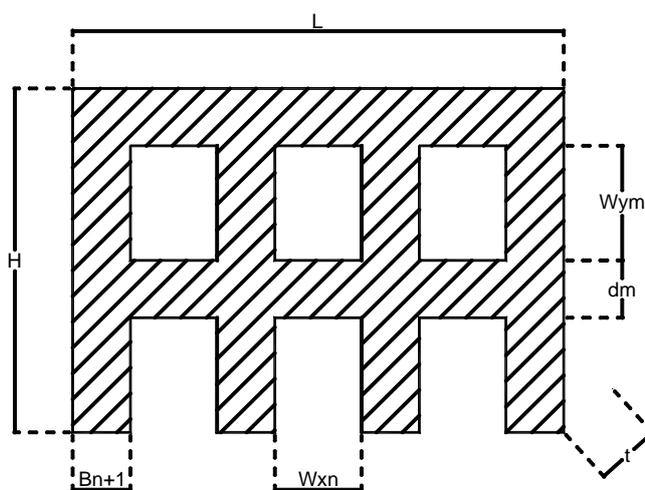
Il metodo consiste quindi nel valutare con calcoli veloci il diagramma del momento e del taglio per una parete forata sottoposta a forze di piano e quindi, confrontandolo con il diagramma del momento resistente, poter visualizzare quali tratti superano la soglia di resistenza e necessitano l'applicazione di rinforzi in FRP.

2 LA TEORIA

Lo studio si applica a pareti in muratura di spessore costante, caratterizzate da aperture di dimensione variabile e sforzo normale trascurabile rispetto allo sforzo tagliante. Ciò si traduce in una applicabilità a pareti murarie con porte e finestre, sollecitate da un elevato sforzo tagliante di piano come nel caso di un sisma.

Non c'è limite al numero di piani e al numero di campate, tuttavia la calibrazione del foglio di calcolo tramite comparazione con modelli agli elementi finiti, ha messo in luce come esso si comporti bene per numero di piani non superiore a quattro, numero di campate non superiore a cinque, aperture regolari in altezza tra due traversi e regolari in larghezza tra due colonne. Gli ultimi due punti permettono di avere maschi e traversi distribuiti in modo corretto e senza porzioni di muratura non collaborante (linee guida consigliate anche in progettazione). Detto ciò, il codice di calcolo si presta comunque a qualsiasi tipo di parete geometricamente accettabile ma più essa è complessa e irregolare e più gli errori nei risultati saranno evidenti.

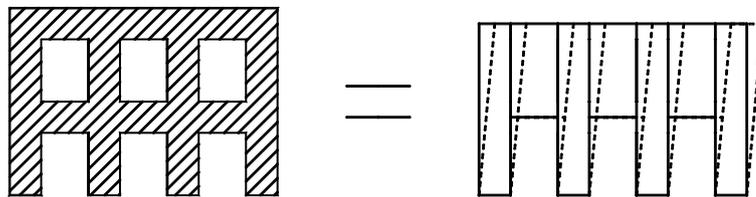
In fig.1 è rappresentata una parete e la nomenclatura adottata per ogni elemento che la costituisce.



m numero vuoti in altezza
n numero vuoti in larghezza

3 PRIMO MODELLO

In primo luogo abbiamo schematizzato la parete come insieme di colonne con comportamento a mensola e telai costituiti dagli m traversi di piano. Facendo ciò abbiamo ipotizzato una preponderanza di deformabilità tagliante rispetto alla flessionale per le colonne di muratura e per quanto riguarda i traversi, una pura traslazione. Tali ipotesi hanno comportato determinati schemi risolutivi per il calcolo delle rigidezze che esporremo nel dettaglio in seguito.



2

Questo studio è stato applicato a pareti regolari con aperture, colonne e traversi di dimensioni costanti sollecitate da un'unica forza applicata in sommità alla parete. In questo modo si può programmare un foglio di calcolo in funzione del numero dei vuoti e del rapporto tra le dimensioni dei vuoti e le dimensioni complessive della parete.

$$L = n \cdot w_x + (n + 1) \cdot B$$

$$H = m \cdot w_y + m \cdot d$$

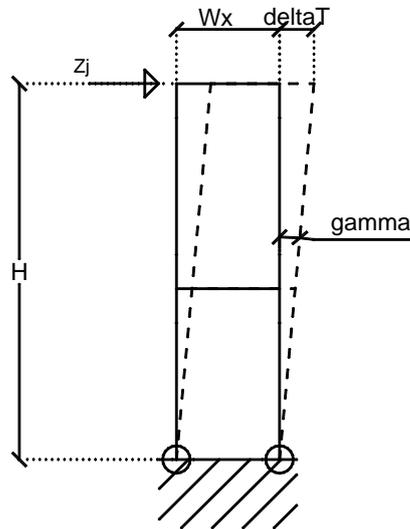
Chiamiamo quindi con ρ_x e ρ_y i rapporti tra la larghezza dei vuoti e la larghezza della parete e tra l'altezza dei vuoti e l'altezza totale della parete:

$$\rho_x = \frac{n \cdot w_x}{n \cdot w_x + (n + 1) \cdot B}$$

$$\rho_y = \frac{m \cdot w_y}{m \cdot w_y + m \cdot d}$$

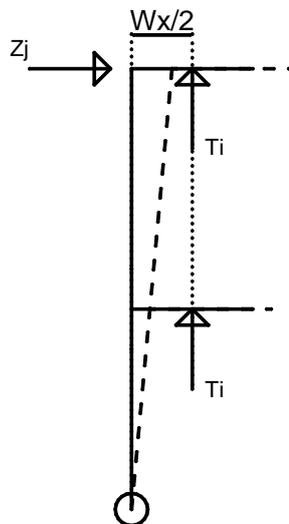
3.1 LA RIGIDEZZA DEL TRAVERSO

Il meccanismo è quello di un telaio sottoposto a puro taglio e vincolato per mezzo di cerniere alla base. Il telaio è al netto dei traverzi e quindi non include le colonne.



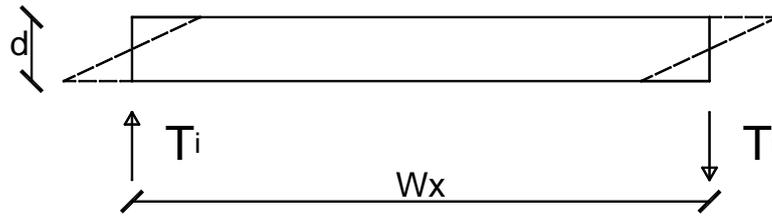
3

È bene specificare che ora come ora non conosciamo il valore della forza Z_j ma ai fini del calcolo della rigidità non ci è dato saperlo (la supporremo solamente essere quota parte di $F_{TOT,T}$). Studiando solo metà struttura è possibile ricavare lo spostamento δ_T in funzione delle reazioni di taglio agenti sui traverzi.



4

Dal singolo traverso di larghezza w_x ricaviamo il taglio T_i secondo il seguente schema:



5

Da cui si ricava la rotazione γ uguale per ogni piano e lo spostamento δ_T totale in sommità per il telaio di traversi:

$$\gamma = \frac{T_i \cdot kky}{G \cdot d \cdot t}$$

$$\delta_T = \gamma \cdot H$$

$$\delta_T = \frac{m \cdot T_i \cdot H \cdot kky}{G \cdot H \cdot (1 - \rho_y) \cdot t} = \frac{Z_J \cdot H \cdot kky}{G \cdot w_x \cdot (1 - \rho_y) \cdot t}$$

In quanto:

$$w_x = \frac{\rho_x \cdot L}{n}$$

$$\sum T_i \cdot \frac{w_x}{2} = \frac{Z_J}{2} \cdot H$$

$$\sum T_i = m \cdot T_i$$

(essendo i traversi tutti uguali in altezza)

La sollecitazione totale in sommità $F_{TOT,T}$ per i soli traversi è in relazione a Z_J sollecitazione del singolo telaio di traversi:

$$F_{TOT,T} = \sum Z_J = n \cdot Z_J$$

Per cui:

$$\delta_T = \frac{F_{TOT,T} \cdot H \cdot n \cdot kky}{n \cdot G \cdot L \cdot t \cdot \rho_x \cdot (1 - \rho_y)}$$

Dalla relazione $F_{TOT,T} = K \cdot u$ ricaviamo K dividendo ad $F_{TOT,T}$ lo spostamento calcolato sopra:

$$k_T = \frac{(1 - \rho_y) \cdot L \cdot t \cdot G \cdot \rho_x}{H \cdot \left(\frac{w_x^2}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot d^2} + \chi \right)}$$

Dove:

- $\chi = 1.2$ in quanto si considera $1/\chi$ pari a $5/6$. La teoria fornisce un range per l'inverso della curvatura variabile tra 1 e 0.25 a seconda che il vincolo di riferimento sia prossimo ad un incastro piuttosto che ad una cerniera;
- kky è il valore tipico dello schema teorico adottato;

Naturalmente è ovvio che il contributo del taglio dipende dallo spostamento in conseguenza della rotazione, per cui generalmente si scrive:

$$\theta \cdot L = \frac{G \cdot A}{\chi}$$

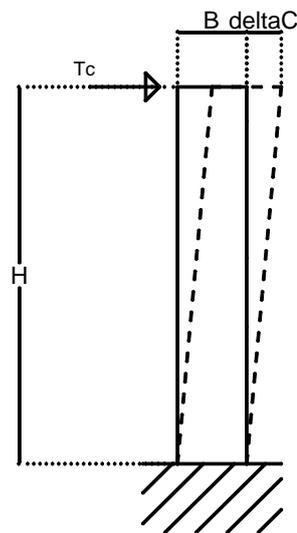
In questo caso $A = d \cdot t$ e $L = w_x$

3.2 LA RIGIDEZZA DELLA COLONNA

La singola colonna si considera nella sua interezza. Come per il paragrafo precedente non ci è ancora dato sapere il valore di T_C ma la supporremo essere ripartizione di $F_{TOT,C}$.

In ragione di ciò, calcoliamo lo spostamento massimo in sommità in seguito ad un carico pari alla quota parte di sollecitazione totale applicata (sempre in sommità poiché consideriamo il caso di parete sollecitata da un unico taglio applicato all'ultimo piano e non il caso più generico di m tagli di piano).

Lo schema adottato è quello riportato in fig.6



6

Valutando lo spostamento δ_C :

$$\delta_C = \frac{T_C \cdot H \cdot k k x}{B \cdot t \cdot G}$$

Possiamo riscriverlo anche in funzione del rapporto dei vuoti sulla larghezza totale ρ_x :

$$\rho_x = \frac{\sum w_x}{L}$$

$$B = \frac{L \cdot (1 - \rho_x)}{n + 1}$$

Poiché la forza di taglio totale agente in sommità sulle colonne vale $F_{TOT,C}$ quota parte di F_{TOT} esterna e analogamente a quanto detto per la rigidezza del traverso, è in relazione con la singola colonna secondo la sua ripartizione T_C , si può scrivere:

$$F_{TOT,C} = (n + 1) \cdot T_C$$

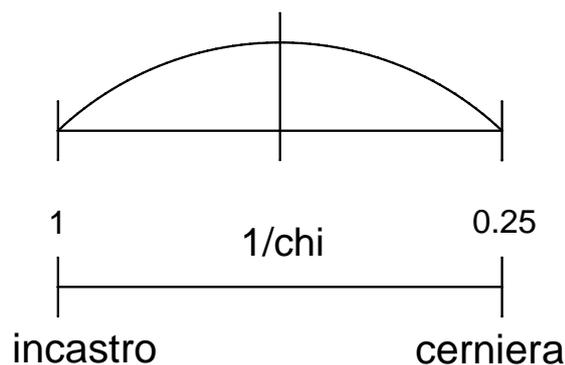
Dalla relazione $F_{TOT,C} = K \cdot u$ ricaviamo K dividendo ad $F_{TOT,C}$ lo spostamento δ_C :

$$k_C = \frac{(1 - \rho_x) \cdot L \cdot t \cdot G}{(n + 1) \cdot \left(1.2 \cdot H + \frac{H^3}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot B^2} \right)}$$

Dove $1/\chi = 5/6$ quindi $\chi = 1.2$ e avendo sostituito a kkx la rigidità dipendente dallo schema teorico adottato, in questo caso:

$$kkx = \frac{12 \cdot E \cdot J}{H^3} + \frac{G \cdot A}{\chi \cdot H}$$

Si riporta uno schema utile a capire il ragionamento sulla curvatura al vincolo di intersezione pilastro-traverso.



3.3 LE AZIONI

Le forze che entrano in gioco nel calcolo del diagramma del momento sono le reazioni di taglio che agiscono sulla colonna, le reazioni di taglio scaturite dal telaio di traversi alle colonne e il taglio agente direttamente sui traversi. Chiamiamo con T_C le prime, con Z_j le seconde mentre il taglio dei traversi con T_i .

Esse si ricavano come quota parte della forza sollecitante totale F_{TOT} in funzione del rapporto tra la rigidezza della colonna (o dei telai di traversi) e la rigidezza totale della struttura. Tale approccio è fondamentale per il calcolo delle reazioni di taglio e come vedremo in seguito, risulterà la strada più attendibile per il calcolo delle reazioni di taglio anche con metodi differenti.

Per l'*n-esima*+1 colonna otteniamo:

$$T_{C_{n+1}} = F_{TOT} \cdot \frac{k_{C_{n+1}}}{k_{TOT}}$$

Mentre per l'*n-esimo* sistema di traversi abbiamo:

$$Z_{j_n} = F_{TOT} \cdot \frac{k_{T_n}}{k_{TOT}}$$

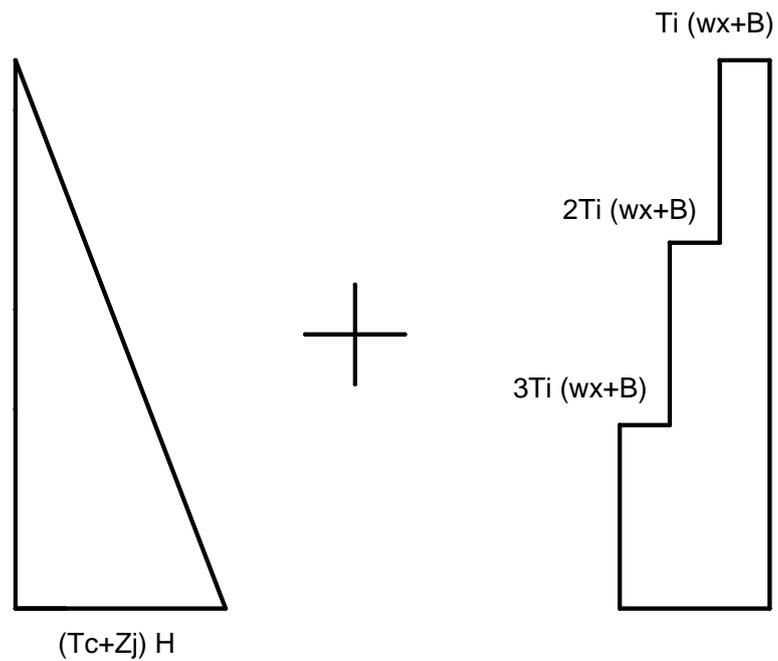
Quest'ultimo è dimezzato se si considera il telaio agli estremi della parete ovvero per il singolo filare di traversi:

$$\frac{Z_{j_n}}{2}$$

per equilibrio dei momenti sul telaio di traversi otteniamo le corrispondenti azioni taglienti agenti ortogonali alle T_C e direttamente applicate sui traversi. Tali forze dette T_i saranno date dalla relazione:

$$T_{I_n} = Z_{j_n} \cdot \frac{w_y + d}{w_x} = Z_{j_n} \cdot \frac{H}{m} \cdot \frac{1}{w_x}$$

Note le forze è possibile calcolare il momento come interazione tra due diagrammi differenti, uno dato dai tagli T_C e Z_J agenti in sommità sulla colonna, che supporremo avere un comportamento di tipo mensola e il secondo dato dalle forze di taglio T_I agenti sui traversi. Quest'ultimo è sovrapposizione di momenti costanti e crescente dall'alto verso il basso come è possibile osservare in fig.8.

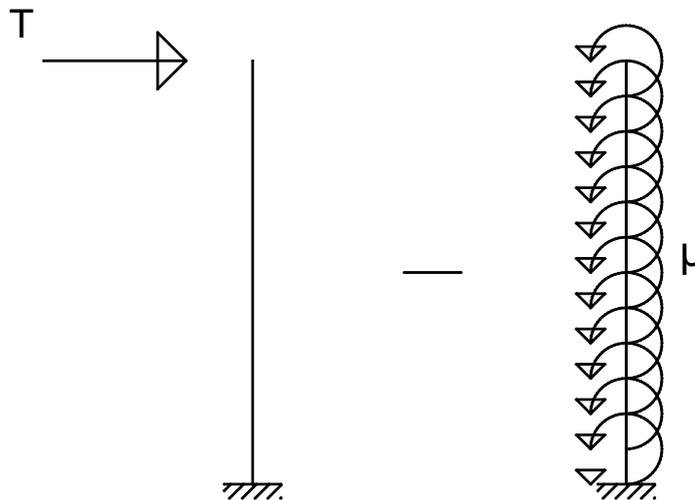


8

3.4 ESEMPI

Il primo approccio è stato quello di capire come si comportavano le rigidezze. Alle equazioni precedenti in caso di colonne, traversi e aperture di ugual dimensioni, si è applicato un coefficiente moltiplicativo detto $fact_1$ per le colonne interne con doppio traverso e $fact_2$ per le colonne esterne con singolo traverso. In questo modo si è cercato di calibrare le rigidezze sperando di ricavare un legame tra rigidezze e pareti.

Abbiamo ricavato l'espressione definente il coefficiente $fact$ in modo empirico dalla seguente procedura, considerando come interagente al traverso la colonna nella sua interezza:



9

Dal primo schema ricaviamo lo spostamento δ_1 dipendete da T

$$\delta_1 = \frac{T \cdot H^3}{3 \cdot E \cdot J_C}$$

Dove H è l'altezza dell'intera colonna e J_C il momento d'inerzia della sezione della colonna.

Per il secondo schema invece abbiamo che la coppia distribuita μ induce uno spostamento δ_2 pari a:

$$\delta_2 = \frac{\mu \cdot H^3}{3 \cdot E \cdot J_C}$$

Conosciamo poi una relazione che lega la coppia distribuita μ alla singola coppia C se la parete è regolare:

$$\mu = \frac{m \cdot C}{H}$$

Essendo:

$$C = T \cdot H \cdot \frac{k_t}{k_t + 2 \cdot k_c}$$

Dove k_t e k_c sono rispettivamente le rigidità di singolo traverso doppio e intera colonna (la prima verrà chiarita nel dettaglio nel capitolo successivo) ovvero:

$$k_t = 12 \cdot E \cdot \frac{J_t}{w_x} \cdot \left(1 + \frac{B}{w_x}\right)^2$$

$$k_c = E \cdot \frac{J_c}{H}$$

Effettuando la differenza tra i due spostamenti e raccogliendo a fattor comune otteniamo:

$$\begin{aligned} \delta_{TOT} &= \frac{T \cdot H^3}{12 \cdot E \cdot J_c} \cdot 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot k_c}{k_t}}\right) = \frac{T \cdot H^3}{12 \cdot E \cdot J_c} \cdot 4 \cdot \left(\frac{\frac{2 \cdot k_c}{k_t}}{1 + \frac{2 \cdot k_c}{k_t}}\right) \\ &= \frac{T \cdot H^3}{12 \cdot E \cdot J_c} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{k_t}{2 \cdot k_c}}\right) \end{aligned}$$

Da cui si ricava il fattore comune $fact_2$ della colonna interna con doppio traverso come:

$$fact_2 = \frac{4}{1 + 12 \cdot E \cdot \frac{J_t}{w_x} \cdot \left(1 + \frac{B}{w_x}\right)^2 \cdot \frac{H}{2 \cdot E \cdot J_c}} = \frac{4}{1 + 6 \cdot \frac{d^3}{B^3} \cdot \frac{L}{m \cdot w_x} \cdot \left(1 + \frac{B}{w_x}\right)^2}$$

La legge associata al *fact* quindi è la seguente:

$$\mathbf{fact1}:=4./\left(1+\mathbf{1.}\left(d^3/B^3\right)\left(L/m/wx\right)\left(1+B/wx\right)^2\right)$$

$$\mathbf{fact2}:=4./\left(1+\mathbf{3.}\left(d^3/B^3\right)\left(L/m/wx\right)\left(1+B/wx\right)^2\right)$$

i valori evidenziati in rosso sono i coefficiente che si andranno a ricercare e facendo riferimento all'espressione precedente esprimono quindi la rigidità del traverso (se singolo o doppio).

Questi coefficienti sono stati applicati alle rigidezze di colonna nel modo seguente:

$$\mathbf{kc1}:=1/\left(\left(1.2\ wy/G\ A\right)+\left(\mathbf{fact1}\ wy^3/2\ G\ \left(1+nu\right)A\right)\right)$$

$$\mathbf{kc2}:=1/\left(\left(1.2\ wy/G\ A\right)+\left(\mathbf{fact2}\ wy^3/2\ G\ \left(1+nu\right)A\right)\right)$$

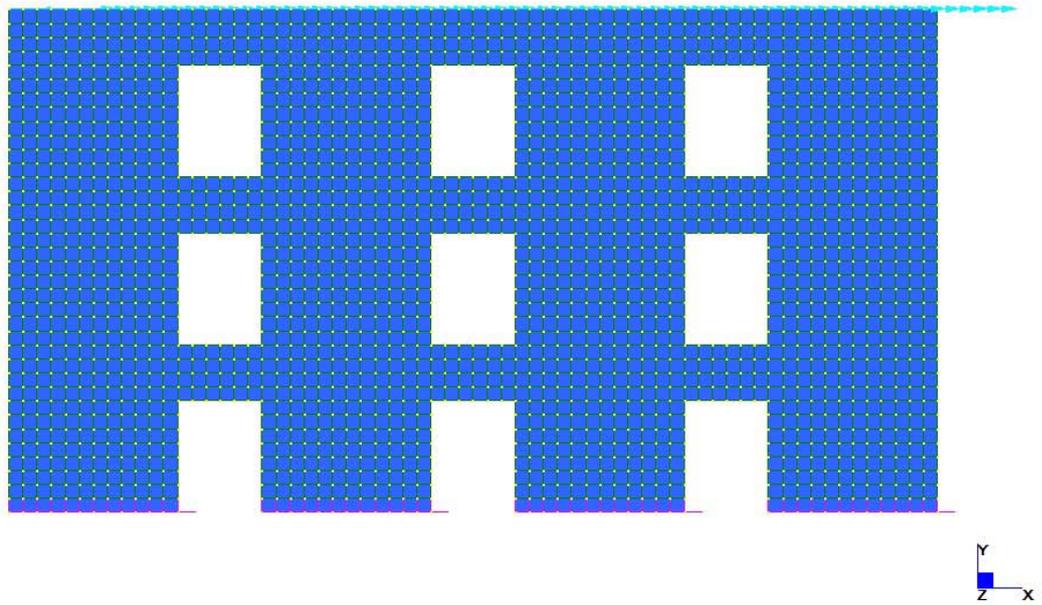
Mentre la rigidezza del traverso singolarmente non risente del coefficiente *fact*.

Il confronto è effettuato su 12 modelli di geometria regolare e sollecitata da sola forza in sommità. Essi sono realizzati in CAD con polilinee, in seguito convertiti in regioni e esportati in formato ACIS. Con il software a elementi finiti Straus7 abbiamo creato la mesh in modo automatico per la discretizzazione piana con elementi plates, mentre per la discretizzazione monodimensionale tramite beams abbiamo individuato la linea media strutturale dal modello piano meshato.

Abbiamo eseguito i calcoli e tracciato il grafico di comparazione tramite il software Wolfram Mathematica. I grafici rispettano la legenda sotto riportata:

- Grafico tratteggiato → risultato del modello in plates
- Grafico punteggiato → risultato del modello telaio in beams
- Grafico continuo → risultato del metodo semplificato

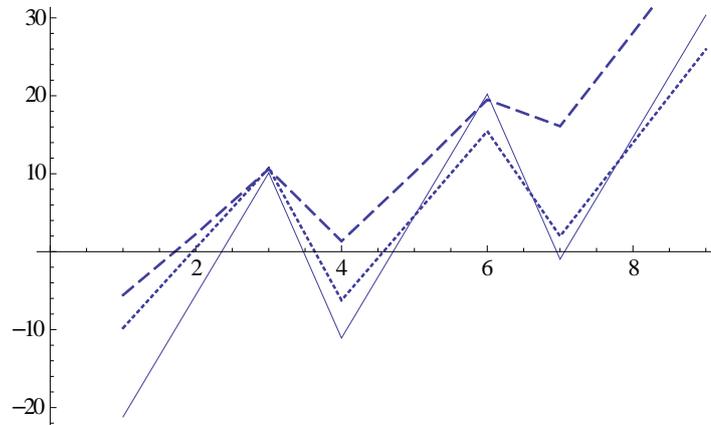
3.5 WALL 1 ($D/B = 1/3$, $K_Y/K_{X1} = 0.32$, $K_Y/K_{X2} = 0.48$)



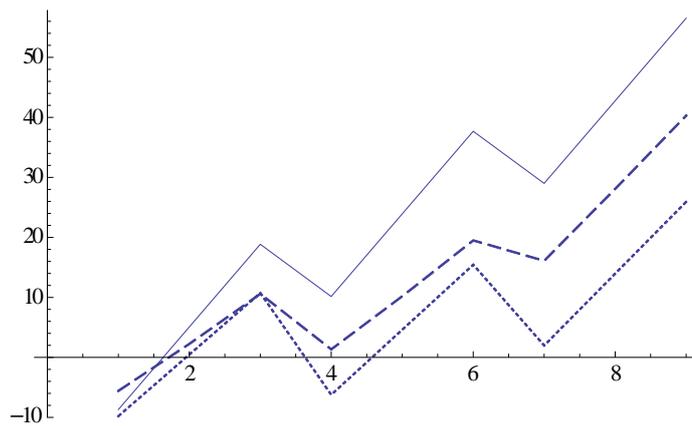
10

3.5.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

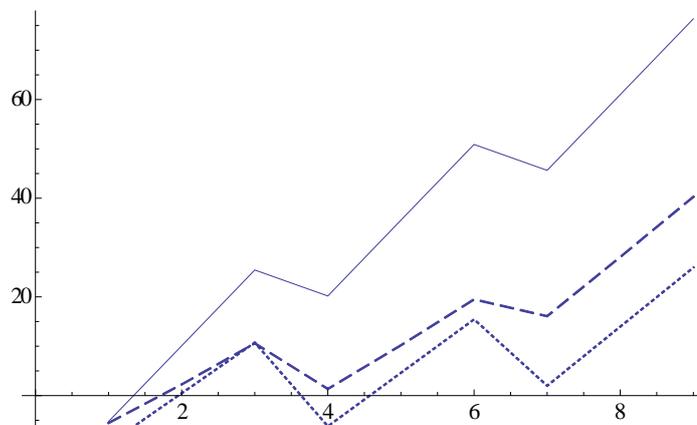
COEFFICIENTE 1



COEFFICIENTE 2

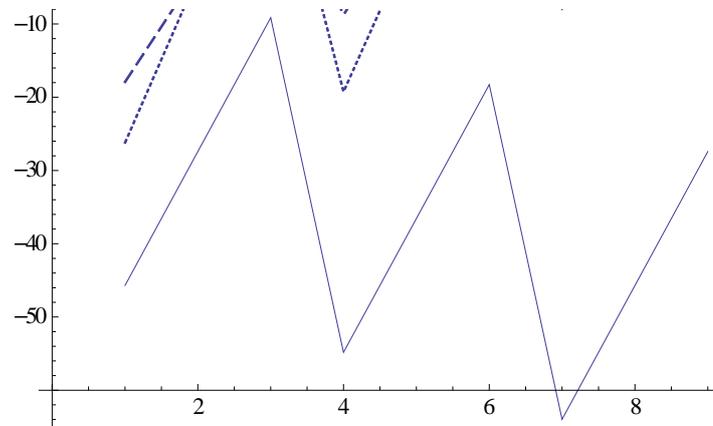


COEFFICIENTE 3

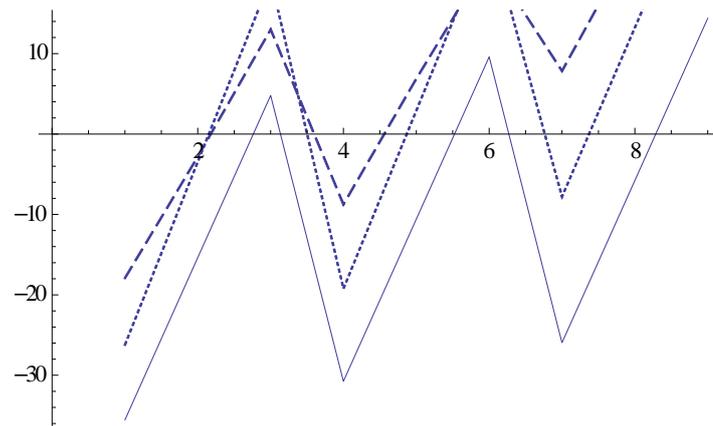


3.5.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

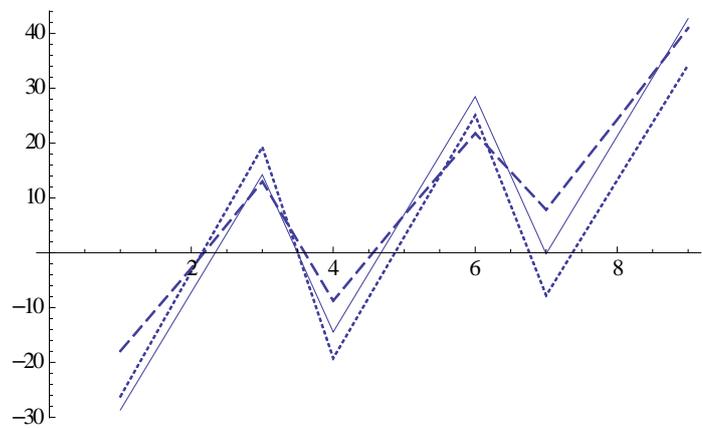
COEFFICIENTE 1



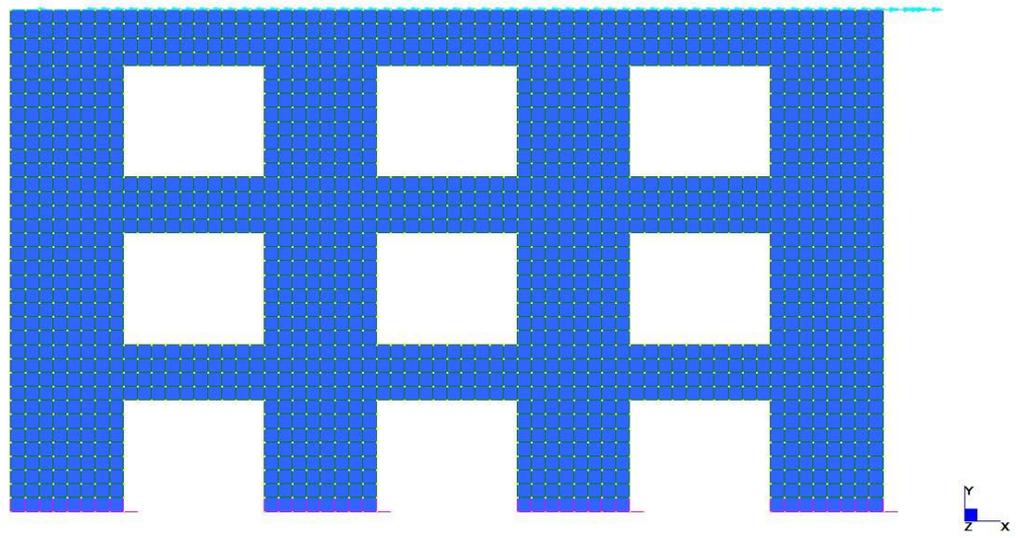
COEFFICIENTE 2



COEFFICIENTE 3

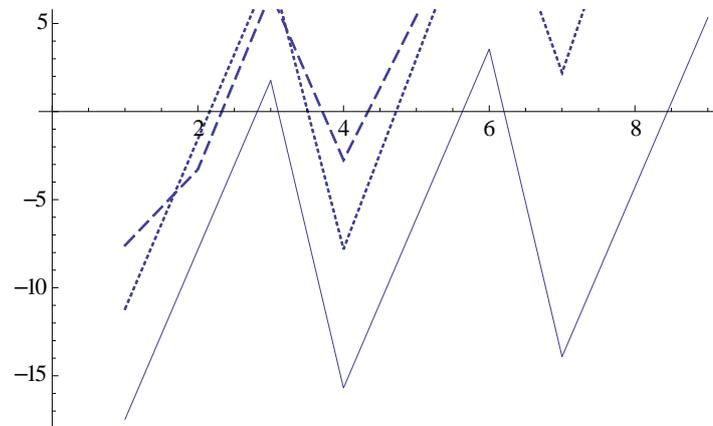


3.6 WALL 2 (D/B = 1/2, KY/Kx1 = 0.31, KY/Kx2 = 0.55)

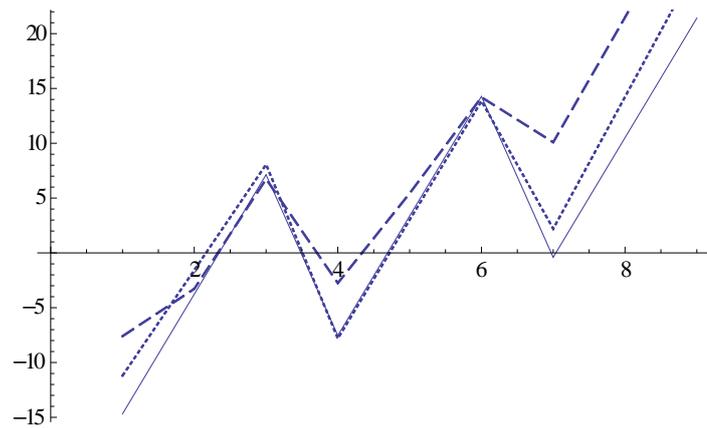


3.6.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

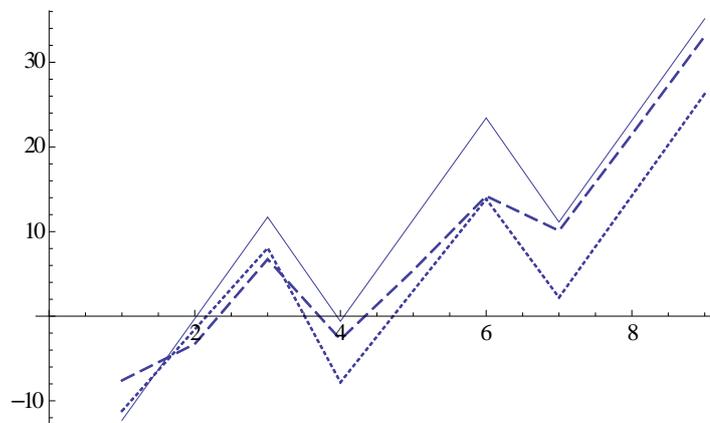
COEFFICIENTE 1



COEFFICIENTE 2

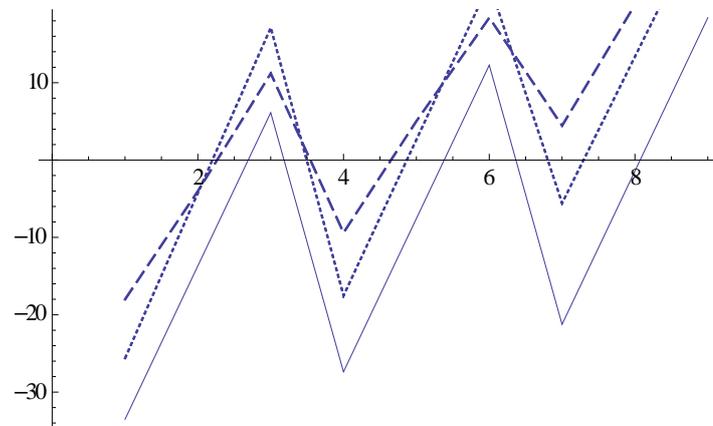


COEFFICIENTE 3

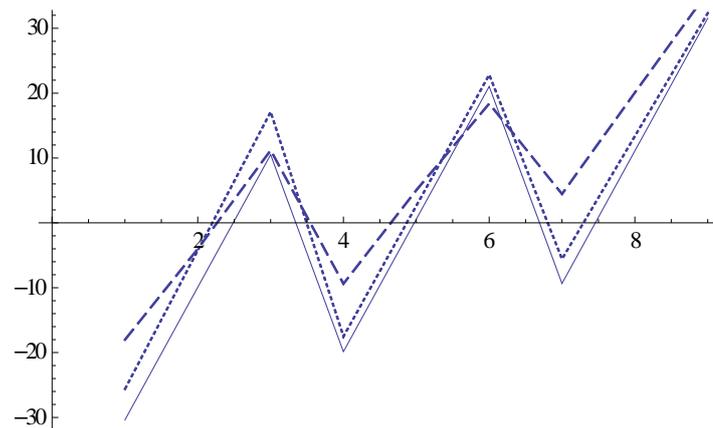


3.6.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

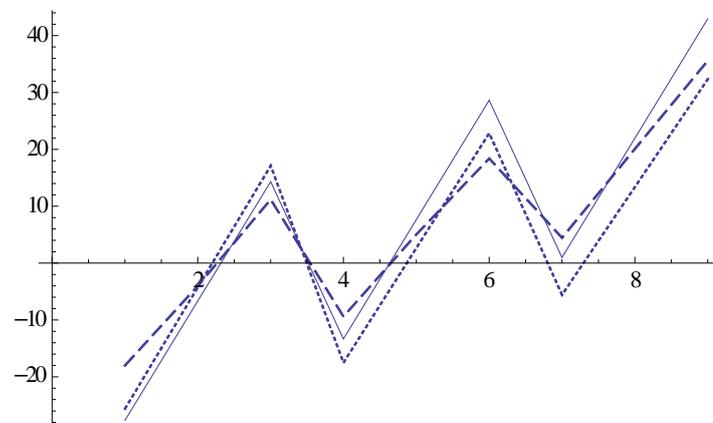
COEFFICIENTE 4



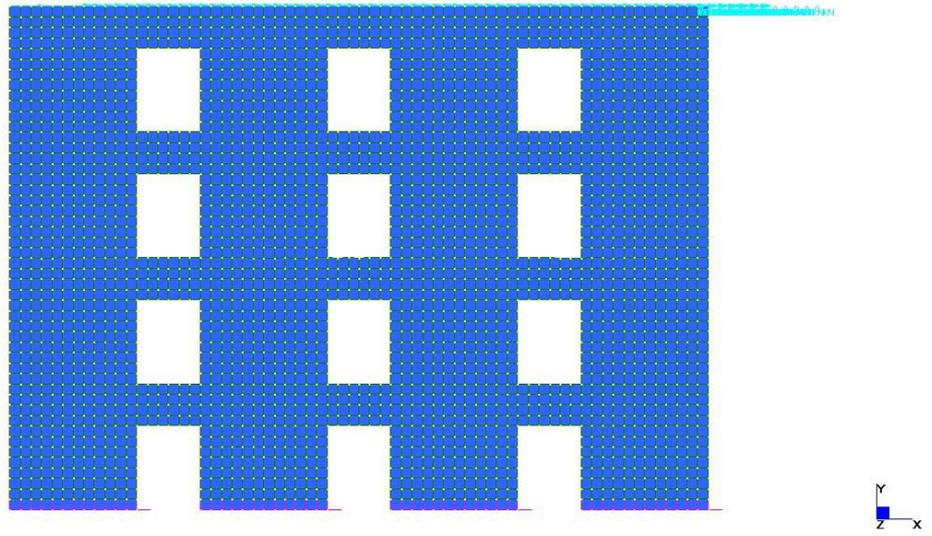
COEFFICIENTE 5



COEFFICIENTE 6



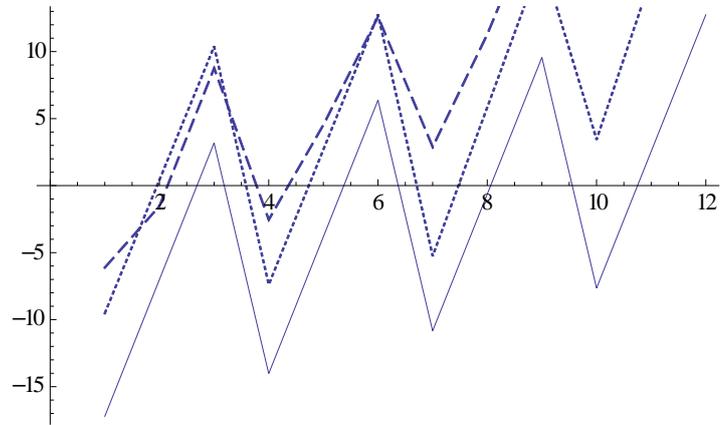
3.7 WALL 3 ($D/B = 1/3$, $K_Y/K_{X1} = 0.25$, $K_Y/K_{X2} = 0.44$)



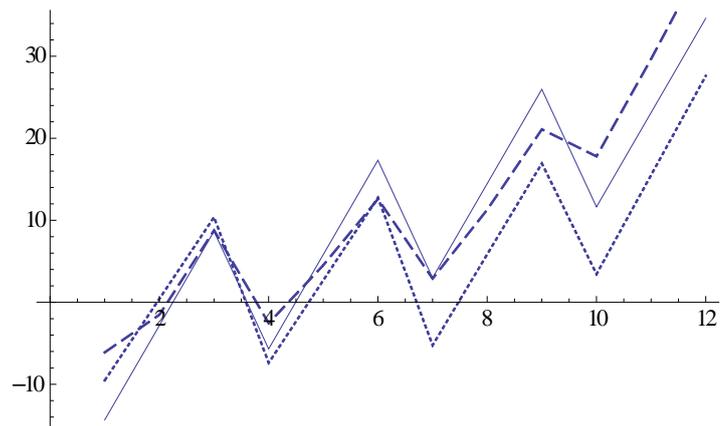
12

3.7.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

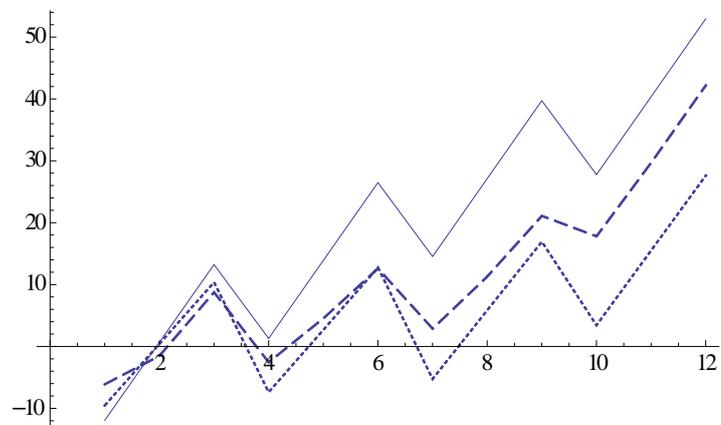
COEFFICIENTE 2



COEFFICIENTE 3

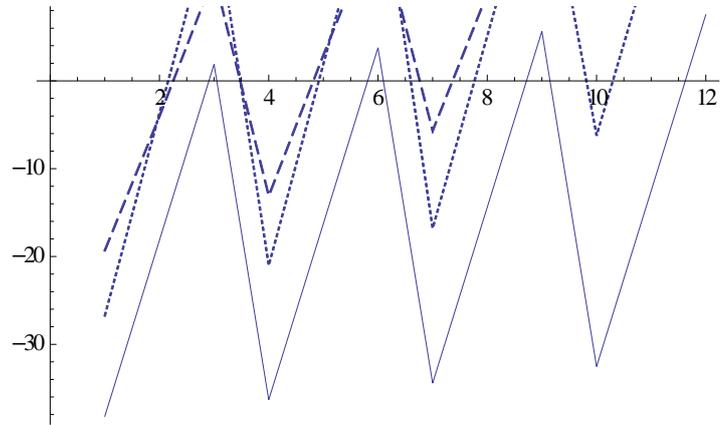


COEFFICIENTE 4

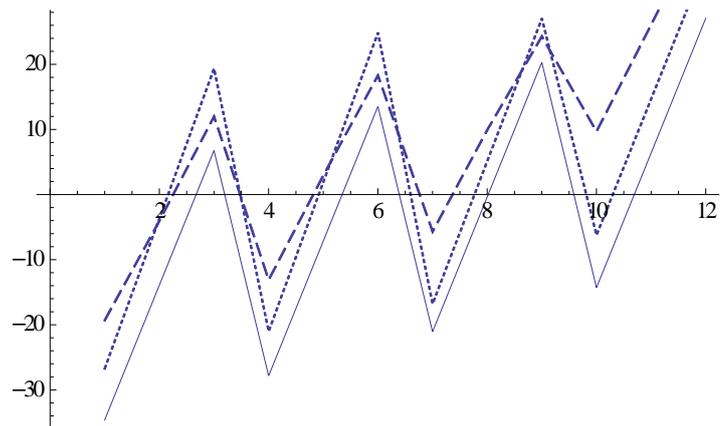


3.7.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

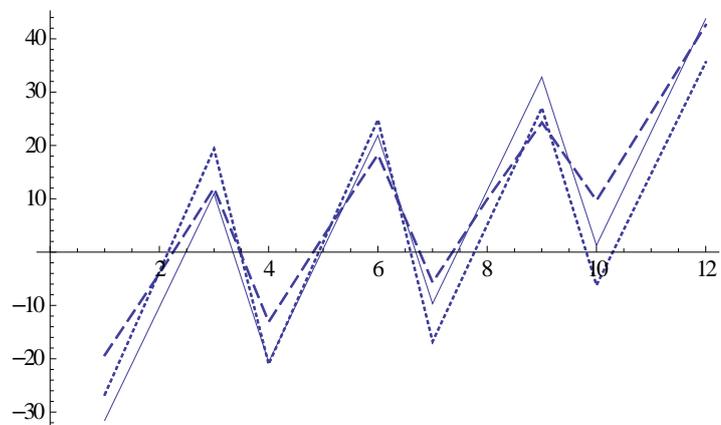
COEFFICIENTE 5



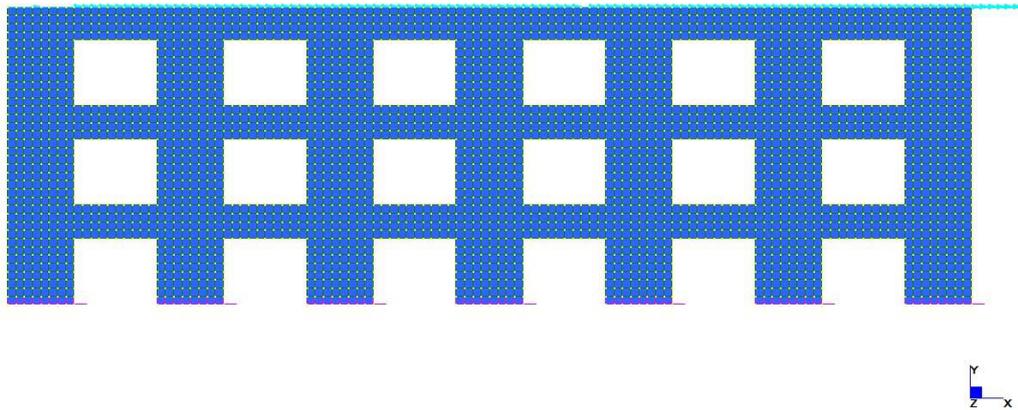
COEFFICIENTE 6



COEFFICIENTE 7

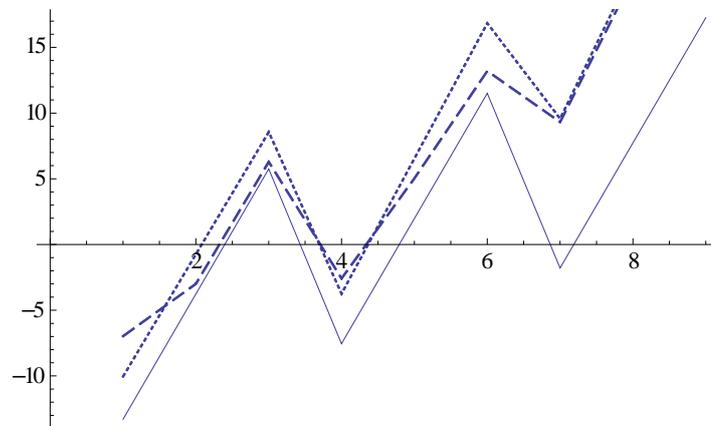


3.8 WALL 4 ($D/B = 1/2$, $K_Y/K_{x1} = 0.33$, $K_Y/K_{x2} = 0.53$)

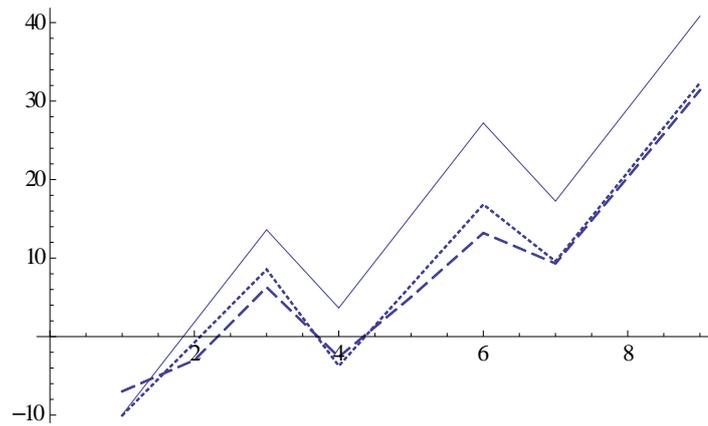


3.8.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

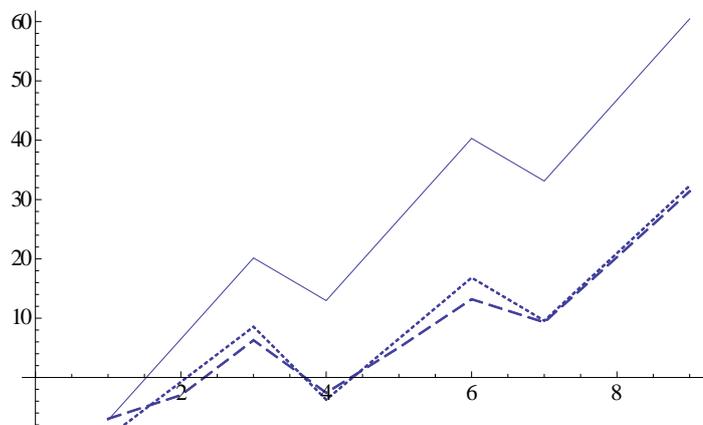
COEFFICIENTE 1



COEFFICIENTE 2

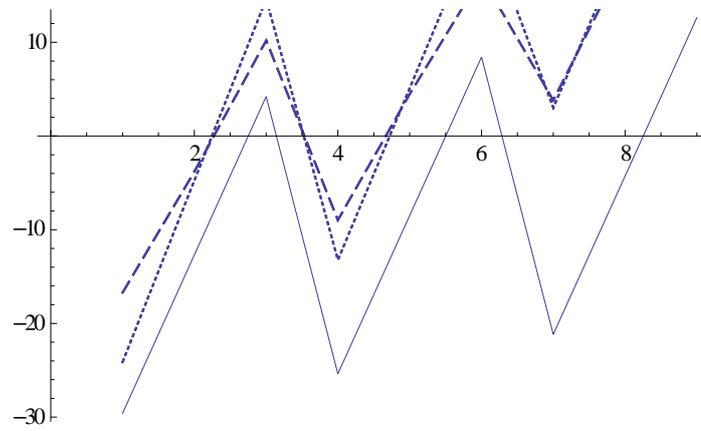


COEFFICIENTE 3

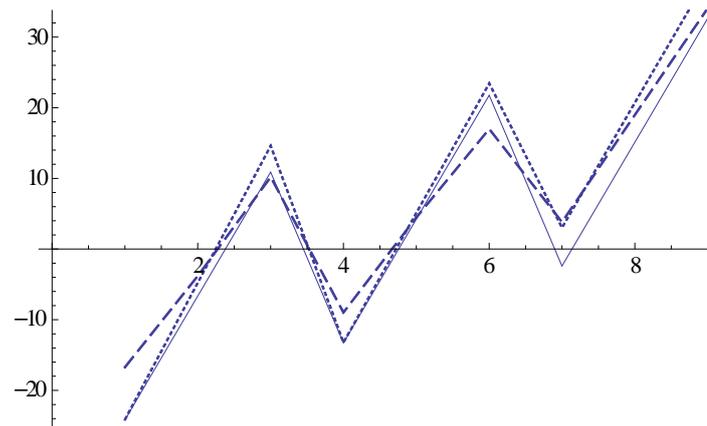


3.8.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

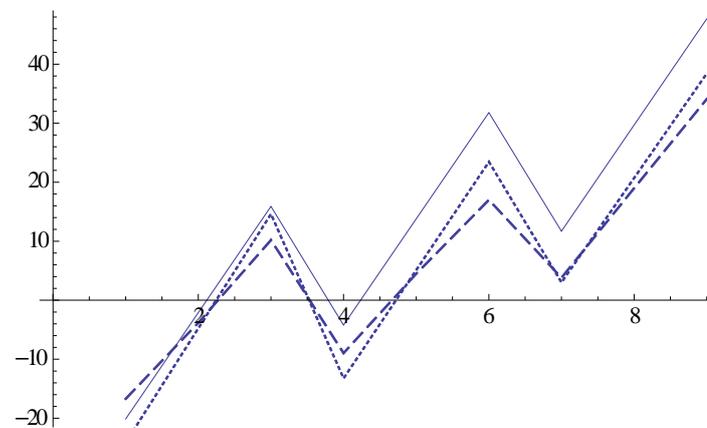
COEFFICIENTE 2



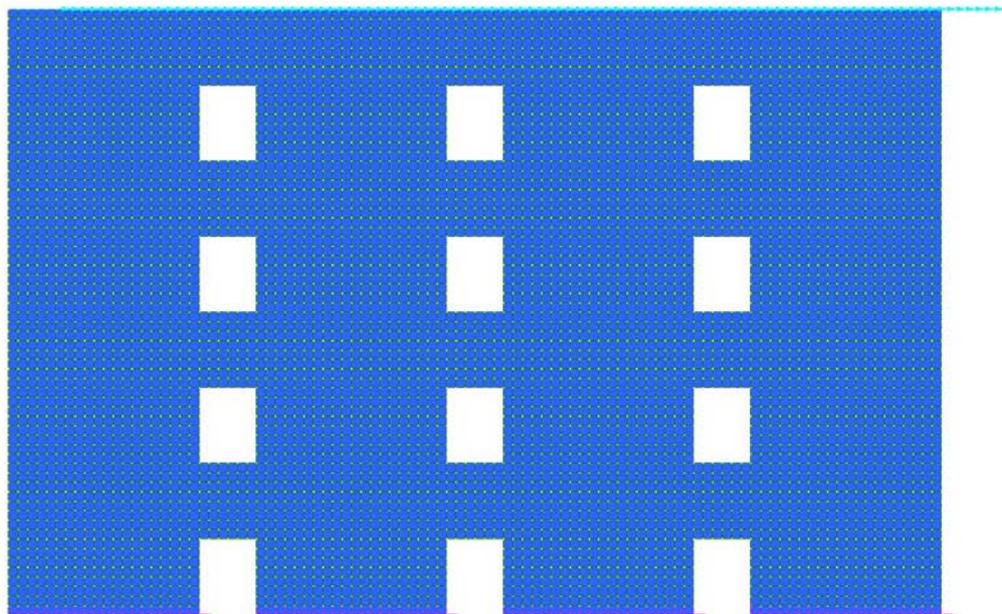
COEFFICIENTE 3



COEFFICIENTE 4



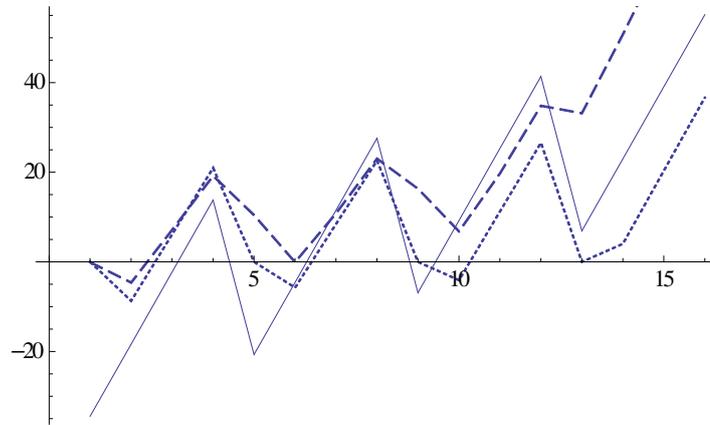
3.9 WALL 5 ($D/B = 2/5$, $K_Y/K_{X1} = 0.34$, $K_Y/K_{X2} = 0.61$)



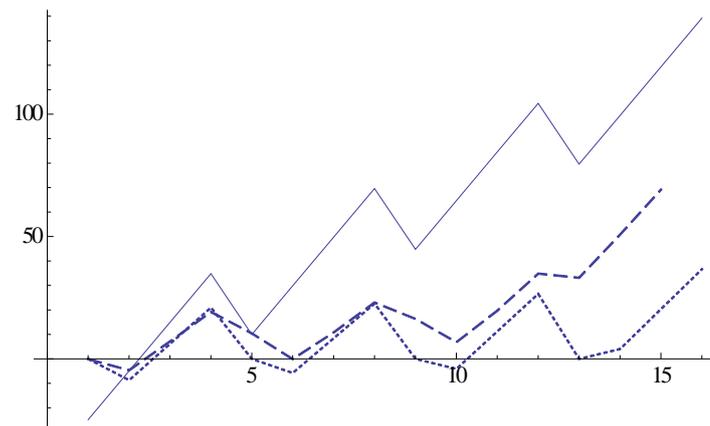
14

3.9.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

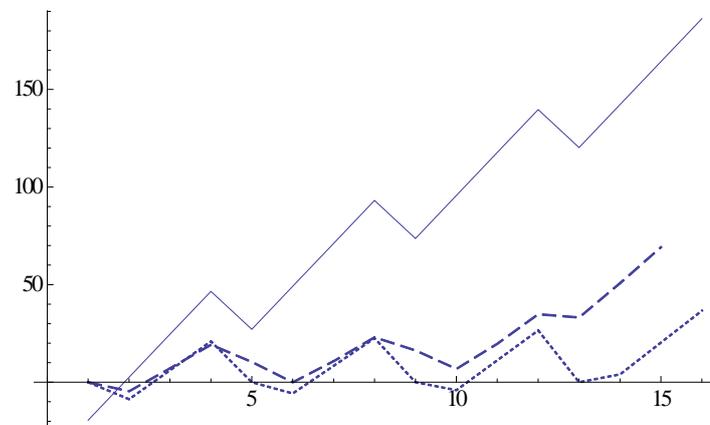
COEFFICIENTE 1



COEFFICIENTE 2

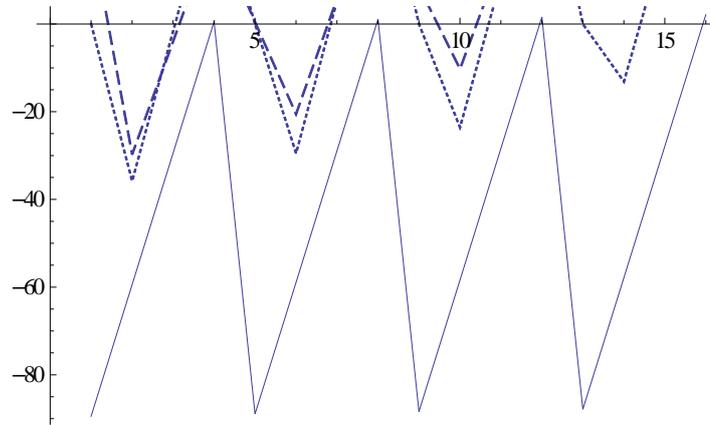


COEFFICIENTE 3

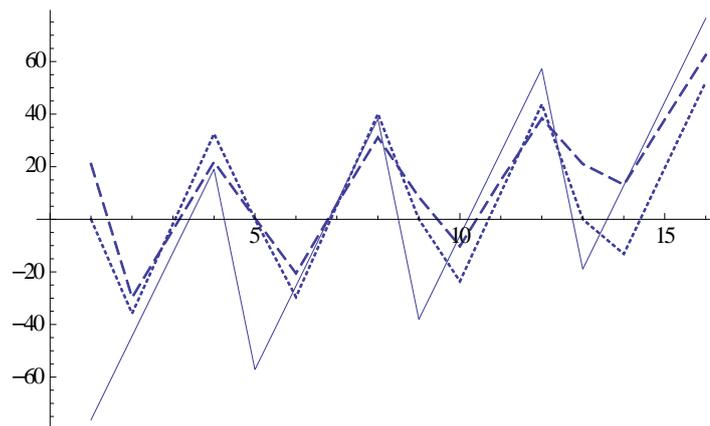


3.9.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

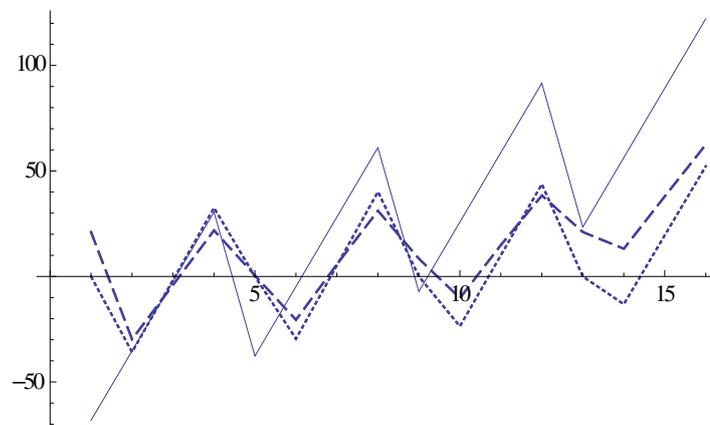
COEFFICIENTE 2



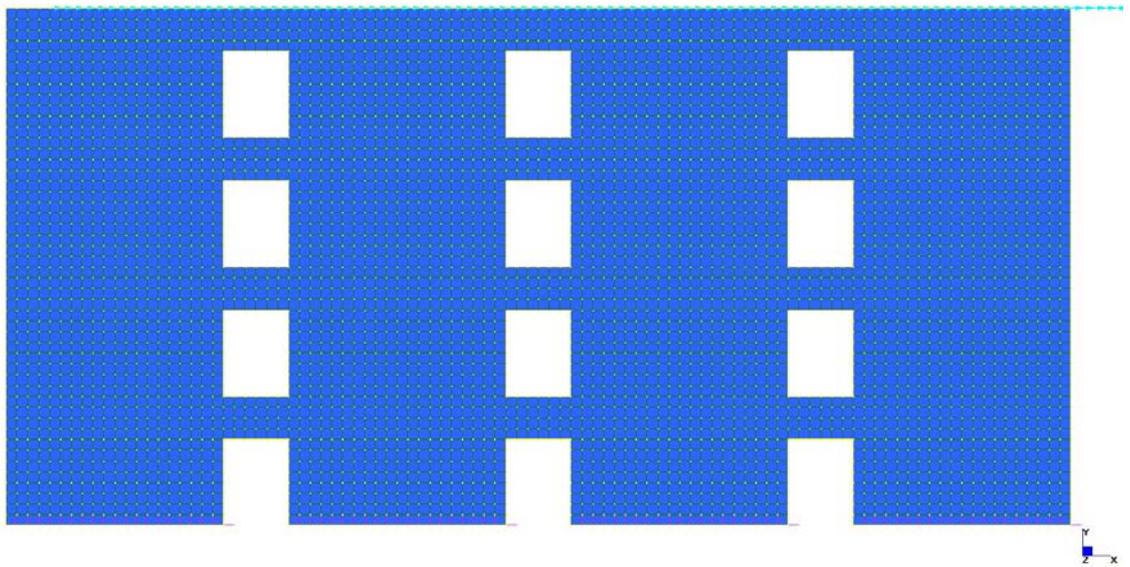
COEFFICIENTE 3



COEFFICIENTE 4



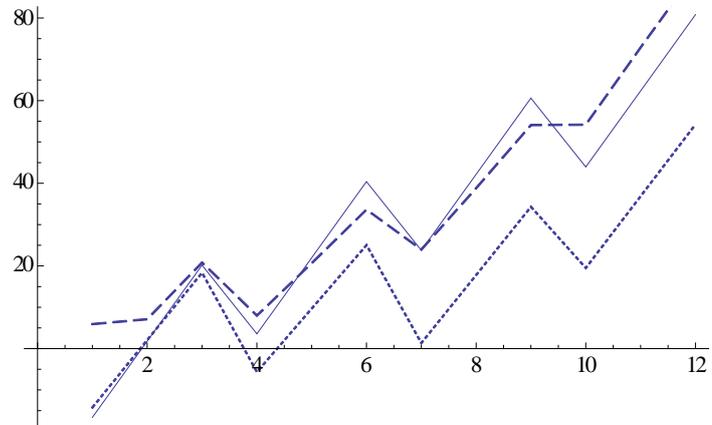
3.10 WALL 6 ($D/B = 1/5$, $K_Y/K_{X1} = 0.29$, $K_Y/K_{X2} = 0.46$)



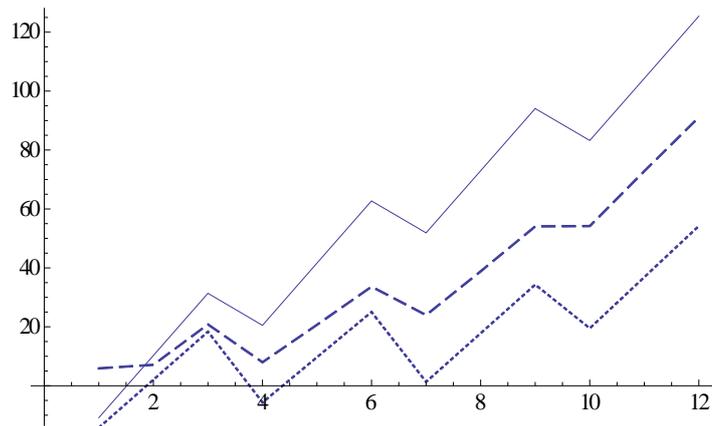
15

3.10.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

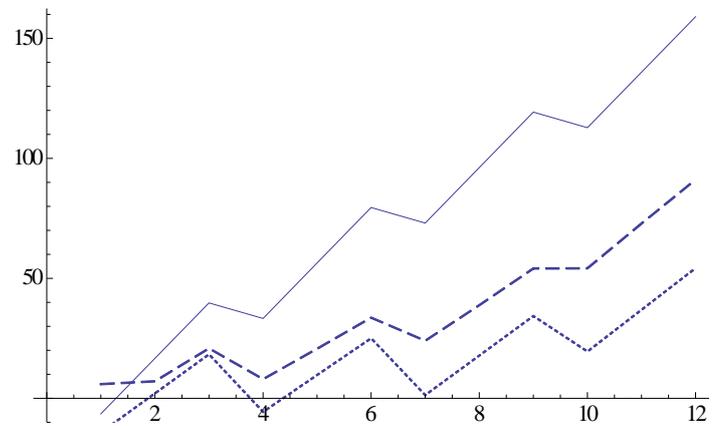
COEFFICIENTE 1



COEFFICIENTE 2

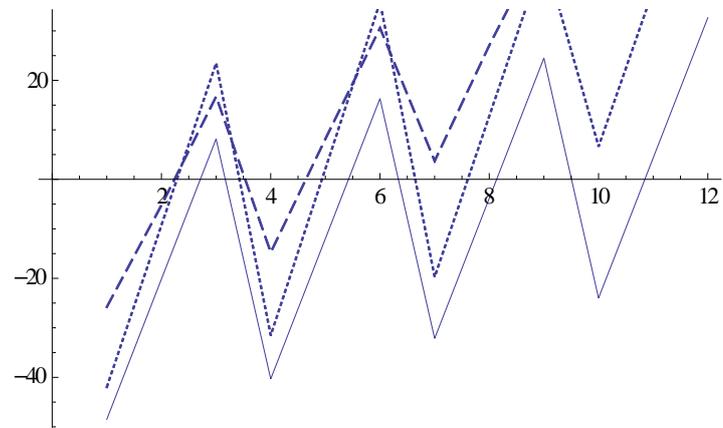


COEFFICIENTE 3

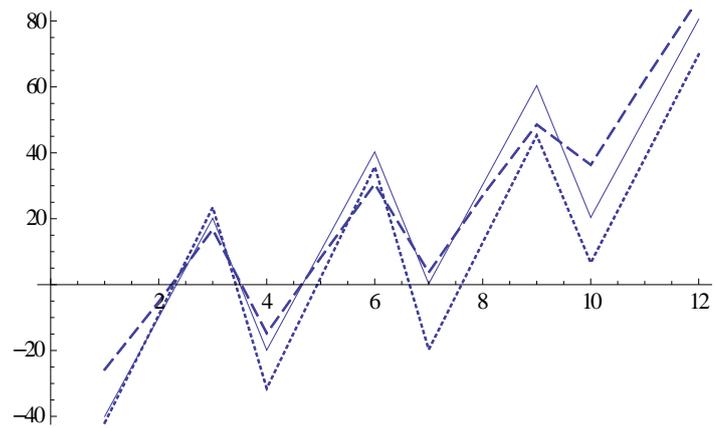


3.10.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

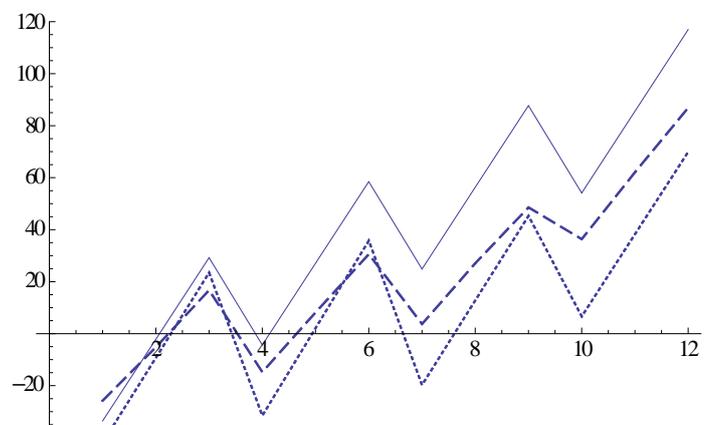
COEFFICIENTE 2



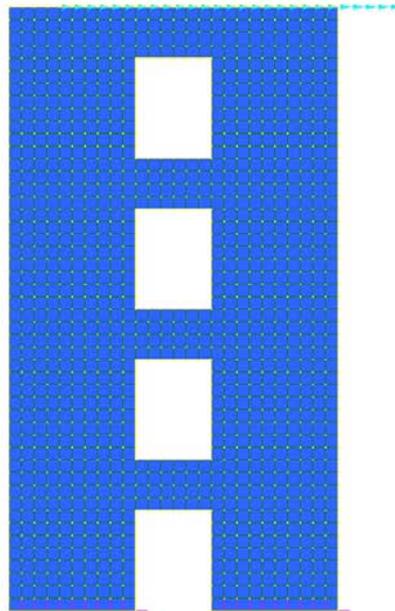
COEFFICIENTE 3



COEFFICIENTE 4



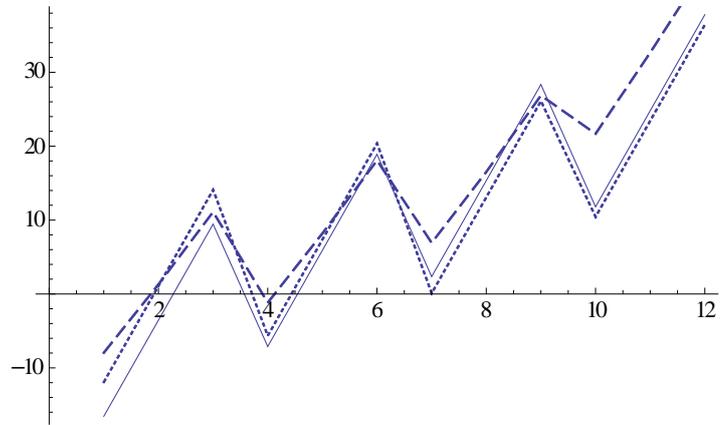
3.11 WALL 7 ($D/B = 1/2.5$, $K_Y/K_{X1} = 0.29$)



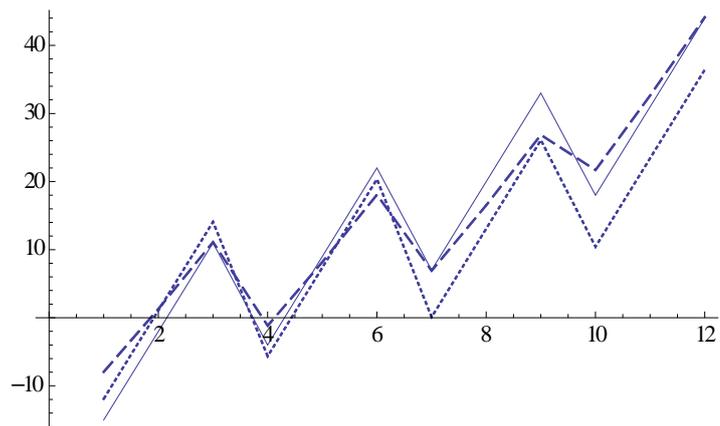
16

3.11.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

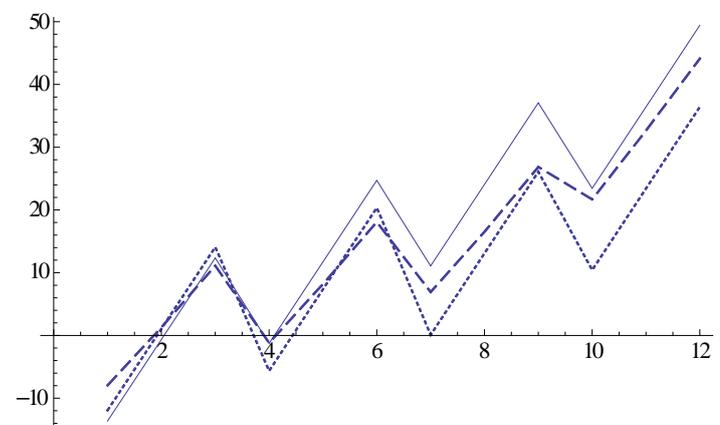
COEFFICIENTE 9



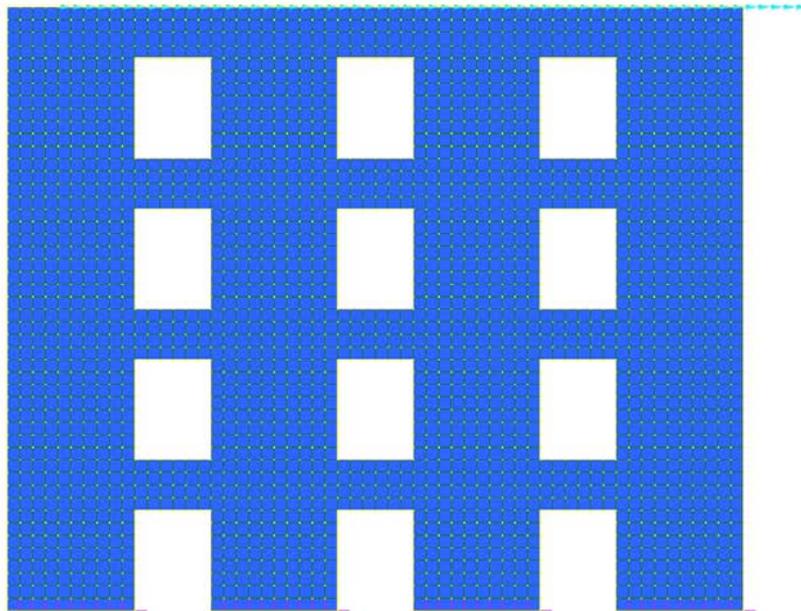
COEFFICIENTE 10



COEFFICIENTE 11



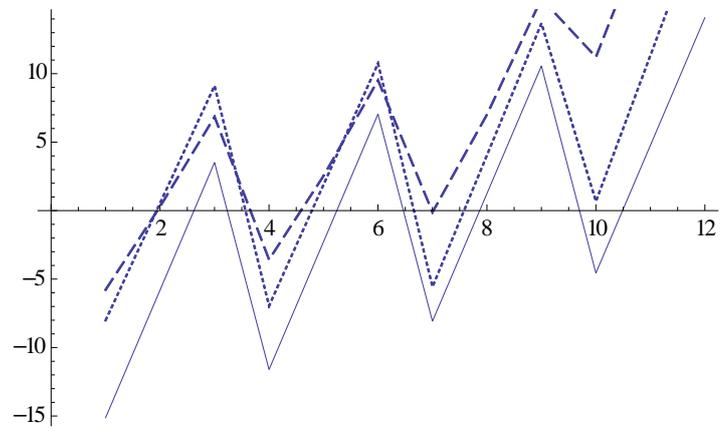
3.12 WALL 8 ($D/B = 1/2.5$, $K_Y/K_{X1} = 0.23$, $K_Y/K_{X2} = 0.44$)



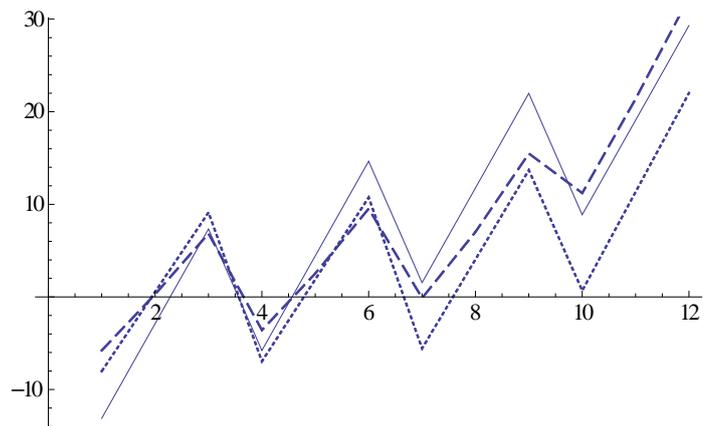
17

3.12.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

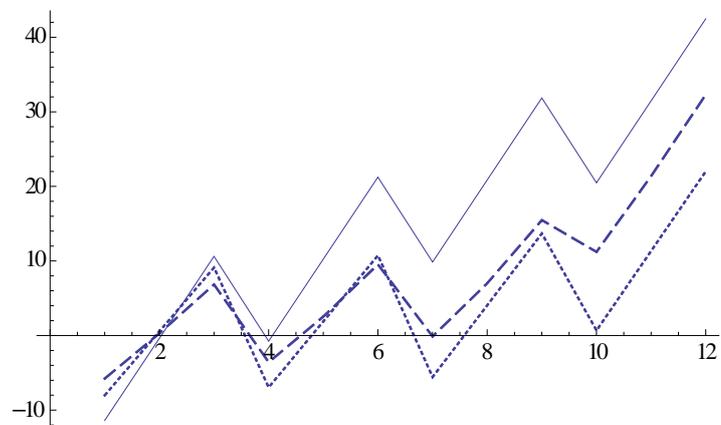
COEFFICIENTE 3



COEFFICIENTE 4

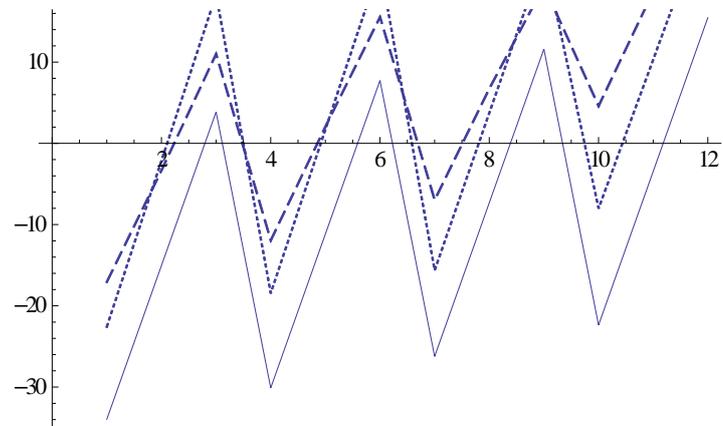


COEFFICIENTE 5

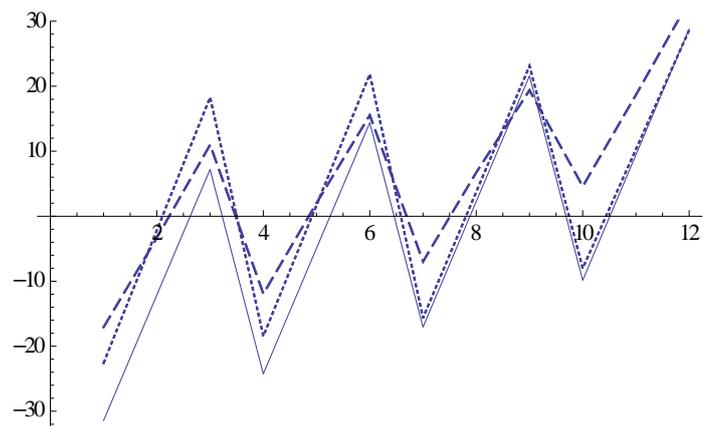


3.12.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

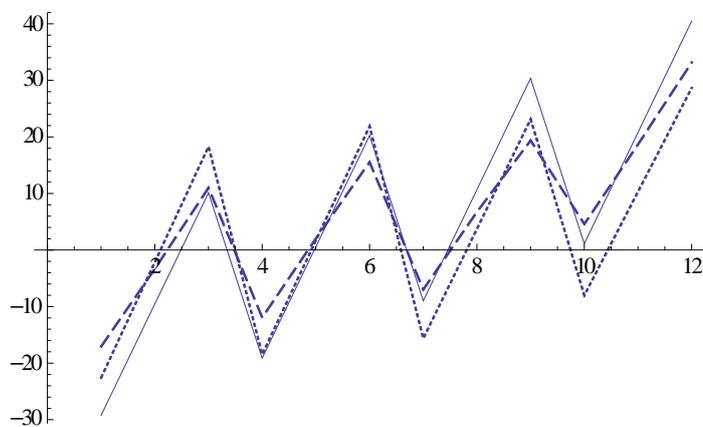
COEFFICIENTE 7



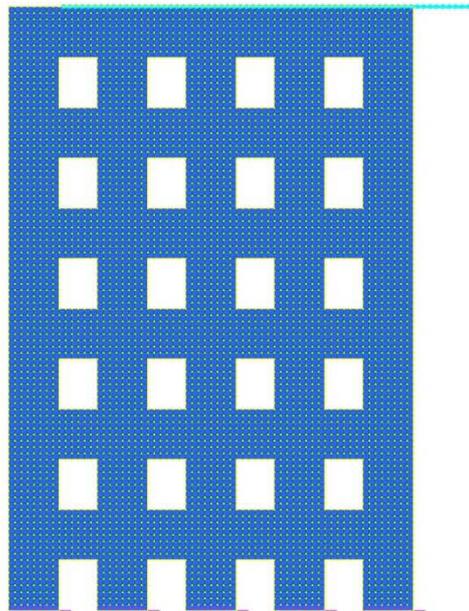
COEFFICIENTE 8



COEFFICIENTE 9

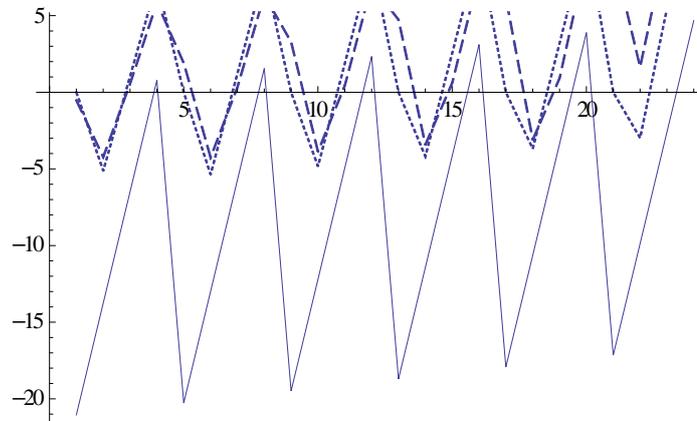


3.13 WALL 9 ($D/B = 1$, $K_Y/K_{x1} = 0.31$, $K_Y/K_{x2} = 0.64$)

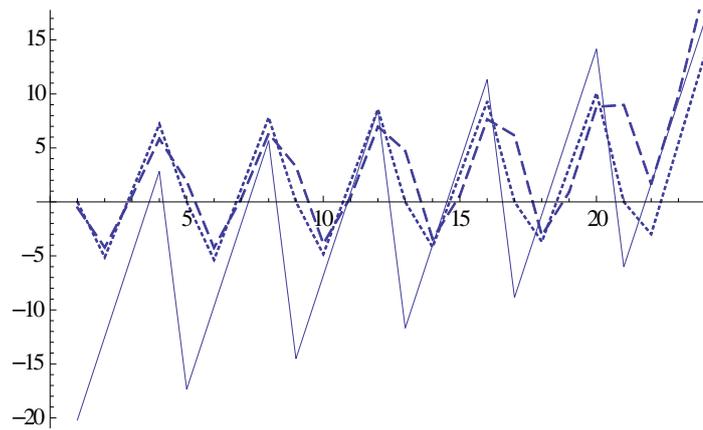


3.13.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

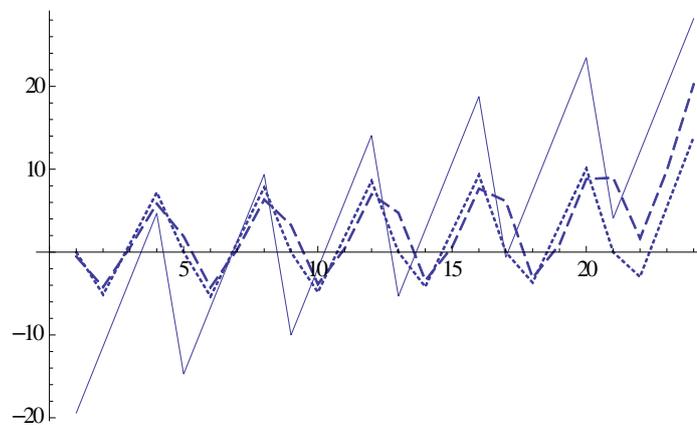
COEFFICIENTE 6



COEFFICIENTE 7

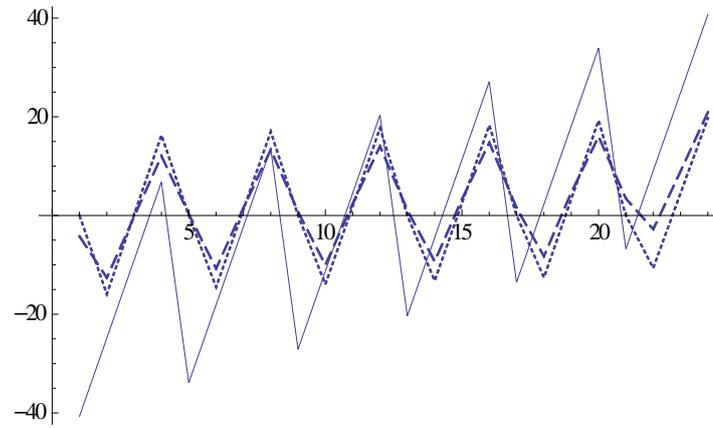


COEFFICIENTE 8

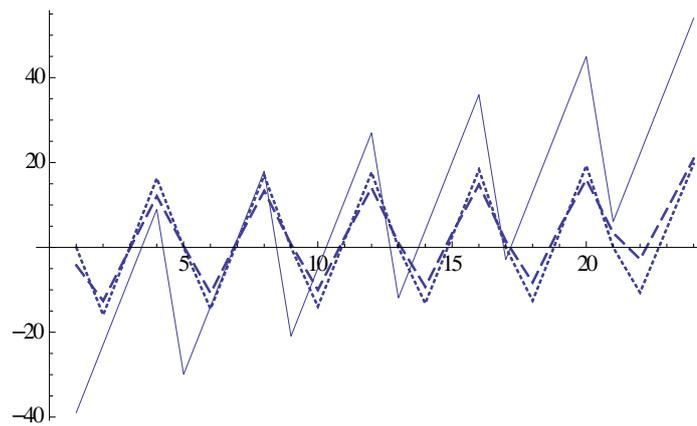


3.13.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

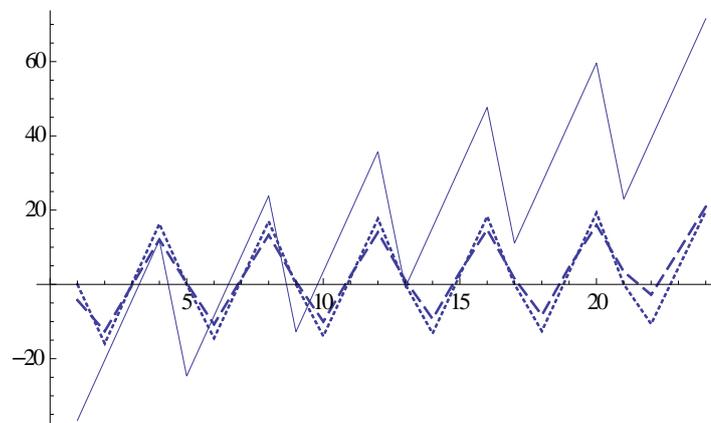
COEFFICIENTE 22



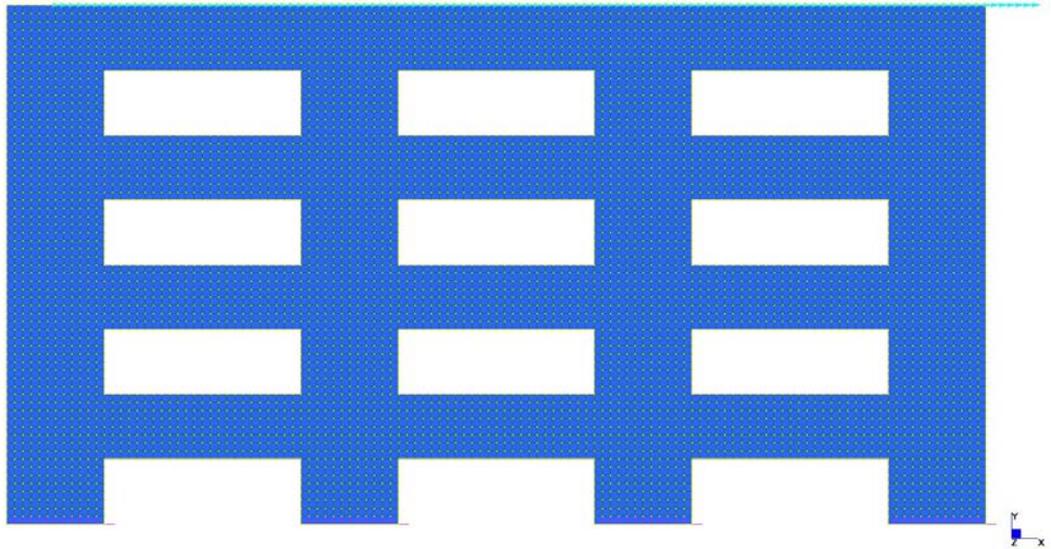
COEFFICIENTE 25



COEFFICIENTE 30

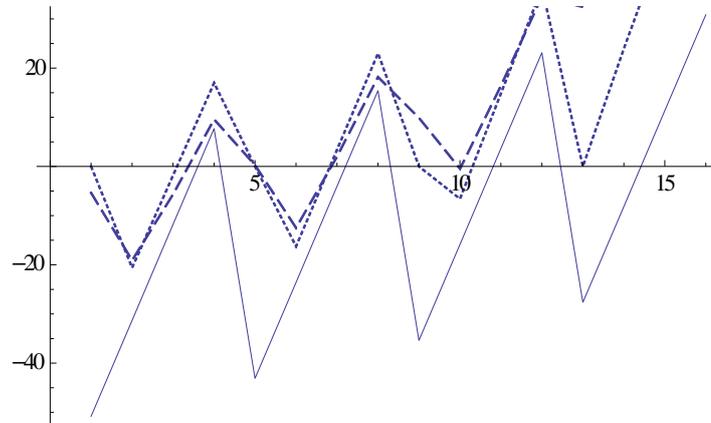


3.14 WALL 10 ($D/B = 2/3$, $K_y/K_{x1} = 0.47$, $K_y/K_{x2} = 0.90$)

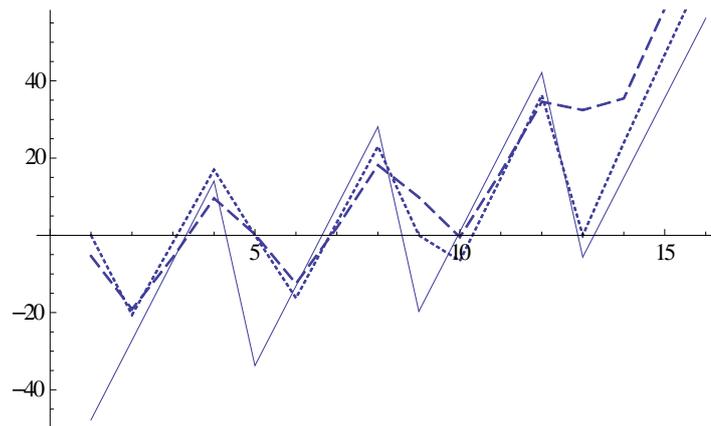


3.14.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

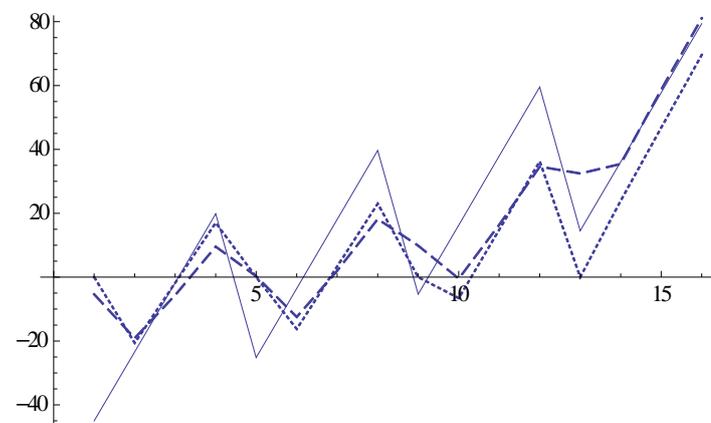
COEFFICIENTE 3



COEFFICIENTE 4

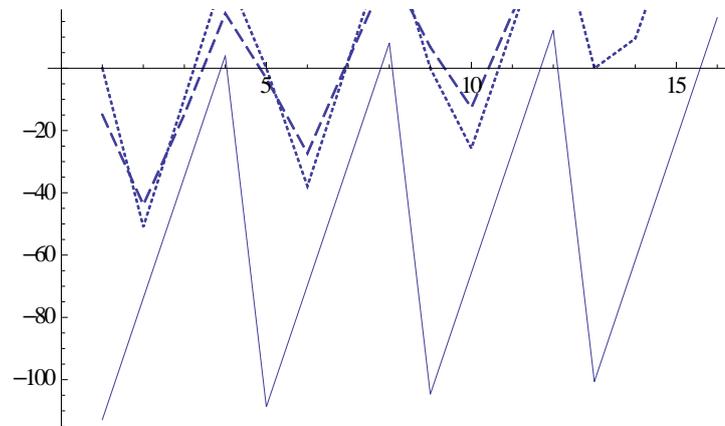


COEFFICIENTE 5

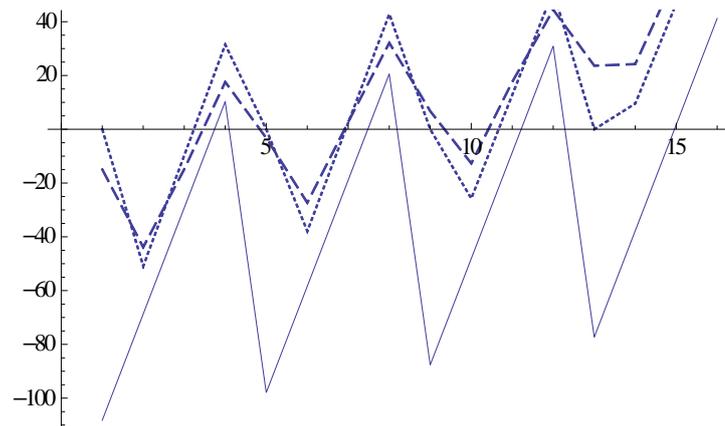


3.14.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

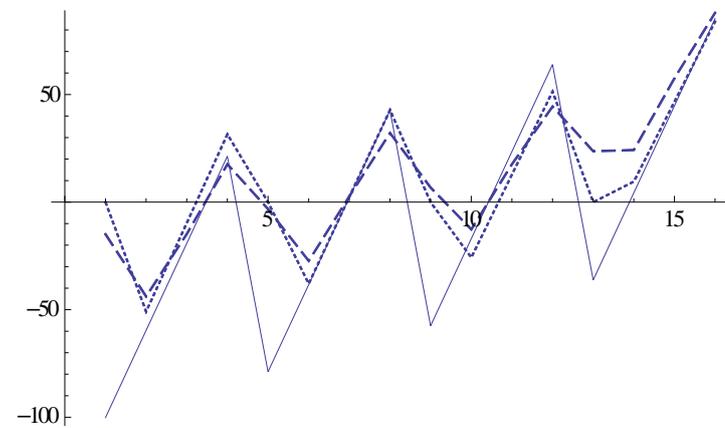
COEFFICIENTE 6



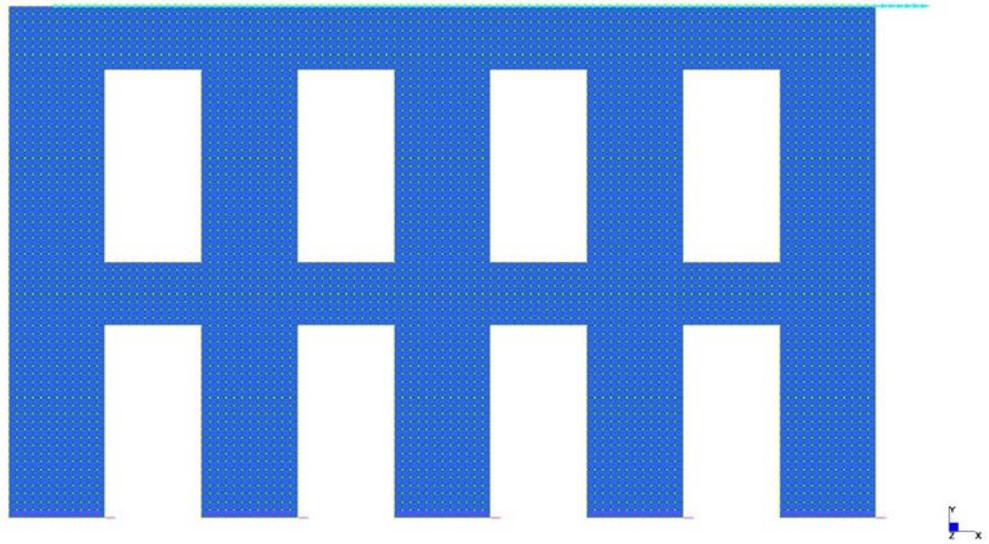
COEFFICIENTE 7



COEFFICIENTE 9



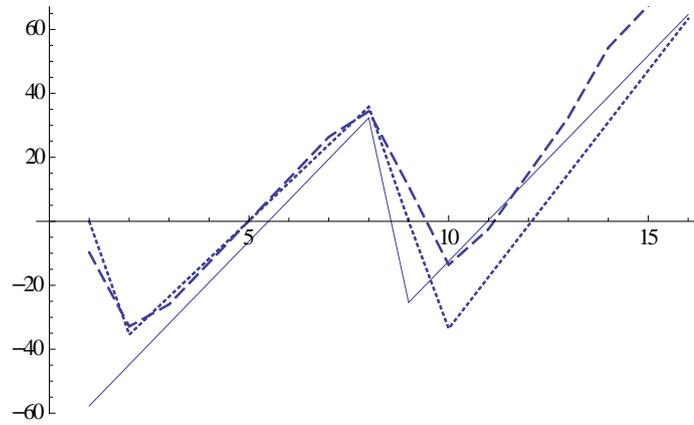
3.15 WALL 11 ($D/B = 2/3$, $K_y/K_{x1} = 0.52$, $K_y/K_{x2} = 0.99$)



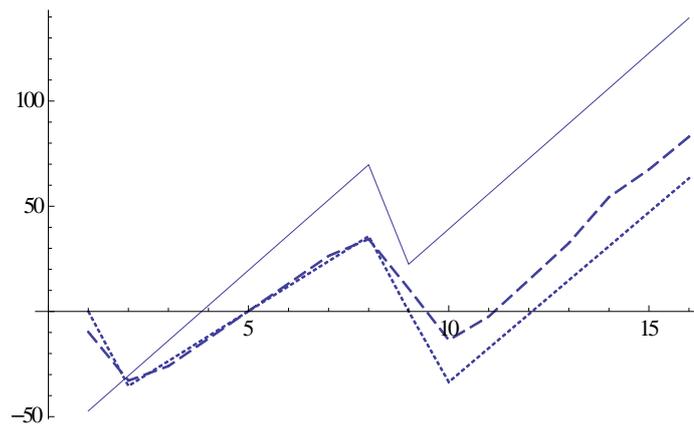
20

3.15.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

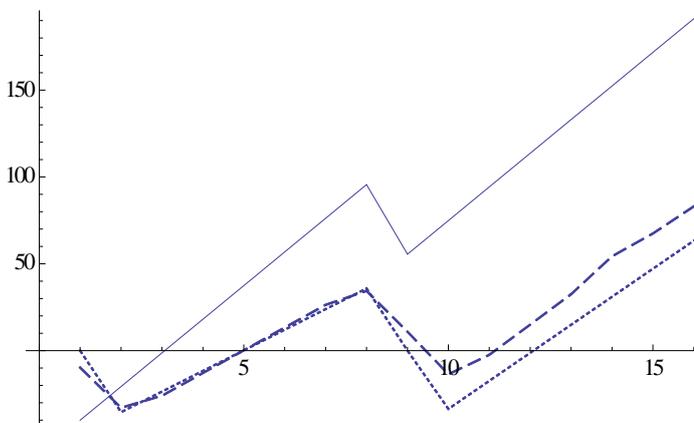
COEFFICIENTE 1



COEFFICIENTE 2

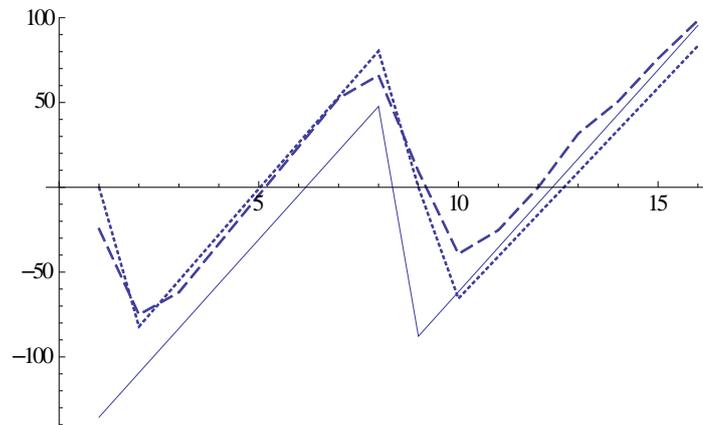


COEFFICIENTE 3

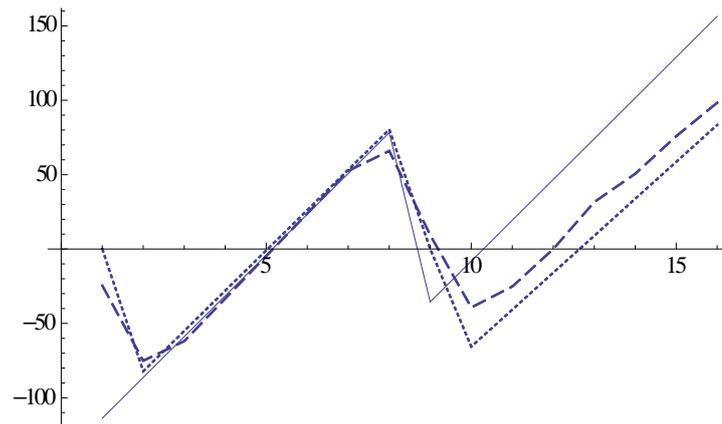


3.15.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

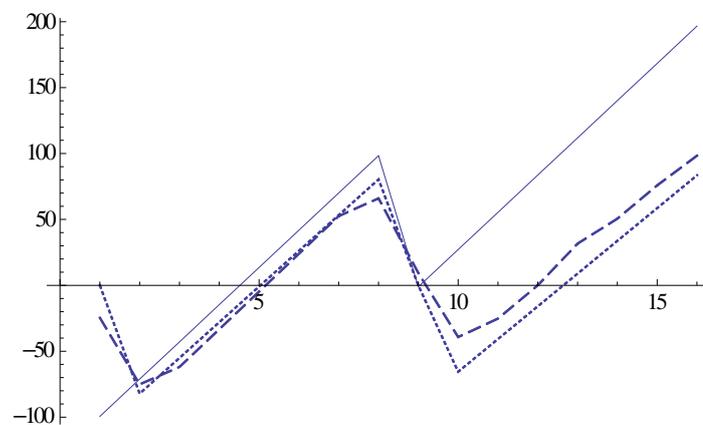
COEFFICIENTE 2



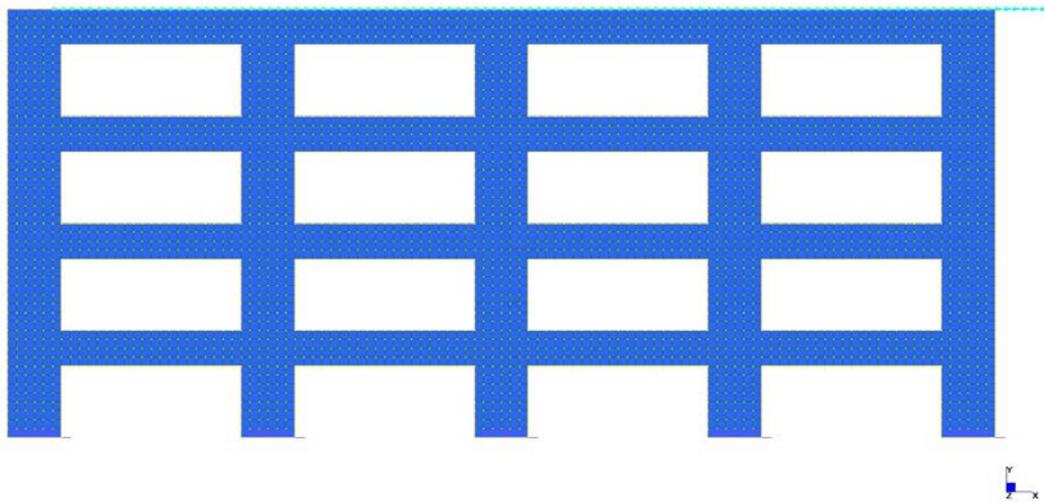
COEFFICIENTE 3



COEFFICIENTE 4

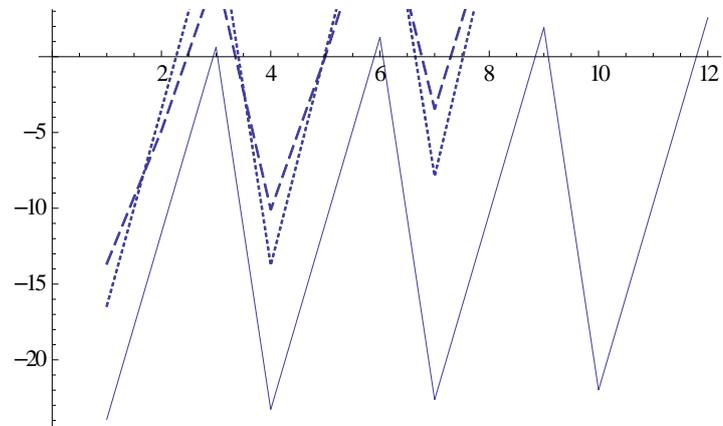


3.16 WALL 12 ($D/B = 1/1.5$, $K_y/K_{x1} = 0.32$, $K_y/K_{x2} = 0.59$)

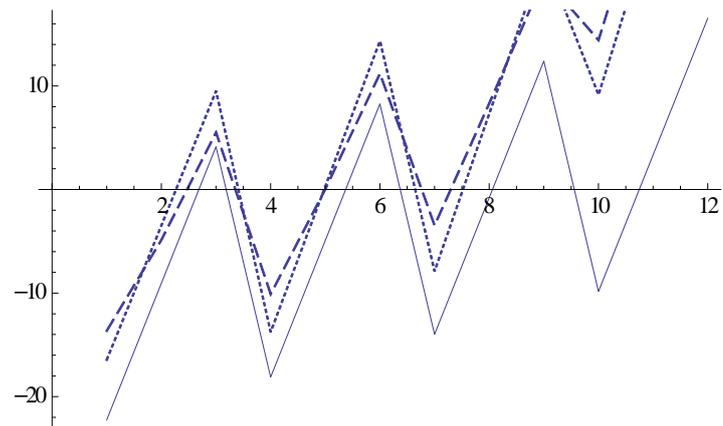


3.16.1 COLONNA + SINGOLO TRAVERSO (FACT1)

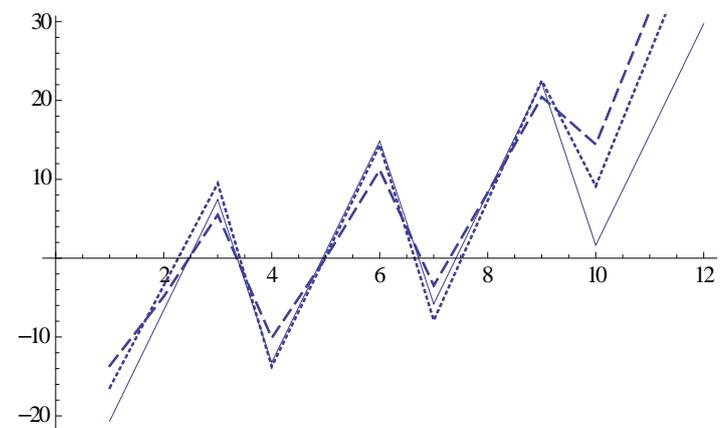
COEFFICIENTE 1



COEFFICIENTE 2

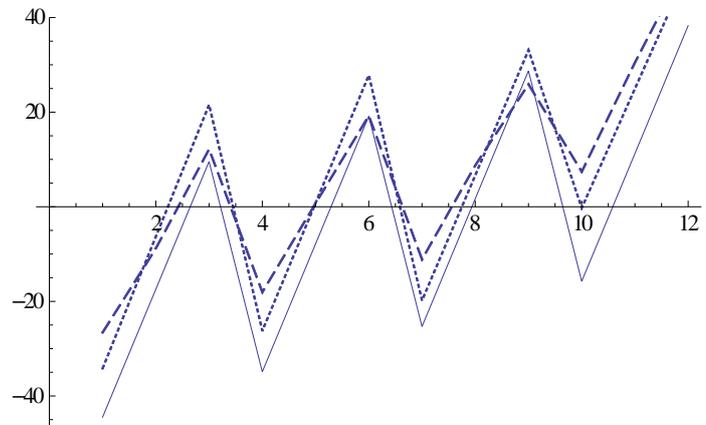


COEFFICIENTE 3

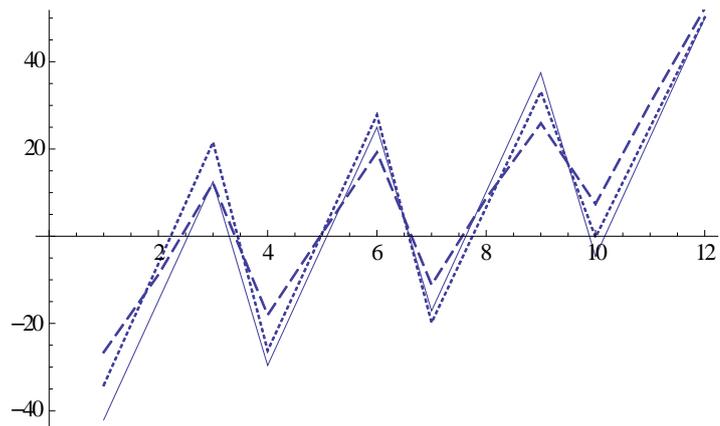


3.16.2 COLONNA + DOPPIO TRAVERSO (FACT2)

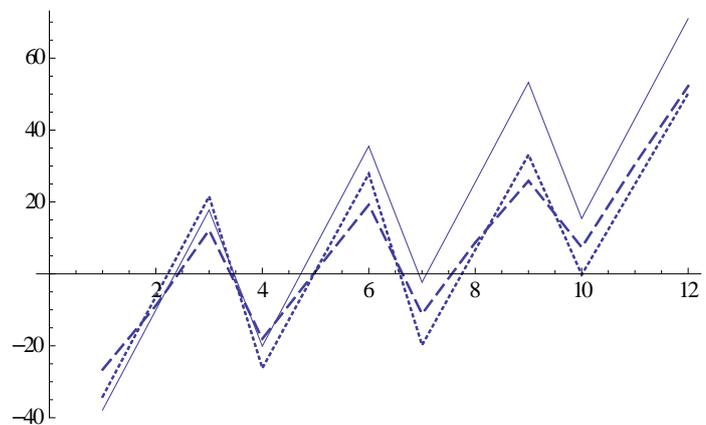
COEFFICIENTE 6



COEFFICIENTE 7



COEFFICIENTE 9



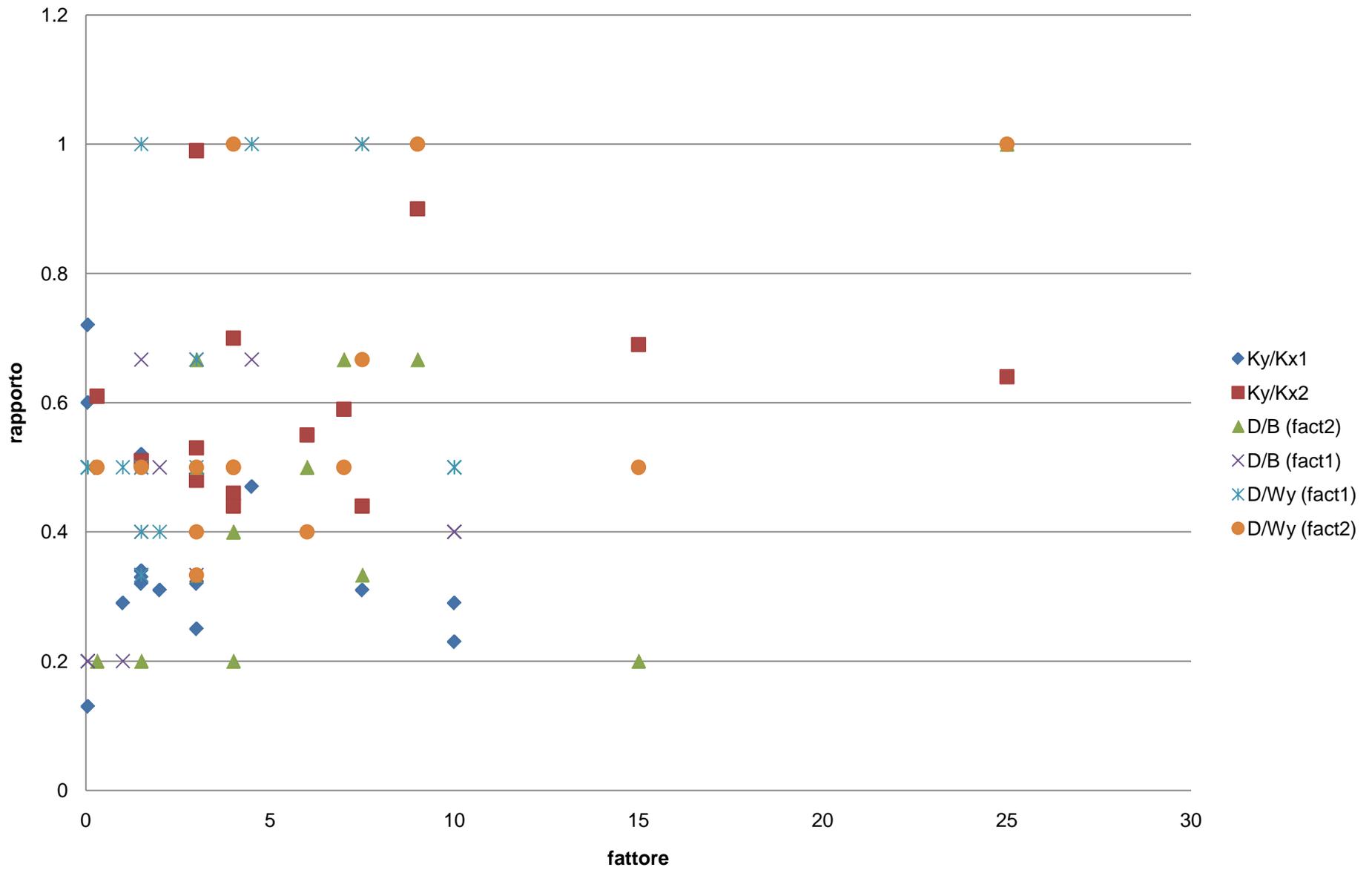
3.17 CONSIDERAZIONI

Si nota che, per paramenti con dimensioni di maschi e traversi uniformi, il coefficiente varia tra un minimo di 1 e un massimo di 12. In ogni caso, il coeff. $fact_1$ è sempre più basso di $fact_2$ e non supera mai il valore di 3, mentre il secondo si attesta su valori tra 6 e 9. Solo un caso ha valori alti ed è quello del paramento wall9 che risulta avere un numero di piani notevolmente superiore rispetto gli altri casi.

In linea di massima, comunque, tale approccio non ha portato ai risultati sperati per cui si è deciso di adottare un nuovo modello senza l'ausilio dei coefficienti $fact$.

confronto tra i risultati "Confronto.doc"

| | D/B | ky/kx1 | ky/kx2 | fact1 | fact2 | D/Wy |
|--------|------|--------|--------|-------|-------|------|
| wall1 | 0.33 | 0.32 | 0.48 | 1 | 3 | 0.5 |
| wall2 | 0.5 | 0.31 | 0.55 | 2 | 6 | 0.4 |
| wall3 | 0.33 | 0.25 | 0.44 | 3 | 7 | 0.67 |
| wall4 | 0.5 | 0.33 | 0.53 | 1 | 3 | 0.4 |
| wall5 | 0.4 | 0.34 | 0.7 | 1 | 3 | 1 |
| wall6 | 0.2 | 0.29 | 0.46 | 1 | 3 | 0.5 |
| Wall7 | 0.4 | 0.29 | | 9 | | 0.5 |
| Wall8 | 0.4 | 0.23 | 0.44 | 3 | 9 | 0.5 |
| Wall9 | 1 | 0.31 | 0.64 | 7 | 25 | 1 |
| Wall10 | 0.67 | 0.47 | 0.9 | 3 | 9 | 1 |
| wall11 | 0.67 | 0.52 | 0.99 | 1 | 3 | 0.33 |
| wall12 | 0.67 | 0.32 | 0.59 | 3 | 6 | 0.5 |



4 SECONDO MODELLO

In conseguenza delle considerazioni a cui siamo giunti con il metodo precedente, abbiamo deciso di studiare un secondo modello che si liberasse del coefficiente *fact*. Infatti, come avevamo chiarito precedentemente, speravamo di trovare un legame di qualche tipo, che unisse la geometria della parete al coefficiente suddetto ma purtroppo non abbiamo riscontrato una vera e propria relazione, sebbene i valori preponderanti per i casi studiati si aggirassero attorno a 3 per il $fact_1$ delle colonne esterne e 6 per il $fact_2$ delle colonne interne.

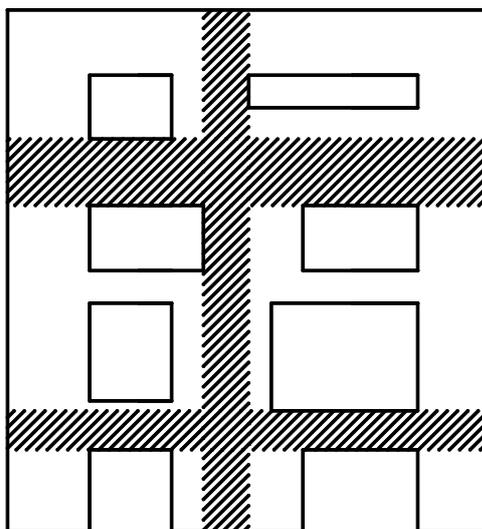
Oltre a ciò, volevamo osservare il comportamento di altri schemi strutturali per capire se lo schema di colonna mensola e telaio di traversi adottato nel modello precedente fosse il più corretto oppure se ne esistessero di migliori.

Nel secondo modello l'aspetto che cambia sostanzialmente la procedura è insito nel calcolo della rigidezza del traverso. Lo schema statico questa volta si concentra sul singolo traverso e non più sul sistema di traversi intelaiati. Anche per quanto riguarda la colonna, come si osserverà nell'opportuno paragrafo, non riguarda più l'elemento nella sua interezza ma discretizzato nei singoli spezzoni di colonna di altezza w_y (eventualmente sommandogli metà altezza del traverso $d/2$ se non trascurabile). Abbiamo poi considerato un diverso procedimento nel calcolo delle forze ma sostanzialmente l'approccio è rimasto invariato. È facile capire come le rigidezze delle colonne (sebbene discretizzate) mantengano la stessa formula e il coefficiente *fact* risulti ancora presente se non che questa volta ha valore pari a 1, ciò comporta l'uguaglianza tra le rigidezze di colonne con singolo traverso e quelle con doppio traverso a parità di larghezza di colonna B . Per questo motivo non dovremmo stupirci se rispetto al modello precedente otteniamo stessi valori di rigidezza perché le reazioni di taglio nelle colonne, questa volta, saranno calcolate anche in funzione della

rigidezza dei traversi e proprio questi ultimi ci permetteranno di ottenere reazioni diverse tra colonne esterne (un solo traverso) e colonne interne (doppio traverso).

Per finire, è bene precisare che rispetto al capitolo precedente dove studiavamo un paramento regolare con grandezza tutte uguali tra loro, in questo caso abbiamo affrontato anche lo studio di pareti con larghezze delle colonne differenti tra loro e successivamente pareti con anche spessore dei traversi e aperture disuguali. È ovvio che la parete deve mantenere una regolarità in altezza e in larghezza per quanto riguarda la geometria delle aperture, come detto precedentemente.

Una non corretta regolarità infatti induce una riduzione dei maschi e/o dei traversi in funzione della larghezza (se maschi) o dell'altezza (se traversi) più piccola possibile rispetto i vari piani e sullo stesso piano, come meglio chiarito in fig.22. Ciò chiaramente non assicura risultati accettabili utilizzando questo metodo semplificato.

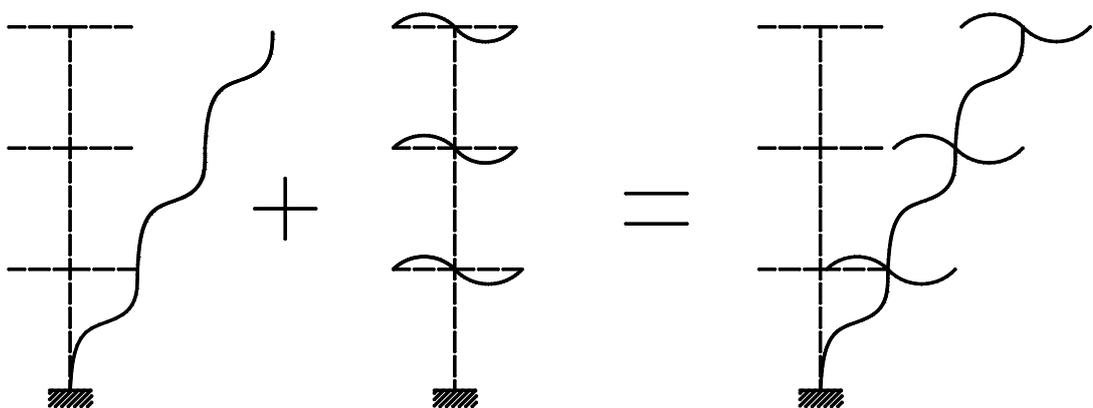


4.1 LE RIGIDENZE

Per quanto riguarda l' m -esimo traverso esso è individuato in centro campata dalla n -esima+1 colonna e alle estremità dalle mezzerie delle aperture adiacenti. Si può, quindi, considerare come vincolato da appoggi agli estremi e direttamente collegato alla colonna. Tale schema è analogo a quello di una trave a due campate e tre appoggi dove l'appoggio centrale è individuato dall'intersezione tra traverso e colonna lungo le loro linee medie. Questo perché è lecito supporre consentite le rotazioni per il traverso ma impedito per la colonna. Quest'ultima infatti è schematizzabile come una trave incastrata alla base e vincolata con un carrello scorrevole in sommità.

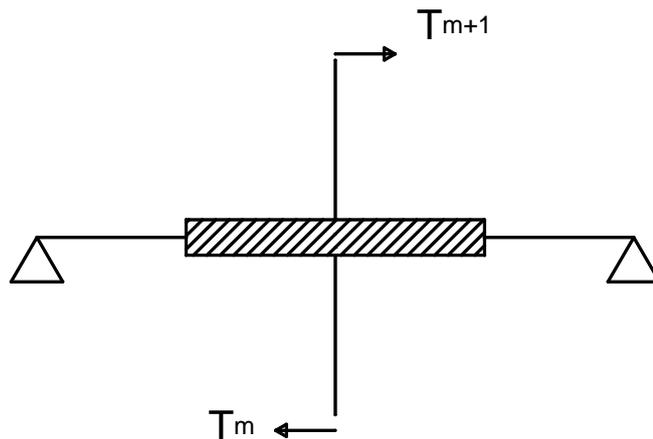
Come nel capitolo precedente note le forze esterne F e i vincoli, è possibile ricavare le rigidità tramite la relazione fondamentale $F = K \cdot u$ riconducendosi a schemi noti della scienza delle costruzioni, ricavando quindi da essi il valore di spostamento in funzione del carico.

Lo schema complessivo adottato ha una deformata totale come riportato in fig.23 dove è importante far notare come la rotazione del traverso induce una rotazione dello spezzone di colonna superiore.

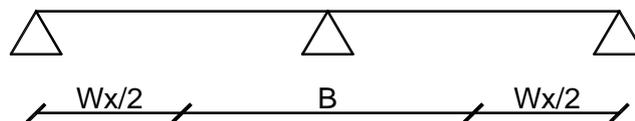


4.1.1 LA RIGIDEZZA ALLA ROTAZIONE DEL TRAVERSO

Lo schema adottato è quello riportato in fig.24. Si considera il tratto che individua la colonna di larghezza B_{n+1} , come infinitamente rigido. A questo si sommano le due metà di larghezza delle aperture adiacenti, rispettivamente di dimensione Wx_n e Wx_{n+1} . Tale schema si può pensare anche come sistema di due travi su tre appoggi come rappresentato in fig.25.

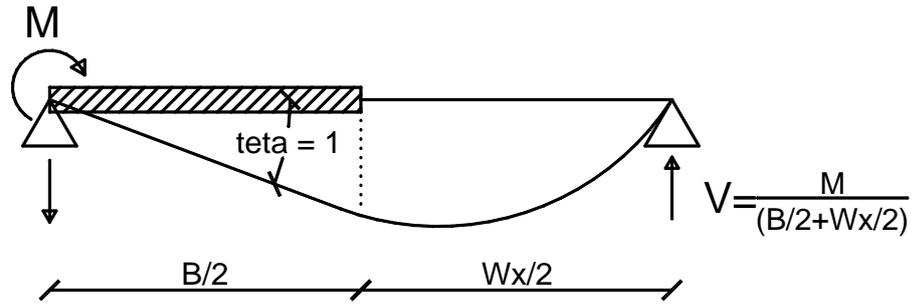


24



25

Studiandone solo metà, ricaviamo il campo di spostamento (in questo caso la rotazione θ) in funzione del carico e quindi ricaviamo la rigidezza associata alla forza agente (in questo caso il momento dato dalle forze di piano T_m e T_{m+1}). Tali forze sono la somma delle forze di piano superiori al piano di riferimento e T_m sarà quindi sempre superiore a T_{m+1} poiché considera anche l'azione applicata al piano che si sta studiando (il pedice è decrescente dall'alto verso il basso e mano a mano che si scende di piano per la convenzione adottata).



26

$$\frac{2 \cdot M}{B + Wx} \cdot \left(\frac{Wx}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{B + Wx}{2}$$

$$M = 1 \cdot \left[\frac{6 \cdot E \cdot J}{Wx} \cdot \left(\frac{B + Wx}{Wx}\right)^2 \right] = 6 \cdot E \cdot J \cdot \frac{(B + Wx)^2}{Wx^3}$$

Se le aperture adiacenti al tratto B sono diverse avremo:

$$M = 1 \cdot \left\{ 6 \cdot E \cdot J \cdot \left[\frac{(B_{n+1} + Wx_n)^2}{Wx_n^3} + \frac{(B_{n+1} + Wx_{n+1})^2}{Wx_{n+1}^3} \right] \right\}$$

Pertanto dalla relazione $F = K \cdot u$ otteniamo, dividendo per la rotazione unitaria, il valore della rigidità rotazionale, che vale per un caso generale:

$$k_{t,m} = 12 \cdot G \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{t \cdot d_m^3}{12} \cdot \left[\frac{(B_{n+1} + Wx_n)^2}{Wx_n^3} + \frac{(B_{n+1} + Wx_{n+1})^2}{Wx_{n+1}^3} \right]$$

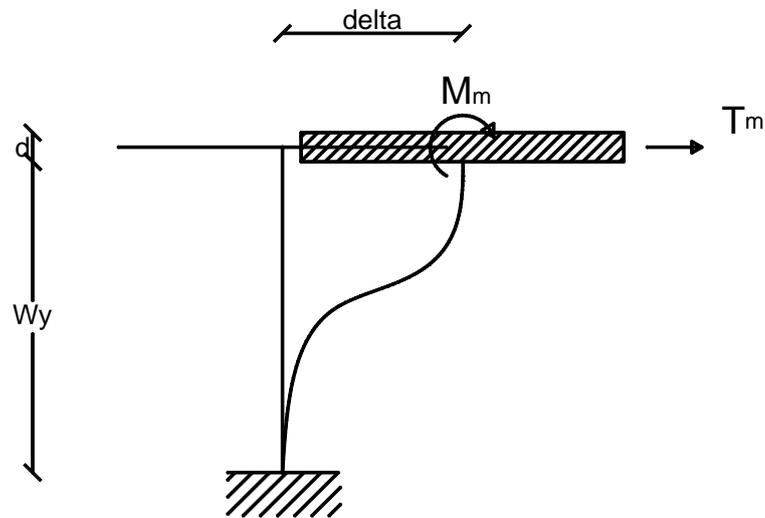
Riferita alla colonna interna con doppio traverso. Per le colonne esterne si considererà un coefficiente pari a 6 e non 12, come mostrato precedentemente.

Possiamo poi ricavare lo spostamento dello spezzone di colonna superiore in seguito alla rotazione e lo spostamento complessivo della colonna in seguito alla rotazione dei traversi, come sommatoria di questi.

$$\Gamma_{n+1} = \sum_1^m \gamma_m = \sum_1^m \theta_m \cdot \left(\frac{d_m}{2} + \frac{Wy_m}{2}\right) = \sum_1^m \frac{M_m}{k_{t,m}} \cdot \left(\frac{d_m}{2} + \frac{Wy_m}{2}\right)$$

4.1.2 LA RIGIDEZZA ALLA TRASLAZIONE DELLA COLONNA

Lo schema è quello riportato in fig.27 ovvero il classico incastro-carrello scorrevole



27

Ponendo lo spostamento unitario si ricava la rigidezza di colonna.

$$\delta_{m,n+1} = \frac{T_m}{k_{C_{m,n+1}}}$$

$$k_{C_{m,n+1}} = \frac{1}{\frac{W y_m^3}{12 \cdot E \cdot \frac{B_{n+1}}{12} \cdot t} + \frac{\chi \cdot W y_m}{G \cdot B_{n+1} \cdot t}}$$

Scritta in forma generale con dimensioni diverse considerando anche il contributo del taglio.

È importante fare un'osservazione riguardo la curvatura χ che interviene nella rigidezza tagliante. Nel metodo precedente avevamo posto il rapporto $1/\chi$ pari a $5/6$ (quindi χ pari a 1.2) ovvero un valore, per il vincolo del nodo di intersezione, molto prossimo all'incastro. In questo nuovo modello abbiamo osservato che, su una casistica di circa 20 tipologie diverse di pareti, per gli spezzoni di colonna esterna ai piani bassi è corretto adottare un valore di χ pari a 2 mentre per l'ultimo e il penultimo piano il vincolo cambia considerandosi prossimo alla cerniera quindi, il valore di χ varia

rispettivamente a 4 e 3. Considerazioni di questo tipo sulla differenza del vincolo nodale tra piani alti e piani bassi sono confermate dalla teoria e da prove sperimentali.

È bene precisare, inoltre, che tale rigidità è traslazionale e quindi non può essere direttamente sommata alla rigidità del traverso. Per questo motivo, abbiamo adottato l'approccio agli spostamenti.

Esso consiste nel valutare lo spostamento δ_m dal rapporto tra la sommatoria delle forze di piano (dalla sommità fino al piano considerato) e la rigidità dello spezzone di colonna poc'anzi calcolato.

In conseguenza di ciò, come per quanto visto con la rigidità del traverso, effettuiamo la sommatoria degli spostamenti δ_m di piano per il contributo della colonna. Tale sommatoria fornisce lo spostamento totale Δ_{n+1} , in sommità della colonna di dimensione B_{n+1} . Esso, sommato allo spostamento totale (sempre di colonna) dato dal contributo del traverso ci permette di valutare lo spostamento totale per entrambi i contributi di rigidità e quindi, posto come divisore al taglio complessivo di piano, si ottiene la rigidità totale del maschio murario.

$$\Delta_{n+1} = \sum_1^m \delta_{m,n+1}$$

$$K_{tot_{n+1}} = \sum_1^m T_m / (\Delta_{n+1} + \Gamma_{n+1})$$

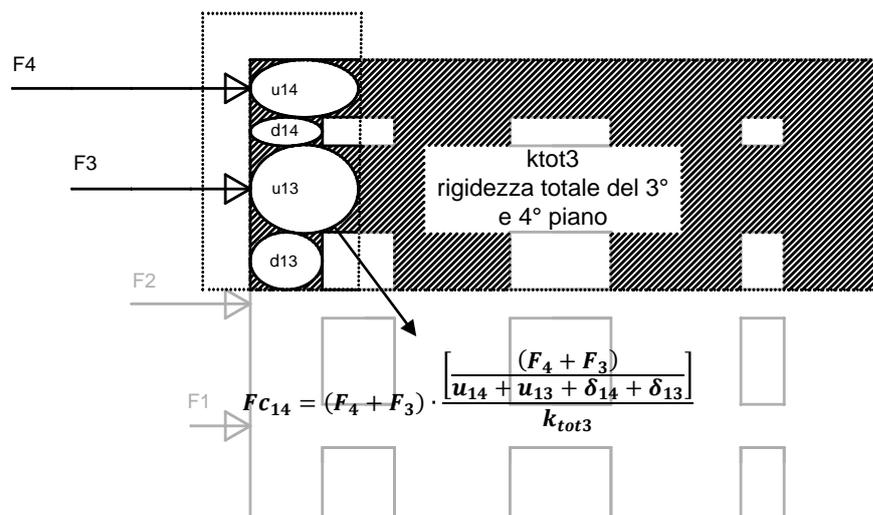
Da cui la rigidità totale della parete come pura somma delle rigidità delle singole colonne in quanto in parallelo tra loro:

$$K_{TOT} = \sum_1^{n+1} K_{tot_{n+1}}$$

In questo modo abbiamo ottenuto, per ogni colonna, la sua rigidità totale, comprensiva del contributo dei traversi ($K_{tot_{n+1}}$). Il rapporto tra la rigidità della singola

colonna e la rigidezza totale della parete fornisce il moltiplicatore, da applicare al carico esterno in modo tale da ricavare le reazioni taglianti su ogni maschio. Di seguito la procedura da rispettare per il caso di più azioni di piano (applicate piano per piano):

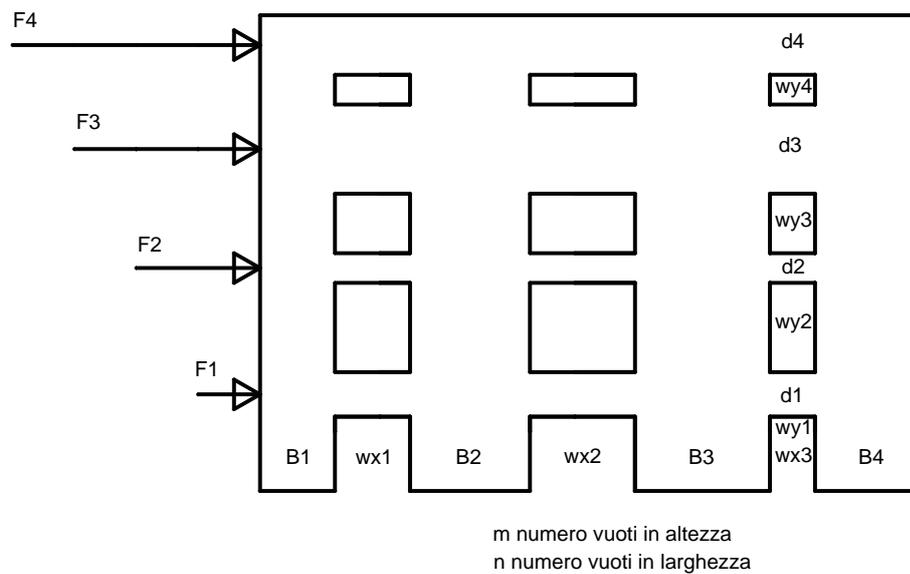
- partendo dal piano più alto si considerano i soli spostamenti in sommità dati dalle rigidezze in gioco per esso, ovvero quelle degli spezzoni di colonna e quelle dei traversi dell'ultimo piano e mano a mano che si scende, di tutti i piani sovrastanti;
- si ripartisce per i soli tagli di piano in gioco ovvero quello del piano considerato più quelli di tutti i piani superiori;
- si ripete la procedura per tutti i piani ottenendo così una matrice $m \times n+1$ con m e n rispettivamente numero di piani e numero di vuoti in larghezza;
- la somma delle rigidezze degli spezzoni di colonna + traversi appartenenti allo stesso piano (in parallelo tra loro) fornisce la rigidezza totale di piano della parete. Essa, unita a quelle dei piani superiori, andrà a dividere la singola rigidezza dello spezzone di colonna + traverso e tale rapporto, moltiplicato per le forze di piano (dal piano stesso fino in sommità) fornirà la reazione di taglio agente sullo spezzone di colonna;



4.2 LE AZIONI

Il diagramma del momento è calcolato in funzione delle reazioni di taglio appartenenti alle colonne (già in parte anticipate nel paragrafo precedente) e delle reazioni di taglio agenti sui traversi.

Vediamo nel dettaglio la procedura di calcolo per un paramento generico di questo tipo:



29

La parete risulta essere al limite massimo di irregolarità prevista, poiché è obbligatorio rispettare per le aperture stessa larghezza, salendo di piano, e stessa altezza lungo lo stesso piano.

Se non sono garantite queste due condizioni, i maschi murari devono essere considerati larghi la minima distanza tra due aperture di piano e i traversi avranno altezza pari al minimo valore che divide due aperture tra un piano e l'altro. Ovviamente in questo caso non sarà garantita l'accuratezza dei risultati con il metodo semplificato.

4.2.1 CALCOLO DELLE AZIONI DI PIANO (CASO SISMICO)

Seguendo la procedura adottata nel cap. 7 della normativa italiana è possibile calcolare, noto lo spettro di risposta e quindi la pseudoaccelerazione al suolo S_d , associata al tempo di ritorno prestabilito, l'azione tagliante della struttura V applicata nel centro di massa della parete. Da essa, ripartendo in funzione dei pesi di piano W_m sul peso complessivo della parete W_{tot} , si ottengono le azioni di taglio piano per piano agenti ovvero le nostre F_m .

Abbiamo quindi calcolato l'azione tagliante V nel modo seguente:

$$V = \frac{S_d \cdot \lambda}{g} \cdot W_{tot}$$

Dove g è l'accelerazione di gravità e λ un coefficiente che varia tra 0.85 e 1 in funzione del numero di orizzontamenti e del periodo proprio della struttura.

V è applicata nel centro di massa della struttura e quindi, noto il centro di massa di ogni piano, è possibile calcolare le azioni taglianti di piano V_m nel modo seguente:

$$V_m = \frac{V \cdot h_m \cdot W_m}{\sum h_m \cdot W_m}$$

Dove h_m è la distanza dal centro di massa del piano m al suolo.

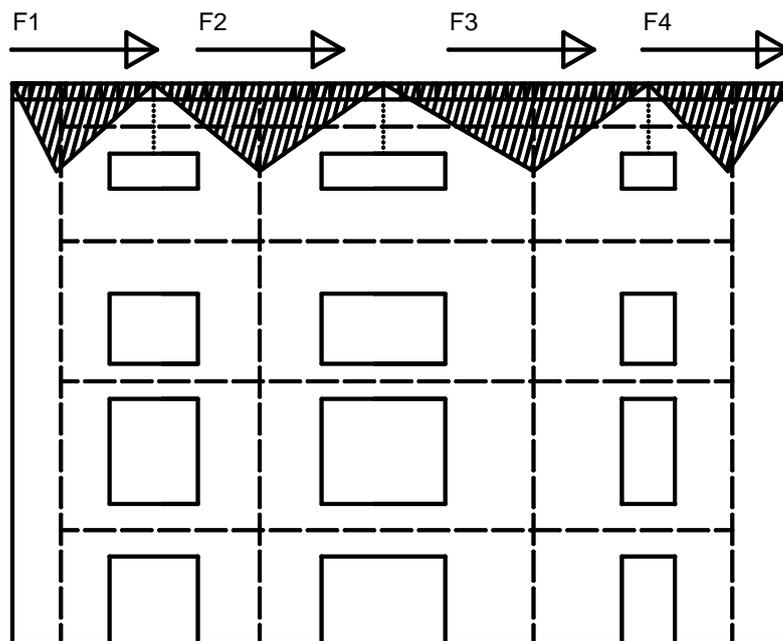
Quanto detto è facilmente applicabile in un foglio Excel nota la geometria della parete e il peso proprio (o peso specifico) del materiale muratura (quest'ultimo purtroppo affetto da incertezze in quanto il materiale è disomogeneo, come precedentemente detto).

Negli esempi successivi, per comodità, abbiamo utilizzato delle azioni di piano fittizie crescenti all'aumentare del livello di piano e in linea quindi con la distribuzione delle azioni sismiche. Le abbiamo ricavate dal modello di parete schematizzato con Straus7 tramite plates, sui quali abbiamo applicato una forza tangenziale pari a 1 kN per il primo piano e suoi multipli per i piani superiori.

In questo modo, la risultante di piano sul modello telaio con beams e link rigidi è data da 1 kN moltiplicato per il numero di plates che costituiscono la larghezza della parete. Se invece vogliamo la quota parte di tale risultante agente sul singolo spezzone di colonna di ogni piano, basta moltiplicare 1 kN per il numero di plates che interessano la colonna a cui ci stiamo riferendo, ovvero i plates costituenti la base della colonna più i plates costituenti metà dei traversi adiacenti (ovviamente questo approccio è semplificato).

Tali forze di piano, che chiameremo nodali proprio perché applicate nei nodi di intersezione tra spezzoni di colonna e traversi, sono le azioni applicate ai modelli costituiti da elementi beams e link rigidi.

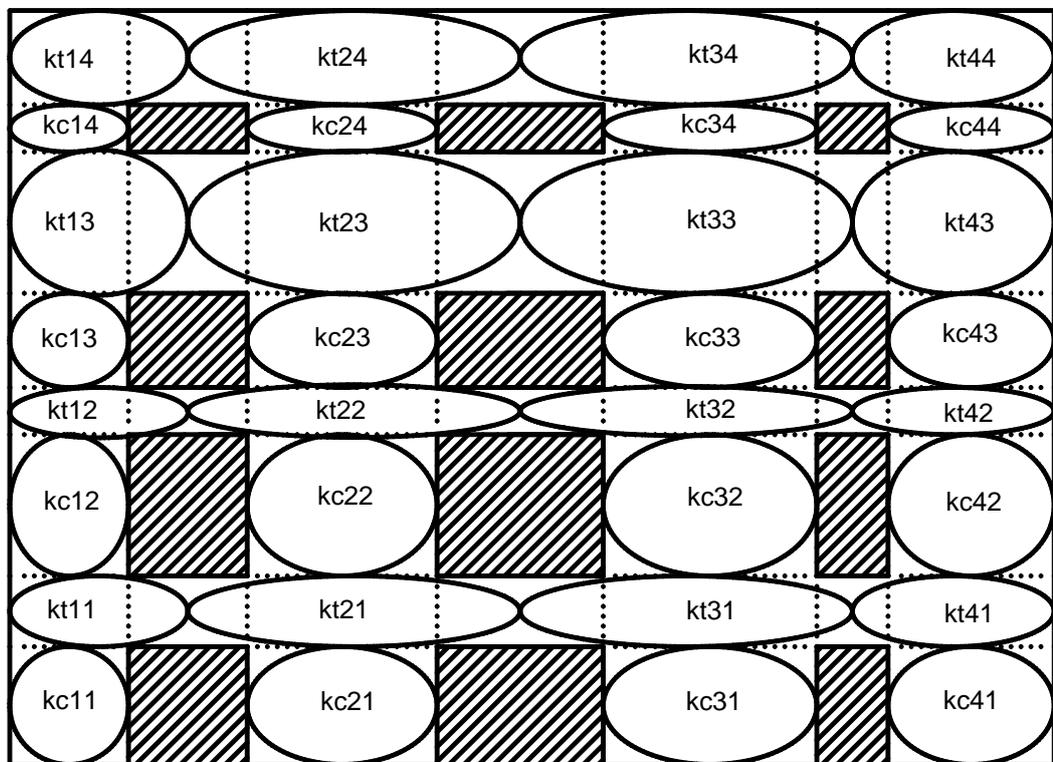
La fig.30 espone meglio quanto detto:



4.2.2 CALCOLO DELLE REAZIONI DI TAGLIO NELLE COLONNE

Le reazioni di taglio degli spezzoni di colonna sono date, come abbiamo già accennato, dalla ripartizione delle forze esterne mediante il rapporto rigidezza del elemento su rigidezza totale di piano. La strada migliore è quella di calcolare per ogni spezzone di colonna la sua rigidezza come contributo allo spostamento del meccanismo di colonna e del meccanismo di traverso. In seguito valutiamo come pura somma la rigidezza totale di piano comprendente tutti gli spezzoni di colonna del singolo piano. La somma, è data dal fatto che gli elementi sono in parallelo e non in serie per cui sarebbe stato necessario effettuare l'inverso della somma degli inversi delle singole rigidezze degli spezzoni di colonna.

L'immagine seguente aiuta a capire meglio la schematizzazione mentale del ragionamento e permette di implementare facilmente la procedura in una sintassi di calcolo automatico.



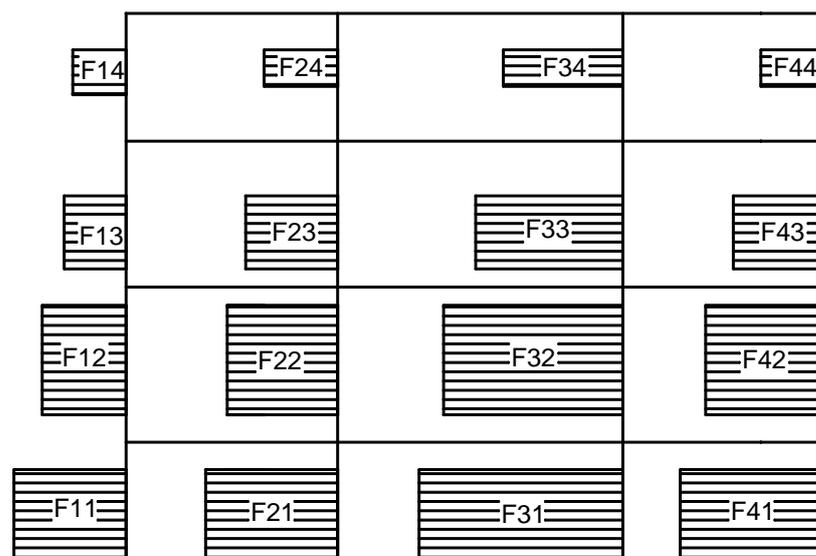
Per ogni spezzone di colonna, quindi, valutiamo velocemente la reazione di taglio che lo interessa moltiplicando alla sommatoria delle forze di piano, prese dall'alto verso il basso (se abbiamo multiple forze di piano), il rapporto di rigidezza dato dalla rigidezza totale dello spezzone di colonna sulla rigidezza totale del piano. Il seguente esempio, fatto sullo spezzone di colonna 22 (2° colonna al 2° piano), chiarirà quanto detto:

$$F_{C_{22}} = (F_4 + F_3 + F_2) \cdot \left[\frac{(F_4 + F_3 + F_2)}{(u_{24} + u_{23} + u_{22}) + (\delta_{24} + \delta_{23} + \delta_{22})} \cdot \frac{1}{(K_{12} + K_{22} + K_{32} + K_{42})} \right]$$

Il termine dentro parentesi quadra è il rapporto di rigidezza svolto, mentre i termini u e δ rappresentano rispettivamente gli spostamenti dati dalle rigidezze degli spezzoni di colonna quindi $k_{C_{22}}, k_{C_{23}}, k_{C_{24}}$ e gli spostamenti dati dalle rigidezze dei traversi quindi $kt_{22}, kt_{23}, kt_{24}$. Complessivamente, il primo rapporto interno alla parentesi quadra individua la rigidezza dello spezzone della 2° colonna al 2° piano e quindi K_{22} .

$K_{12}, K_{22}, K_{32}, K_{42}$ rappresentano le rigidezze delle colonne al 2° piano (quindi consideranti anche il 4° e il 3°), comprendenti sia il contributo del traverso che il contributo della colonna.

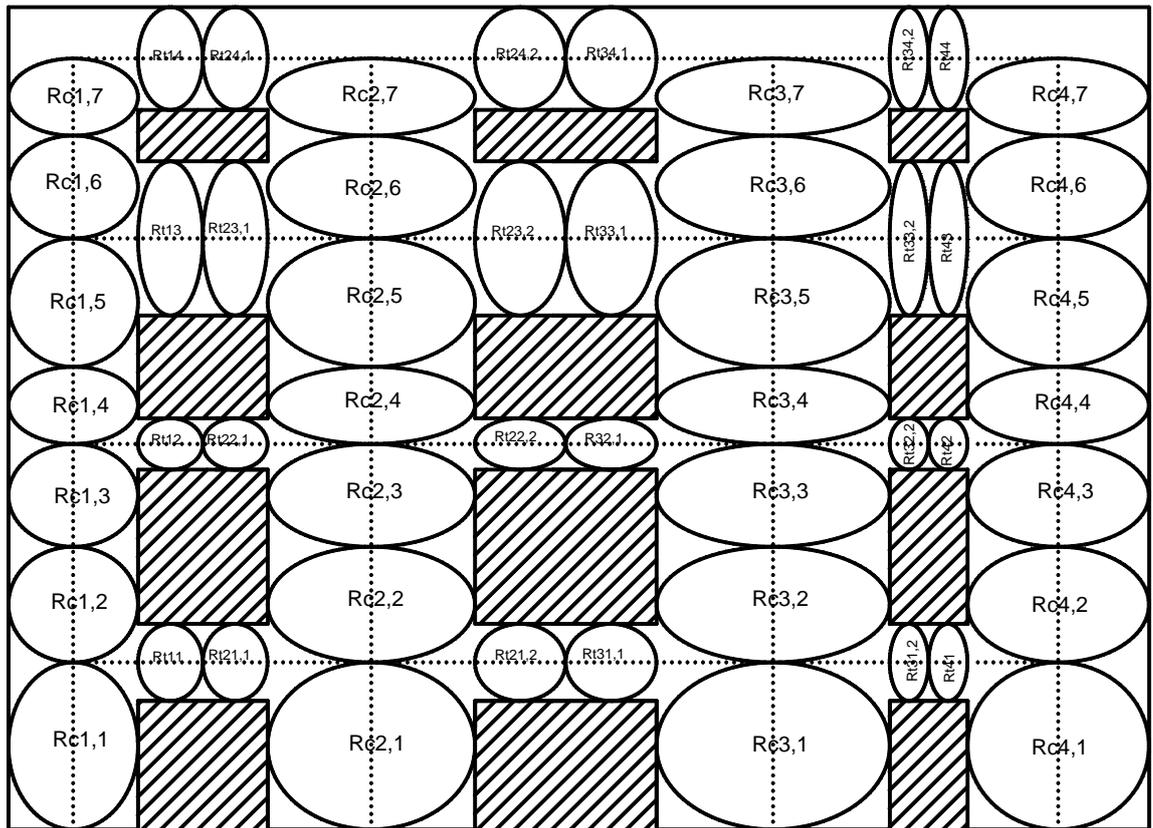
Come risultato si otterrà un diagramma di questo tipo:



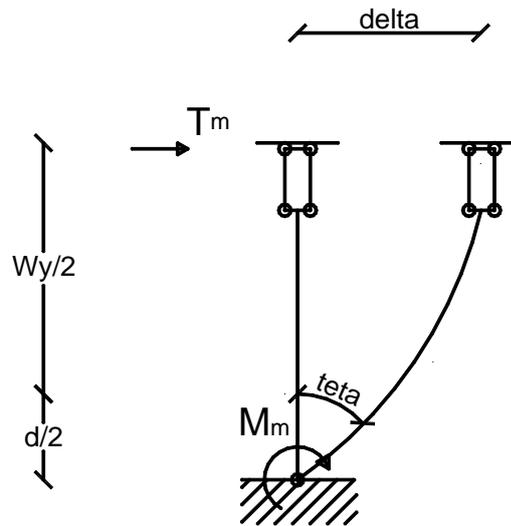
4.2.3 CALCOLO DELLE REAZIONI DI TAGLIO NEI TRAVERSI

L'approccio è simile al precedente, ma questa volta le reazioni, poiché date dagli appoggi esterni dello schema del traverso di fig.25, le ricaveremo ripartendo rispetto alle rigidezze, il momento agente sull'appoggio centrale conseguente alle reazioni di taglio delle colonne calcolate precedentemente.

Anche per le rigidezze cambia lo schema, poiché ora avremo a che fare con rigidezze rotazionali che riguarderanno tutti gli spezzoni di colonna e tutti gli spezzoni di traverso (quindi non più il traverso nella sua interezza) e ciò perché nelle colonne centrali con doppio traverso è necessario tener in conto anche della reazione dell'appoggio trasmessa dalla colonna adiacente.



Nel dettaglio: la rigidezza dello spezzone di colonna è la rigidezza alla rotazione dello schema cerniera – doppio pendolo ovvero:

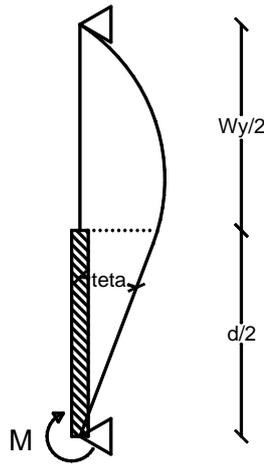


34

$$Rc_{n,m} = \frac{E \cdot J}{\left(\frac{w_y}{2} + \frac{d}{2}\right)}$$

Per quanto riguarda invece le rigidezze degli spezzoni di traverso abbiamo mantenuto lo stesso schema dell'analisi precedente, ovvero quello di fig.26 considerando però il traverso doppio come due singoli traversi separati, quindi tutti avranno coefficiente 6.

I risultati ottenuti sono in linea con quelli ricavati con il calcolatore modellando la parete con Straus7; purtroppo però, così facendo, i risultati del diagramma dei momenti non rispecchiano neanche lontanamente i risultati ottenuti con il programma agli elementi finiti e questo perché le reazioni di taglio dei traversi prevalgono sul diagramma dei momenti ottenuto dalle reazioni di taglio delle colonne. Per questo motivo, abbiamo modificato lo schema statico degli spezzoni di colonna utilizzando uno schema analogo a quello applicato negli spezzoni dei traversi, come meglio chiarito in fig.35. In questo modo otteniamo delle reazioni di taglio sui traversi che sono proporzionalmente più piccole rispetto a quelle calcolate con lo schema di fig.34, ma esse ci permettono di ottenere diagrammi dei momenti sollecitanti coerenti e, nei limiti delle semplificazioni attuate, in linea con i risultati ottenuti tramite software.



35

L'espressione è, come abbiamo pocanzi detto, simile a quella utilizzata per il calcolo della rigidezza del traverso ovvero:

$$R_{c_{n,m}} = 6 \cdot E \cdot J \cdot \frac{(d_m + W y_m)^2}{W y_m^3}$$

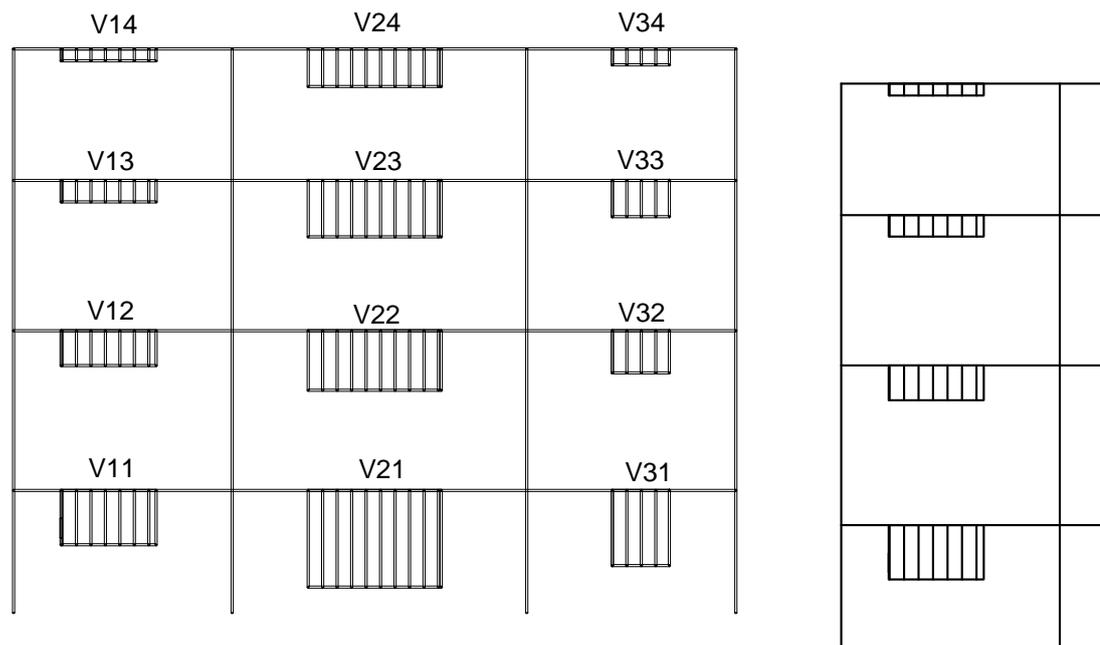
La procedura per il calcolo delle reazioni, consiste nel valutare i momenti nei nodi di intersezione colonna – traverso dati dalle reazioni di taglio delle colonne calcolate nel paragrafo precedente. Noti tali momenti M_c , calcoliamo il moltiplicatore. È importante seguire uno schema logico e quindi partire, per esempio, da sinistra verso destra.

Si considera quindi la colonna esterna di sinistra. Per ogni piano abbiamo due spezzoni di colonna e uno spezzone di traverso. Il moltiplicatore sarà dato dal rapporto della rigidezza dello spezzone di traverso sulla somma di tutte le rigidezze che concorrono nel nodo (ovvero per colonna esterna la somma delle rigidezze degli spezzoni di colonna superiore e inferiore più la rigidezza dello spezzone di traverso). Noto il moltiplicatore, esso si applica al rapporto tra il momento M_c e il braccio della reazione vincolare del traverso incognita (quindi metà base della colonna più metà larghezza dell'apertura) ottenendone così il suo valore come quota parte delle reazioni vincolari delle colonne. Note le reazioni sui traversi per la colonna esterna di sinistra, si effettua la stessa procedura con la colonna adiacente (quindi interna), applicando

all'equilibrio alla rotazione nel nodo anche le reazioni calcolate poc'anzi invertite di segno.

Se le colonne sono dispari avremo, per la colonna centrale, due valori delle reazioni poiché, per calcolare tutti i traversi, dovremmo applicare il meccanismo da sinistra verso destra e in seguito da destra verso sinistra. Se non sono stati commessi errori i risultati per la colonna centrale, ottenuti da sinistra verso destra e da destra verso sinistra, saranno circa uguali, per cui possiamo considerarne la media.

Le reazioni di taglio che si ottengo, in entrambi i casi di schema degli spezzoni di colonna, rispecchiano un andamento, nel caso più generale possibile, in linea con quanto rappresentato in fig.36.

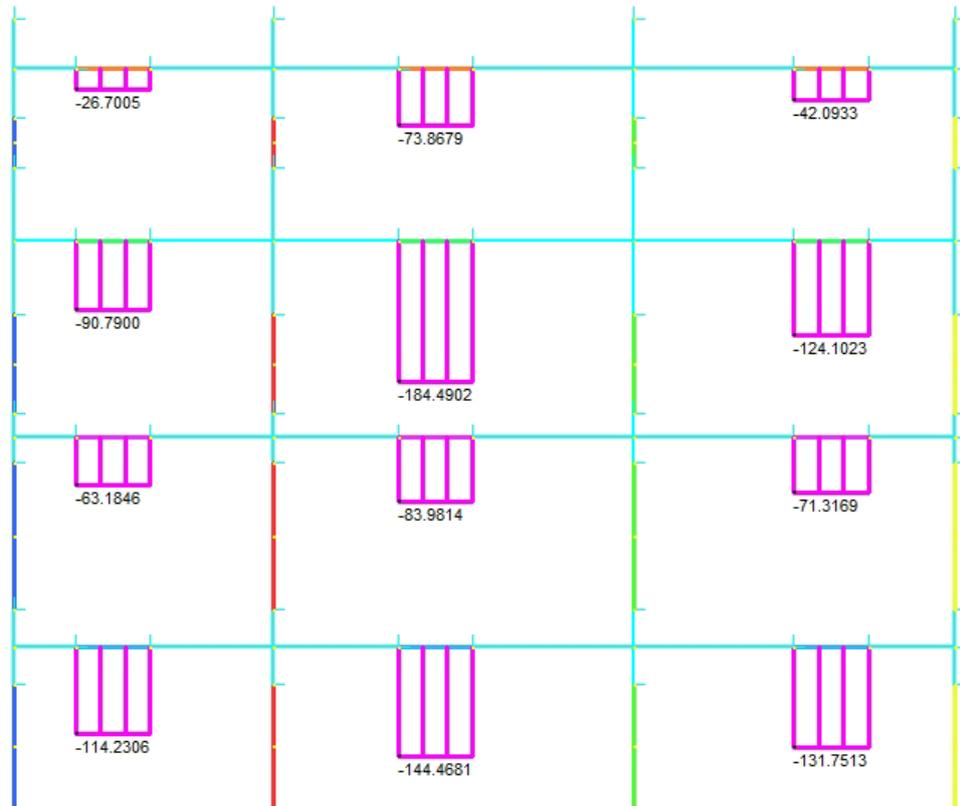


36

Vogliamo ora mostrare con un esempio pratico, quanto detto precedentemente, ovvero che un buon diagramma del momento è dato da uno schema degli spezzoni di colonna come quello di fig.35 mentre buoni valori delle reazioni di taglio sui traversi si ottengono con uno schema simile a quello di fig.34.

ESEMPIO WALL10

Reazioni di taglio sui traversi ricavate dal modello in beams tramite Straus7:



37

Possiamo notare come le reazioni sui traversi, al primo e al terzo piano, siano le più elevate. Questo perché tali piani hanno elevato spessore del traverso rispetto ai restanti due e inoltre, la lunghezza maggiore del traverso centrale, comporta un incremento delle sue reazioni di taglio rispetto ai traversi esterni.

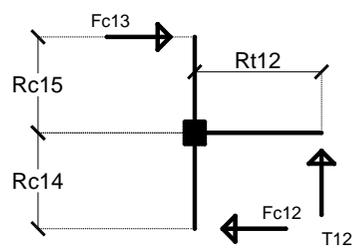
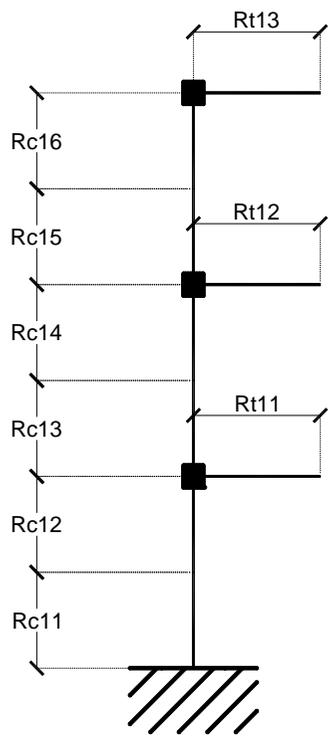
Sembra quindi che giochino un ruolo importante le dimensioni del traverso rispetto alle dimensioni degli spezzoni di colonna e quanto detto finora, farebbe pendere l'ago della bilancia in favore dello schema di fig.34 poiché questo fornisce rigidità per le colonne, inferiori rispetto a quelle date dallo schema di fig.35 e soprattutto inferiori rispetto alle rigidità degli spezzoni di traverso.

I valori sono nettamente discordanti tra i due schemi statici e mentre il primo si avvicina ai valori del calcolatore, il secondo permette di poter tracciare un diagramma del momento opportuno se si utilizza il metodo esposto nel capitolo successivo. Questo perché i valori di taglio sui traversi, se elevati, incidono negativamente sul diagramma del momento, dando risultati troppo alti rispetto ai valori reali.

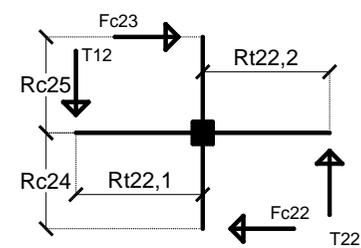
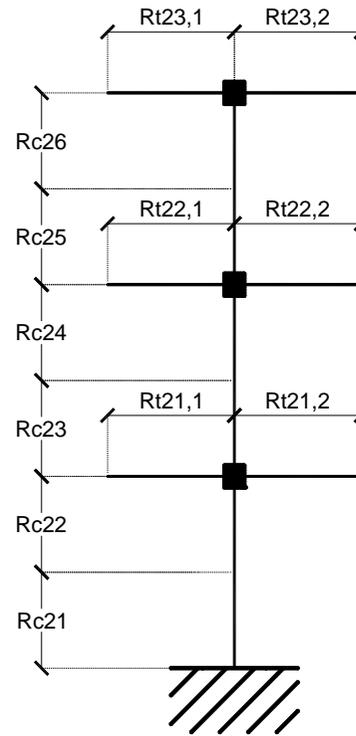
Probabilmente il modello in beams, eseguito con il calcolatore, sebbene confrontato con il modello in plates risulti essere coincidente per quanto riguarda i momenti, non coglie bene il comportamento e la natura dei traversi. Forse il nodo di tipo link rigido non è del tutto corretto, come potrebbe non essere corretto il metodo applicato in seguito per il calcolo del momento sollecitante. La scoperta di un nuovo metodo, parlando sempre al condizionale, potrebbe riportare in auge il meccanismo di fig.34.

L'immagine seguente può aiutare a capire meglio la procedura che abbiamo adottato per il calcolo delle reazioni vincolari dei traversi:

Colonna Esterna

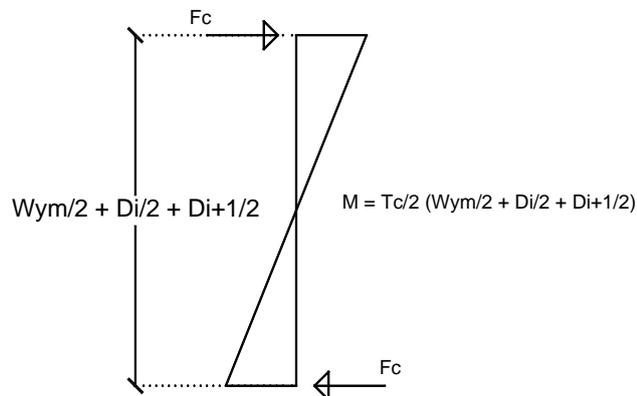


1° Colonna Interna



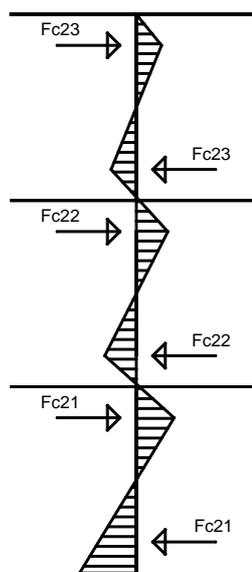
4.2.4 DIAGRAMMI DEI MOMENTI

Note le reazioni di taglio nelle colonne e nei traversi, si ricava il diagramma del momento graficando i due contributi e sommandoli tra loro. Nel caso più generale possibile le reazioni vincolari sono tutte diverse tra loro e in particolare per la j-esima colonna, non si manterrà la stessa reazione di taglio come per il caso semplice esposto nel cap.3. Il diagramma del momento è tracciato in fig.41 dove F_C è la reazione tagliante dello spezzone di colonna così come calcolata nel paragrafo 4.2.2:



41

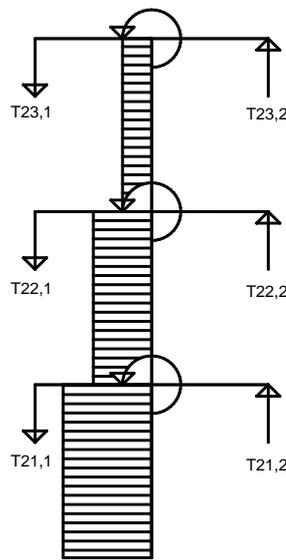
Si esegue la procedura per tutti i piani ottenendo un diagramma complessivo di questo tipo:



42

In funzione di quanto saranno diversi i valori di momento tra piano e piano, varierà il punto di momento nullo che, in fig.42, per semplicità è posto sulla linea media dei traversi ovvero nel nodo di intersezione traverso - colonna.

Tracciati questi diagrammi, si sommano (o si sottraggono a seconda dei segni adottati) ai momenti semplici dati dalle reazioni di taglio sui traversi, in quanto coppie applicate nei nodi del telaio di fig.43. In questo diagramma bisogna considerare, mano a mano che si scende di piano, tutte le coppie ai piani superiore e proprio per questo motivo, elevati valori di reazioni di taglio sui traversi, induce un diagramma del momento di fig.43 molto elevato rispetto al diagramma di fig.42.



43

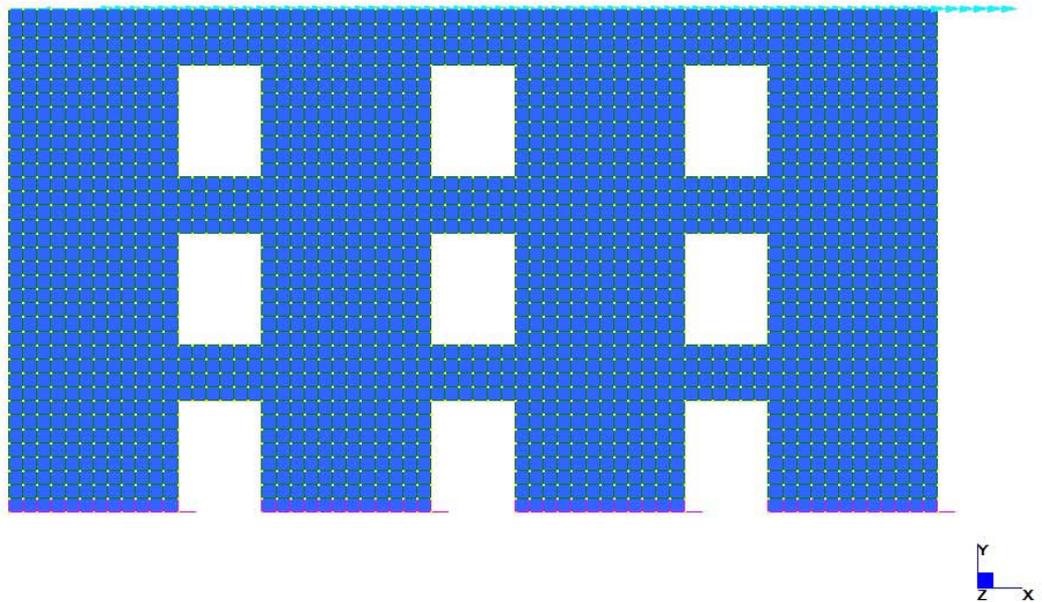
La somma fornisce il diagramma complessivo della colonna + traversi dato dalle sollecitazioni esterne. Tale diagramma andrà confrontato con quello resistente dato dagli sforzi normale (compresa la forza peso) del sistema colonna + traversi, ma ciò verrà esposto più approfonditamente nel cap.6.

Si otterrà così un diagramma complessivo del momento sollecitante simile a quello di fig.42 ma traslato in funzione del diagramma di coppie di fig.43.

4.3 ESEMPI

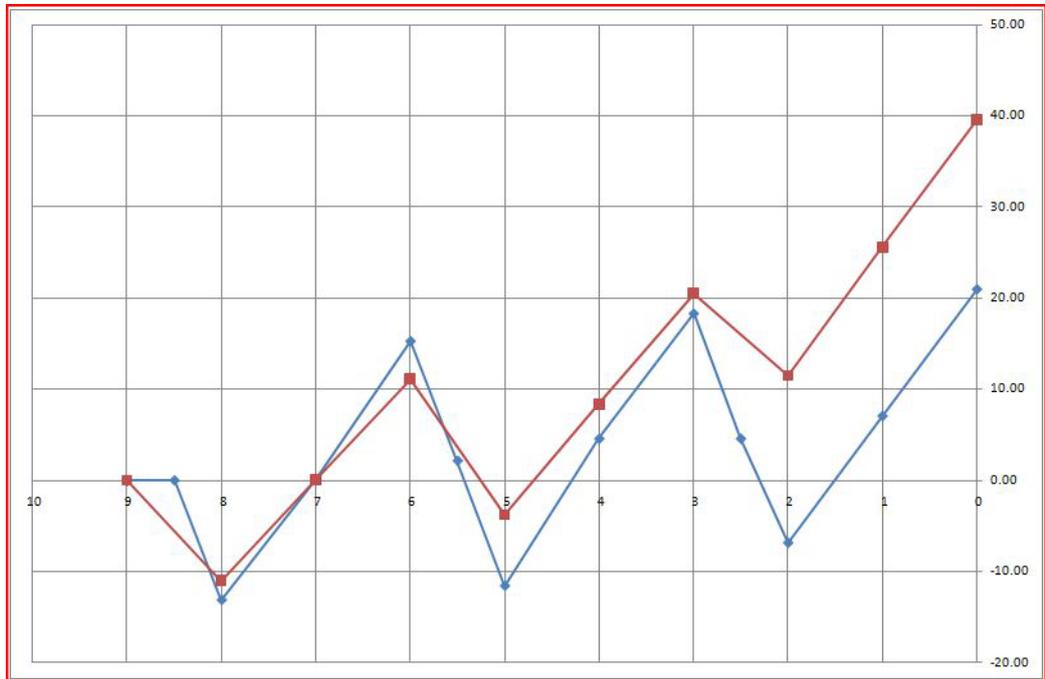
Verranno di seguito mostrati i modelli più significati tramite le loro risultanti di taglio sulle colonne e il loro grafico del momento. Il tutto è stato confrontato con i valori dati dal metodo (applicato in un foglio Excel).

4.3.1 WALL 1



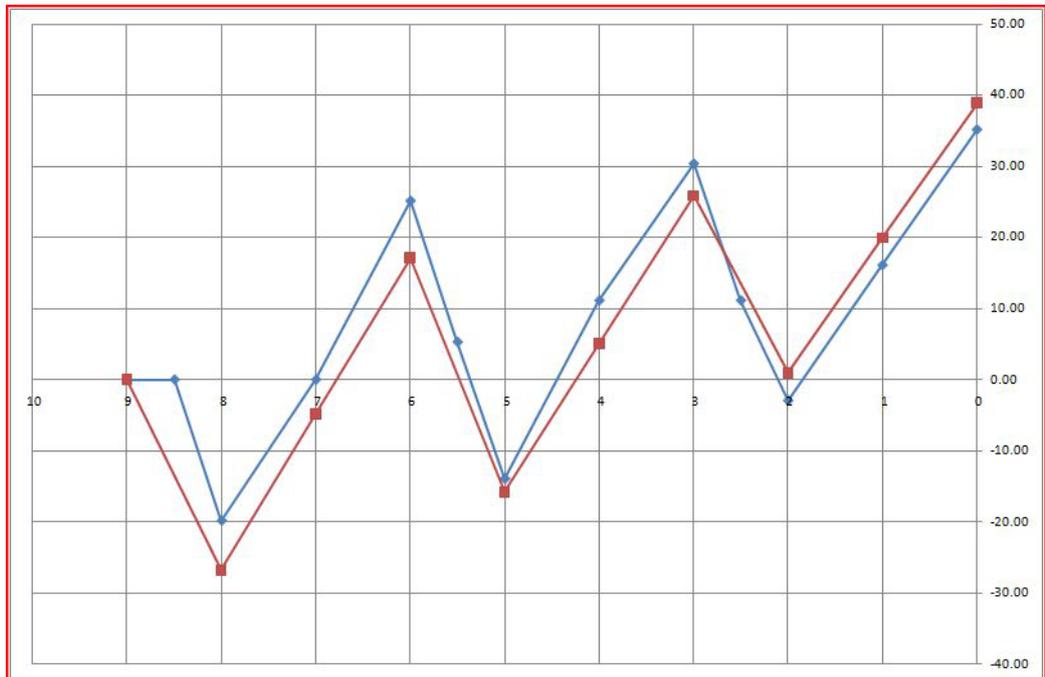
- Diagrammi del momento

Colonna esterna:



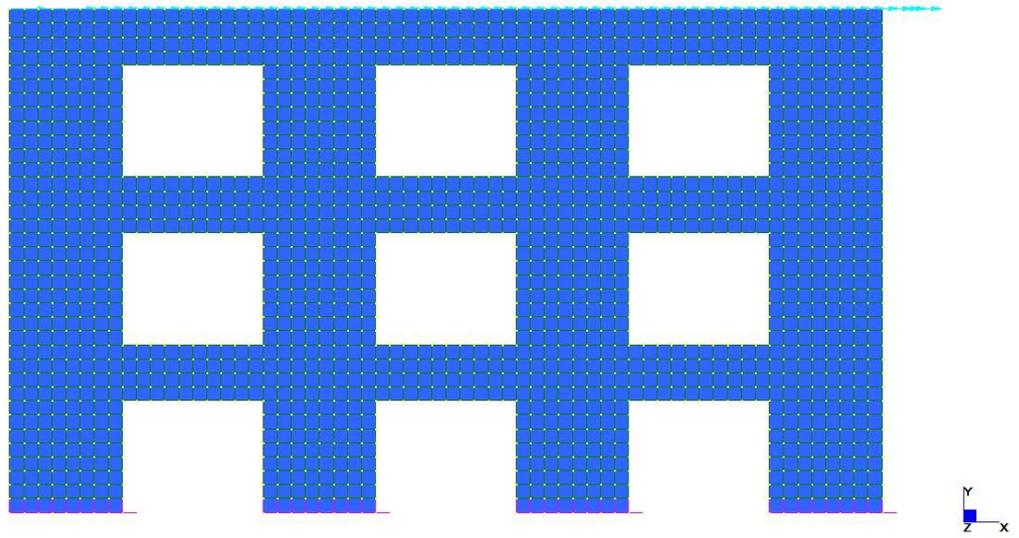
47

Colonna interna:



48

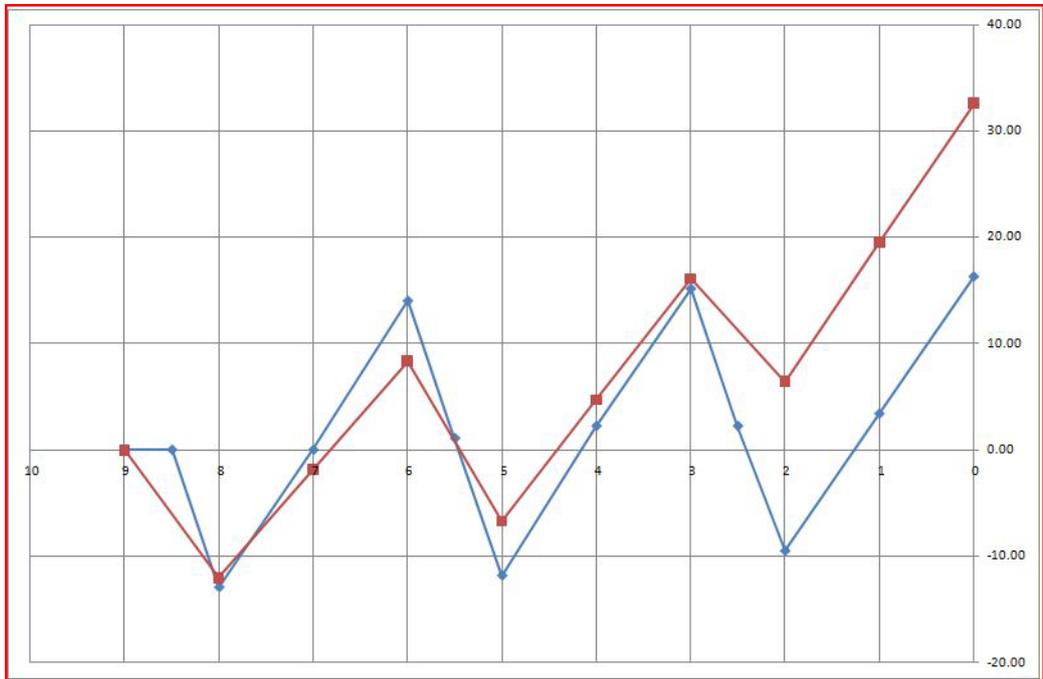
4.3.2 WALL 2



49

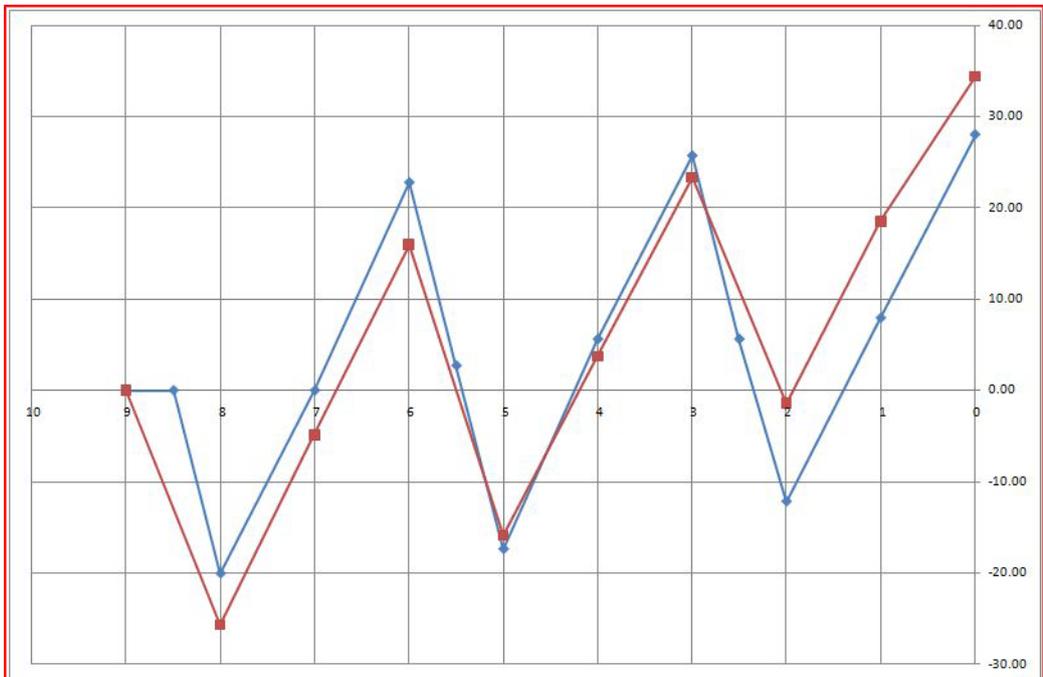
- Diagrammi del momento

Colonna esterna:



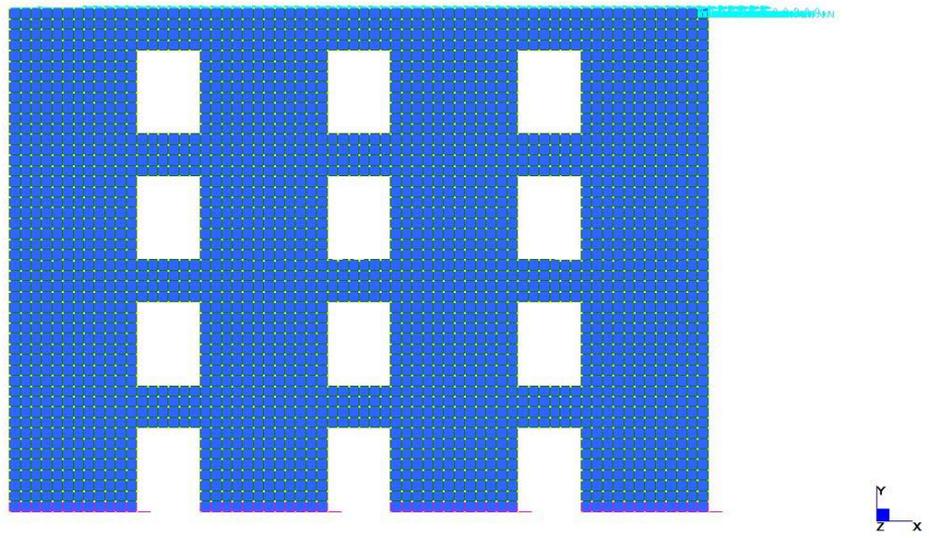
52

Colonna interna:



53

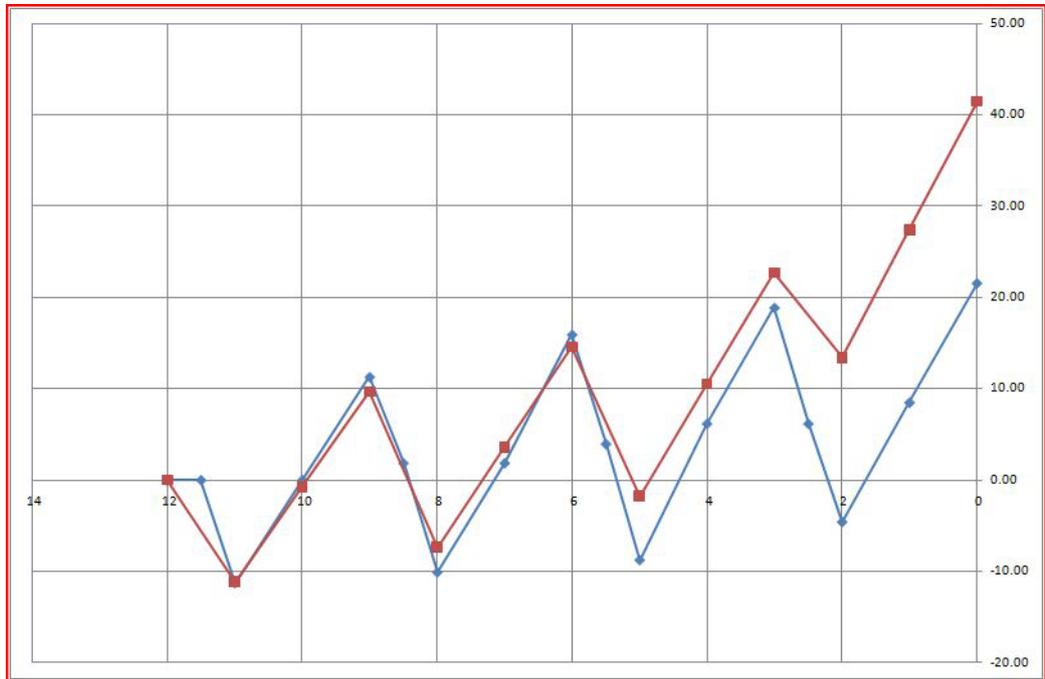
4.3.3 WALL 3



54

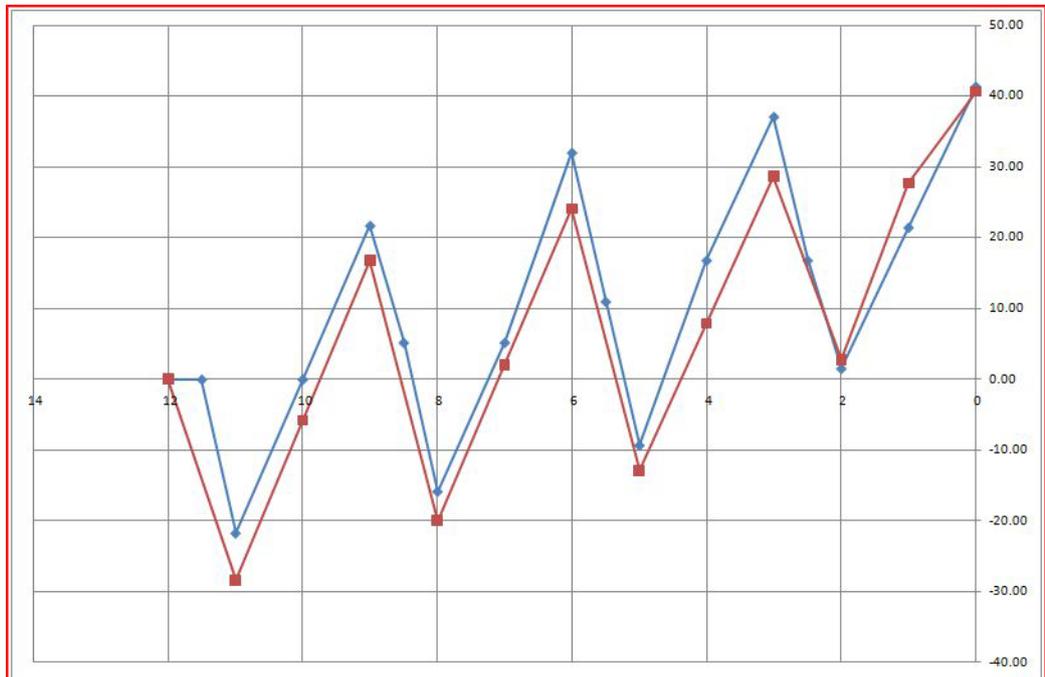
- Diagrammi del momento

Colonna esterna:



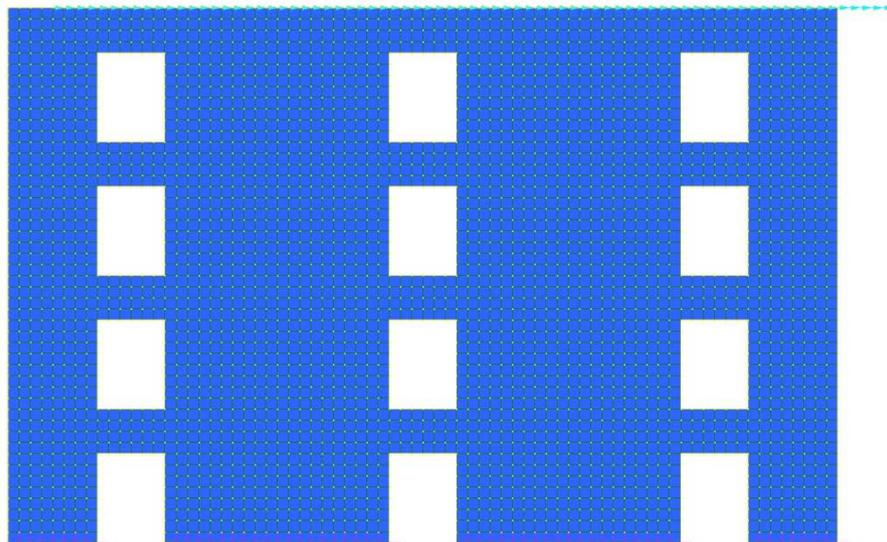
57

Colonna interna:



58

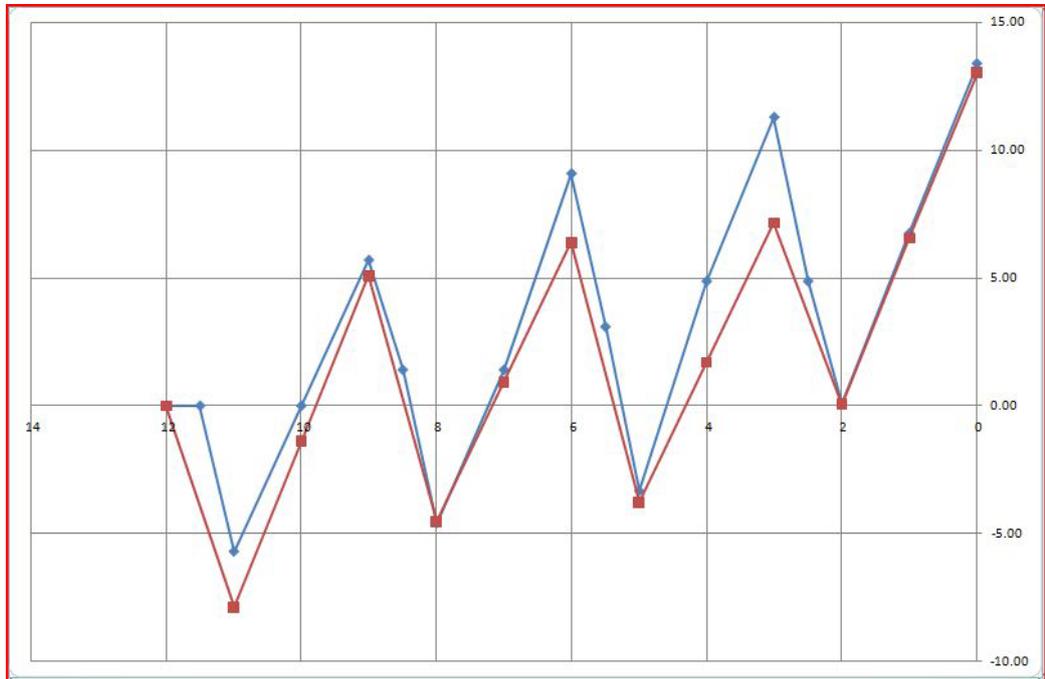
4.3.4 WALL 4



59

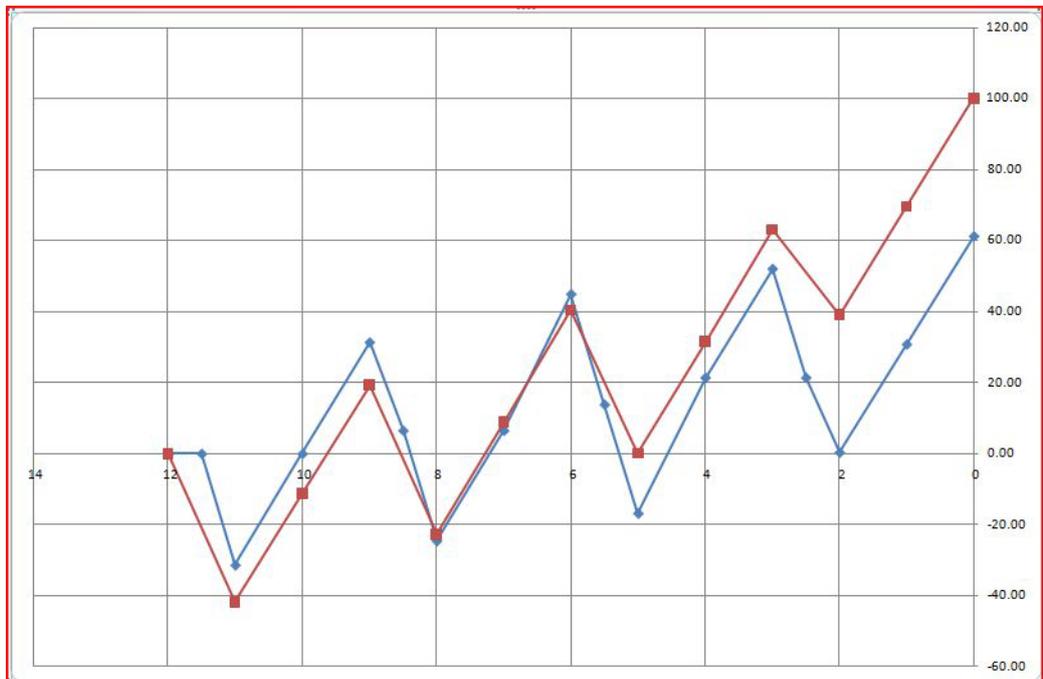
- Diagrammi del momento

Colonna esterna:



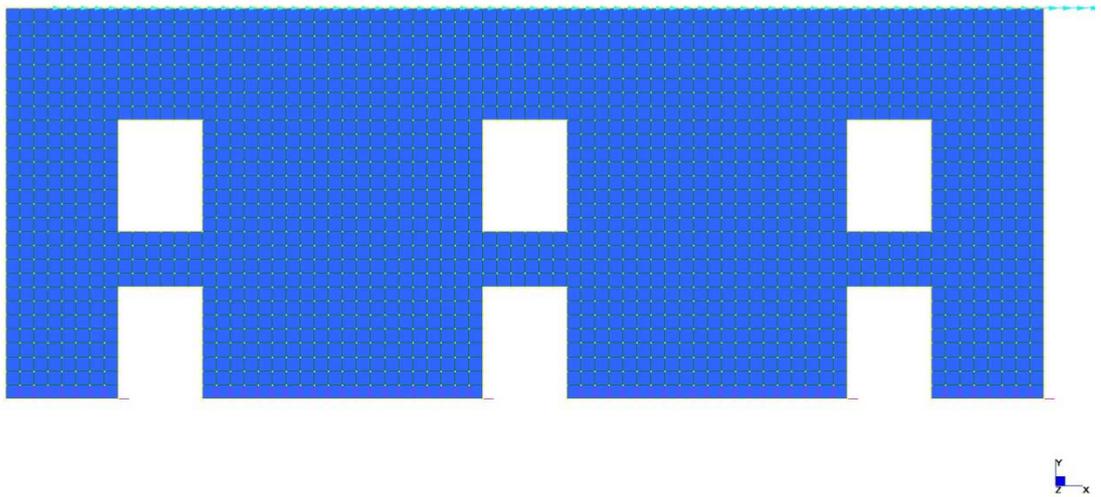
62

Colonna interna:



563

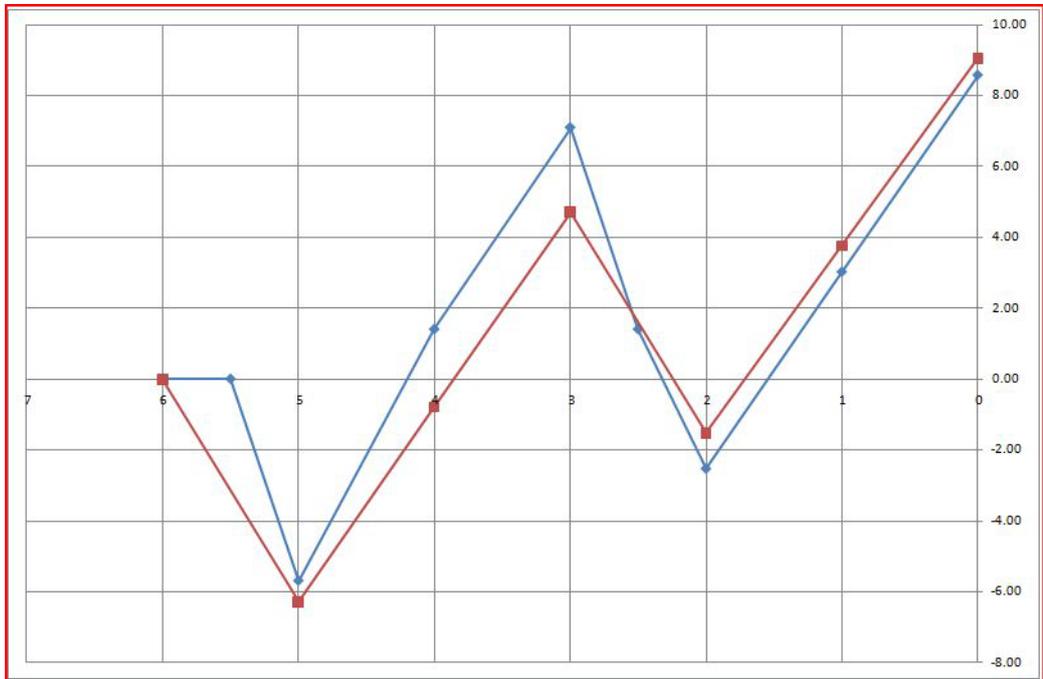
4.3.5 WALL 5



64

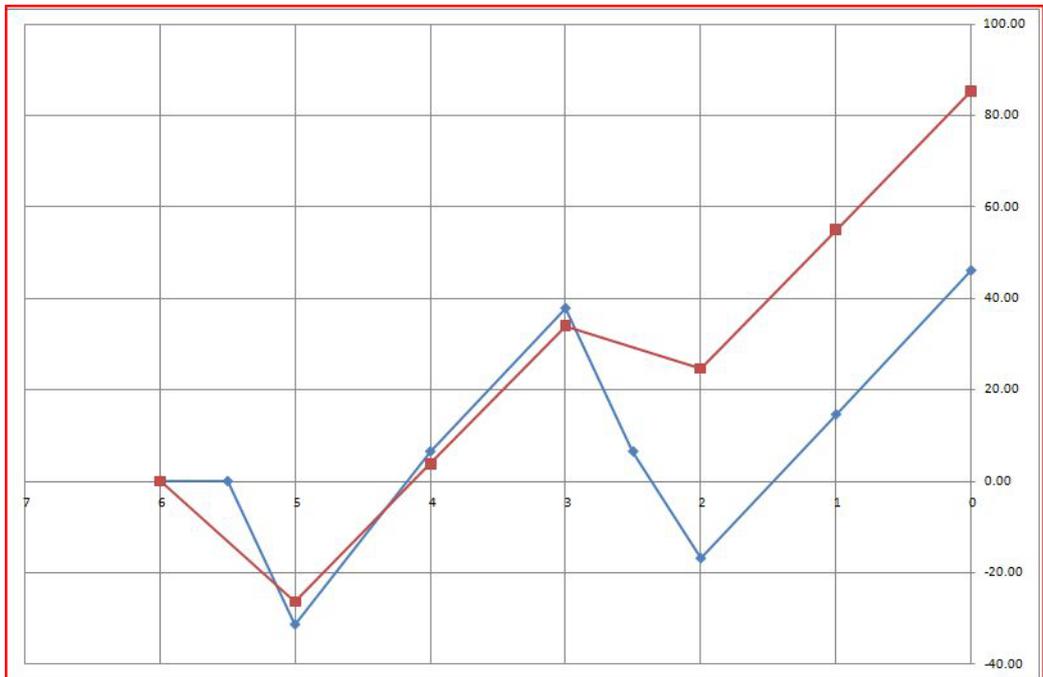
- Diagrammi del momento

Colonna esterna:



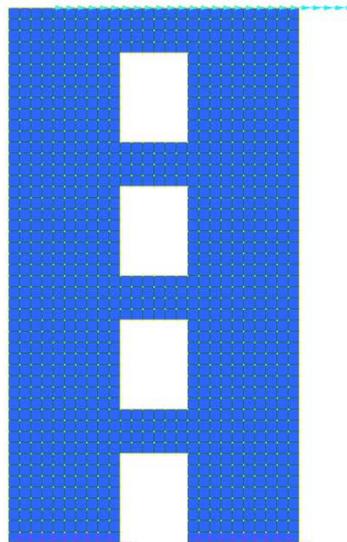
67

Colonna interna:



68

4.3.6 WALL 6

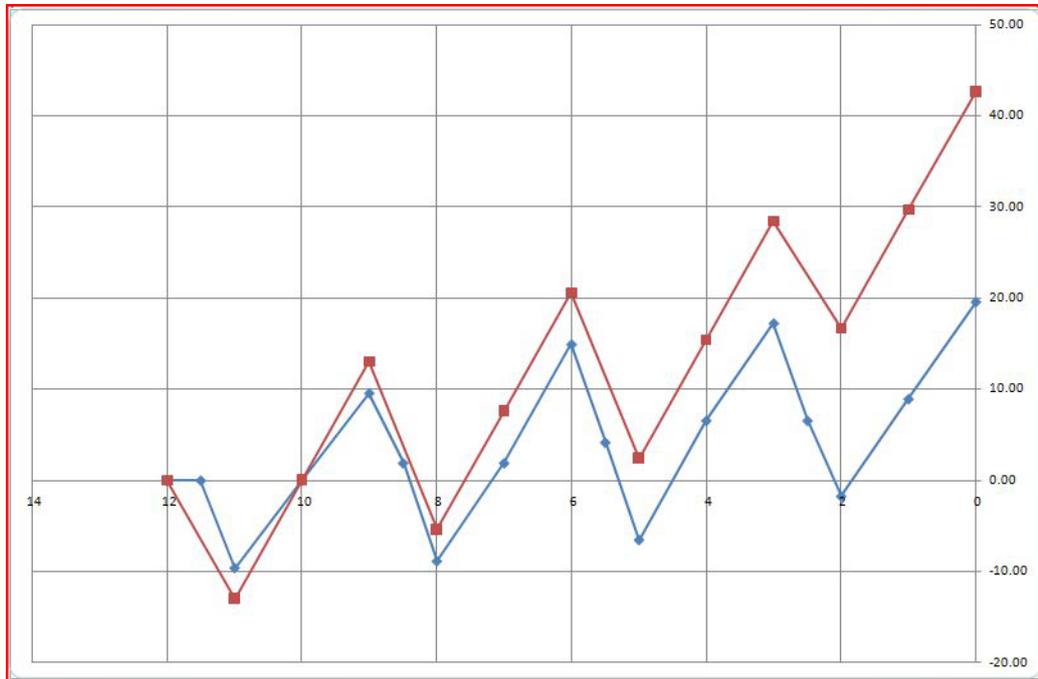


69



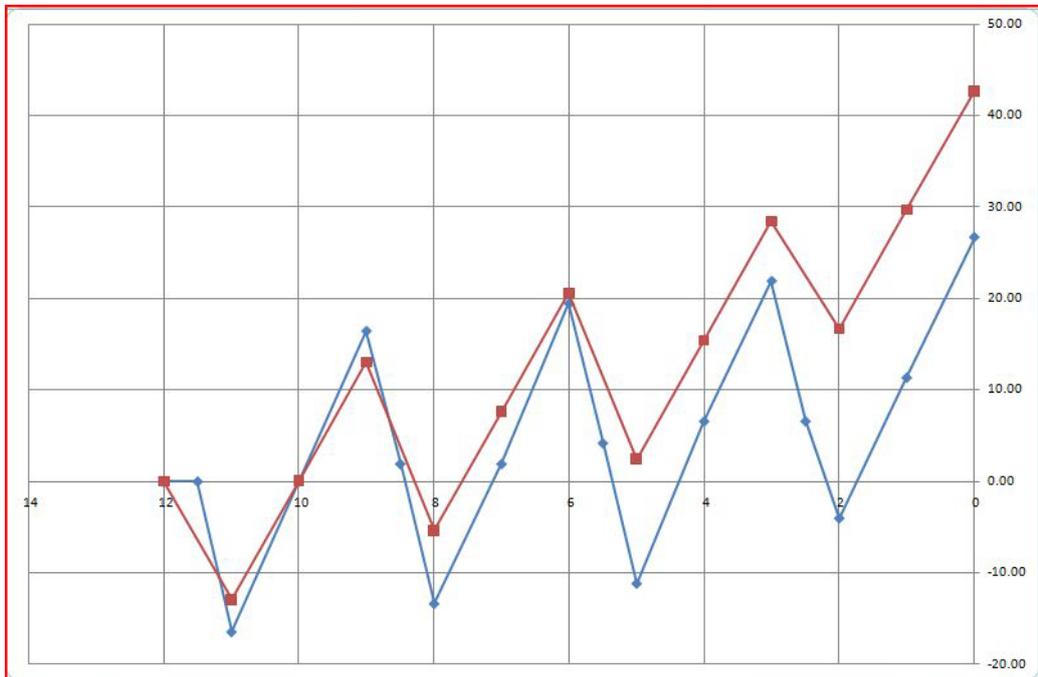
- Diagrammi del momento

Colonna esterna:



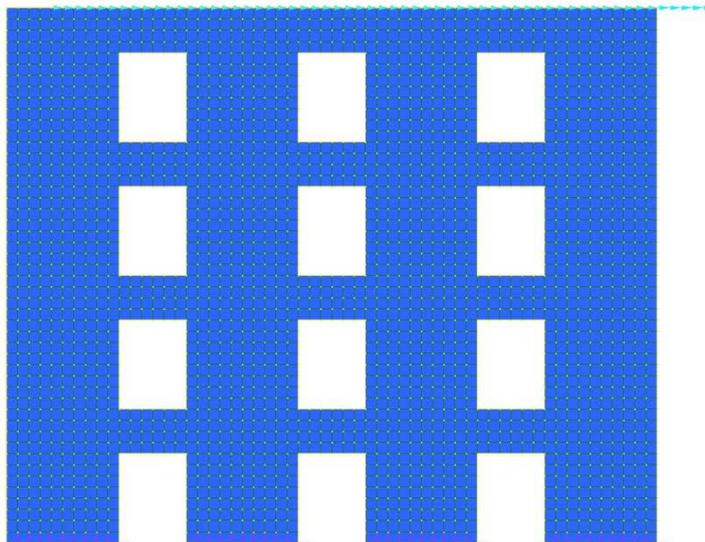
72

Colonna interna:



73

4.3.7 WALL 7

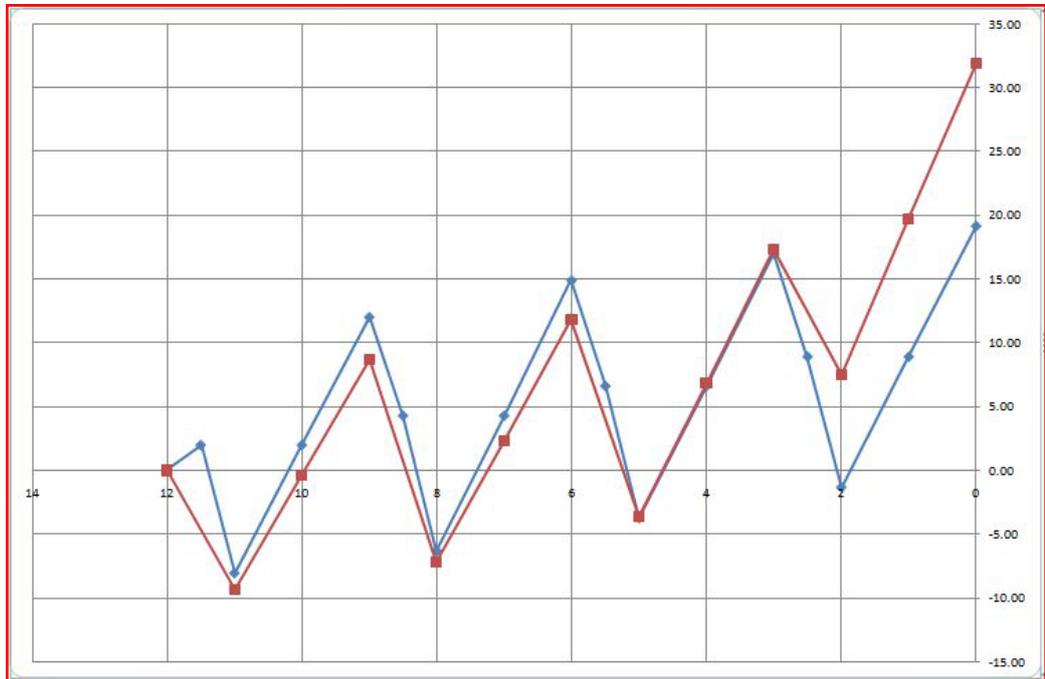


74



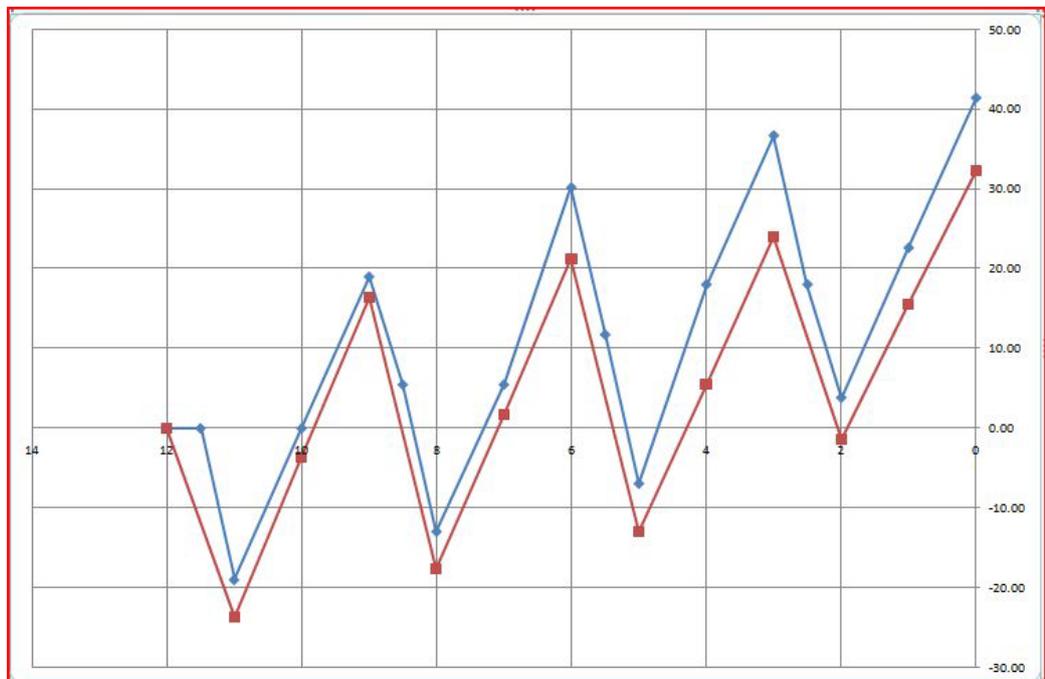
- Diagrammi del momento

Colonna esterna:



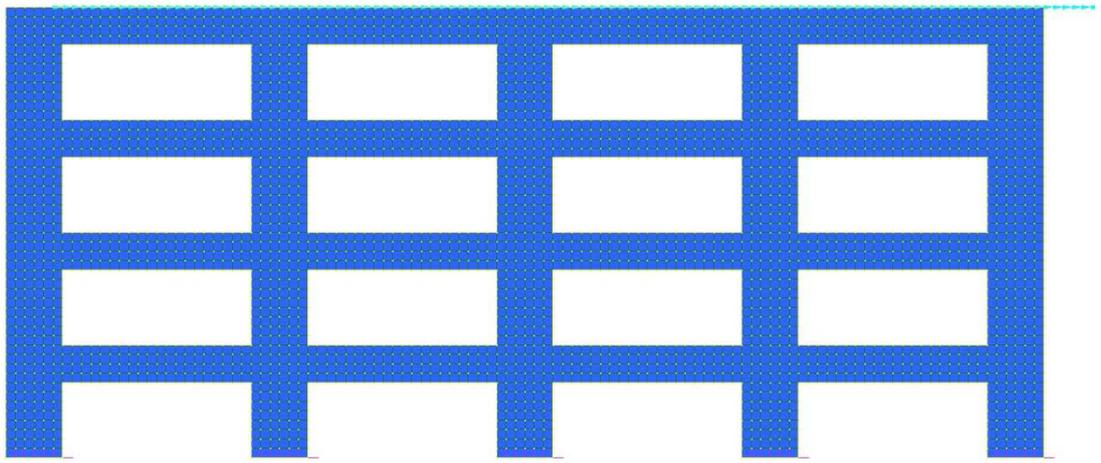
77

Colonna interna:



78

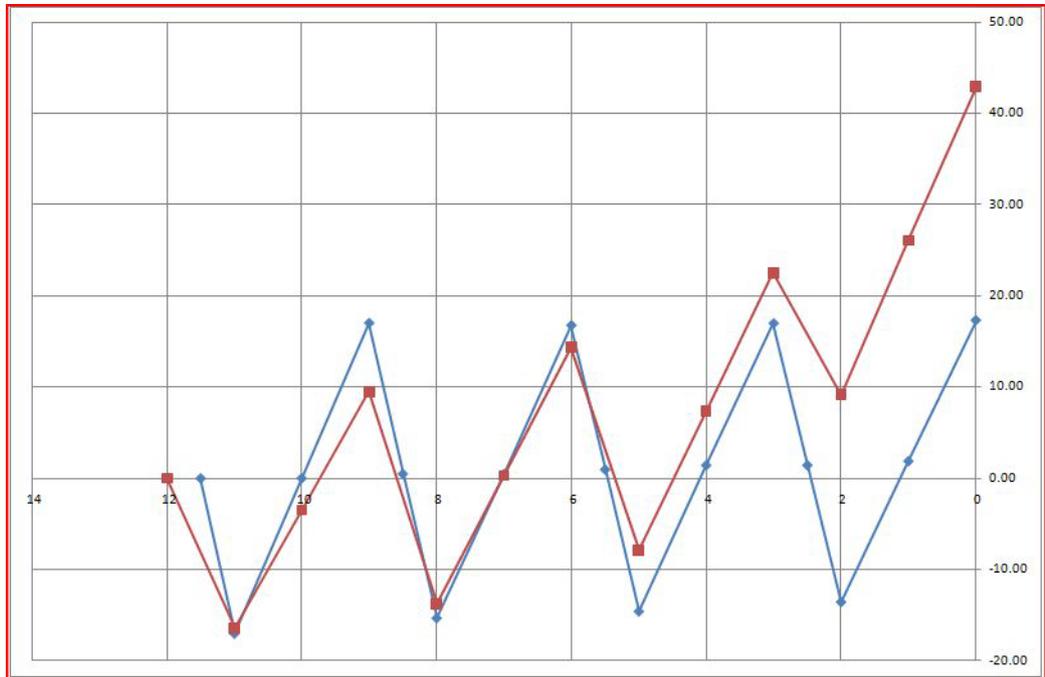
4.3.8 WALL 8



79

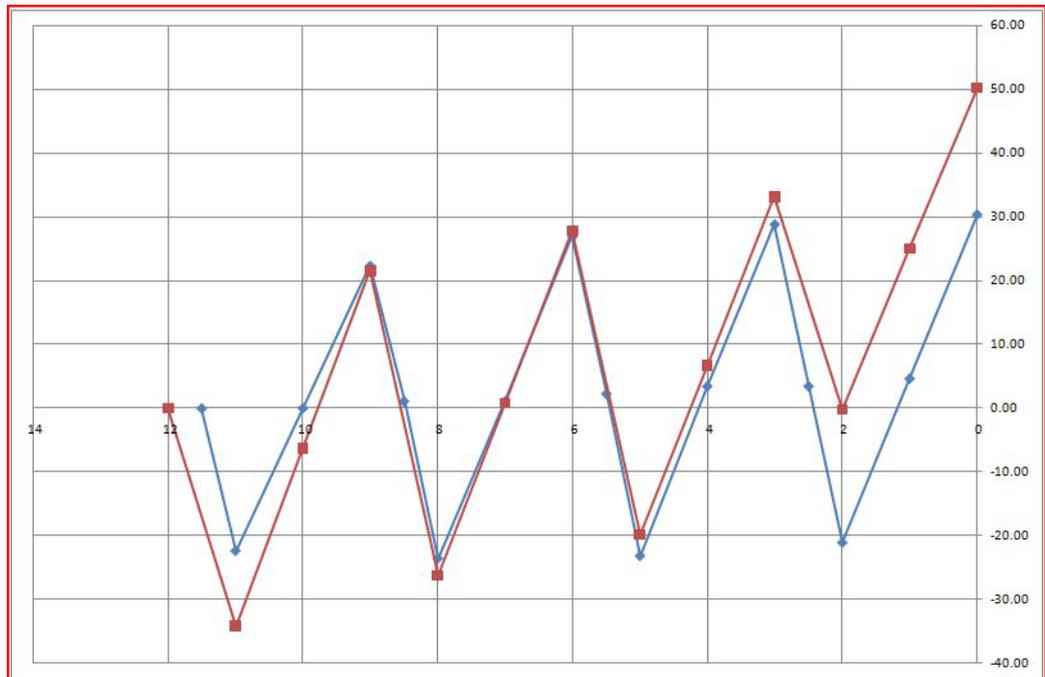
- Diagrammi del momento

Colonna esterna:



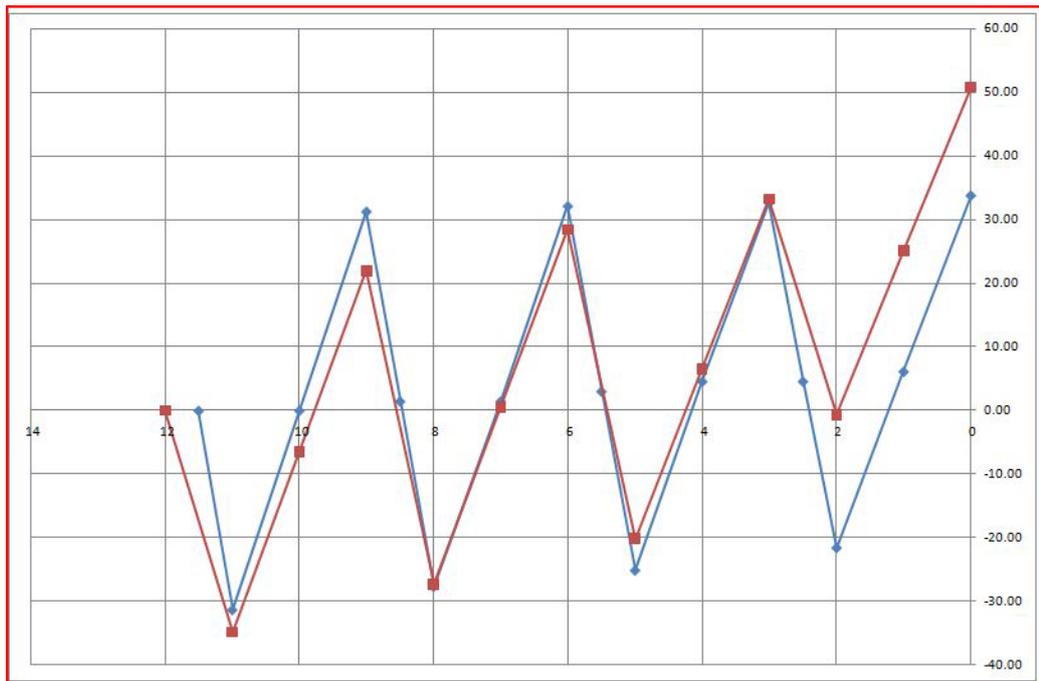
82

Colonna interna laterale:



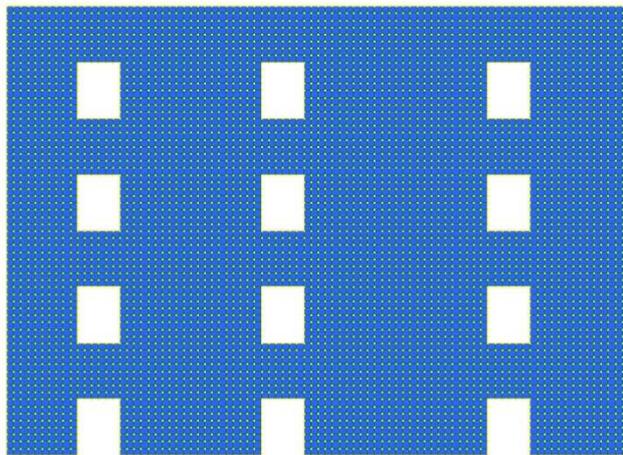
83

Colonna interna centrale:



84

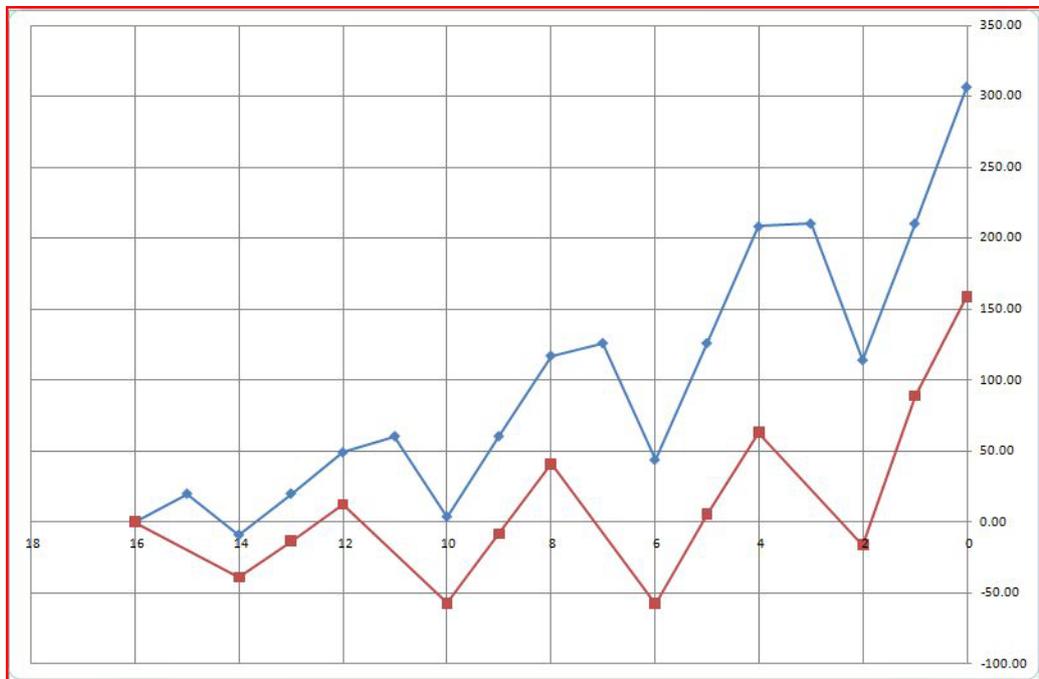
4.3.9 WALL 9



85

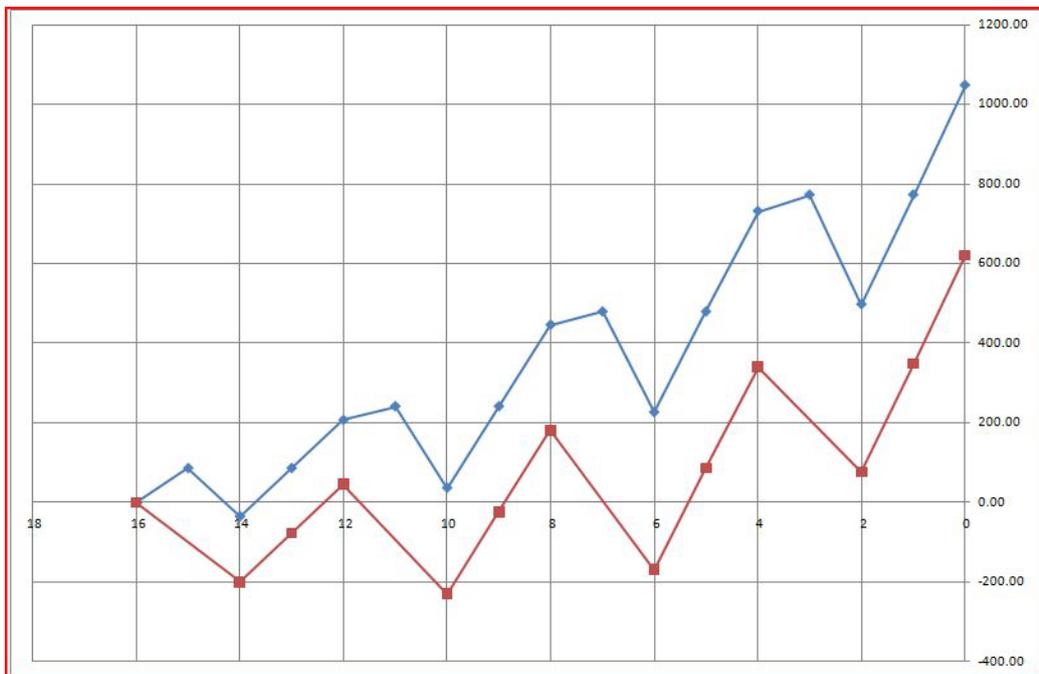
- Diagrammi del momento

Colonna esterna di sinistra:



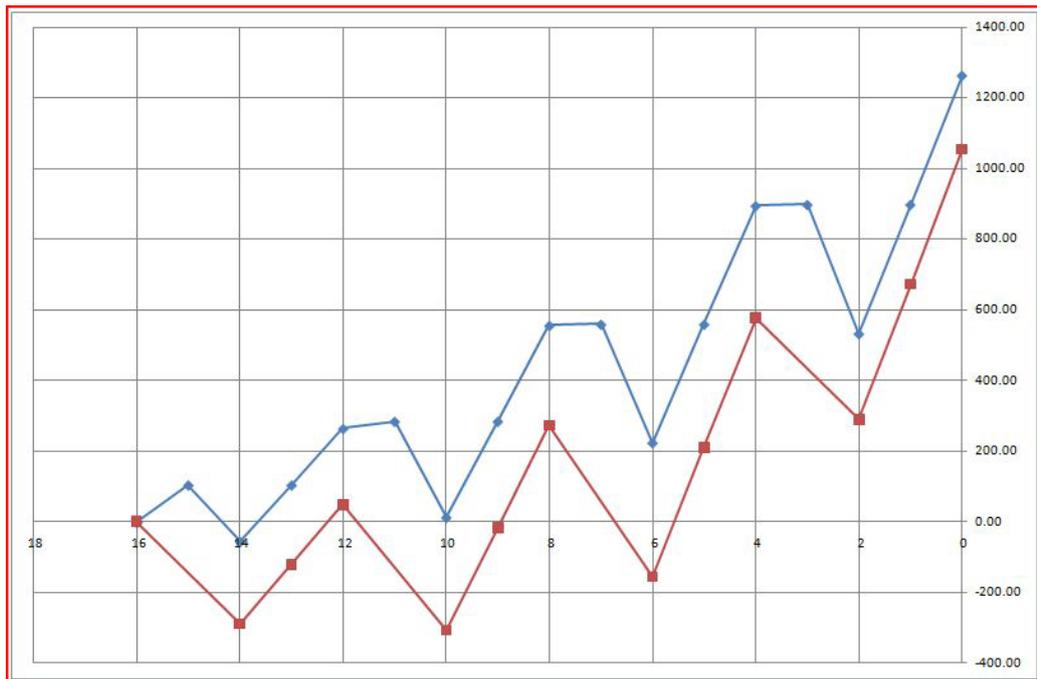
88

Colonna interna di sinistra:



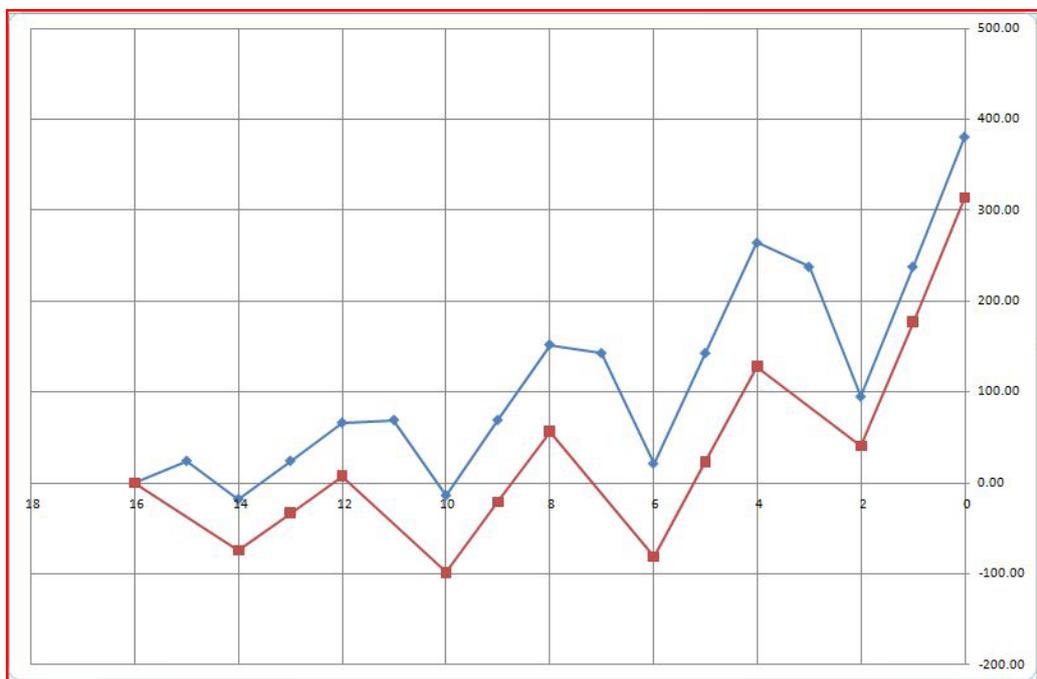
89

Colonna Interna di destra:



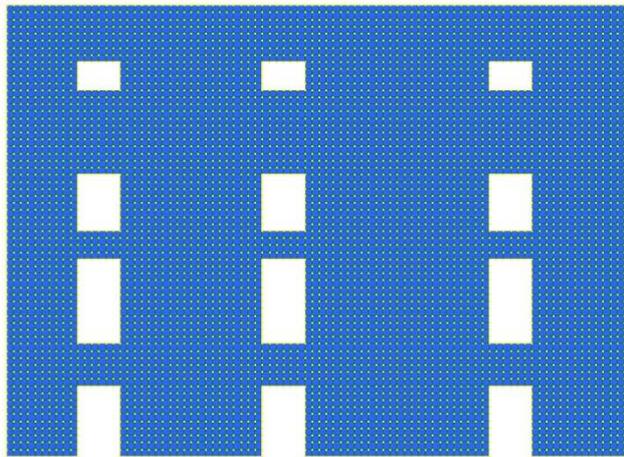
90

Colonna Interna di destra:



91

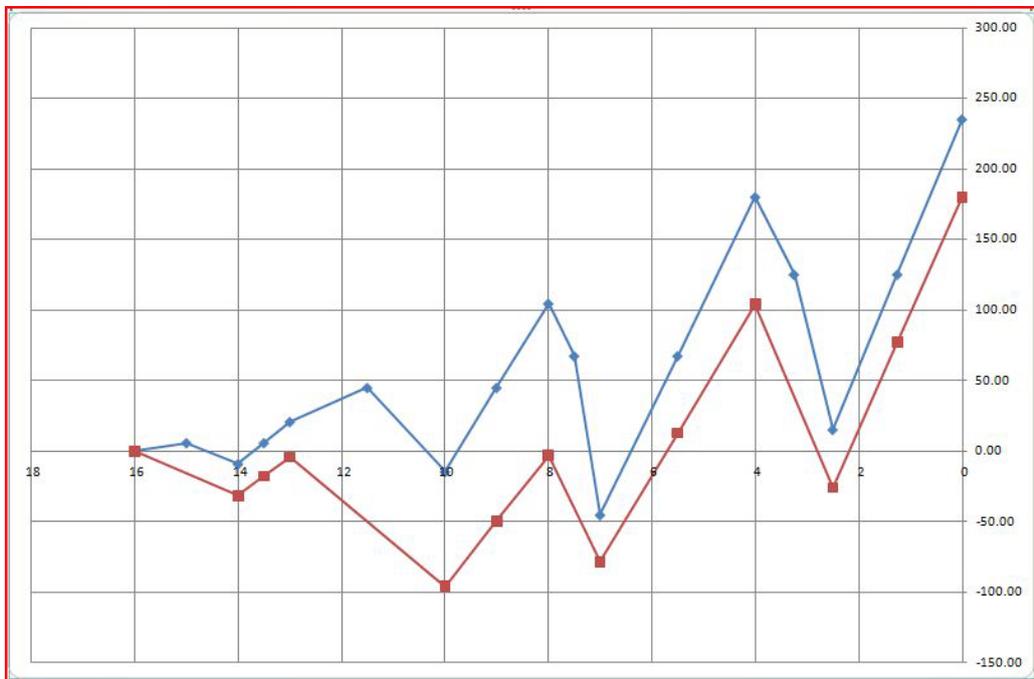
4.3.10 WALL 10



92

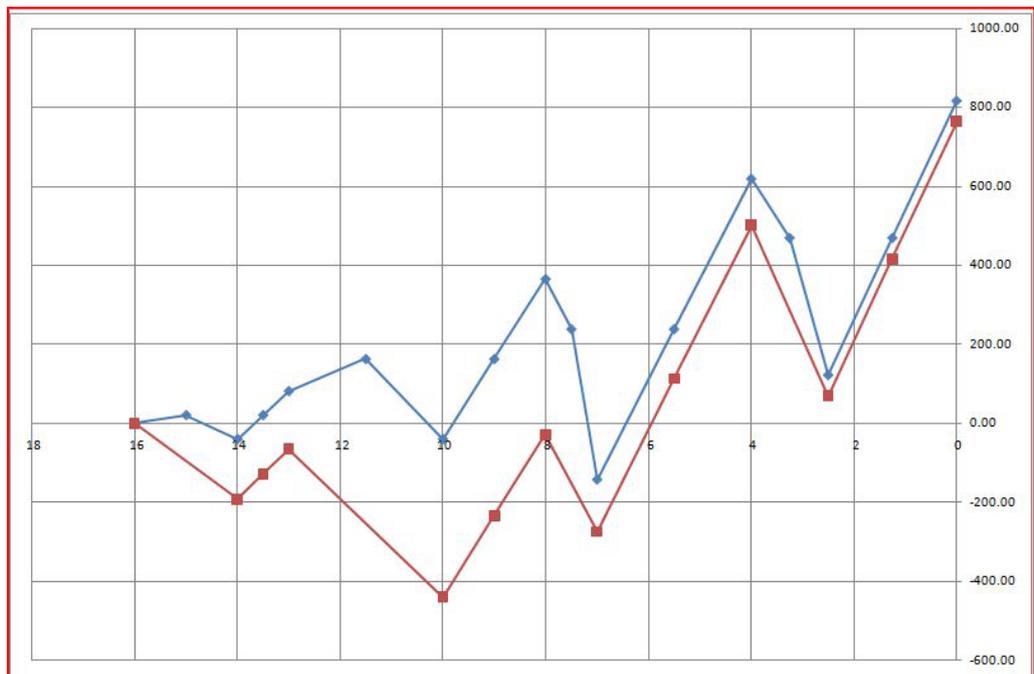
- Diagrammi del momento

Colonna esterna di sinistra:



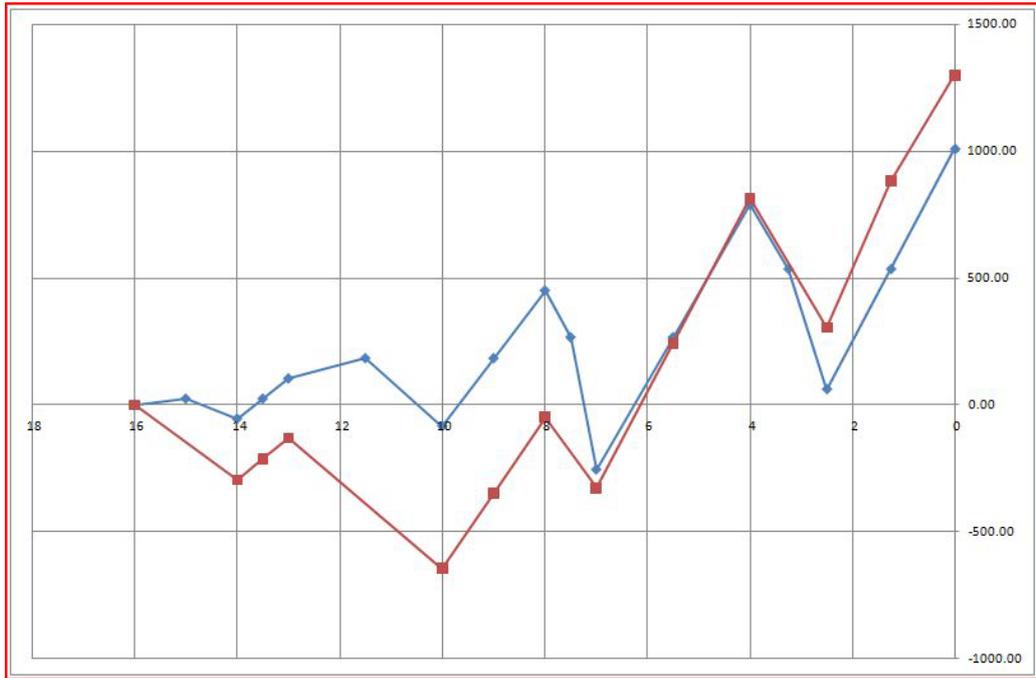
95

Colonna interna di sinistra:



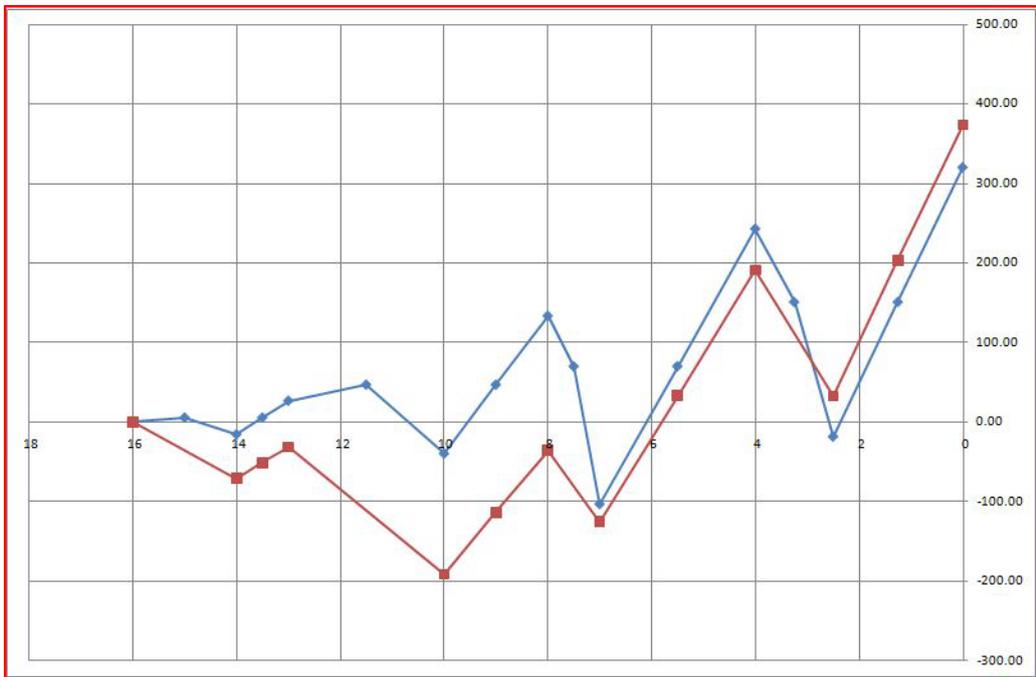
96

Colonna Interna di destra:



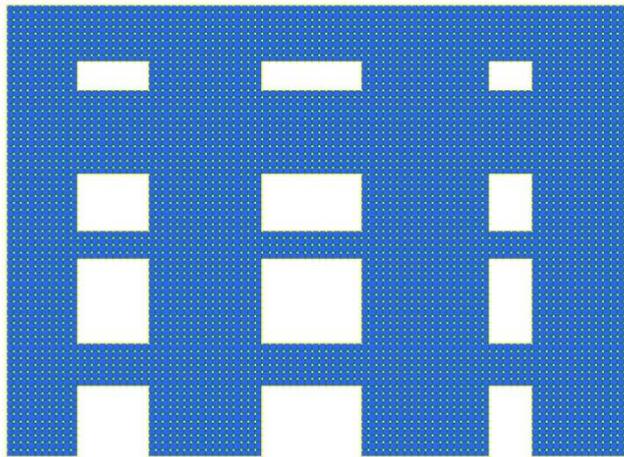
97

Colonna Interna di destra:



98

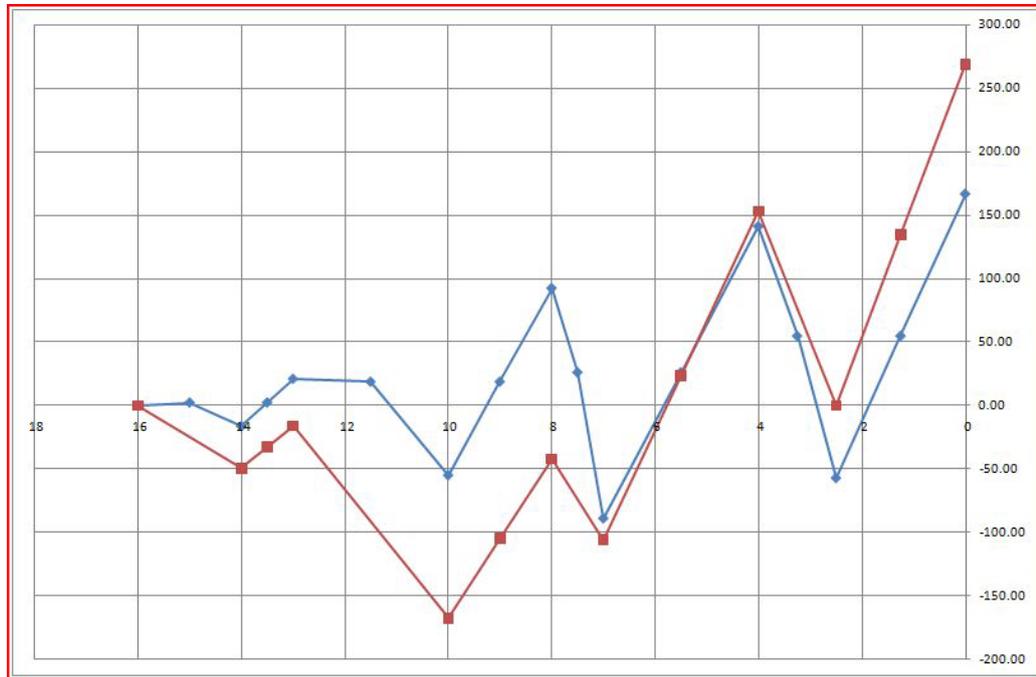
4.3.11 WALL 11



99

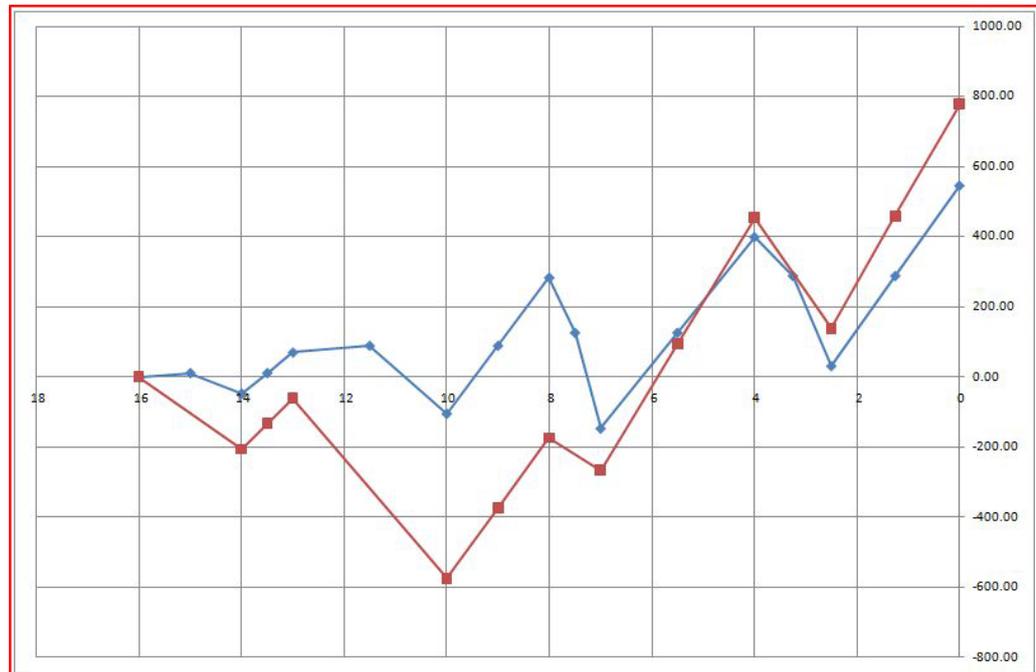
- Diagrammi del momento

Colonna esterna di sinistra:



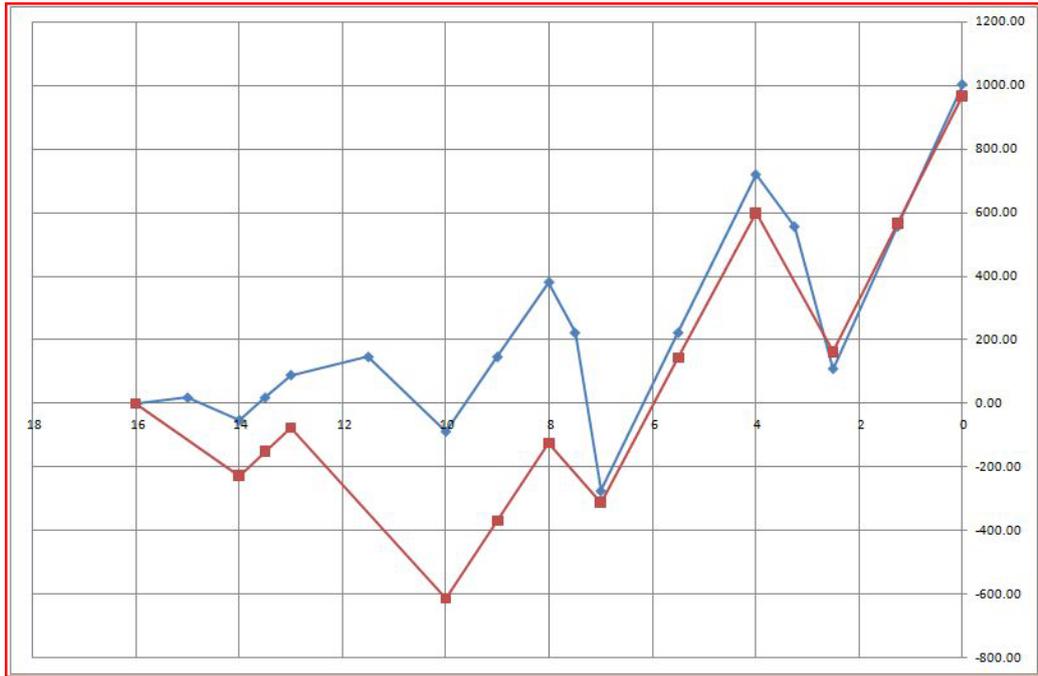
102

Colonna interna di sinistra:



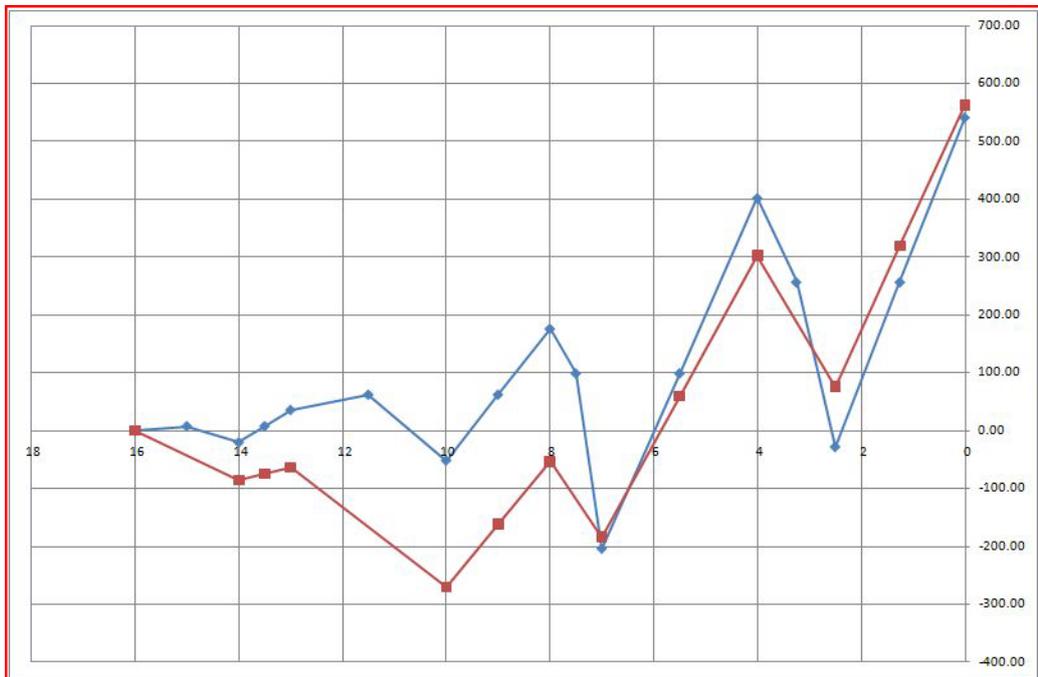
103

Colonna Interna di destra:



104

Colonna Interna di destra:



105

5 CONCLUSIONI

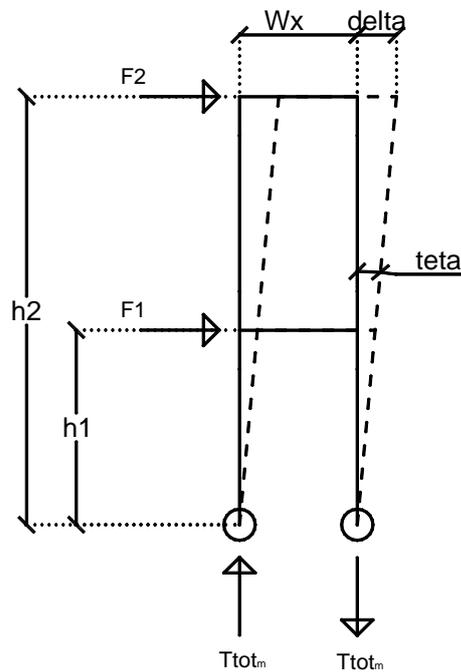
Il metodo semplificato si comporta bene se la struttura è regolare e se non presenta un elevato numero di piani, essendo stato testato con successo su strutture fino ai 5 piani di altezza. Stessa cosa non può dirsi quando la parete presenta forti irregolarità, dovute a variazioni delle aperture e dei traversi. Già variando solamente la dimensione delle colonne, il grafico del momento che si ottiene subisce una sorta di traslazione rispetto al diagramma reale. Probabilmente agendo sulla curvatura χ nella rigidezza degli spezzoni di colonna, oppure modificando lo schema statico nel calcolo delle reazioni di taglio dei traversi, sarà possibile migliorare i risultati. Pareti irregolari presentano, quindi, un diagramma del momento che ai piani alti trasla, fornendo risultati fuorvianti mentre ai piani bassi mostra risultati più accettabili.

Ricordiamo che il metodo si pone come mezzo semplificato per cui, può essere utilizzato per valutare in fase preliminare se sia necessario applicare uno o più rinforzi alla struttura e a grandi linee, individuare l'area utile di rinforzo. In fase esecutiva è necessario fornire un calcolo esaustivo per mezzo del calcolatore e software agli elementi finiti.

In ultima analisi, abbiamo studiato una variante a questo metodo. Esso consiste nel schematizzare i maschi della parete come spezzoni di colonna in serie, vincolati secondo quanto detto nel cap.4, mentre per i traversi considerarli come telaio di traversi e quindi applicare quanto detto nel cap.3.

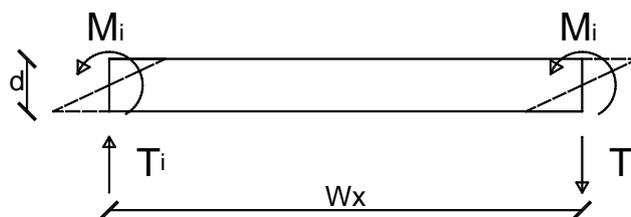
Abbiamo così provato un' unione tra i due metodi precedenti in quanto, il primo metodo non valutava bene le reazioni di taglio date dalle colonne se non veniva definito a priori (ma incognito) il coefficiente *fact*, mentre il secondo valutava bene le reazioni di taglio nella colonne ma non altrettanto bene quelle sui traversi.

Utilizzando lo schema statico del telaio di traversi, ricaviamo la reazione di taglio Ti_m piano per piano tramite la seguente procedura:



106

$$\sum F_m \cdot h_m = T_{tot_m} \cdot Wx_n = \sum Ti_m \cdot Wx_n$$



107

$$\frac{2}{Wx_n} \cdot Mi = \vartheta \cdot R_m \cdot \frac{2}{Wx_n} = Ti_m$$

$$M_{tot} = \sum Mi = \vartheta \cdot \sum R_m$$

$$T_{tot_m} = \vartheta \cdot \frac{2}{Wx_n} \cdot \sum R_m$$

Da cui si ricava la reazione di taglio sull' i -esimo traverso del telaio di traversi come:

$$Ti_m = Ttot_m \cdot \frac{R_m}{\sum R_m}$$

La sommatoria di rigidezze include la rigidezza di tutte le colonne (spezzoni di colonna in serie) e di tutti i traversi costituenti gli n telai di traversi.

La rigidezza R_m , del m -esimo traverso di lunghezza Wx_n per piano m , è la rigidezza flessionale di trave appoggio – appoggio con doppia coppia e quindi è pari a:

$$R_m = \frac{1}{\frac{Wx_n}{6 \cdot E \cdot J_t} + \frac{\chi \cdot Wx_n}{G \cdot A}}$$

considerando anche il contributo tagliante.

I risultati delle reazioni di taglio scaturiti con questo schema forniscono valori minori di quelli che avevamo ottenuto con lo schema di fig.34 ma ancora troppo elevati rispetto a quelli dello schema di fig.35, per cui, in proporzione, i valori di momento saranno ancora elevati e quindi distanti dai valori reali ricavati con il modello FEM. Probabilmente, modificando la rigidezza R_m , si potranno ottenere risultati migliori ma ciò che rende difficile l'applicazione del telaio di traversi in questo caso risiede nel fatto che, la parete, rispetto ai casi del primo metodo, è irregolare e quindi i traversi del telaio variano il loro spessore sebbene mantengano la lunghezza costante pari a Wx_n .

Appurato quindi che il metodo migliore rimane il secondo, definito nei paragrafi 4.1 e 4.2, vediamo ora come applicare il tutto ad un caso reale e in particolare come dai risultati forniti si possa dimensionare un elemento resistente in FRP.

6 VERIFICHE

L'ultimo capito riguarda l'attuazione di quanto visto finora in casi pratici. Infatti, note le azioni di piano calcolate secondo la procedura esposta nel cap.4, si può eseguire il programma in Excel 2007 contenente al suo interno quanto esposto fin'ora a livello teorico, ricavando così i diagrammi sollecitanti. Tali diagrammi li confronteremo con il diagramma resistente dato dalle sole forze verticali comprendenti anche il peso proprio dell'intera parete.

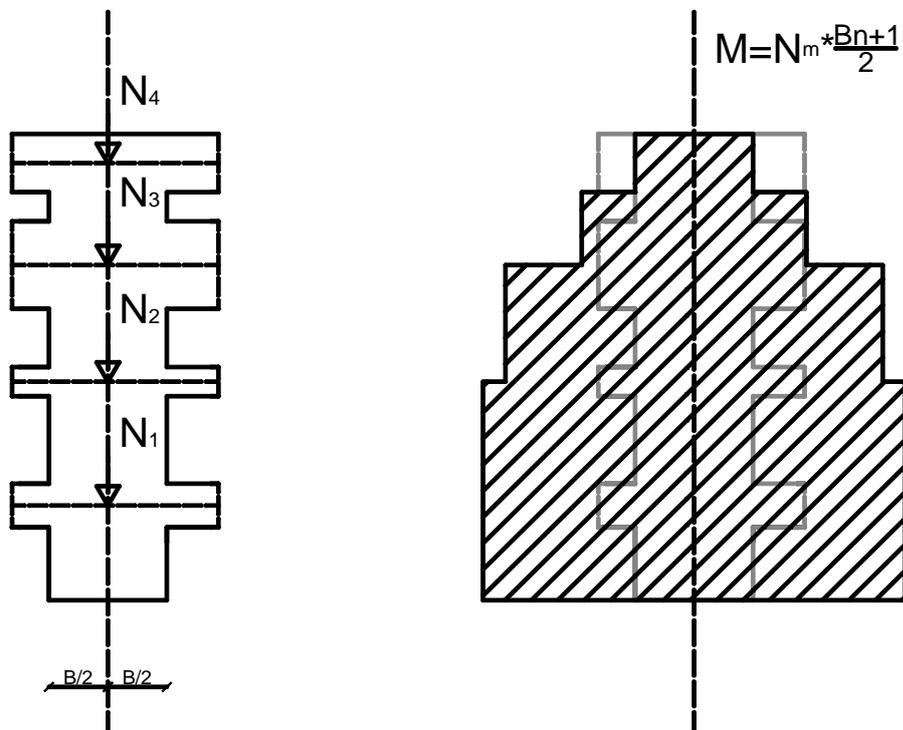
Nei punti della colonna in cui il diagramma sollecitante supera il diagramma resistente otterremo un valore di ΔM come differenza tra i due momenti in quel punto. Useremo quindi questo ΔM per il progetto del rinforzo in FRP secondo alcune formule empiriche fornite dal CNR.

Naturalmente devono essere garantite le seguenti ipotesi fondamentali affinché possano applicarsi i criteri di progettazione del CNR:

- perfetta aderenza tra muratura e FRP;
- incapacità della muratura di resistere a sforzi di trazione;
- incapacità della fibra di resistere a sforzi di compressione;
- legame costitutivo della fibra elastico lineare fino a rottura;

6.1 CALCOLO DEL DIAGRAMMA RESISTENTE

Nota il peso specifico della muratura, possiamo calcolare velocemente il peso proprio della struttura, moltiplicandolo per il volume occupato epurato dalle aperture. Analogamente, possiamo calcolare il peso proprio del singolo piano per l'*m*-esima colonna considerando il volume dato dagli spezzoni di traverso e gli spezzoni di colonna superiori al piano di riferimento in quanto elementi gravanti sul piano. A questo carico possiamo aggiungere un eventuale sforzo assiale dato dal carico di servizio opportunamente ripartito sulla superficie in modo da ottenere un carico puntuale applicato sull'asse di simmetria della colonna. Volendo graficare questa sollecitazione, comprensiva di entrambi i contributi, possiamo moltiplicarla per metà della base della colonna. In questo modo otteniamo un diagramma simile a quello visto per le reazioni di taglio dei traversi ma simmetrico rispetto l'asse verticale della colonna come mostrato in fig.108.



6.2 PROGETTO DEL RINFORZO IN FRP

Individuati i punti in cui il momento sollecitante, calcolato al paragrafo 4.2.4, supera il momento resistente, calcolato nel paragrafo precedente, è sufficiente sottrarre tra loro i due valori di momento per ottenere il valore ΔM necessario alla progettazione del rinforzo.

Nota ΔM si calcola l'area del rinforzo in FRP tramite la formula:

$$A_f = \frac{\Delta M}{f_{fdd2} \cdot 0.9 \cdot H}$$

Dove:

- f_{fdd2} è la resistenza allo stato limite ultimo per delaminazione intermedia del FRP, ovvero a seguito di fessurazione dell'elemento (in questo caso malta – mattone) e definita come:

$$f_{fdd2} = 3 \cdot f_{fdd}$$
$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{fd} \cdot \sqrt{\gamma_M}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_f \cdot \Gamma_{Fk}}{t_f}}$$

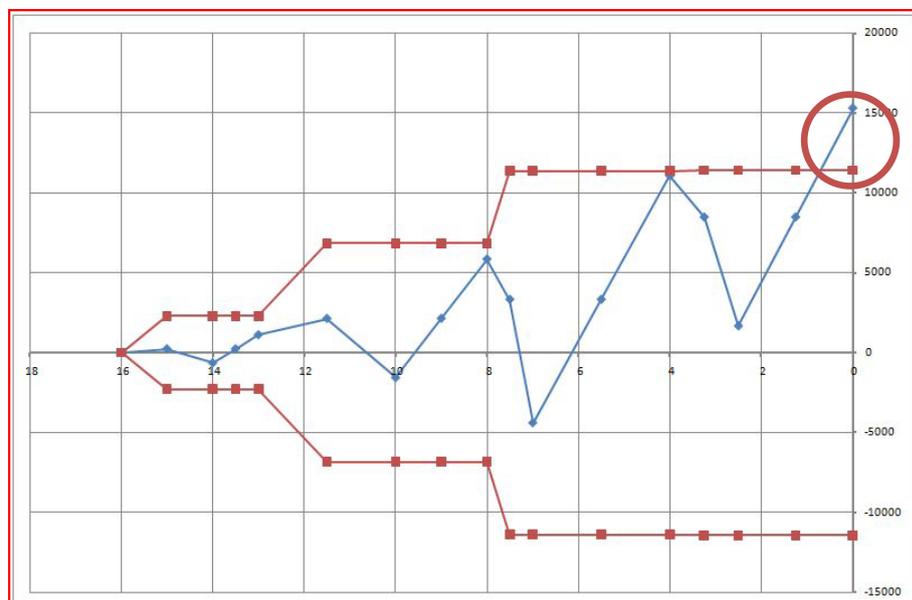
Essendo:

- γ_{fd} il coefficiente parziale per l'FRP di valore 1.20 o 1.50 a seconda che il rinforzo sia certificato secondo quanto espresso dal cap.2 del documento *CNR-DT 200/2004*;
- γ_M il coefficiente parziale per la muratura;
- E_f modulo di elasticità normale del rinforzo;
- t_f lo spessore del rinforzo;
- Γ_{Fk} l'energia specifica di frattura pari a: $\Gamma_{Fk} = 0.015 \cdot \sqrt{f_{mk} \cdot f_{mtm}}$ (dove f_{mk} è la resistenza caratteristica a compressione della muratura in direzione orizzontale e $f_{mtm} = 0.10 f_{mk}$ resistenza media a trazione della muratura);

- H è l'altezza dell'interpiano per cui $M_{Sd} > M_{Rd}$;

Quest'area va infine divisa per due in quanto il rinforzo viene applicato longitudinalmente sulla colonna sia davanti che dietro ad essa, per maggiore sicurezza. Così facendo agisce su entrambe le facce dell'elemento evitando eventuali effetti torsionali locali sul maschio murario.

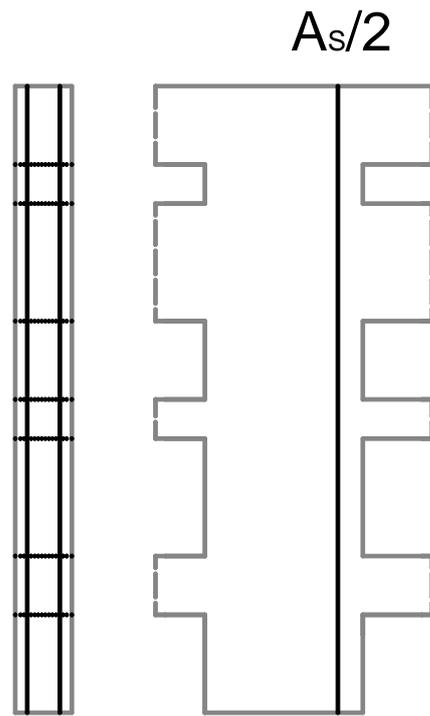
Di seguito, mostriamo un esempio applicato al foglio Excel dove, cerchiato in rosso, è evidenziata la differenza di momento ovvero il nostro ΔM :



109

I tratti inclinati del diagramma del momento resistente (grafico rosso) in realtà, devono essere rettilinei e collegare con un salto i due valori di momento al cambio di piano. Questa loro inclinazione dipende solo dalla modalità di tracciamento del diagramma tramite Excel, perciò per ricavare visivamente la differenza di momento ΔM , basta considerare che, al cambio di pendenza corrisponde già il valore di momento superiore che si ha al piano inferiore.

Infine, la coppia di barre viene applicata come descritto precedentemente:



110

ovvero dimezzata, in modo da disporre una metà davanti alla facciata (opportunamente occultata) e l'altra metà dietro a quest'ultima.

7 BIBLIOGRAFIA

- CNR-DT 200/2004. *Istruzioni per la progettazione, l'esecuzione ed il controllo di interventi di consolidamento statico mediante utilizzo di compositi fibrorinforzati (cap.5 strutture murarie)*. Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2004
- NTC 2008. *Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni (cap.7 Progettazione per azioni sismiche)*. Decreto Ministeriale, 14 Gennaio 2008
- Capurso M. *Introduzione al Calcolo Automatico delle Strutture*. Zanichelli, 1977.
- Viola E. *Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni Vol.2*. Pitagora Editore, 1985.
- Regione Basilicata, Regione Emilia Romagna. *Costruzioni in Conglomerato Cementizio Armato in Zona Sismica*. 1983