Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

I CAMMINI DI DYCK

Tesi di Laurea in Teoria dei Numeri

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
Marilena Barnabei

Presentata da:
Giulia Zaccarelli

Sessione Unica
Anno Accademico 2015-2016

Introduzione

In questa tesi è stata studiata una particolare classe di oggetti combinatori: i cammini di Dyck.
Verrà definito il polinomio di enumerazione di un cammino e poi la sua funzione generatrice, che sarà utile a studiare i cammini attraverso diverse tipologie di parametri, per contare quanti saranno i cammini di una certa lunghezza e con un determinato valore di parametro.
Si introdurrà infine anche l'equidistribuzione, per studiare parametri con caratteristiche simili.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Definizioni

Un *cammino di Dyck* di *semilunghezza* n è un cammino nel primo quadrante del piano cartesiano che ha come punto iniziale l'origine degli assi e come punto finale il punto dell'asse x di coordinate $(2n, 0)$, costruito da segmenti di due tipi: segmenti di estremi $(a, b), (a + 1, b + 1)$ (passi in su, indicati con la lettera u) e segmenti di estremi $(a, b), (a + 1, b - 1)$ (passi in giù, indicati con la lettera d).

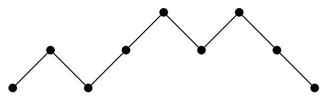


Figura 1.1: Un cammino di Dyck

Si possono definire le *parole di Dyck*: esse sono stringhe formate dalle lettere u e d, con il numero di u uguale al numero di d, quindi, se la parola è lunga $2n$, sia il numero di u che il numero di d sarà uguale ad n. Esse sono tali che, se prese le sottoparole costituite dalle prime i lettere della parola, con $i = 1, ..., 2n$, esse dovranno sempre possedere un numero di u maggiore o uguale al numero di d. Le parole di Dyck sono naturalmente in corrispondenza biunivoca con i cammini di Dyck: la lettera u rappresenta le salite e la d le discese; la condizione sulle sottoparole corrisponde alla caratteristica dei cammini di Dyck di non scendere mai sotto il livello dell'asse x.
Ad esempio, il cammino di Dyck nella figura corrisponde alla parola di Dyck *uduududd*.

Un passo del cammino con estremi di ordinate $k - 1$ e k, con $k \geq 1$, si dice essere a *livello k*. Allo stesso modo, se un punto ha ordinata k allora si

dice a *livello* k.
Un *picco* è dato dalla sequenza dei due passi ud, una *valle* da du, una *doppia salita* da uu. Il *livello* di un picco o una valle è il livello del punto di incontro dei suoi due passi.
Un *passo di ritorno* è un passo d che parte dal livello 1. Cammini con un solo passo di ritorno sono chiamati *primitivi* (o sopraelevati).
Una *ascesa/discesa* è una stringa massimale composta soltanto da u / da d, e la sua lunghezza è data dal numero di passi che la costituiscono.
Una *discesa di ritorno* è una discesa che termina con un passo di ritorno.
ϵ rappresenta il cammino vuoto, cioè un punto.

Ad esempio, la parola di Dyck *uuduudddud* rappresenta un cammino di Dyck che possiede tre picchi, due valli, due passi di ritorno, due doppie salite:

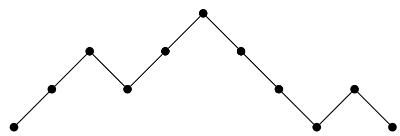
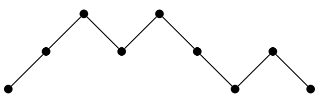
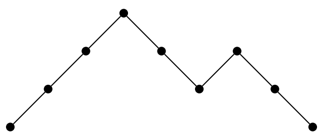


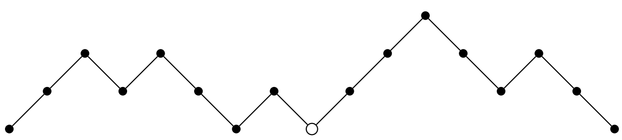
Figura 1.2: Il cammino *uuduudddud*

Se α e β sono cammini di Dyck, si possono definire: $\alpha\beta$, cioè la *concatenazione* di α e β, e $\hat{\alpha} = u\alpha d$, cioè l'*elevazione* di α.
Si può notare che, preso un cammino α di semilunghezza n, a seguito dell'elevazione, $\hat{\alpha}$ sarà di semilunghezza $n+1$, in quanto sono stati aggiunti due passi al cammino, cioè u e d.

Se si considerano i cammini:

$\alpha =$  $\beta =$ 

la loro concatenazione sarà:

$\alpha\beta =$ 

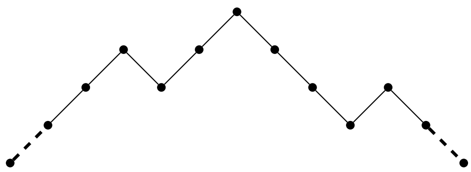


Figura 1.3: Elevazione del cammino *uuduudddud*

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono insiemi di cammini di Dyck finiti, si possono allo stesso modo definire la *concatenazione* di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, cioè

$$\mathbf{AB} = \{\alpha\beta : \alpha \in \mathbf{A}, \beta \in \mathbf{B}\}$$

e l'*elevazione* di $\mathbf{A}$, cioè

$$\hat{\mathbf{A}} = \{\hat{\alpha} : \alpha \in \mathbf{A}\}.$$

Ovviamente, $\mathbf{A}\{\epsilon\} = \{\epsilon\}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Capitolo 2

Decomposizione

Qualsiasi cammino di Dyck $\alpha \neq \epsilon$ ha una decomposizione unica di questo tipo:

$$\alpha = u\beta_1 d\gamma_1 = \hat{\beta}_1\gamma_1, \tag{2.1}$$

con β_1 e γ_1 che possono essere anche vuoti.
Questa viene detta *decomposizione del primo ritorno*, in quanto il passo d presente in essa è proprio il primo passo di ritorno del cammino.

Ad esempio, si può provare a scomporre il cammino di un esempio fatto precedentemente, rappresentato dalla parola di Dyck $\alpha = uuduudddud$: esso si decompone in $u\beta_1 d\gamma_1$, con $\beta_1 = uduudd$ e $\gamma_1 = ud$.

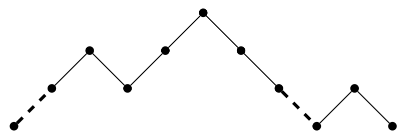


Figura 2.1: Decomposizione del primo ritorno di *uuduudddud*

Invece, se per esempio si prende $\alpha = uudd$, si decomporrà in $u\beta_1 d\gamma_1$, con $\beta_1 = ud$ e $\gamma_1 = \epsilon$.
In quest ultimo caso, il cammino è detto *irriducibile* o *elevato*, che significa che possiede un unico passo di ritorno: quello finale. Si può sempre scomporre un cammino non irriducibile in cammini irriducibili.

Una maniera alternativa (anch'essa unica) di scrivere la decomposizione è la seguente:

$$\alpha = \beta_2 u\gamma_2 d = \beta_2\hat{\gamma}_2, \tag{2.2}$$

con β_2 e γ_2 che possono essere anche vuoti.

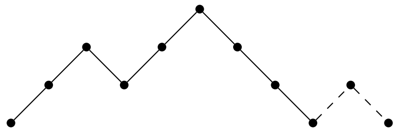


Figura 2.2: Scomposizione di *uuduudddud* in cammini irriducibili

2.1 n-cammini di Dyck

Si indica con $\mathbf{D_n}$ l'insieme di tutti i cammini di Dyck di semilunghezza n.
$\mathbf{D_0} = \{\epsilon\}$.

Ad esempio, per $n = 2$:

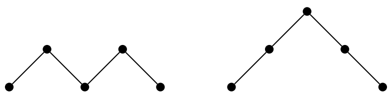


Figura 2.3: I due cammini di semilunghezza 2

Invece, per $n = 3$:

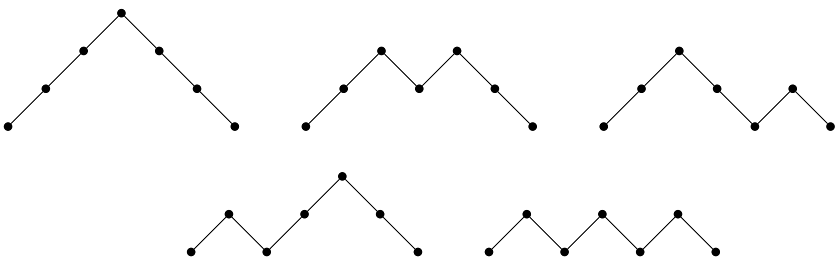


Figura 2.4: I cinque cammini di semilunghezza 3

Si indica con $\hat{\mathbf{D}}_n$ l'insieme di cammini ottenuti elevando tutti quelli di $\mathbf{D}_n$: avranno dunque semilunghezza $n+1$, e varrà $|\mathbf{D_i}| = |\hat{\mathbf{D}}_\mathbf{i}|$.

(2.1) e (2.2) hanno come conseguenze equivalenti:

$$\mathbf{D}_n = \hat{\mathbf{D}}_0\mathbf{D}_{n-1} \cup \hat{\mathbf{D}}_1\mathbf{D}_{n-2} \cup ... \cup \hat{\mathbf{D}}_{n-2}\mathbf{D}_1 \cup \hat{\mathbf{D}}_{n-1}\mathbf{D}_0, \quad n \geq 1 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_0\hat{\mathbf{D}}_{n-1} \cup \mathbf{D}_1\hat{\mathbf{D}}_{n-2} \cup \mathbf{...} \cup \mathbf{D}_{n-2}\hat{\mathbf{D}}_1 \cup \mathbf{D}_{n-1}\hat{\mathbf{D}}_0, \quad n \geq 1 \tag{2.4}$$

Qui le unioni sono disgiunte e $|\mathbf{D_i}| = |\hat{\mathbf{D_i}}|$, dunque:

$$|\mathbf{D}_n| = |\mathbf{D}_0||\mathbf{D}_{n-1}| + |\mathbf{D}_1||\mathbf{D}_{n-2}| + ... + |\mathbf{D}_{n-1}||\mathbf{D}_0|. \tag{2.5}$$

Verrà affrontato di seguito l'argomento dei numeri di Catalan, strettamente connessi con il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n.

La funzione e i numeri di Catalan

Si definisce l'*n-esimo numero di Catalan* C_n come il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n, cioè $C_n = |\mathbf{D}_n| \quad \forall n \geq 0$. Dunque, per la (2.5), vale la formula ricorsiva:

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}. \tag{2.6}$$

La funzione generatrice per la successione dei numeri di Catalan è la seguente serie formale:

$$C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n,$$

ed è chiamata *funzione di Catalan*. La sua versione implicita si può scrivere in questo modo:

$$zC^2 - C + 1 = 0, \quad C(0) = 1. \tag{2.7}$$

Si può dimostrare l'equivalenza tra (2.7) e (2.6) sostituendo semplicemente in (2.7) l'espressione generica di una serie formale:

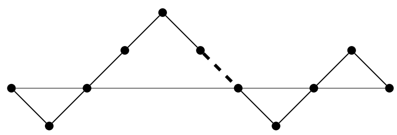
$$z(C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + ...)^2 - (C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + ...) + 1 = 0.$$

Si giunge così ad una identità di serie formali, da cui si può ricavare la formula ricorsiva (2.6). Il viceversa è analogo.
Di conseguenza, la versione esplicita della funzione di Catalan sarà:

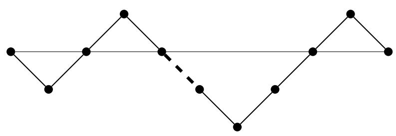
$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}. \tag{2.8}$$

Si può inoltre ottenere una formula esplicita per l'n-esimo numero di Catalan. Si considerino tutti i possibili cammini di semilunghezza n, costituiti da passi u e d, con punto di partenza l'origine e punto di arrivo $(2n, 0)$. Essi sono in totale $\binom{2n}{n}$, perchè per identificarne uno basta scegliere dove posizionare, per esempio, i passi u. Per un cammino di tale tipo, l'*eccedenza* è per definizione il numero di passi u che si trovano al di sopra dell'asse x. Naturalmente, i cammini di Dyck saranno quelli con eccedenza uguale ad n. Si può costruire una funzione F che associ a un cammino di eccedenza $i > 0$, un cammino di eccedenza $i - 1$. A tale scopo, si scompone un cammino nel modo seguente. Preso γ cammino qualsiasi, se ne segue il percorso finché esso non passa sopra l'asse x, e si continua poi fino al punto in cui tocca l'asse x. Si chiamerà D l'ultimo passo di questa porzione di cammino. γ si scomporrà dunque in $\alpha D \beta$. $F(\gamma)$ sarà, per definizione, $\beta D \alpha$.

$\gamma =$



$F(\gamma) =$



Applicando F, La porzione di cammino β viene mantenuta alla stessa altezza, mentre α viene abbassata di una unità: cala quindi di uno l'eccedenza. Questa è dunque la F che si cercava, che è anche una biiezione. Di conseguenza, il numero di cammini di eccedenza n (i cammini di Dyck) è uguale al numero di cammini di eccedenza $n-1$, che è uguale al numero di cammini di eccedenza $n - 2$ e così via, fino a 0. Dunque, partizionare i cammini in base all'eccedenza significa ottenere $n + 1$ insiemi con la stessa cardinalità. Per questo motivo, il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n sarà:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Tale scrittura equivale a:

$$C_n = \binom{2n}{n}\binom{2n}{n-1}.$$

Utilizzando la prima di queste ultime due formule, si può dimostrare facilmente un'altra formula ricorsiva:

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4.$$

Verrà riportato successivamente l'enunciato del teorema di inversione di Lagrange, allo scopo di trovare il coefficiente di z^n nello sviluppo di C^s.
Per la dimostrazione si veda ad esempio [4, Pagina 14].

Teorema di inversione di Lagrange.
Sia $H = H(\lambda)$ un polinomio in λ. Esiste una ed una sola serie formale $A = A(z)$ che soddisfi una equazione del tipo:

$$A(z) = 1 + zH(A(z)).$$

Inoltre, se $G = G(\lambda)$ è un altro polinomio in λ, allora vale:

$$[z^n]G(A(z)) = \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]G'(1+\lambda)(H(1+\lambda))^n, \quad n \geq 1,$$

dove la notazione $[z^n]G(A(z))$ sta ad indicare il coefficiente di z^n nello sviluppo di $G(A(z))$.

Applicando poi su (2.7) questo teorema, con $A(z) = C(z), H(\lambda) = \lambda^2, G(\lambda) = \lambda^s$, si ottiene:

$$[z^n]C^s = \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}](1+\lambda)^{2n+s-1}.$$

Facendo uso della formula del binomio di Newton su $(1+\lambda)^{2n+s-1}$, a seguito di qualche calcolo elementare si giunge alla formula:

$$[z^n]C^s = \frac{s}{2n+s}\binom{2n+s}{n}, \quad (n,s) \neq (0,0). \tag{2.9}$$

Capitolo 3

Enumerazione

Un parametro p relativo ai cammini di Dyck è una funzione:

$$p : \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{D}_n \mapsto \mathbb{N}.$$

I parametri saranno utili a studiare i cammini in relazione alle loro caratteristiche. Alcuni esempi sono il numero di picchi o di valli, l'altezza del primo picco, il numero di passi di ritorno: ognuno di questi è infatti indicato da un numero non negativo.

Sia $\mathbf{A}$ un insieme finito di cammini di Dyck, tutti della stessa semilunghezza. Si può definire il *polinomio di enumerazione* di $\mathbf{A}$ relativo al parametro p:

$$P_{\mathbf{A}}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} t^{p(\alpha)},$$

dove la variabile t fa da 'segnaposto' per il parametro p.
Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono insiemi disgiunti di cammini, allora:

$$P_{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}(t) = P_{\mathbf{A}}(t) + P_{\mathbf{B}}(t).$$

Per semplicità si denoteranno:

$$P_n(t) = P_{\mathbf{D}_n}(t) \qquad \hat{P}_n(t) = P_{\hat{\mathbf{D}}_\mathrm{n}}(t).$$

Si può inoltre definire la *funzione generatrice* per l'enumerazione dei cammini di Dyck:

$$\Omega(t, z) = \sum_{n \geq 0} P_n(t) z^n,$$

dove z fa da 'segnaposto' per la semilunghezza n, e t fa lo stesso per il parametro p.

Questa definizione è molto utile perchè (adattando il parametro p alle proprie esigenze), se si considera il coefficiente di $t^i z^n$, esso rappresenterà il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n per i quali il parametro assume il valore i.
Un discorso analogo vale se si considerano più parametri.

Si può definire poi σ_n:

$$\sigma_n = \sum_{\alpha \in \mathbf{D_n}} p(\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_n = P_n^{'}(1).$$

Una immediata conseguenza è il fatto che la funzione generatrice di $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ è $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{t=1}$.
Se si considera il caso particolare di $p(\alpha) = p \quad \forall \alpha \in \mathbf{D}_n$, allora varrà $\sigma_n = p|\mathbf{D}_n| = pC_n$, dunque $p = \dfrac{\sigma_n}{C_n}$.

Capitolo 4

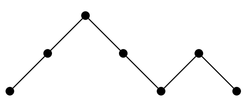
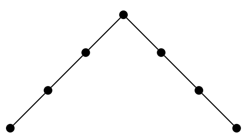
Tipi di parametri

4.1 Parametri additivi

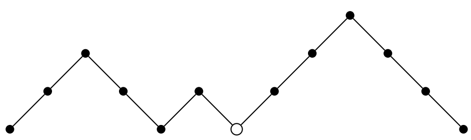
Un parametro p è detto *additivo* se vale:

$$p(\alpha\beta) = p(\alpha) + p(\beta) \qquad \forall \alpha, \beta \quad \text{cammini di Dyck.} \tag{4.1}$$

Alcuni esempi: il numero di picchi, il numero di doppie salite, il numero di passi di ritorno, il numero di sequenze *udd*.
Se si prendono i cammini:

$\alpha =$  $\beta =$ 

la loro concatenazione sarà:

$\alpha\beta =$ 

Se si considera il numero di passi di ritorno, questo è un parametro additivo perchè il punto di concatenazione è il punto di incontro di due passi dei quali il primo è passo di ritorno del primo cammino. Dunque la concatenazione non aggiunge passi di ritorno, ma semplicemente conserva quelli che già sono presenti nei due cammini. Infatti α ne possiede due, β uno, e $\alpha\beta$ tre.

(4.1) implica che, passando ai polinomi di enumerazione:

$$P_{\mathbf{AB}}(t) = P_{\mathbf{A}}(t)P_{\mathbf{B}}(t) \qquad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \quad \text{insiemi finiti di cammini di Dyck.}$$

E di conseguenza, usando anche (2.4):

$$P_n(t) = P_{n-1}(t)\hat{P}_0(t) + P_{n-2}(t)\hat{P}_1(t) + ... + P_1(t)\hat{P}_{n-2}(t) + P_0(t)\hat{P}_{n-1}(t).$$

Poi, passando alle funzioni generatrici:

$$\Omega - 1 = z\Omega\hat{\Omega}. \tag{4.2}$$

4.2 Parametri quasi additivi

p è detto *quasi additivo* se, $\forall \alpha, \beta$ cammini di Dyck,
α contribuisce $p(\alpha)$ e β contribuisce $p(\beta)$ a $p(\alpha\beta)$, e

$$\exists \alpha, \beta : \quad p(\alpha\beta) > p(\alpha) + p(\beta).$$

Esempi: il numero di valli e il numero di *duu*.
Se si devono concatenare due cammini α e β, e si considera il numero di valli, rappresentate per definizione dalla coppia di passi *du*, questo è un parametro quasi additivo perchè, concatenando, vengono ovviamente conservate le valli di α e β, e se ne forma sempre una nuova in corrispondenza del punto di concatenazione, che è il punto centrale di una coppia *du*. Infatti, facendo riferimento alla figura precedente, α possiede una valle, β nessuna, e $\alpha\beta$ due.

4.3 Parametri sinistri

p è detto *parametro sinistro* se, $\forall \alpha, \beta$ cammini di Dyck, vale:

$$p(\alpha\beta) = \begin{cases} p(\alpha) & \text{se } \alpha \neq \epsilon \\ p(\beta) & \text{se } \alpha = \epsilon \end{cases} \tag{4.3}$$

Esempi: il livello del primo picco, il livello della prima valle, la lunghezza della prima discesa.
Se si devono concatenare due cammini α e β, e si considera il livello del primo picco, questo è un parametro sinistro perchè per identificare il primo picco si deve percorrere $\alpha\beta$ partendo da sinistra, quindi si parte da α. Se $\alpha = \epsilon$, esso non ha picchi dunque si procede controllando β, che avrà necessariamente almeno un picco: si dovrà dunque calcolare l'altezza del primo picco di β. Se invece $\alpha \neq \epsilon$, esso avrà necessariamente almeno un picco: si calcolerà dunque l'altezza del primo picco di α. Nella figura precedente, ad esempio, il livello del primo picco di $\alpha\beta$ è uguale al livello del primo picco di α, cioè 2.

Dunque, da (4.3):

$P_{\mathbf{AB}}(t) = |\mathbf{B}|P_{\mathbf{A}}(t) \qquad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}$ insiemi finiti di cammini di Dyck, con $\epsilon \notin \mathbf{A}$.

E di conseguenza, usando anche (2.4):

$$P_n(t) = C_{n-1}\hat{P}_0(t) + ... + C_0\hat{P}_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

$$\Omega - 1 = zC(z)\hat{\Omega}. \tag{4.4}$$

Capitolo 5

Enumerazione con vari parametri

5.1 Numero di picchi

Esso è un parametro additivo.
Elevando resta invariato, tranne nel caso di ϵ che diventa ud:

$$\hat{P}_n = \begin{cases} t & \text{se } n = 0 \\ P_n & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega} = \Omega + t - 1.$$

Usando (4.2) e sostituendo, si può togliere la dipendenza da $\hat{\Omega}$:

$$z\Omega^2 - (1 + z - tz)\Omega + 1 = 0. \tag{5.1}$$

Verrà di seguito affrontato l'argomento dei numeri di Narayana, strettamente connessi con il parametro numero di picchi.

La funzione e i numeri di Narayana

Si definisce il *numero di Narayana* $\nu_{n,k}$ come il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n con $k + 1$ picchi. Cioè, se Ω è la funzione generatrice per il numero di picchi:

$$\nu_{n,k} = [t^{k+1} z^n]\Omega, \quad \text{e} \quad [t^0 z^0]\Omega = 1. \tag{5.2}$$

La funzione generatrice per la successione dei numeri di Narayana è la seguente serie formale:

$$\rho(t, z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \nu_{n,k} t^k z^n,$$

ed è chiamata *funzione di Narayana*. Questo equivale a dire che:

$$\nu_{n,k} = [t^k z^n]\rho. \tag{5.3}$$

Dunque, per (5.2) e (5.3):

$$\begin{aligned}\nu_{n,k} = [t^k z^n]\rho = [t^{k+1} z^n]\Omega, &\quad \text{e } \Omega \text{ ha termine noto uguale ad 1} \\ \Rightarrow &\quad 1 + t\rho = \Omega. \end{aligned}\tag{5.4}$$

Mettendo a sistema questo risultato con l'equazione (5.1) soddisfatta dalla funzione generatrice del numero di picchi, si ottiene la versione implicita della funzione di Narayana:

$$(1+\rho)(1+t\rho)z = \rho, \quad \rho(t,0) = 0. \tag{5.5}$$

Dunque la sua versione esplicita sarà:

$$\rho(t,z) = \frac{1 - z - tz - \sqrt{1 - 2z + z^2 - 2tz - 2tz^2 + t^2z^2}}{2tz}. \tag{5.6}$$

Da qui si ricava:

$$\rho(\frac{1}{t}, tz) = t\rho(t,z). \tag{5.7}$$

Una immediata conseguenza di (2.8) e (5.6) fornisce una relazione tra funzione di Catalan e Narayana (con $t = 1$):

$$\rho(1,z) = C(z) - 1. \tag{5.8}$$

A questo punto si può utilizzare il teorema di inversione di Lagrange a partire da (5.5), ponendo:

$$A(z) = 1 + \rho = 1 + z(1+\rho)(1+t\rho),$$

$$H(\lambda) = \lambda((\lambda - 1)t + 1) \quad \text{e} \quad G(\lambda) = (\lambda - 1)^m,$$

da cui $\quad [t^k z^n]\rho^m = \dfrac{m}{n}[\lambda^{n-1} t^k](1+\lambda)^n(1+\lambda t)^n.$

Si può ora utilizzare la formula del binomio di Newton per sviluppare le potenze. Si ottiene così un sistema di due equazioni (una per imporre il coefficiente di t uguale a k ed una per imporre il coefficiente di z uguale ad n) e si giunge a questa conclusione:

$$[t^k z^n]\rho^m = \begin{cases} \dfrac{m}{n}\dbinom{n}{k}\dbinom{n}{k+m} & \text{se } n \geq 1,\ m \geq 1 \\ 1 & \text{se } m = n = k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5.9}$$

Si possono similmente ricavare anche le seguenti formule:

$$[t^k z^n](1+\rho)^m = \begin{cases} \dfrac{m}{n}\dbinom{n}{k}\dbinom{n+m-1}{k+m} & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = k = 0 \\ 0 & \text{se } n = 0,\ k \geq 1 \end{cases} \tag{5.10}$$

$$[t^k z^n](1+t\rho)^m = \begin{cases} \dfrac{m}{n}\dbinom{n}{k}\dbinom{n+m-1}{k-1} & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = k = 0 \\ 0 & \text{se } n = 0,\ k \geq 1 \end{cases} \tag{5.11}$$

Da (5.9), con $m = 1$, si scrive una formula per i numeri di Narayana:

$$\nu_{n,k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}.$$

Numero di doppie salite

Si osservi che, percorrendo un cammino di Dyck di semilunghezza n, ogni volta che si compie una salita u, il passo successivo può essere u, e in questo caso uu va a formare una doppia salita, oppure d, e in tale caso ud va a formare un picco. Dunque il numero di doppie salite sommato al numero di picchi dà come risultato n.

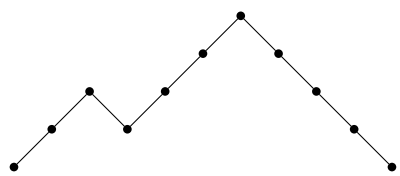


Figura 5.1: Un 5-cammino con 3 doppie salite e 2 picchi

Di conseguenza, usando (5.4) e (5.7):

$$\Omega_{\text{num.doppie salite}}(t,z) = \Omega_{\text{num.picchi}}(\frac{1}{t}, tz) = 1 + \rho(t,z).$$

Numero di valli

Si osservi che per ogni cammino di Dyck il numero di valli è uno in meno rispetto al numero di picchi, dunque:

$$\Omega_{\text{num.valli}}(t,z) = 1 + \rho(t,z) = \Omega_{\text{num.doppie salite}}(t,z). \tag{5.12}$$

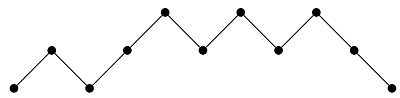
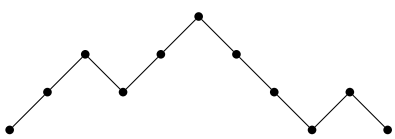
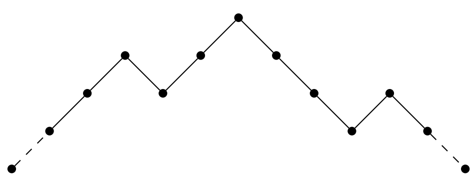


Figura 5.2: Un cammino con 3 valli e 4 picchi

5.2 Numero di picchi bassi e picchi alti

Un *picco basso* si trova al livello 1, mentre un *picco alto* si trova ad un livello superiore al livello 1. Sono entrambi parametri additivi.
I primi verranno rappresentati dal parametro t e i secondi da s (ogni volta che si avrà a che fare con due parametri nello stesso momento, si userà sempre questa notazione).
Elevando, i picchi bassi divengono alti, quelli alti restano tali e nel caso di ϵ comparirà soltanto un picco basso.
Ad esempio, nel caso seguente α possiede 1 picco basso e 2 alti, mentre in $\hat{\alpha}$ ci sono 3 picchi alti e nessuno basso:

$\alpha =$  $\hat{\alpha} =$ 

Dunque:

$$\hat{P}_n(t,s) = \begin{cases} t & \text{se } n = 0 \\ P_n(s,s) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t,s,z) = \Omega(s,s,z) + t - 1.$$

Da qui, utilizzando (4.2):

$$\Omega(t,s,z) - 1 = z\Omega(t,s,z)(\Omega(s,s,z) + t - 1).$$

$\Omega(s,s,z)$ ha i rappresentanti uguali per bassi ed alti picchi, dunque è la funzione generatrice del numero totale di picchi, cioè:

$$\Omega(s,s,z) = \Omega_{\text{num.picchi}}(s,z) = 1 + s\rho(s,z).$$

Sostituendo, risulta che:

$$\Omega_{\text{num.picchi bassi,alti}}(t,s,z) = \frac{1}{1 - z(t + s\rho(s,z))}. \tag{5.13}$$

Dopo alcune manipolazioni, si può fare uso della formula del binomio di Newton e ci si può ricondurre al caso (5.9) per scrivere la seguente formula, così da poter determinare il numero di n-cammini con i picchi bassi e j picchi alti:

$$[t^i s^j z^n]\Omega = \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=i+1}^{min(i+j,n-j)} \frac{h-i}{n-h}\binom{h}{i}\binom{n-h}{j}\binom{n-h}{i+j-h} & \text{se } i+j<n,\ j>0 \\ 1 & \text{se } i=n, j=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5.2.1 Numero di picchi bassi

Per trovarne la funzione generatrice, è sufficiente 'eliminare' il segnaposto relativo ai picchi alti nella formula (5.13), ponendo dunque $s = 1$, ed utilizzando (5.8):

$$\Omega_{\text{num.picchi bassi}}(t,z) = \frac{1}{1 - (t + C - 1)z}. \tag{5.14}$$

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{t=1} = C - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_n = C_n, \quad n \geq 1.$$

Per trovare il numero di n-cammini con k picchi bassi:

$$[t^k z^n]\Omega = \sum_{h=0}^{\frac{n-k}{2}} \frac{h}{n-k-h}\binom{k+h}{h}\binom{2n-2k-2h}{n-k}.$$

Usando invece su (5.14) la definizione (2.7):

$$[t^k]\Omega = \frac{z^k}{(1 - z^2C^2)^{k+1}}. \tag{5.15}$$

Per fare un'ultima osservazione sulla funzione generatrice dei picchi bassi, si affronta l'argomento della funzione di Fine.

La funzione e i numeri di Fine

L'*n-esimo numero di Fine* F_n è, per definizione, il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n senza picchi bassi; si veda a esempio [1].
Dunque, se Ω è la funzione generatrice del numero di picchi bassi:

$$F_n = [t^0 z^n]\Omega. \tag{5.16}$$

La funzione generatrice per la successione dei numeri di Fine è la seguente serie formale:

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n,$$

ed è chiamata *funzione di Fine*. Dunque, $F_n = [z^n]F$. Di conseguenza, da (5.16):

$$F(z) = [t^0]\Omega. \tag{5.17}$$

Direttamente da (5.15) e (5.17), si evince che:

$$F = \frac{C}{1 + zC} \qquad \text{oppure} \qquad F = \frac{1}{1 - z^2C^2}, \tag{5.18}$$

e la seconda di queste formule si ottiene anche grazie a (2.7).
$F = F(z)$ si può scrivere anche nel seguente modo, utilizzando (2.8):

$$F(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{z(3 - \sqrt{1 - 4z})}. \tag{5.19}$$

Da (5.18) si avrà inoltre:

$$F = \sum_{i \geq 0} (-1)^i z^i C^{i+1} \qquad \text{e} \qquad F = \sum_{i \geq 0} z^{2i} C^{2i}. \tag{5.20}$$

Dall'ultimo dei due risultati si evince che F_n dovrà essere il coefficiente di z^{n-2i} in C^{2i}. Facendo uso di (2.9), si può ottenere:

$$F_n = \sum_{i \geq 0} \frac{i}{n - i} \binom{2n - 2i}{n}.$$

Allo stesso modo, operando sul primo risultato di (5.20), si otterrà:

$$F_n = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (i + 1) \binom{2n - i}{n}.$$

Successivamente, da (5.18) si ricava:

$$2F + zF = 1 + C,$$

da cui, per l'identità delle corrispondenti serie formali, si ottiene la relazione di ricorrenza:

$$2F_n + F_{n-1} = C_n.$$

Facendo infine una somma telescopica, si giunge alla seguente formula che lega i numeri di Catalan e di Fine:

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \frac{1}{2i} C_{n-i}.$$

5.2.2 Numero di picchi alti

Operando in maniera analoga a prima, questa volta si pone $t = 1$ in (5.13), si rinomina $s = t$ e si usa infine la definizione (5.5):

$$\Omega_{\text{num.picchi alti}}(t, z) = 1 + \rho(t, z) = \Omega_{\text{num.doppie salite}}.$$

5.3 Numero di picchi e numero di passi di ritorno

Entrambi sono parametri additivi. Elevando, il numero di picchi resta invariato e risulta esserci un unico passo di ritorno, cioè quello di fine cammino:

$$\hat{P}_n(t, s) = \begin{cases} ts & \text{se } n = 0 \\ sP_n(t, 1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t, s, z) = ts - s + s\Omega(t, 1, z).$$

Unendo questo e (4.2), si avrà:

$$\Omega(t, s, z) - 1 = sz\Omega(t, s, z)(t - 1 + \Omega(t, 1, z)).$$

Essendo $\Omega(t, 1, z)$ la funzione generatrice del numero di picchi, varrà, per (5.4):

$$\Omega(t, 1, z) = 1 + t\rho(t, z).$$

Sostituendola:

$$\Omega(t, s, z) = \frac{1}{1 - tsz(1 + \rho(t, z))}. \tag{5.21}$$

Inoltre, come nei casi già affrontati, e per le stesse motivazioni, si può determinare il numero di n-cammini con i picchi e j passi di ritorno:

$$[t^i s^j z^n]\Omega = \begin{cases} \frac{j}{i}\binom{n-1}{i-1}\binom{n-1-j}{i-j} & \text{se } i > 0,\, j < n \\ 1 & \text{se } i = j = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5.3.1 Numero di passi di ritorno

Si ponga $t = 1$ in (5.21) e si rinomini $s = t$:

$$\Omega(t, z) = \frac{1}{1 - tzC}. \tag{5.22}$$

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{t=1} = zC^3.$$

$$\sigma_n = \frac{3}{2n+1}\binom{2n+1}{n-1}, \qquad \frac{\sigma_n}{C_n} = \frac{3n}{n+2}.$$

Il numero di n-cammini con k passi di ritorno sarà:

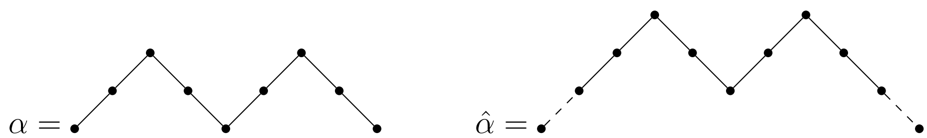
$$[t^k z^n]\Omega = \frac{k}{2n-k}\binom{2n-k}{n}. \tag{5.23}$$

5.4 Numero di picchi e altezza del primo picco

Il primo è un parametro additivo, dunque si usa (4.2), il secondo è un parametro sinistro, dunque si usa (4.4):

$$\Omega(t, s, z) - 1 = z\Omega(t, 1, z)\hat{\Omega}(t, s, z).$$

Elevando, il numero di picchi non varia e l'altezza del primo picco aumenta di 1.
Ad esempio, nel caso seguente α possiede 2 picchi e il primo ha altezza 2, $\hat{\alpha}$ ne continua a possedere 2 ma il primo picco ha altezza 3:



Dunque:

$$\hat{P}_n(t,s) = \begin{cases} ts & \text{se } n = 0 \\ sP_n(t,s) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t,s,z) = ts - s + s\Omega(t,s,z),$$

$$\Omega(t,s,z) - 1 = sz\Omega(t,1,z)[t - 1 + \Omega(t,s,z)].$$

Ma, essendo $\Omega(t,1,z)$ la funzione generatrice dei picchi,
$\Omega(t,1,z) = 1 + t\rho(t,z)$, quindi:

$$\Omega(t,s,z) = 1 + \frac{ts\rho(t,z)}{1 + (1-s)\rho(t,z)}. \tag{5.24}$$

$$[s^j]\Omega = \frac{t\rho^j}{(1+\rho)^j} = tz^j(1+t\rho)^j.$$

Infine, usando (5.11), si può determinare il numero di n-cammini con i picchi e primo picco di altezza j:

$$[t^i s^j z^n]\Omega = \begin{cases} \dfrac{j}{n}\dbinom{n}{i-1}\dbinom{n-1-j}{i-2} & \text{se } i \geq n,\ j \geq n \\ 1 & \text{se } i = 1, j = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5.4.1 Altezza del primo picco

Ponendo $t = 1$ in (5.24) e rinominando $s = t$:

$$\Omega_{\text{alt.primo picco}}(t,z) = \frac{1}{1 - tzC} = \Omega_{\text{num.passi ritorno}}(t,z). \tag{5.25}$$

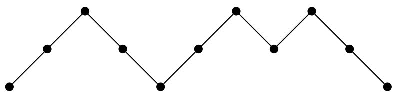
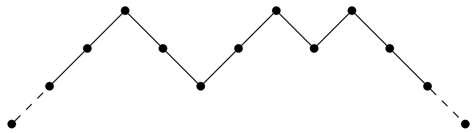
5.5 Numero di valli basse e valli alte

Una *valle bassa* si trova al livello 0, mentre una *valle alta* si trova ad un livello superiore al livello 0.
La prima è un parametro quasi additivo: la concatenazione causa sempre la nascita di una ulteriore valle bassa.
La seconda è un parametro additivo.
Da (2.3) segue:

$$P_n = tP_{n-1}\hat{P}_0 + tP_{n-2}\hat{P}_1 + ... + P_0\hat{P}_{n-1},$$

$$\Omega - 1 = tz\Omega\hat{\Omega} + (1-t)z\hat{\Omega}.$$

Elevando, tutte le valli continuano ad essere o diventano valli alte: $\hat{\Omega}(t,s,z) = \Omega(s,s,z)$.
Ad esempio, nel caso seguente α possiede 1 valle bassa ed 1 alta, mentre in $\hat{\alpha}$ ci sono 2 valli alte e nessuna bassa:

$\alpha =$  $\hat{\alpha} =$ 

Di conseguenza:

$$\Omega(t,s,z) - 1 = tz\Omega(t,s,z)\Omega(s,s,z) + (1-t)z\Omega(s,s,z).$$

Ma, in quanto funzione generatrice del numero totale di valli, $\Omega(s,s,z) = 1 + \rho(s,z)$, dunque:

$$\Omega(t,s,z) = 1 + \frac{z(1+\rho(s,z))}{1 - tz(1+\rho(s,z))}. \tag{5.26}$$

Quindi il numero di n-cammini con i valli basse e j valli alte sarà pari a:

$$[t^i s^j z^n]\Omega = \frac{i+1}{n}\binom{n}{i+j+1}\binom{n-i-2}{j}, \quad i \neq n-1.$$

5.5.1 Numero di valli basse

Si pone $s = 1$ in (5.26):

$$\Omega_{\text{num.valli basse}}(t,z) = 1 + \frac{zC}{1 - tzC}.$$

Il numero di n-cammini con k valli basse sarà:

$$[t^k z^n]\Omega = \frac{k+1}{2n-k-1}\binom{2n-k-1}{n}.$$

Si nota che in un cammino di Dyck il numero di valli basse è uguale al numero di passi di ritorno meno 1. Dunque si sarebbero potute ricavare le formule sopra scritte da (5.22).

5.5.2 Numero di valli alte

Si pone $t = 1$ in (5.26) e si rinomina $s = t$:

$$\Omega_{\text{num.valli alte}}(t, z) = \frac{1}{1 - z(1 + \rho(t, z))}.$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{t=1} = \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z})^5}{32z^2\sqrt{1 - 4z}} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_n = \binom{2n - 1}{n - 3}.$$

Usando (5.10) si determina il numero di n-cammini con k valli alte:

$$[t^k z^n]\Omega = \begin{cases} \sum_{h=1}^{n-k-1} \frac{h}{n-h}\binom{n-h}{k}\binom{n-1}{k+h} & \text{se } k \neq 0 \\ 2^{n-1} & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Si nota inoltre che numero di valli alte è uguale al numero di picchi meno il numero di passi di ritorno: dunque si sarebbe potuta ricavare la funzione generatrice da (5.21) ponendo $s = \frac{1}{t}$.

5.6 Numero di picchi prima e dopo il primo passo di ritorno

Naturalmente, concatenando due cammini di Dyck α e β, se si considera il cammino risultante $\alpha\beta$ e si vuole effettuare il conteggio del numero di picchi prima e dopo il primo passo di ritorno, per il cammino β si farà soltanto il conteggio dei picchi successivi al primo passo di ritorno, in quanto appunto, a seguito della concatenazione, prima di β ci sarà per forza almeno un passo di ritorno (nel punto di concatenazione c'è sicuramente). A causa di ciò e di (2.3):

$$P_{\hat{\mathbf{D}}_q \mathbf{D}_{n-1-q}}(t, s) = \hat{P}_q(t, s) P_{n-1-q}(s, s), \quad 0 \leq q \leq n - 1,$$

$$\Omega(t, s, z) - 1 = z\hat{\Omega}(t, s, z)\Omega(s, s, z).$$

Elevando, c'è solo il passo di ritorno finale: tutti i picchi sono precedenti al primo ed unico passo di ritorno:

$$\hat{P}_n(t, s) = \begin{cases} t & \text{se } n = 0 \\ P_n(t, t) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t, s, z) = t - 1 + \Omega(t, t, z),$$

$$\Omega(t, s, z) = 1 + z\Omega(s, s, z)(t - 1 + \Omega(t, t, z)).$$

Ma $\Omega(t,t,z)$ e $\Omega(s,s,z)$ sono funzioni generatrici dei picchi, cioè
$\Omega(t,t,z) = 1 + t\rho(t,z)$ e $\Omega(s,s,z) = 1 + t\rho(s,z)$, dunque:

$$\Omega(t,s,z) = 1 + tz(1+\rho(t,z))(1+s\rho(s,z)).$$

Da qui, con $s = 1$ ottengo Ω_1 funzione generatrice del numero di picchi precedenti al primo passo di ritorno, e con $t = 1$ si trova Ω_2 funzione generatrice relativa al numero di picchi successivi al primo passo di ritorno:

$$\Omega_1(t,z) = 1 + tzC(z)(1+\rho(t,z)),$$

$$\Omega_2(t,z) = 1 + zC(z)(1+t\rho(t,z)).$$

5.7 Numero di discese di ritorno di lunghezza dispari e pari

Si utilizzano anche due parametri ausiliari: i, j. Il primo farà da esponente al suo 'rappresentante' x, e il secondo ad y. Il loro comportamento sarà:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{se l'ultima discesa ha lunghezza dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

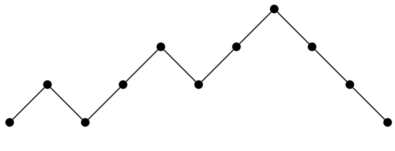
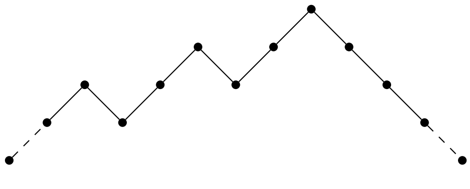
$$j = \begin{cases} 1 & \text{se l'ultima discesa ha lunghezza pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I parametri numero di discese di ritorno di lunghezza dispari e pari sono entrambi additivi, dunque:

$$P_{\mathbf{D}_q\hat{\mathbf{D}}_{n-1-q}}(t,s,x,y) = P_q(t,s,1,1)\hat{P}_{n-1-q}(t,s,x,y),$$

$$\Omega(t,s,x,y,z) - 1 = z\Omega(t,s,1,1,z)\hat{\Omega}(t,s,x,y,z).$$

Elevando, resta soltanto la discesa finale che muta la sua parità.
Ad esempio, nel caso seguente α possiede due discese di ritorno, entrambe di lunghezza dispari, mentre $\hat{\alpha}$ ne possiede soltanto una, di lunghezza pari:

$\alpha =$  $\hat{\alpha} =$ 

Dunque:

$$\hat{P}_n(t,s,x,y) = \begin{cases} tx & \text{se } n = 0 \\ P_n(1,1,sy,tx) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t,s,x,y,z) = tx - 1 + \Omega(1,1,sy,tx,z),$$

$$\Omega(t,s,x,y,z) - 1 = z\Omega(t,s,1,1,z)(tx - 1 + \Omega(1,1,sy,tx,z)).$$

Si definisce $\Gamma(t,s,z) = \Omega(t,s,1,1,z)$ per eliminare i parametri ausiliari e poi, a seguito di alcune manipolazioni, si ricava:

$$\Gamma(t,s,z) = \frac{1 - z^2C^2}{1 - tz - sz^2C - z^2C^2}. \tag{5.27}$$

5.7.1 Numero di discese di ritorno di lunghezza dispari

Si pone $s = 1$ in (5.27) per trovare Ω:

$$\Omega(t,z) = \frac{1 + zC}{1 + z - tzC},$$

da cui si ricava:

$$[t^k]\Omega = \frac{(1 + zC)z^kC^k}{(1 + z)^{k+1}}.$$

Poi si può derivare ed utilizzare (5.18):

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{t=1} = \frac{F - 1}{z} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_n = F_{n+1}.$$

5.7.2 Numero di discese di ritorno di lunghezza pari

Si pone $t = 1$ in (5.27) e si calcola Ω:

$$\Omega(t,z) = \frac{1 + zC}{1 - tz^2C^2},$$

$$[t^k]\Omega = (1 + zC)z^{2k}C^{2k}.$$

Poi si deriva e si usa (5.18):

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{t=1} = \frac{F - 1}{z} - F + 1 - zF,$$

$$\text{da cui} \quad \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ F_{n+1} - F_n - F_{n-1} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

5.8 Numero di *duu* e *ddu*

Si utilizza anche il parametro ausiliario i, che fa da esponente al suo 'rappresentante' x. Il suo comportamento è:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{se il cammino inizia con } uu \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I parametri numero di duu e numero di ddu sono entrambi quasi additivi. Concatenando, per $j \neq n-1$ si aggiunge sempre una coppia du, che può diventare duu nel caso in cui il secondo cammino inizi per uu. L'aggiunta di ddu è invece sempre verificata in quanto il primo cammino finisce ovviamente per dd visto che è stata compiuta una elevazione.

$$P_{\hat{\mathbf{D}}_j\mathbf{D}_{n-1-j}}(t,s,x) = \begin{cases} P_{n-1}(t,s,t) & \text{se } j = 0 \\ s\hat{P}_j(t,s,x)P_{n-1-j}(t,s,t) & \text{se } 1 \leq j \leq n-2 \\ \hat{P}_{n-1}(t,s,x) & \text{se } j = n-1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} s\hat{P}_0P_0(t,s,t) + (1-s)\hat{P}_0 & \text{se } n = 1 \\ (1-s)P_{n-1}(t,s,t) + s\sum_{j=0}^{n-1}\hat{P}_jP_{n-1-j}(t,s,t) + (1-s)\hat{P}_{n-1} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Omega - 1 = (1-s)(\Omega(t,s,t,z)-1) + (1-s)z\hat{\Omega} + sz\hat{\Omega}\Omega(t,s,t,z). \tag{5.28}$$

Elevando, non si aggiungono né nuovi duu, né nuovi ddu:

$$\hat{P}_n(t,s,x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ xP_n(t,s,1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t,s,x,z) = 1 - x + x\Omega(t,s,1,z).$$

Da qui e (5.28):

$$\Omega - 1 = (1-s)z(\Omega(t,s,t,z)-1) + z(1-s+s\Omega(t,s,t,z))(1-x+x\Omega(t,s,1,z)).$$

Si può definire $\Gamma(t,s,z) = \Omega(t,s,1,z)$ per eliminare il parametro ausiliario. Dopo qualche passaggio, si giunge all'equazione:

$$tsz\Gamma^2 - (1-2z+z^2-tz^2-sz^2+2tsz+tsz^2)\Gamma + 1 - z + z^2 + tsz - tz^2 - sz^2 + tsz^2 = 0,$$

che è simmetrica in t ed s.
Ponendo $\Phi(t,z) = \Gamma(t,t,z)$, si ottiene la funzione generatrice del numero di

duu e *ddu*.
A partire dall'ultima equazione scritta, usando la definizione (5.5) si ottiene:

$$\Phi(t,z) = 1 + z(1+\rho(t,z))^2.$$

Tramite (5.10):

$$[t^k z^n]\Phi = \frac{2}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{k+2}.$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{t=1} = \frac{(1-\sqrt{1-4z})^4}{8z\sqrt{1-4z}} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_n = 2\binom{2n-2}{n-3}.$$

5.8.1 Numero di *duu*

Dal caso precedente, con $s = 1$ si ottiene:

$$tz\Omega^2 - (1-2z+2tz)\Omega + 1 - z + tz = 0.$$

$$[t^k z^n]\Omega = 2^{n-2k-1}C_k\binom{n-1}{2k}.$$

Visto il comportamento simmetrico dei due parametri, σ_n sarà la metà di quello del caso precedente:

$$\sigma_n = \binom{2n-2}{n-3}.$$

Capitolo 6

Equidistribuzione

Due parametri p_1, p_2 si dicono *equidistribuiti* se per tutti gli interi positivi n, k vale:

$$|\{\pi \in \mathbf{D}_n : p_1(\pi) = k\}| = |\{\pi \in \mathbf{D}_n : p_2(\pi) = k\}|.$$

Per esempio, il numero di valli e il numero di doppie salite sono parametri equidistribuiti. Infatti, da (5.12) si nota che possiedono la medesima funzione di distribuzione $\Omega(t, z) = 1 + \rho(t, z)$; utilizzando la formula (5.10) con $m = 1$, si ricava il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n con k valli o con k doppie salite:

$$\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}.$$

Anche l'altezza del primo picco e il numero di passi di ritorno sono parametri equidistribuiti. Infatti, da (5.25) si nota che possiedono la medesima funzione di distribuzione $\Omega(t, z) = \dfrac{1}{1 - tzC(z)}$; da (5.23) si ha che il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n con k passi di ritorno o k uguale all'altezza del primo picco è:

$$\frac{k}{2n-k}\binom{2n-k}{n}.$$

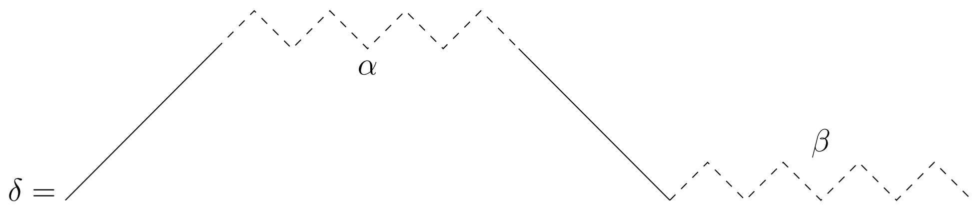
Si vuole ora trovare una dimostrazione combinatoria di queste due equidistribuzioni.
Si definisce la seguente mappa:

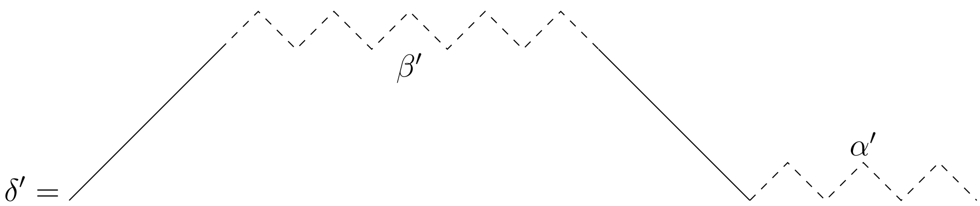
$$(\quad)' : \quad \mathbf{D}_n \to \mathbf{D}_n$$

in maniera induttiva. Si pone $\epsilon' = \epsilon$.
Prendendo poi un cammino $\delta \neq \epsilon$, lo si può scomporre con la decomposizione unica del primo ritorno, $\delta = u\alpha d\beta$; si definisce poi:

$$\delta' = u\beta' d\alpha'.$$

Se ne può vedere una rappresentazione in figura:





Analisi dei primi casi:

$$(ud)' = (u\epsilon d\epsilon)' = u\epsilon' d\epsilon' = u\epsilon d\epsilon = ud, \quad (uudd)' = udud, \quad (udud)' = uudd.$$

e così via, ogni volta sfruttando la conoscenza dei casi precedenti.
La mappa $(\quad)'$ è un'involuzione perchè:

$$\epsilon'' = \epsilon, \quad (u\alpha d\beta)'' = (u\beta' d\alpha')' = u\alpha'' d\alpha'' = u\alpha d\beta.$$

Si indichino ora per semplicità: d=numero di doppie salite, v=numero di valli, h=altezza del primo picco, r=numero di passi di ritorno.
Si può dimostrare che, per $\delta \in \mathbf{D}_n$:

$$d(\delta) = v(\delta'), \quad h(\delta) = r(\delta').$$

Per induzione: per $n = 0$ vale; si assume che valga per cammini di semilunghezza $\leq n$. Ora è da provare per n.
Se $\quad \delta \in \mathbf{D}_n, \quad n \geq 1, \quad \delta = u\alpha d\beta, \quad \delta' = u\beta' d\alpha', \quad$ allora:

$$d(\delta) = \begin{cases} d(\beta) & \text{se } \alpha = \epsilon \\ 1 + d(\alpha) + d(\beta) & \text{se } \alpha \neq \epsilon \end{cases}$$

$$v(\delta') = \begin{cases} v(\beta') & \text{se } \alpha = \epsilon \\ v(\beta') + 1 + v(\alpha') & \text{se } \alpha \neq \epsilon \end{cases}$$

$$h(\delta) = 1 + h(\alpha)$$

$$r(\delta') = 1 + r(\alpha')$$

Da qui si arriva direttamente alla tesi, perchè si possono usare le ipotesi di induzione su α, β, α', β', in quanto sono di semilunghezza sicuramente inferiore ad n.

Per l'involuzione $(\quad)'$, $u\alpha d\beta$ è punto fisso soltanto se $\beta = \alpha'$, perchè:
$(u\alpha d\alpha')' = u\alpha'' d\alpha' = u\alpha d\alpha'$.
Dunque, se n dispari esistono $C_{\frac{n-1}{2}}$ punti fissi, mentre per n pari nessuno.

Bibliografia

[1] Deutsch, Emeric; Shapiro, Louis. A survey of the Fine numbers. Discrete Math. 241 (2001), no. 1-3, 241-265.

[2] Deutsch, Emeric. Dyck path enumeration. Discrete Math. 204 (1999), no. 1-3, 167-202.

[3] Deutsch, Emeric. An involution on Dyck paths and its consequences. Discrete Math. 204 (1999), no. 1-3, 163-166.

[4] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55 (1972).

[5] Callan, David. Some Identities for the Catalan and Fine Numbers. arXiv:math/0502532v1 (2005).